

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СЛОЕ ЖИДКОСТИ С ПОВЕРХНОСТНЫМ ЗАРЯДОМ НА ПОРИСТОМ ОСНОВАНИИ¹

Аннотация. Построена и исследована математическая модель распространения волн на поверхности слоя электропроводной жидкости с поверхностным электрическим зарядом, находящейся на слое пористой среды.

Ключевые слова: поверхностные волны, слой, пористый, электропроводный, электрический заряд.

Abstract. The authors have developed and analyzed a mathematical model of waves propagation on the surface of electroconductive fluid layer with electrical surface charge situated on a porous medium.

Key words: surface waves, layer, porous, electroconductive, electrical charge.

Рассматривается распространение волн по заряженной поверхности жидкого проводника. Проводящая жидкость находится на недеформируемой пористой среде, ограниченной снизу сплошным твердым электропроводным основанием (дном). Распространение поверхностных волн на заряженной поверхности жидкого проводника бесконечной глубины рассмотрено в [1]. Поверхностные волны в жидкости на пористой среде при отсутствии электрического поля исследованы в работе [2].

Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что ось Oz направлена вертикально вверх против вектора $\bar{g}$ ускорения свободного падения, а оси Ox и Oy лежат на плоской поверхности раздела жидкости и пористой среды. Величины, относящиеся к пористой среде, жидкости и атмосфере, обозначаются в необходимых случаях номерами 1, 2 и 3 соответственно.

Как известно [3], в электростатическом случае заряды проводников сосредоточиваются только на их поверхности, а внутри проводника напряженность электрического поля $\bar{E} = 0$. Таким образом, напряженность электрического поля будет отличаться от нуля лишь в атмосфере, находящейся над слоем жидкости. На поверхности проводника выполняется соотношение $E_n = 4\pi\sigma$, где $E_n = \bar{E} \cdot \bar{n}$, $\bar{n}$ – единичная внешняя (т.е. направленная из жидкости в атмосферу) нормаль к поверхности жидкости; σ – плотность поверхностного заряда, приходящаяся на единицу площади.

Уравнения движения жидкости в пористой среде при условии $\bar{E} = 0$ имеют вид [4]

$$\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = -\text{grad } p_1 + \rho \bar{g} - \frac{\eta}{K} \bar{u}_1, \quad \text{div } \bar{u}_1 = 0. \quad (1)$$

¹ Работа проводилась за счет средств ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. по теме «Построение математической модели поверхностных волн в жидкостях» (Государственный контракт № П695 от 20.05.2010).

Здесь ρ – плотность жидкости; Γ – пористость среды; p_1 – давление; $\bar{u}_1$ – макроскопическая скорость фильтрации; η – вязкость; K – коэффициент проницаемости пористой среды, вычисляемый по формуле Козени [4].

Предполагая, что амплитуда волны значительно меньше ее длины, уравнения движения свободной жидкости при $\bar{E} = 0$ запишем в линейном приближении [5]:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} = -\text{grad } p_2 + \rho \bar{g}, \quad \text{div } \bar{u}_2 = 0, \quad (2)$$

где $\bar{u}_2$ – скорость жидкости.

Уравнения для электрического поля в атмосфере:

$$\text{rot } \bar{E} = 0, \quad \text{div } \bar{D} = 0 \quad (\bar{D} = \epsilon \bar{E}, \quad \epsilon = \text{const}), \quad (3)$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость.

Из уравнений (2), (3) следует: $\bar{u}_2 = \text{grad } \phi$, $\bar{E} = -\text{grad } \psi$, где ϕ и ψ – потенциал скорости и электрического поля, удовлетворяющие уравнениям Лапласа:

$$\Delta \phi(x, y, z, t) = 0, \quad \Delta \psi(x, y, x, t) = 0. \quad (4)$$

Система граничных условий:

– на границах раздела:

1) $u_{1z} = 0$ при $z = -h_1$ (на дне);

2) $u_{1z} = u_{2z}$ при $z = 0$ (на границе пористой среды);

3) $p_1 = p_2$ при $z = 0$;

– на свободной поверхности жидкости с уравнением $z = h_2 + \xi(x, y, t)$:

4) $u_{2n} = V_n$; (5)

5) $\bar{E}_\tau = \bar{E} - \bar{n} E_n = 0$ или $\psi = C_0 = \text{const}$;

6) $p_{ij} n_i n_j + p_2 = -\alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$, $p_{ij} = -p_{\text{атм}} \delta_{ij} + \frac{\epsilon E_i E_j}{4\pi} - \frac{\epsilon E^2}{8\pi} \delta_{ij}$.

Здесь $V_n = \partial \xi / \partial t$ – нормальная скорость свободной жидкости; R_1, R_2 – радиусы кривизны поверхности; $p_{\text{атм}}$ – постоянное давление в атмосфере, p_{ij} – максвелловский тензор механических напряжений в области 3; α – коэффициент поверхностного натяжения. Величина σ находится из условия $\sigma = \epsilon E_n / 4\pi$. В линейном приближении $\bar{n} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \bar{e}_1 - \frac{\partial \xi}{\partial y} \bar{e}_2 + \bar{e}_3$; $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – базисные векторы системы координат $Oxyz$.

Переменные величины записываем в виде

$$p_1 = p_{10} + p_{1w}, \quad p_2 = p_{20} + p_{2w}, \quad \phi = \phi_0 + \phi_w, \quad \psi = \psi_0 + \psi_w, \\ (\bar{E}_w = -\text{grad } \psi_w), \quad \sigma = \sigma_0 + \sigma_w. \quad (6)$$

Здесь индексом 0 отмечены невозмущенные величины, а индексом w – возмущения соответствующих величин, связанные с волновым движением.

В равенствах (6)

$$\bar{E}_0 = E_{0z}\bar{e}_3, \quad \psi_0 = -E_{0z}z + C, \quad \sigma_0 = \varepsilon E_{0z} / 4\pi, \quad \sigma_w = \varepsilon E_{wz} / 4\pi. \quad (7)$$

Выбирая $C = C_0 + E_{0z}h_2$, условие 5 в системе (5) можно записать в виде: $-E_{0z}\xi + \psi_w = 0$. Из условия 6 системы (5) следует при $z = h_2 + \xi$

$$-\frac{\varepsilon E_{0z}}{4\pi} \frac{\partial \psi_w}{\partial z} + p_{2w} = -\alpha \Delta_2 \xi. \quad (8)$$

Здесь $\Delta_2 \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$. При выводе (8) учитывается, что

$$p_{02} = p_{\text{атм}} - \frac{\varepsilon E_{0z}^2}{2},$$

$E_n = (\bar{E}_0 + \bar{E}_w) \cdot \bar{n} = E_{0z} - \frac{\partial \psi_w}{\partial z}$ – в линейном приближении.

В результате упрощения система (5) вместе с условием на бесконечности принимает следующий вид:

- 1) $u_{1z} = 0$ ($z = -h_1$);
- 2) $u_{1z} = u_{2z}$ ($z = 0$);
- 3) $p_{1w} = p_{2w}$ ($z = 0$);
- 4) $u_{2z} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ ($z = h_2 + \xi$);
- 5) $-E_{0z}\xi + \psi_w = 0$ ($z = h_2 + \xi$);
- 6) $-\frac{1}{4\pi} \varepsilon E_{0z} \frac{\partial \psi_w}{\partial z} + p_{2w} = -\alpha \Delta_2 \xi$ ($z = h_2 + \xi$);
- 7) $\psi_w = 0$ ($z \rightarrow +\infty$).

Здесь $p_{2w} = -\rho g \xi - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ в условии 6. Все малые величины второго и более высоких порядков отбрасываются.

Из уравнений (1) следует

$$\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \Delta u_{1z}}{\partial t} = -\frac{\eta}{K} \Delta u_{1z}. \quad (10)$$

В связи с тем, что при отсутствии волн: $0 = -\nabla p_{10} + \rho \bar{g}$, $0 = -\nabla p_{20} + \rho \bar{g}$, уравнения для возмущений принимают вид

- 1) $\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_{1w} - \frac{\eta}{K} \bar{u}_1,$
- 2) $\rho \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} = -\nabla p_{2w}.$

Из уравнения 2 системы (11) с учетом $\text{div } \bar{u}_2 = 0$ следует

$$\rho \frac{\partial^2 u_{2z}}{\partial t \partial z} = \Delta_2 p_{2w}, \quad (12)$$

а из уравнения 1 системы (11) с учетом $\operatorname{div} \bar{u}_1 = 0$ находим

$$\frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial t \partial z} + \frac{\eta}{K} \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} = \Delta_2 p_{1w}. \quad (13)$$

С учетом (12) и (13) граничное условие 3 в системе (9) принимает вид:

$$3') \quad \rho \frac{\partial^2 u_{2z}}{\partial t \partial z} = \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial t \partial z} + \frac{\eta}{K} \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} \quad (\text{при } z = 0).$$

С учетом (4) и (10) система трех уравнений для нахождения φ , ψ_w , u_{1z} окончательно принимает вид:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \Delta \varphi = 0; \\ 2) \quad & \Delta \psi_w = 0; \\ 3) \quad & \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial \Delta u_{1z}}{\partial t} = -\frac{\eta}{K} \Delta u_{1z}. \end{aligned} \quad (14)$$

А граничные условия (9) с учетом $u_{2z} = \partial \varphi / \partial z$ окончательно запишутся в виде:

$$\begin{aligned} 1) \quad & u_{1z} = 0 \quad (z = -h_1); \\ 2) \quad & u_{2z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (z = 0); \\ 3) \quad & \rho \frac{\partial^2 u_{2z}}{\partial t \partial z} = \frac{\rho}{\Gamma} \frac{\partial^2 u_{1z}}{\partial t \partial z} + \frac{\eta}{K} \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} \quad (z = 0); \\ 4) \quad & \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (z = h_2); \\ 5) \quad & -E_{0z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_w}{\partial t} = 0 \quad (z = h_2); \\ 6) \quad & -\frac{1}{4\pi} \varepsilon E_{0z} \frac{\partial^2 \psi_w}{\partial z \partial z} - \rho g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\alpha \Delta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (z = h_2); \\ 7) \quad & \psi_w = 0 \quad (z \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad (15)$$

Решение уравнений (14) с граничными условиями (15) ищем в виде бегущих затухающих волн:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= \Phi(z) \exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)]; \\ \psi_w(x, y, z, t) &= \Psi(z) \exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)]; \\ u_{1z}(x, y, z, t) &= U(z) \exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\gamma = \beta + i\omega$; β – коэффициент затухания; ω – частота; k_1, k_2 – волновые числа.

Подставляя функции (16) в уравнения (14), получим систему дифференциальных уравнений для амплитуд $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, $U(z)$:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \Phi''(z) - k^2 \Phi = 0; \\ 2) \quad & \Psi(z); \\ 3) \quad & \left(\gamma - \frac{\eta \Gamma}{\rho K} \right) [U'' - k^2 U] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $k^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Граничные условия для амплитуд получаются из (15):

$$1) U = 0 \quad (z = -h_1);$$

$$2) U = \Phi' \quad (z = 0);$$

$$3) \left(\frac{\rho}{\Gamma} \gamma - \frac{\eta}{K} \right) U' = \rho \gamma \Phi'' \quad (z = 0); \quad (18)$$

$$4) \quad \xi = \int \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=h_2} dt \quad (\text{уравнение для нахождения функции } \xi(x, y, t));$$

$$5) E_{0z} \Phi' + \gamma \Psi = 0 \quad (z = h_2);$$

$$6) \rho [g \Phi' + \gamma^2 \Phi] - \frac{1}{4\pi} \varepsilon E_{0z} \gamma \Psi' + \alpha k^2 \Phi' = 0 \quad (z = h_2);$$

$$7) \Psi_w = 0 \quad (z \rightarrow +\infty).$$

Общее решение системы (18) имеет вид

$$U = C_1 \exp(-kz) + C_2 \exp(kz);$$

$$\Phi = C_3 \exp(-kz) + C_4 \exp(kz);$$

$$\Psi = C_5 \exp(-kz) + C_6 \exp(kz), \quad (19)$$

где C_i ($i = 1, \dots, 6$) – произвольные постоянные.

Подставляя формулы (19) в условия (18), получим однородную систему линейных относительно постоянных C_i алгебраических уравнений, которая имеет ненулевое решение только при условии обращения в нуль определителя системы. Из этого условия получаем дисперсионное уравнение для поверхностных волн:

$$\gamma^3 \rho^2 \left(a_1 b_1 + \frac{a_2 b_2}{\Gamma} \right) - \gamma^2 \frac{\eta}{K} \rho a_2 b_2 - \gamma \rho \left(a_2 b_1 + \frac{a_1 b_2}{\Gamma} \right) G + \frac{\eta}{K} a_1 b_2 G = 0,$$

где

$$a_1 = 1 - \exp(2kh_2), \quad a_2 = 1 + \exp(2kh_2), \quad b_1 = 1 - \exp(2kh_1);$$

$$b_2 = 1 + \exp(2kh_1), \quad G = k\rho g + k^3 \alpha - \frac{\varepsilon E_0^2 k^2}{4\pi} \quad (E_0 = |E_{0z}|).$$

Рассмотрены следующие частные случаи:

$$1) h_1 / \lambda \ll 1, \quad h_2 / \lambda \ll 1;$$

$$2) h_1 / \lambda \gg 1, \quad h_2 / \lambda \ll 1;$$

$$3) h_1 - \text{произвольное}, \quad h_2 / \lambda \ll 1.$$

Конкретные числовые расчеты велись для жидкого натрия при температуре 100°C с параметрами: $\rho = 0,93 \text{ г/см}^3$, $\alpha = 206,4 \text{ дин/см}$, $\eta = 0,69 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}$. Значения E_0 брались в промежутке от 0 до 50 ед. СГС (1 ед. СГС = 300 В/см). Принимаем, что $\varepsilon = 1$ в атмосфере.

Остановимся подробнее на первом случае. Расчеты показывают, что в этом случае частота ω уменьшается с увеличением длины волны λ и слабо зависит от толщины пористой среды h_1 , но с ростом толщины слоя свободной жидкости h_2 значения ω увеличиваются (при $\lambda = \text{const}$); коэффициент $\beta > 0$ также уменьшается с ростом λ , при этом с ростом h_1 величина β увеличивается (при $\lambda = \text{const}$), а с ростом h_2 – уменьшается (при $\lambda = \text{const}$).

С ростом E_0 значения ω уменьшаются при заданных λ , h_1 , h_2 . При этом изменение h_1 практически не влияет на ω , при увеличении h_2 значения ω увеличиваются (при заданных λ , h_1).

С увеличением E_0 значения β уменьшаются при заданных λ , h_1 , h_2 . При увеличении h_1 значения β увеличиваются. При увеличении h_2 значения β уменьшаются.

При увеличении Γ значения ω монотонно увеличиваются до максимального значения $\omega_{\max} \approx 1,24 \text{ с}^{-1}$ (при $\Gamma \rightarrow 1$), при этом с ростом h_1 , а также h_2 , величина ω возрастает; значения β вначале возрастают практически от нуля до максимального значения $\beta_{\max} \approx 0,2 \text{ с}^{-1}$ (при $\Gamma = 0,91$), а затем монотонно убывают, стремясь к нулю (при заданных $h_1 = h_2 = 25 \text{ см}$, $k = 0,006 \text{ см}^{-1}$), при этом с ростом h_1 значения β увеличиваются, а при росте h_2 – уменьшаются.

На рис. 1 номерами 1–5 обозначены кривые, рассчитанные соответственно для следующих значений толщины пористой среды h_1 : 25; 50; 75; 100; 125 (см). Толщина слоя свободной жидкости зафиксирована: $h_2 = 25 \text{ см}$. Интервал изменения волнового числа: $0 \leq k \leq 2 \cdot 10^{-2} \text{ см}^{-1}$.

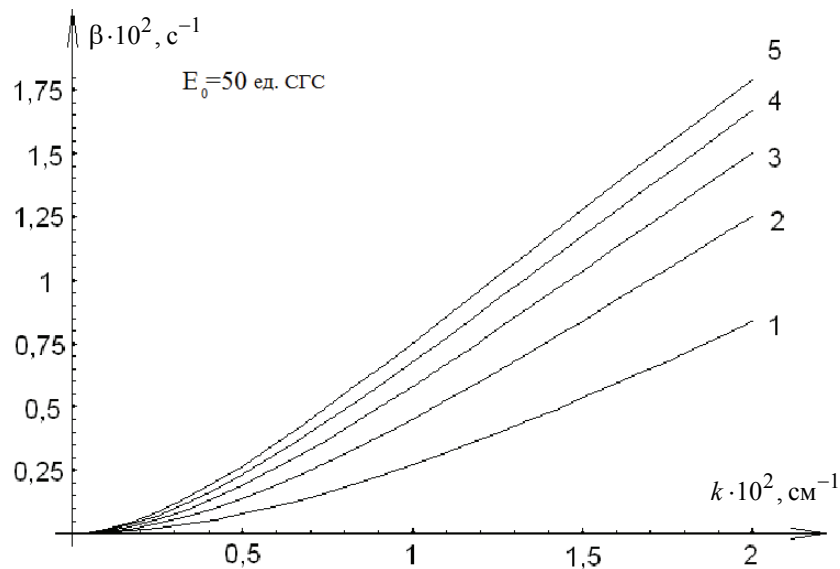


Рис. 1. Зависимость коэффициента затухания волны от волнового числа для различных значений толщины пористой среды

Из рис. 1 видно, что с ростом волнового числа, а также толщины пористого слоя увеличиваются значения коэффициента затухания волны.

На рис. 2 номерами 1–5 обозначены кривые, рассчитанные соответственно для следующих значений толщины свободной жидкости h_2 : 25; 50; 75; 100; 125 (см). Толщина пористой среды h_1 зафиксирована и равна 25 см. Здесь значения коэффициента затухания уменьшаются с ростом h_2 .

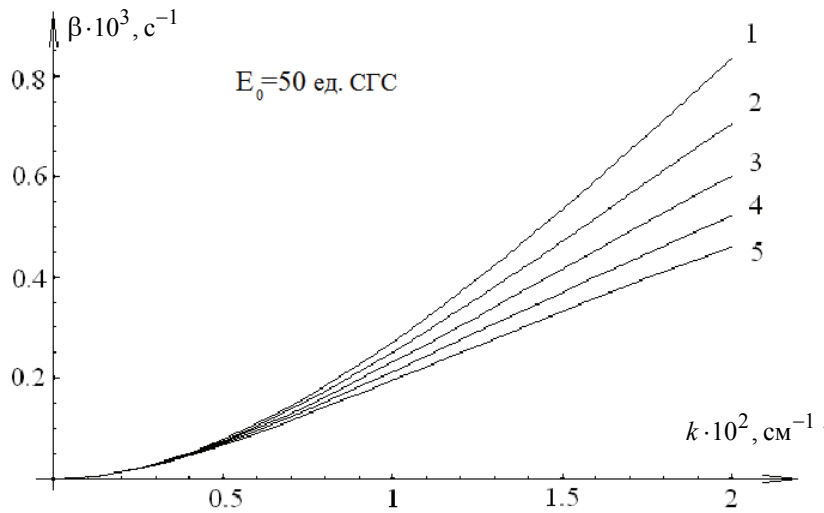


Рис. 2. Зависимость коэффициента затухания волны от волнового числа для различных значений толщины слоя свободной жидкости

На рис. 3 номерами 1–5 обозначены кривые, рассчитанные соответственно для следующих значений толщины свободной жидкости h_2 : 25; 50; 75; 100; 125 (см).

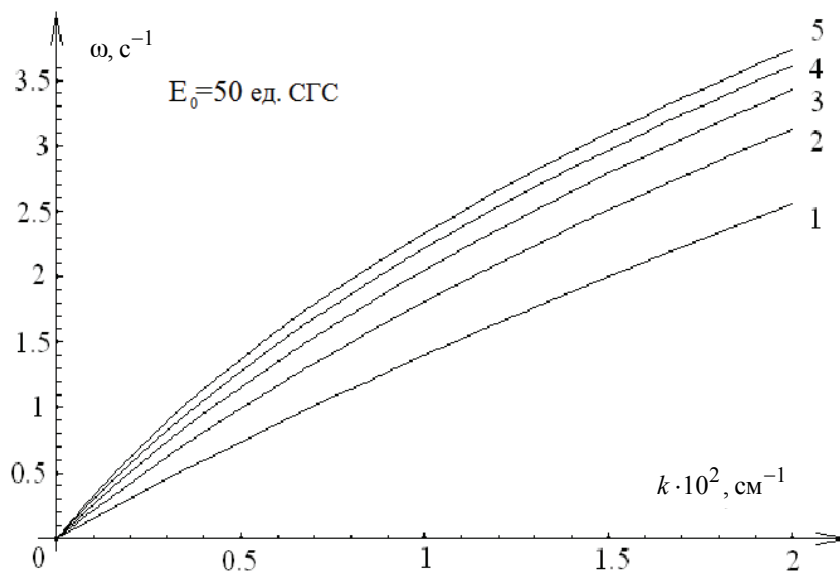


Рис. 3. Зависимость частоты волны от волнового числа для различных значений толщины слоя свободной жидкости

Толщина пористой среды h_1 зафиксирована и равна 25 см. Значения частоты увеличиваются с ростом h_2 .

Из полученных в настоящей работе результатов как частный случай следуют результаты работ [1, 2].

В заключение отметим, что полученные результаты могут найти применение для расчета различных технологических процессов.

Список литературы

1. **Ландау, Л. Д.** Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 2000. – 736 с.
2. **Столяров, И. В.** Распространение поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании / И. В. Столяров, Н. Г. Тактаров // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1987. – № 5. – С. 183–186.
3. **Тамм, И. Е.** Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М. : Наука, 1976. – 616 с.
4. **Гершуни, Г. З.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. – М. : Наука, 1972. – 392 с.
5. **Ландау, Л. Д.** Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Физматлит, 1986. – 735 с.

Тактаров Николай Григорьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра математики,
Мордовский государственный
педагогический институт
имени М. Е. Евсевьева (г. Саранск)

E-mail: colonnt@mail.ru

Taktarov Nikolay Grigoryevich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of mathematics, Mordovia State
Pedagogical Institute named
after M. E. Evseyev (Saransk)

Миронова Светлана Михайловна

аспирант, Мордовский государственный
педагогический институт
имени М. Е. Евсевьева (г. Саранск)

E-mail: MironovaSvtln@rambler.ru

Mironova Svetlana Mikhaylova

Postgraduate, Mordovia State
Pedagogical Institute
named after M. E. Evseyev (Saransk)

УДК 539.19

Тактаров, Н. Г.

Математическое моделирование поверхностных волн в слое жидкости с поверхностным зарядом на пористом основании / Н. Г. Тактаров, С. М. Миронова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2011. – № 2 (18). – С. 41–48.