Отзыв

официального оппонента доктора физико- математических наук, профессора Задорожнего Владимира Григорьевича на диссертационную работу Качалова Василия Ивановича «Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач», представленную на соискание ученой степени доктора физико – математических наук по специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Актуальность темы

Развитие метода регуляризации С.А. Ломова всегда сопровождалось тесным взаимодействием с функциональным анализом. Любой исследователь, использующий метод для решения своих задач, получал возможность применить аппарат этой важной математической науки. Связано это в первую очередь с тем, что метод регуляризации сводит исходную сингулярно возмущенную задачу к регулярной задаче, рассматриваемую в теории возмущений, аналитической аспект которой хорошо разработан в том смысле, что ряды, представляющие решения регулярных задач, сходятся в обычном смысле. Здесь базовой является концепция подчинённости одного оператора другому, приведшая к понятию аналитического семейства операторов в смысле Като и нахождению достаточных условий аналитической зависимости от параметра решений регулярно возмущенных задач. Но это всё работает, когда исходная задача является регулярно возмущенной. Если же это не так, то в роли подчинённого выступает неограниченный (в том пространстве, в котором рассматривается задача) оператор, и здесь, можно гарантировать только асимптотическую сходимость регуляризованных рядов. Для решения прикладных задач этого было в большинстве случаев достаточно, однако вопрос о сходимости рядов оставался открытым. В этих условиях С.А. Ломов предложил использовать пространства векторов экспоненциального типа, с помощью которых были получены основные результаты по обычной сходимости регуляризованных рядов, представляющих решения линейных сингулярно возмущённых уравнений. В итоге возникает понятие псевдоаналитического (псевдоголоморфного) решения, суть которого состоит вследующем - если в результате регуляризации удаётся точно описать сингулярную зависимость решения от малого параметра, то по регулярной его части будет наблюдаться аналитическая зависимость от параметра.

Что же касается нелинейных задач, то здесь использование пространств векторов экспоненциального типа оказалосьвесьма затруднительным, поэтому С.А. Ломов обобщил понятие псевдоголоморфности, которое сейчас лежит в основе современной математической теории пограничного слоя.

Метод голоморфной регуляризации, которому посвящена работа В.И. Качалова, является логическим продолжением метода С.А. Ломова. Он разработан в первую очередь, для решения именно нелинейных сингулярно возмущённых задач и основан на алгебраическом подходе к изучению свойств первых интегралов дифференциальных уравнений и систем. Это является весьма **актуальным** для построения общей теории сингулярных возмущений. В итоге появилась возможность строить псевдоголоморфные решения без использования функциональных пространств, топологическая структура которых является весьма сложной.

Оценка содержания диссертационной работы

Диссертация состоит из введения, четырёх глав и списка литературы. Во введении дана общая характеристика работы, приводится обзор литературы по теме диссертации, формулируются цели исследования, основное содержание работы и положения, выносимые на защиту, указываются публикации автора по теме диссертации и апробация работы.

Глава I посвящена начальному этапу развития аналитической теории сингулярных возмущений – нахождению условий обычной сходимости регуляризованных асимптотических рядов по малому параметру для решений линейных сингулярно возмущённых задач. В начале главы построены пространства векторов экспоненциального типа, изучена их топологическая структура и указана связь с эволюционным оператором соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

В теореме 1.3 приведены условия существования единственного голоморфного по параметру решения линейного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с ограниченным предельным оператором. Тем самым обеспечивается любая наперёд заданная точность описания поведения решения вне пограничного слоя. Далее в теореме 1.4 даются условия обычной сходимости регуляризованных асимптотических рядов, что позволяет говорить о едином описании решения как внутри, так и вне пограничного слоя. Следует отметить полноту проведённого исследования. Затем автор переходит к случаю, когда предельный оператор является неограниченным. Теорема 1.5 даёт представление о структуре пространства векторов экспоненциального типа, а в теореме 1.6 приведены достаточные условия сходимости основного ряда. Учитывая сложную топологическую структуру пространства векторов экспоненциального типа, следует особо отметить теорему 1.9, где на основе понятия оператора, следящего за эволюцией прямого разложения банахова пространства, приведены достаточные условия существования псевдоголоморфного решения без явного использования таких пространств. Завершает главу I теорема 1.11 о плотности пространства векторов экспоненциального типа в пространстве голоморфных функций со значениями в банаховом пространстве. Это важное утверждение позволяет, при достаточно общих предположениях строить приближенные решения в виде сходящихся в обычном смысле рядов.

Во **второй главе** рассматривается сингулярно возмущённая начальная задача для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка.
Подробно излагается суть метода голоморфной регуляризации и его алгебраическая основа. Теорема 2.5 утверждает существование голоморфных по параметру интегралов у таких уравнений, причём все они принадлежат образу гомоморфизма алгебры голоморфных функций одной переменной в алгебру голоморфных функции двух переменных. Отметим, что указанное утверждение существенно дополняет теорему Пуанкаре о разложении.

Основным понятием, используемым вовторой главе, является понятие псевдоголоморфного в глобальном смысле решения. Основной результат представлен теоремой 2.7, в которойсвойства главного члена голоморфного по параметру интеграла связаны с устойчивостью решений присоединённого уравнения. В частности, доказано, что из устойчивости вытекает глобальная псевдоголоморфность. Следует особо отметить, что этот подход применяется в последующих главах.

В этой теореме возникает оригинальное уравнение (2.48), свойства которого определяют псевдоголоморфность решений задачи Коши (2.47).

Третья глава посвящена сингулярно возмущённым уравнениям высшего порядка. В теореме 3.2 построены отображения алгебры голоморфных функций числа переменных, равного порядку уравнения, в алгебру голоморфных функций на единицу большего числа переменных, образующих голоморфное по малому параметру семейство гомоморфизмов указанных алгебр, образами которых являются интегралы систем, эквивалентных данным уравнениям. Сформулирована и доказана теорема 3.4 о глобальной псевдоголоморфности решений уравнений высших порядков и, что самое важное, дано обоснование того, что для описания пограничного слоя достаточно одной регуляризирующей функции. В конце главы автор указывает на возможность применения метода голоморфной регуляризации для решения сингулярно возмущённых краевых задач.

Следует особо отметить, что автор приводит формулы коэффициентов рядов, представляющих решения исследуемых задач, что является весьма важным для приложений.

Четвёртая глава диссертации представляется наиболее значимой, поскольку здесь рассматриваются сильно нелинейные сингулярно возмущённые системы. Автор подробно описывает процедуру построения голоморфных по малому параметру интегралов и приводит алгоритм построения псевдоголоморфных решений этих систем. При этом используется интегральное представление решений уравнений в частных производных первого порядка. В результате приведённых исследований доказано (см. теорему 4.2) существование у системы голоморфных по параметру независимых интегралов, что дополняет теорему Пуанкаре о разложении: регулярно возмущённая задача имеет голоморфное по параметру решение; сингулярно возмущённая –полный набор независимых интегралов, голоморфных по параметру. Далее автор даёт определение псевдоголоморфного решения системы и в теореме 4.4 формулирует достаточные условия существования псевдоголоморфных в глобальном смысле решений.

Весьма важной представляется установленная связь между устойчивостью решений присоединённых в тихоновском смысле систем и **глобальной** псевдоголоморфностью (см. теорему 4.4). Чтобы продемонстрировать дальнейшие пути развития метода голоморфной регуляризации, в конце главы рассматривается сильно нелинейная сингулярно возмущённая задача Коши в банаховом пространстве. В теореме 4.5, в терминах оператора первой вариации, даются достаточные условия глобальной псевдоголоморфности галёркинских приближений к точному решению поставленной задачи.

Научная новизна работы определяется тем, что в ней разработан новый подход к интегрированию нелинейных сингулярно возмущённых задач. Получены представления псевдоголоморфныхрешенийв виде рядов по малому параметру.

Значения для науки и практики. Разработанный в диссертации метод и полученные результаты являются значимыми как для построения аналитической теории сингулярных возмущений, так и для решения задач математической теории пограничного слоя и химической кинетики. В конечном итоге всё это должно привести к построению общей теории сингулярных возмущений, основанной на методах функционального анализа, алгебры и теории функций нескольких комплексных переменных. Результаты, полученные для уравнений с неограниченными операторами, важны для выяснения свойств решений дифференциальных уравнений в частных производных. Что же касается алгебраических результатов работы, то они представляются весьма ценными и для общей теории дифференциальных уравнений.

Основные результаты диссертации своевременно и полно опубликованы в 26 работах, том числе 15 статьях в изданиях из перечня ВАК (из них 12 работ без соавторов); 11 статьях в других изданиях (из них 8 работ без соавторов).

Достоверность и обоснованность полученных В.И. Качаловым результатов обеспечивается строгой постановкой задач, использованием строгих математических методов, полными и строгими математическими доказательствами. Диссертация написана четким, ясным языком, тщательно выверена, хорошо подобранные примеры согласуются с доказанными утверждениями.

Замечания по диссертационной работе. 1. Стр.5, 14 стр. сн. Вместо $(T(\varepsilon)-\lambda_0)^{-1}$ должно быть $(T(\varepsilon)-\lambda_0 I)^{-1}$.

2. стр. 13. Следовало бы пояснить в каком смысле понимается ортогональность проекторов в банаховом пространстве.

3. стр. 28, 1 стр. сн. Следовало бы привести определение обозначения $limind\, G^c$.

4. стр. 29, стр. 11 сн. Следовало бы привести определение проективного предела.

5. стр. 37 Нужно было бы привести доказательство теоремы 1.5.

6. стр. 40, стр. 6 сн. Вместо $B(z)=\dfrac{(z+1)\partial w}{\partial \xi}$ правильнее было бы писать $B(z)=\dfrac{(z+1)\partial}{\partial \xi}$.

7. стр. 157, 1 стр. сн. Следовало бы везде писать = либо $\equiv$.

8. стр. 199. 4-7 стр. св. В неравенстве Гронуолла A является константой, а в тексте допущена опечатка.

Однако отмеченные замечания не играют существенной роли и не меняют хорошего мнения о работе.

Рекомендации по использованию результатов диссертации. Полученные результаты могут быть использованы в МГУ, МФТИ, ИПМ РАН, Математическом институте им. Стеклова РАН, Воронежском госуниверситете, а также в других учреждениях и организациях при чтении спецкурсов и для решения прикладных задач.

Заключение по диссертационной работе. Диссертация оформлена в соответствии с требованиями ВАК. Выносимые на защиту положения, достаточно и полно отражены в выпускаемых в Российской Федерации ведущих научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов диссертаций на соискание учёной степени доктора наук. Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.

В связи с вышеизложенным, считаю, что диссертация Качалова Василия Ивановича «Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач», представленная на соискание ученой степени доктора физико – математических наук по специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» соответствует всем требованиям ВАК Российской Федерации, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор Качалов Василий Иванович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико – математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Официальный оппонент-
Зав. Кафедрой нелинейных колебаний
Доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.02), профессор В. Г. Задорожний
3 декабря 2015 г.
Телефон 89081432616
E-mail: zador@amm.vsu.ru

Подпись Задорожнего В.Г. заверяю,

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Воронежский государственный университет» (ФГБОУ ВПО «ВГУ»)
Задорожного В.Г.
вед. документовед
должность
Сиская ___.___.20__
подпись, расшифровка подписи

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Воронежский государственный университет,
факультет Прикладной математики, информатики и механики

394000 г. Воронеж, Университетская пл. 1, ВГУ

Тел: +7 (473) 220-87-55
E-mailoffice@main.vsu.ru