

**СКРЫТАЯ ОСОБЕННОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ОДНОЙ ПЛОСКОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ**

Балочная ферма обнаруживает мгновенную изменяемость при нечетном числе панелей. Показано распределение возможных скоростей узлов, допустимое при нечетном и недопустимое при четном числе панелей. Находится аналитическое выражение прогиба при тестовом нагружении середины пролета сосредоточенной силой. Схема фермы сравнивается с фермой с треугольной решеткой. Асимптотика прогиба исследуется при увеличении числа панелей. Используется метод индукции и система компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: ферма, мгновенная изменяемость, Maple, индукция, асимптотика, прогиб

Для выявления основных характеристик конструкции не обязательно рассчитывать ее точную модель, учитывающую различные структурные особенности, статическую неопределимость, свойственную реальным системам. Главные характеристики фермы (жесткость, прочность, устойчивость), распределение усилий по стержням и оптимизация могут быть замечены и в простейшей модели. Так, в [1], например, предлагается и успешно реализуется простая стержневая модель. Плоские балочные фермы с необычными решетками, представляющие собой графы, близкие к полным или полным двудольным (нижний пояс – одна доля, верхний – другая), изучаются в [2]. Применяются методы топологии к оптимизации статических и динамических характеристик фермы. В данной работе на простой модели фермы с крестообразной решеткой показано, во-первых, что ферма с такой схемой не работоспособна при нечетном числе панелей, во-вторых, методом индукции с применением системы Maple [3] получена формула для прогиба фермы для произвольного четного числа панелей. Ранее чувствительность пространственной фермы к четности числа элементов была замечена в [4]. Алгоритм, используемый в расчете, ранее применялся в [5-7].

Проблема

Для расчета усилий в стержнях обычных балочных или консольных ферм применяется или метод Риттера, или метод последовательного вырезания узлов. В первом случае необходимо существование сечения Риттера, пересекающего три стержня и делящего ферму на две части, во втором – узел, к которому подходят два стержня с неизвестными усилиями (с этого узла начинается последовательный расчет). В тех же случаях статически определимых ферм, где не проходит ни первый метод, ни второй (а именно такая ферма будет рассмотрена ниже), необходимо составлять полную систему уравнений равновесия всех узлов. При этом неотвратимо возникает проблема накопления ошибок при решении системы линейных уравнений с большим числом неизвестных. В фермах, распространенных в строительстве и машиностроении, как правило, число стержней бывает большим или очень большим. Отсюда, по-настоящему точного решения ожидать не приходится. Современные системы компьютерной математики (Maple, Mathematics и др.) позволяют находить решение в символьном виде – «проклятие размерности» здесь не действует. Но действует другое, не характерное для численных методов «проклятие». Скорость символьных преобразований невелика, и ферму с числом стержней более 100 рассчитать в символьной (точной) форме уже затруднительно. Однако, если ферма регулярная, т. е. она состоит из повторяющихся элементов, например, панелей, решение может быть получено индуктивным методом [5-7]. Решая последовательно задачу об усилиях в стержнях для различного числа панелей, находим закономерность ответа, что позволяет найти решение для произвольного n , обойдя, таким образом, все трудности, связанные с большими числами.

Чет или нечет?

Рассмотрим фермы с крестообразной решеткой (рис. 1). Численный расчет фермы для различных нагрузок сразу поставил в тупик. В одних случаях вычисления давали определенный и предсказуемый результат, в других — нет. Было замечено, что определитель матрицы уравнений равновесия стремился к нулю при любых нагрузках и размерах при нечетном числе панелей. Поэтому, прежде чем рассчитывать эту ферму, ответим на простой вопрос. Чем отличаются фермы на рис. 1 и рис. 2? На первый взгляд ничем, кроме числа панелей. Схема решетки и опоры одни и те же. У той и другой фермы число шарниров соответствует удвоенному числу стержней, что необходимо для статической определимости. В первой ферме 16 шарниров и 32 стержня (вместе с четырьмя опорными), во второй – 18 и 36 соответственно.

Отметим также, что расчет фермы с такой решеткой при любой нагрузке методом Риттера невозможен, а для получения усилия хотя бы в одном стержне методом вырезания узлов необходимо вырезать все шарниры, так как нет ни одного узла, к которому подходят только два стержня с неизвестными усилиями. Единственно, что можно определить, не составляя всю систему уравнений равновесия узлов, так это вертикальные составляющие в опорах, но для расчета этого, конечно мало.

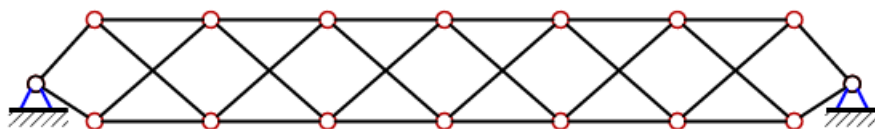


Рис. 1. $n=6$.

Однако первая ферма (рис. 1) представляет собой работоспособную конструкцию, и усилия в ее стержнях могут быть рассчитаны при любой нагрузке. Усилия во второй ферме (рис. 2) найти нельзя, определитель матрицы системы уравнений равновесия узлов равен нулю. Ферма кинематически изменяема, хотя известных признаков (параллельные или пересекающиеся в одной точке стержни) здесь нет. Как выяснилось, кинематическая изменяемость связана с четностью числа панелей. Для нечетного числа панелей возможно поле скоростей. На рисунке 3 это поле показано при $n = 1$. Возможные скорости шарниров удовлетворяют условию равенства проекций на стержень, соединяющий эти шарниры. Попытка построения скоростей для четного числа панелей приводит к противоречию именно этого необходимого кинематического условия (теорема Грасгофа). Введем обозначение $n = 2k$, и все дальнейшие рассуждения будем вести для четного числа панелей.

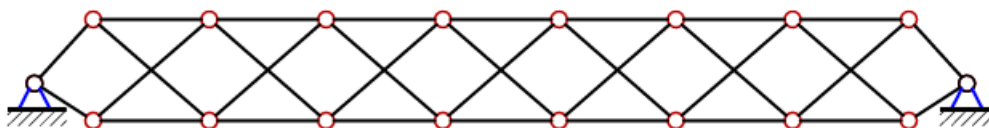


Рис. 2. $n=7$.

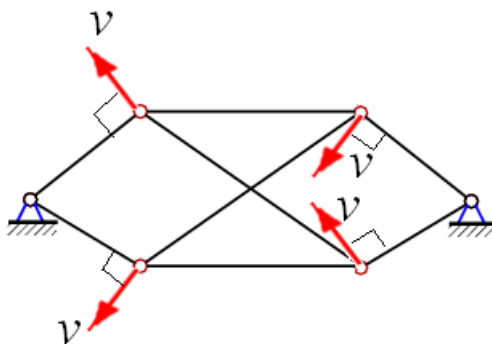


Рис. 3. Возможные скорости при $n=1$.

Расчет

Ставится задача получения аналитического выражения для прогиба фермы при произвольном числе панелей. Следуя [5-7], используем алгоритм кодировки данных геометрии фермы в системе Maple (можно применить и любую другую систему, например, бесплатную систему Maxima [8]).

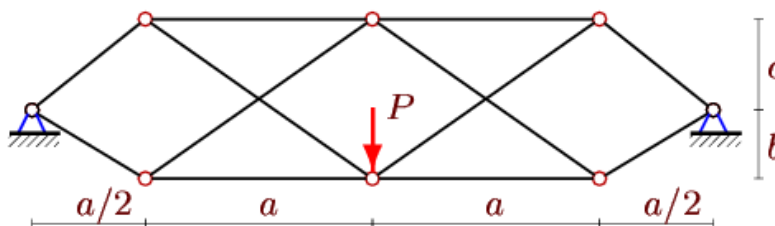


Рис. 4. $n=2$.

При $i=1, \dots, n+1$ задаем координаты узлов нижнего пояса: $x_i = ai$, $y_i = 0$; верхнего пояса: $x_{i+n+1} = ai$, $y_{i+n+1} = b+c$; опор: $x_{2n+3} = x_1 - a/2$, $y_{2n+3} = b$, $x_{2n+4} = x_{n+1} + a/2$, $y_{2n+4} = b$. Нумерация шарниров слева направо, сначала нижний, потом верхний пояс (рис. 4). Конфигурация фермы представляется набором двумерных векторов $\vec{R}_i = [R_{i,1}, R_{i,2}]$. Первая координата – один конец стержня (номер шарнира), вторая – другой конец. Какой шарнир выбирать за начало, какой за конец не имеет значения. На знак усилия в стержне направление его кодировки не влияет. Вектора нижнего пояса: $[i, i+1]$, верхнего – $[i+n+1, i+n+2]$, где $i=1, \dots, n$. Вектора решетки (для тех же значений i): $[i, i+n+2]$, $[i+1, i+n+1]$. Стержни, закрепленные на опорах: $[2n+3, 1]$, $[2n+3, n+2]$, $[2n+4, n+1]$, $[2n+4, 2n+2]$. Сами опоры моделируются двумя стержнями – вертикальным и горизонтальным. Матрица метода вырезания узлов составляется в цикле по числу стержней фермы $m = 4n+8$ и имеет следующие элементы: $G_{2R_{j,1}-1, j} = (x_{R_{j,1}-1} - x_{R_{j,1}})/l_j$, $G_{2R_{j,2}, j} = (y_{R_{j,1}} - y_{R_{j,2}})/l_j$, $G_{2R_{j,1}-1, j} = -(x_{R_{j,1}} - x_{R_{j,2}})/l_j$, $G_{2R_{j,1}, j} = -(y_{R_{j,1}} - y_{R_{j,2}})/l_j$, где l_j – длина стержня, $j=1, \dots, m$. Систему уравнений равновесия записываем в матричном виде

$$\{G\}\vec{S} = \vec{B}, \quad (1)$$

где $\vec{S} = [S_1, S_2, \dots, S_m]$ – вектор неизвестных усилий (включая опорные), $\vec{B}$ – вектор нагрузок (нечетные элементы – горизонтальные усилия, четные – вертикальные). Прогиб середины пролета фермы (центральный узел нижнего пояса) определим по формуле Максвелла-Мора

$$EF\Delta = P \sum_{i=1}^{m-4} S_i^2 l_i, \quad (2)$$

где EF – жесткость стержней, S_i – усилия в стержнях от действия вертикальной единичной силы в центральном шарнире нижнего пояса. В число деформируемых стержней четыре опорные стержня не входят, поэтому верхний предел суммирования $m-4$.

Индукция

Расчет производим для четного числа панелей $n = 2k$ при $b = c = h/2$, последовательно, начиная с $k = 1$. Решение для каждого k принимает вид

$$\tilde{\Delta}_k = (A_k(a^2 + h^2)^{3/2} + B_k a^3)/h^2, \quad (3)$$

где введено обозначение $\tilde{\Delta} = EF\Delta/P$. В результате вычислений получаем для A_k последовательность $3/4, 5/4, 7/4, 9/4, \dots$. Общий член такой последовательности очевиден: $A_k = (2k+1)/4$.

Для коэффициента B_k последовательность получается плохо предсказуемой: 2, 6, 16, 32, 58, 94, 144, 208, 290, 390... В этом случае надо прибегнуть к помощи системе Maple, в которой есть специальный пакет **genfunc**, решающий подобные задачи. Сначала оператор **rgf_findrecur** возвращает рекуррентное уравнение для искомого коэффициента $B_k = 3B_{k-1} - 2B_{k-2} - 2B_{k-3} + 3B_{k-4} - B_{k-5}$. Заметим, что для нормальной работы оператора **rgf_findrecur** требуется четное число членов последовательности. Затем оператор **rsolve** с начальными условиями $B_1 = 2$, $B_2 = 6$, $B_3 = 16$, $B_4 = 32$, $B_5 = 58$ дает искомое решение $B_k = (2k(4 + 3k + 2k^2) + 3 - 3(-1)^k)/12$.

Анализ

Для практического использования конструкции важно знать зависимость ее жесткости от размеров. Введем отношение высоты фермы к длине пролета $\mu = h/L$, $L = 2ak$. На рисунке 5 даны кривые

относительно прогиба $\tilde{\Delta} = EF\Delta/P$ в зависимости от отношения μ при различном числе панелей. Наблюдается явно выраженный минимум, почти не зависящий от k .

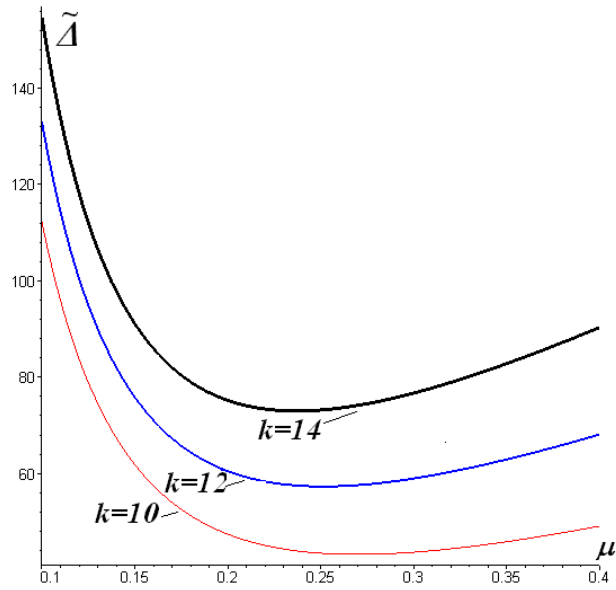


Рис. 5. $a = 1m$

Методом индукции можно уточнить расчет, рассмотрев некоторую асимметрию фермы по высоте. Пусть $b = h/2 - \varepsilon$, $c = h/2 + \varepsilon$. Опуская выкладки, приведем дополнительное слагаемое к (3). Принимая значение ε малым и используя разложение в ряд, получим

$$\Delta_k^+ = \varepsilon(C_k a^3 - (-1)^k \sqrt{a^2 + h^2} (h^2 - 2a^2)/2) / h^3,$$

где $C_k = ((-1)^k (2k(k+2)+1) - 1) / 12$.

Сравним рассматриваемую схему фермы с какой-нибудь другой. Для фермы с достаточно распространенной в практике треугольной решеткой (рис.6) методом индукции получим относительный прогиб $\tilde{\Delta}'_k = (k(a^2 + 4h^2)^{3/2} + B'_k a^3) / h^2$, где $\tilde{\Delta}' = EF\Delta'/P$, $B'_k = k(8k^2 + 1)/3$.

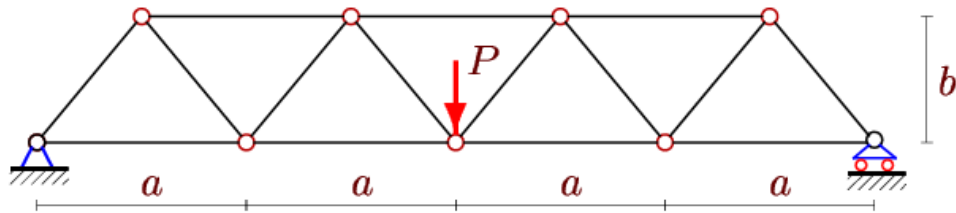


Рис. 6

Заметим, что ферма с крестообразной решеткой распорная, а с треугольной – безраспорная. На рисунке даны сравнительные кривые для прогиба ферм в зависимости от числа панелей. При небольшом числе панелей крестообразная решетка явно неэффективна, прогиб вдвое больше прогиба фермы с треугольной решеткой. Для некоторого числа панелей кривые пересекаются. Для большого числа панелей ферма с крестообразной решеткой более эффективна. Легко найти предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\Delta}'_k / \tilde{\Delta}_k = 2$, не зависящий от размеров ферм.

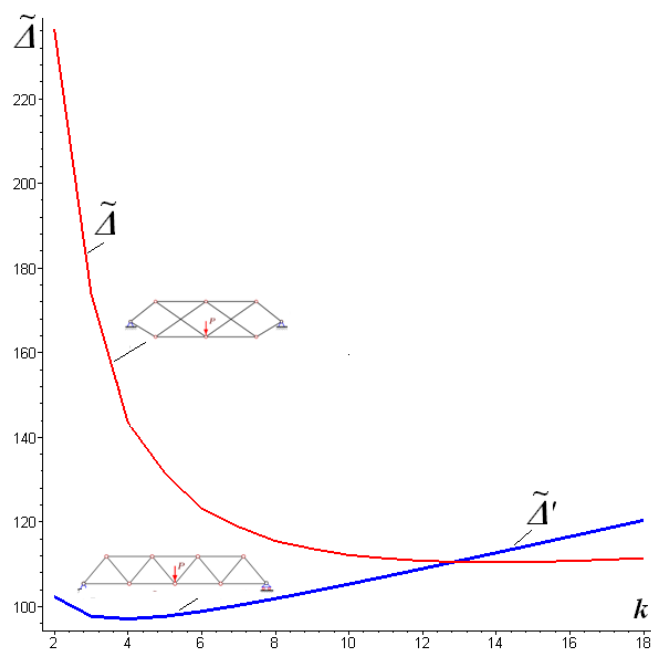


Рис. 7. $h = 2\text{ м}$ $L = 10\text{ м}$

Выводы

Распространенные компьютерные программы для численного расчета строительных конструкций, в том числе и ферм, неплохо справляются со своей задачей: вычисление усилий, прогибов, анализ устойчивости и т.д. Приведенный пример показывает, что аналитический расчет, выявляющий скрытые особенности конструкции также необходим, как точный численный счет. Более того, аналитический расчет в сочетании с методом индукции часто является единственным путем получения точного результата при большом числе стержней фермы или другой многоэлементной конструкции.

Литература

1. Zhijun Chen, Hongyou Cao, Hongping Zhu, Jun Hu, Shaofan Li. A simplified structural mechanics model for cable-truss footbridges and its implications for preliminary design // Engineering Structures, V.68, June 2014, pp. 121-133.
2. Kaveh A., Zolghadr A. Topology optimization of trusses considering static and dynamic constraints using the CSS//Applied Soft Computing, V. 13. № 5. 2013, pp. 2727-2734.
3. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. — СПб.: Изд-во Лань, 2012. — 512 с.
4. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость// Строительная механика и расчет сооружений. 2012. №3. С. 48-51.
5. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем// Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11-15.
6. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. №6 (24). С. 28-34.
7. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. №1. С. 49-53.
8. <http://maxima.sourceforge.net/ru/>