Отзыв

официального оппонента доктора физико-математических наук, профессора Нефедова Николая Николаевича на диссертационную работу Качалова Василия Ивановича «Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач», представленную на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Актуальность работы

Работа Качалова В.И. посвящена одному из важных вопросов теории дифференциальных уравнений – теории сходимости рядов, представляющих решения сингулярно возмущенных задач. **Актуальность** темы диссертации обусловлена в первую очередь тем обстоятельством, что классические методы решения дифференциальных уравнений с малым параметром при производной (метод ВКБ, метод Васильевой-Бутузова, метод Крылова-Боголюбова-Митропольского, метод регуляризации Ломова и др.) ставят лишь вопрос об асимптотической сходимости полученных разложений. В то же время, в рамках метода регуляризации С.А. Ломова в восьмидесятые годы двадцатого столетия стала набирать обороты аналитическая теория сингулярных возмущений, началом развития которой можно считать поиск условий, обеспечивающих обычную сходимость регуляризованных асимптотических рядов. Данная проблема была решена для линейных уравнений в банаховых пространствах с использованием пространств векторов экспоненциального типа. Попытки перенести всё это на нелинейные задачи к особому успеху не привели. На пути решения этой проблемы С.А.Ломовым было введено понятие пседоаналитического (псевдоголоморфного) решения сингулярно возмущенного уравнения , не связанное с каким – либо конкретным методом , хотя , конечно , из самого определения следовало , что такое решение может быть получено в результате регуляризации сингулярно возмущенной задачи, т.е. замене исходной сингулярно возмущенной задачи на регулярно возмущенную. В связи с этим, возникла необходимость разработки такого метода, который бы позволял при достаточно общих условиях на данные решаемой сингулярно возмущенной задачи, строить псевдоголоморфные решения . Именно такой метод – метод голоморфной регуляризации и предложен в работе В.И. Качалова Метод опирается прежде всего на утверждение , что всякое сингулярно возмущенное уравнение или система при достаточно нежестких ограничениях на правые части имеет интегралы, голоморфным образом зависящие от малого параметра, что в определенном смысле обобщает теоремы Пуанкаре о разложении. Сами же псевдоголоморфные решения получаются из общих интегралов с помощью теоремы о неявной функции.

Нужно отметить, что существенные достижения автора в разработке этой проблемы связаны с привлечением идей из алгебры и функционального анализа.

В итоге можно утверждать, что результаты, полученные в работе Качалова В.И. способствуют становлению аналитической теории сингулярных возмущений как раздела математики, основанного как на идеях функционального анализа, так и алгебры.

Оценка содержание диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, списка литературы. Во введении приводится тема, общая характеристика работы, обзор литературы по теме диссертации, формулируется цель, основное содержание работы и положения выносимые на защиту, указываются публикации автора по теме диссертации и апробация.

В **первой главе** дан обзор результатов, касающихся обычной сходимости регуляризованных асимптотических рядов с использованием теории пространств векторов экспоненциального типа. Применяемая здесь концепция обобщённых рядов Тейлора в банаховых пространствах позволила в весьма компактной форме сформулировать теоремы 1.1 и 1.2 о структуре пространства векторов экспоненциального типа а, также доказать формулу, обобщающую формулу Бореля в теории целых функций экспоненциального типа. За ними следует теорема 1.3, в которой сформулированы условия обычной сходимости так называемого основного ряд, т.е. ряда, описывающего в гидродинамике основные течение жидкости вне пограничного слоя. Что касается самого пограничного слоя, то здесь приведена теорема 1.4. Если же предельный оператор является неограниченным, то и здесь, с привлечением понятия шкалы банаховых пространств, автору удалось изучить структуру соответствующего пространства векторов экспоненциального типа (теорема 1.5) и построить голоморфное по параметру решение в виде основного ряда. Затем в теоремах 1.9 и 1.10 автор доказывает, что если оператор, следящий за эволюцией прямого разложения банахова пространства принадлежит экспоненциальному типу, то уравнение имеет псевдоголоморфное решение. Ценность этого результата в первую очередь состоит в том, что здесь не используются явно пространства векторов экспоненциального типа.

Подход, изложенный в первой главе, отражает начальный этап развития аналитической теории обычной сходимости рядов, представляющих решения сингулярно возмущенных задач и оказался применимым в основном для линейных задач. Что же касается нелинейных задач, то этому как раз и посвящен метод голоморфной регуляризации разработанный автором, и изложенным в последующих главах.

Во **второй главе** метод применяется к сильно нелинейному уравнению первого порядка. Вначале рассматривается отображение алгебры голоморфных функций одной переменной в алгебру голоморфных функций двух переменных, удовлетворяющее коммутационному соотношению. В теоремах 2.1 и 2.3 доказано, что в этом случае указанное отображение является гомоморфизмом алгебр и изучена его структура. Важным является утверждение о взаимно однозначном соответствии между гомоморфизмами и дифференциальными уравнениями. Конкретно доказано, что образ гомоморфизма состоит из первых интегралов некоторого дифференциального уравнения. В теореме 2.5 утверждается существование у любого сингуляно возмущенного уравнения первого порядка при достаточно общих предположениях голоморфных по малому параметру интегралов, что является полезным дополнением к теореме Пуанкаре о разложении. Далее даётся определение псевдоголоморфного решения – адаптированное к методу голоморфной регуляризации: оно состоит из двух частей. Наиболее важной из них является глобальная псевдоголоморфность. В теореме 2.7 даются достаточные условия глобальной псевдоголоморфности. Особо подчёркивается факт связи между пседоголоморфностью и устойчивостью по Лагранжу решений присоединённого уравнения. В случае же асимптотической устойчивости работает теорема Тихонова и вместе с глобальной псевдоголоморфностью будет наблюдаться предельный переход к решению предельного уравнения.

Таким образом выделен класс задач, для которого применим развиваемый метод

Третья глава посвящена дифференциальным уравнениям высших порядков, разрешённых относительно старшей производной. Сведя такое уравнения к системе, содержащей медленные и быструю переменные, автор формулирует и доказывает теорему 3.2 о существовании у этой системы независимых интегралов в количестве, равным порядку уравнения, голоморфных по параметру. В теореме 3.3 приводятся достаточные условия существования псевдоголоморфного в глобальном смысле решения, и обосновывается выбор всего лишь одной регуляризирующей функции. Так же, как в главе I, доказывается связь между устойчивостью и псевдоголоморфностью. Важное место в Главе III занимает исследование голоморфно нерегуляризуемых сингулярно возмущённых задач, встречающихся например, в химической кинетике, теории горения. Теорема 3.5, утверждает возможностью предельного перехода и доказывается, основываясь на утверждении о существовании у таких уравнений голоморфных по параметру интегралов.

В **четвёртой,** заключительной **главе** диссертации рассмотрена сильно нелинейная сингулярно возмущённая система. В теореме 4.2 доказано существование у неё полной системы независимых интегралов, голоморфных по малому параметру и тем самым обобщена теорема Пуанкаре о разложении. При этом, для построения интегралов было удачно применено интегральное представления решений уравнений в частных производных первого порядка. Так же, как и в двух предыдущих главах, было дано определение псевдоголоморфного решения и доказаны теоремы осуществовании таких решений у систем. Наиболее существенный результат представлен теоремой 4.4, где сформулированы достаточные условия существования псевдоголоморфного в глобальном смысле решения рассматриваемой сингулярно возмущенной системы и установлена связь с устойчивостью присоединённой системы. Как следует из теоремы 4.4, если присоединённая система имеет положительно устойчивые по Лагранжу решения, то это автоматически влечёт за собой глобальную псевдоголоморфность решения исходной сингулярно возмущённой системы а, в случае асимптотической устойчивости—предельный переход. В конце четвёртой главы изучена глобальная псевдоголоморфность галёркинских приближений сингулярно возмущённого уравнения в банаховом пространстве с базисом. Теорема 4.5 даёт достаточные условия существования псевдоголоморфных в глобальном смысле решений у всех систем, построенных по методу Галёркина для данного уравнения. Формулируется теорема с использованием оператора первой вариации, в своё время нашедшем плодотворное применение при исследовании устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. В качестве примера рассмотрено нелинейное уравнение в частных производных параболического типа и приведены соответствующие априорные оценки.

Научная новизна работы. Новизна работы определяется

а) принципиально новым подходом к теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений, основанным на алгебраической природе их интегралов;

б) вытекающей отсюда голоморфности интегралов сингулярно возмущённых уравнений и систем;

в) предложенным оригинальным способом построения псевдоголоморфных решений;

г) серьёзным научным потенциалом, который закладывает данная работа для дальнейших исследований в теории сингулярно возмущённых краевых задач и уравнений в банаховых пространствах. Данная работа является удачным примером комплексного сочетания методов алгебры, функционального анализа и теории функций нескольких комплексных переменных. Диссертация является значительным шагом в построении аналитической теории сингулярных возмущений на базе метода регуляризации С.А.Ломова.

Значимость для науки и практики. В диссертации разработан новый метод решения сильно нелинейных сингулярно возмущённых начальных задач, основанный на доказанном автором факта существовании голоморфных по параметру первых интегралов. Построение решений таких задач в виде сходящихся в обычном смысле рядов по степеням малого параметра имеет весьма важное значения для решения практических задач математической теории пограничного слоя.

Основные результаты диссертации опубликованы в 26 работах, том числе 15 статьях в изданиях из перечня ВАК (из них 12 работ без соавторов); 11 статьях в других изданиях (из них 8 работ без соавторов).

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается корректной постановкой задач, применением строгих математических методов, полными математическими доказательствами.

Рекомендации по использованию материалов диссертации в учебных курсах. Полученные результаты могут быть использованы в МГУ,МФТИ,ИПМ РАН и в других учреждениях и организациях.

Замечания по диссертационной работе:

Вместе с тем работа не свободна от некоторых недостатков.

1) Представляется важным выделение новых классов задач, для которых применим развиваемый подход.

2) Хотелось бы иметь критерии выбора функции, описывающей сингулярность (см. теорему 2.7 и аналогичные результаты в следующих главах).

3) При рассмотрении голоморфно нерегуляризуемых задачи (см. Гл. III) автор, построив голоморфные по параметру интегралы ничего не говорит о том, как эти важные в приложениях задачи решаются другими методами (например, методом Васильевой - Бутузова). Мне представляется интересным более подробное сравнение с другими методами и в других разделах диссертации.

4) Есть некоторое количество опечаток (не мешающее пониманию результатов), есть небольшие стилистические неточности (например, в теореме 2.7’ требуется устойчивость уравнения), недостаточно точным является комментарий перед определением 2.3, хотя смысл его понятен.

5) В ссылке в замечании на стр. 85 правильней ссылаться на работы по принципу сравнения Чаплыгина.

В целом эти замечания в значительной части можно рассматривать как пожелания по дальнейшему развитию метода.

Заключение по диссертационной работе. Диссертация оформлена в соответствии с требованиями ВАК. Выносимые на защиту положения полностью отражены в выпускаемых в Российской Федерации ведущих научных журналах, рекомендованных ВАК для публикаций основных результатов диссертаций на соискание учёной степени доктора наук. Автореферат полностью и правильно отражает содержание диссертации.

В связи с вышеизложенным, считаю, что диссертация Качалова Василия Ивановича «Голоморфная регуляризация сингулярно возмущенных задач», представленная на соискание ученой степени доктора физико – математических наук по специальности 01.01.02 – «дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» соответствует всем требованиям ВАК Российской Федерации, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор Качалов Василий Иванович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико – математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Официальный оппонент-
Зав. кафедрой математики физического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова, Доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.02),
профессор Н. Н. Нефедов

Телефон 89161542917 E-mail:nefedov@phys.msu.ru

Подпись профессора Н.Н. Нефедова удостоверяю
Декан физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова

Профессор Н.Н.Сысоев

дата 25.11.2015г.

Московский государственный университет, физический факультет

119991 г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1,стр.2, Физический факультет
Тел: +7(495)939-31-60 и e.mail: info@physics/msu.ru