

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

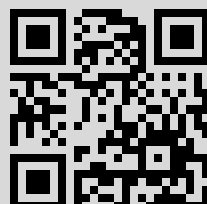
В. В. Тихомиров, Об аппроксимации функций с заданной скоростью сходимости, *Изв. вузов. Матем.*, 1976, номер 10, 113–115

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 2.92.176.249

25 сентября 2015 г., 11:53:22



УДК 517.5

В. В. Тихомиров

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ СКОРОСТЬЮ
СХОДИМОСТИ

Одним из удобных аппроксимативных аппаратов является полином Бернштейна

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1],$$

([1], с. 22), где $f(x)$ — некоторая непрерывная функция, определенная на отрезке $[0, 1]$.

В случае $f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$ для полиномов $B_n(f; x)$ известно разложение Е. В. Вороновской

$$B_n(f; x) = f(x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2n} x(1-x) + \frac{\rho_n(x)}{n}, \quad x \in [0, 1],$$

([1], с. 246), где $\rho_n(x) \rightarrow 0$ равномерно относительно x на $[0, 1]$ при $n \rightarrow \infty$. Из этого разложения в частности следует (см. [1], с. 249), что никакое улучшение свойств функции $f(x)$ не даст для полиномов $B_n(f; x)$ более высокого порядка приближения, чем $\frac{1}{n}$, $n \rightarrow \infty$ (исключая случай линейной функции $f(x)$, для которой полиномы $B_n(f; x)$ при $n \geq 1$ просто совпадают с ней).

Благодаря сравнительно малой скорости сходимости, эти полиномы, в смысле точности приближения, являются довольно плохим аппаратом ([1], с. 246). Поэтому для получения требуемой точности аппроксимации приходится использовать полиномы $B_n(f; x)$ таких степеней, реализовать которые, даже на современных ЭВМ ввиду ограниченности их разрядной сетки, не всегда представляется возможным.

В связи с этим рассматривается вопрос повышения скорости сходимости аппроксимирующих полиномов, построенных на базе полиномов Бернштейна. Эта задача уже рассматривалась автором в ранее опубликованных работах (см., напр., [2], с. 56), в которых были предложены полиномы

$$T_{n, m, 1}(f; x) = \frac{n}{m} [B_{n+m}(f; x) - B_n(f; x)] + B_n(f; x),$$

$$T_{n, m, 1}^*(f; x) = \frac{n+m}{m} [B_{n+m}(f; x) - B_n(f; x)] + B_{n+m}(f; x),$$

где $x \in [0, 1]$, а m — некоторое фиксированное натуральное число, позволяющие приближать $f(x) \in C^{(6)}[0, 1]$, по крайней мере, со скоростью $1/n^2$, $n \rightarrow \infty$.

Ниже сделан очередной шаг в этом направлении. А именно, предложены полиномы

$$T_{n, m, k+1}(f; x) = \frac{n}{(k+1)m} [T_{n+m, m, k}(f; x) - T_{n, m, k}(f; x)] + T_{n+m, m, k}(f; x),$$

$$T_{n,m,k+1}^*(f; x) = \frac{n}{(k+1)m} [T_{n+m,m,k}^*(f; x) - T_{n,m,k}^*(f; x)] + T_{n+m,m,k}^*(f; x),$$

$k = 1, 2, \dots$, позволяющие на отрезке $[0, 1]$ осуществлять приближение функции $f(x) \in C^{(4k+6)} [0, 1]$, по крайней мере, со скоростью $1/n^{k+2}$, $n \rightarrow \infty$.

При получении основных результатов работы используется следующая

Лемма. Если $f(x) \in C^{(2k+4)} [0, 1]$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то $\rho_n(x)$ в разложении Вороновской представимо в виде

$$\rho_n(x) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\varphi_i(x)}{n^i} + \frac{\rho_{n,k+1}(x)}{n^{k+1}}, \quad x \in [0, 1],$$

где

$$\varphi_1(x) = \frac{f^{(3)}(x)}{3!} A_{3,1}(x) + \frac{f^{(4)}(x)}{4!} A_{4,2}(x),$$

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=i+1}^{2(i+1)} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} A_{j,j-(i+1)}(x), \quad i = \overline{2, k+1},$$

а $A_{3,1}(x)$, $A_{4,2}(x)$, $A_{j,j-(i+1)}(x)$ суть некоторые полиномы, не зависящие от n , $\rho_{n,k}(x) \rightarrow 0$ равномерно относительно x на $[0, 1]$ при $n \rightarrow \infty$.

Основные результаты работы приводятся в теоремах 1 и 2.

Теорема 1. Если $f(x) \in C^{(4k+6)} [0, 1]$ ($k = 1, 2, \dots$), то в любой точке $x \in [0, 1]$

$$T_{n,m,k+1}(f; x) = f(x) + (-1)^k \frac{m\varphi_k(x)}{n^{k+2}} + (-1)^{k+1} \frac{\varphi_{k+1}(x)}{n^{k+2}} + \frac{\rho_{T_{n,m,k+1}}(x)}{n^{k+2}},$$

$$T_{n,m,k+1}^*(f; x) = f(x) + (-1)^{k+1} \frac{m\varphi_k(x)}{n^{k+2}} + (-1)^{k+1} \frac{\varphi_{k+1}(x)}{n^{k+2}} + \frac{\rho_{T_{n,m,k+1}^*}^*(x)}{n^{k+2}},$$

где $\varphi_k(x)$, $\varphi_{k+1}(x) \in C [0, 1]$, а $\rho_{T_{n,m,k+1}}(x)$ и $\rho_{T_{n,m,k+1}^*}^*(x)$ равномерно относительно x на $[0, 1]$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, m — некоторое фиксированное натуральное число.

Замечание. Если $f(x)$ есть полином степени p , то при любом целом положительном $k \geq p$

$$T_{n,m,k+1}(f; x) = f(x) \quad \text{и} \quad T_{n,m,k+1}^*(f; x) = f(x)$$

для всех $n = 1, 2, \dots$ и любого целого фиксированного $m \geq 1$.

Теорема 2. Если $f(x) \in C^{(4k+6)} [0, 1]$ ($k = 1, 2, \dots$) и $\varphi_k(x)$ почти всюду на $[0, 1]$ отлична от нуля, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество $E \subset [0, 1]$ меры больше $1 - \varepsilon$ и такие номера $M(\alpha, \beta) = [4\beta/\alpha] + 1$ (под $[x]$ понимается целая часть x) и $N(\alpha, m)$, где

$$\alpha = \inf_{x \in E} \{ |\varphi_k(x)| \}, \quad \alpha > 0; \quad \beta = \sup_{x \in E} \{ |\varphi_{k+1}(x)| \},$$

что при любом целом фиксированном $m \geq M(\alpha, \beta)$ будут иметь место следующие неравенства:

$$|T_{n,m,k+1}(f; x) - f(x)| \leq |T_{n,m,k+1}(f; x) - T_{n,m,k+1}^*(f; x)|$$

для всех $n > N(\alpha, m)$ и всех $x \in E$;

$$|T_{n,m,k+1}^*(f; x) - f(x)| \leq |T_{n,m,k+1}(f; x) - T_{n,m,k+1}^*(f; x)|$$

для всех $n > N(\alpha, m)$ и всех $x \in E$.

В заключение следует отметить, что самим С. Н. Бернштейном был предложен оператор

$$Q_n(f; x) = \sum_{m_1=0}^n \left[f\left(\frac{m_1}{n}\right) - \frac{x(1-x)}{2n} f^{(2)}\left(\frac{m_1}{n}\right) \right] C_n^{m_1} x (1-x)^{n-m_1}, \quad x \in [0, 1]$$

([3], с. 89), сходящийся к $f(x) \in C^{(4)} [0, 1]$ по крайней мере со скоростью $1/n^2$, $n \rightarrow \infty$. Но, как нетрудно заметить, этот оператор является менее удобным для применения (в нем участвуют вторые производные в заданных узлах), чем указанные ранее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., ГТТИ, 1949.
2. Тихомиров В. В. К вопросу полиномиального вида совместного приближения функции и ее производной. Сб. аспирантск. работ. Казанск. ун-та. Точные науки. Матем. Мех. Физ., 1976.
3. Бернштейн С. Н. Добавление к статье Е. В. Вороновской „Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна“, ДАН СССР, 1932, т. 4, с. 86—92.

г. Рыбинск

Поступила
6 IV 1976