

Метод гомотопии для расчета направляемой моды в периодической волноводно-лестничной структуре в цилиндрической геометрии

А.А.Быков

МГУ имени М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики.
abkov@yandex.ru

Аннотация. Метод расчета эффективного волнового числа и профиля поля направляемой моды периодической волноводно-лестничной системы, каждая ячейка которой состоит из нескольких коаксиальных цилиндрических полостей, соединенных фланцами, основан на представлении поля внутри ПВЛС в виде линейной комбинации функций базисной системы. Задача расчета ПВЛС сначала с помощью метода проекционного сшивания полей приводится к нелинейной задаче на собственные значения для системы алгебраических уравнений для коэффициентов разложения по системе базисных функций. Затем мы погружаем задачу в семейство краевых задач, зависящих от параметра гомотопии. Для вычисления волнового числа и профиля электромагнитного поля получается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Одно уравнение описывает зависимость волнового числа от геометрических параметров ПВЛС, остальные уравнения описывают эволюцию поля собственной моды. В данной работе мы расширяем метод гомотопии на задачи в цилиндрической геометрии.

1. Введение. Мы используем для построения точной модели метод проекционного сшивания полей, основанный на использовании метода Галеркина [1], [2]. Этот метод основан на разложении электрического и магнитного полей в ряды по собственным функциям поперечного сечения, и проекционном сшивании полей, гарантирующем точное соблюдение закона сохранения энергии для приближенного решения. Мы рассматриваем периодическую структуру, каждый период которой состоит из нескольких секций, соединенных фланцами.

2. Поле в продольно-однородных областях. Пусть внутри одной ячейки Ω периодической структуры $z \in [z_0, z_2]$. Мы рассматриваем монохроматические поля вида $(\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t), \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t)) = e^{-i\omega t}(\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r}))$, комплексные амплитуды $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ должны удовлетворять уравнениям Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = -i\kappa \mathbf{E}$, $\text{rot } \mathbf{E} = i\kappa \mathbf{H}$, условиям на стенках и условию квазипериодичности $\mathbf{E}(r, z+l) = e^{i\gamma l} \mathbf{E}(r, z)$, $\mathbf{H}(r, z+l) = e^{i\gamma l} \mathbf{H}(r, z)$, где γ есть параметр Флоке, который требуется найти. Для представления поля используем метод Галеркина. Следуя [1], используем термин «координатная система».

3. Координатная система. Исследуемая структура может быть представлена в виде последовательности продольно-однородных секций, соединенных фланцами. Поэтому сначала найдем структуру поля, зависящего по экспоненциальному закону от продольной координаты z : $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{e}(x, y)e^{\pm i\gamma z}$, $\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{h}(x, y)e^{\pm i\gamma z}$. Для компонент поля получим уравнения $\nabla_{\perp}^2 \mathbf{e} + \chi^2 \mathbf{e} = 0$, $\nabla_{\perp}^2 \mathbf{h} + \chi^2 \mathbf{h} = 0$, где $\chi^2 = \kappa^2 - \gamma^2$, $\nabla_{\perp} u = (u_x, u_y, 0)$. Выразим поперечные компоненты полей:

$$\mathbf{e}_{\perp} = -\frac{i\gamma}{\chi^2} \nabla_{\perp} \mathbf{e}_z + \frac{i\omega\mu}{\chi^2} [\mathbf{n}_z \times \nabla_{\perp} \mathbf{h}_z], \quad \mathbf{h}_{\perp} = -\frac{i\gamma}{\chi^2} \nabla_{\perp} \mathbf{h}_z - \frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2} [\mathbf{n}_z \times \nabla_{\perp} \mathbf{e}_z],$$

где $[\mathbf{n}_z \times \nabla_{\perp} u] = (-\partial u / \partial y, \partial u / \partial x, 0)$. Используем поля ТМ и ТЕ типов: $\mathbf{e}_{n,z}^{TM} = \varphi_n$,

$$\mathbf{e}_{n,\perp}^{TM} = -\frac{i\gamma}{\alpha_n^2} \nabla_{\perp} \varphi_n, \quad \mathbf{h}_{n,z}^{TM} = 0, \quad \mathbf{h}_{n,\perp}^{TM} = -\frac{i\omega\varepsilon}{\alpha_n^2} [\mathbf{n}_z \times \nabla_{\perp} \varphi_n], \quad \mathbf{e}_{n,z}^{TE} = 0, \quad \mathbf{e}_{n,\perp}^{TE} = \frac{i\omega\mu}{\beta_n^2} [\mathbf{n}_z \times \nabla_{\perp} \phi_n], \quad \mathbf{h}_{n,z}^{TE} = \phi_n,$$

$$\mathbf{h}_{n,\perp}^{TE} = -\frac{i\gamma}{\beta_n^2} \nabla_{\perp} \phi_n,$$

$$\begin{aligned}\overset{\leftarrow}{\mathbf{e}}_{\perp m}^{(j)}(r) &= \overset{\rightarrow}{\mathbf{e}}_{\perp m}^{(j)}(r) = \mathbf{e}_{\perp m}^{(j)}(r), \overset{\leftarrow}{\mathbf{e}}_{\perp m}^{(j,s)}(r) = \overset{\rightarrow}{\mathbf{e}}_{\perp m}^{(j,s)}(r) = \mathbf{e}_{\perp m}^{(j,s)}(r), \\ -\overset{\leftarrow}{\mathbf{h}}_{\perp m}^{(j)}(r) &= \overset{\rightarrow}{\mathbf{h}}_{\perp m}^{(j)}(r) = \mathbf{h}_{\perp m}^{(j)}(r), -\overset{\leftarrow}{\mathbf{h}}_{\perp m}^{(j,s)}(r) = \overset{\rightarrow}{\mathbf{h}}_{\perp m}^{(j,s)}(r) = \mathbf{h}_{\perp m}^{(j,s)}(r),\end{aligned}\quad (1)$$

для всех возможных индексов. В соответствии с методикой применения метода Галеркина в электродинамике, разработанной в [2], координатные функции должны удовлетворять условию ограниченности поля на оси и граничным условиям на внешней цилиндрической поверхности.

4. Поле в продольно однородных областях. Внутри коаксиального цилиндра $D_j^{(s)}$ поле определяется в виде разложения по бегущим влево и вправо собственным волнам:

$$\mathbf{G}(r, z) = \sum_{n=1}^{N_j^{(s)}} (\overset{\rightarrow}{\mathbf{g}}_n^{(j,s)}(r) A_n^{(j,s)} e^{i\gamma_n^{(j,s)}(z-z_j)} + \overset{\leftarrow}{\mathbf{g}}_n^{(j,s)}(r) B_n^{(j,s)} e^{-i\gamma_n^{(j,s)}(z-z_j)}), \quad (2)$$

$s = 0, \dots, S_j$, $z \in [r_{j,s}, \zeta_{j,s}]$, $r \in [r_{j,s}, \eta_{j,s}]$, $n = 1, \dots, N_j^{(s)}$, $\gamma_n^{(j)} = \sqrt{\kappa^2 - (\mu_n^{(j)})^2}$. Коэффициенты $A_n^{(j,s)}$ определяют амплитуды парциальных волн, бегущих в области $D_j^{(s)}$ слева направо, $B_n^{(j,s)}$ бегущих справа налево, $\overset{\rightarrow}{\mathbf{g}} = (\overset{\rightarrow}{\mathbf{e}}, \overset{\rightarrow}{\mathbf{h}})$, $\overset{\leftarrow}{\mathbf{g}} = (\overset{\leftarrow}{\mathbf{e}}, \overset{\leftarrow}{\mathbf{h}})$, стрелка показывает направление распространения волны. Обозначим также $V_n^{(j,s)} = A_n^{(j,s)} e^{i\gamma_n^{(j,s)}(\zeta_j - z_j)}$, $W_n^{(j,s)} = B_n^{(j,s)} e^{-i\gamma_n^{(j,s)}(\zeta_j - z_j)}$.

5. Проекционное сшивание полей на границах секций. Запишем проекционные условия сшивания полей на границе сложной секции $D_0^{(0,1)}$ (слева) и простой секции D_1 (справа), следуя методике, разработанной в [2]. Сначала для тангенциальной компоненты электрического поля $\mathbf{E}_{\perp}$ в сечении $z = \zeta_0 = z_1$. Учтем, что на фланцах $z = \zeta_j$, $j = 0$, $\rho_0^{(s)} < r < r_j^{(s)}$ электрическое поле $\mathbf{E}_{\perp}(r, \zeta_j) = 0$, внутри блоков $D_j^{(s)}$, $s \in \{0; 1\}$, выражение поперечной компоненты электрического и магнитного поля в сечении $z = \zeta_j$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\perp}(r, \zeta_j - 0) &= \sum_{n=1}^{N_j^{(s)}} (\overset{\rightarrow}{\mathbf{e}}_{\perp n}^{(j,s)}(r) V_n^{(j,s)} + \overset{\leftarrow}{\mathbf{e}}_{\perp n}^{(j,s)}(r) W_n^{(j,s)}), \quad r_j^{(s)} < r < \rho_j^{(s)}, \\ \mathbf{H}_{\perp}(r, \zeta_j - 0) &= \sum_{n=1}^{N_j^{(s)}} (\overset{\rightarrow}{\mathbf{h}}_{\perp n}^{(j,s)}(r) V_n^{(j,s)} + \overset{\leftarrow}{\mathbf{h}}_{\perp n}^{(j,s)}(r) W_n^{(j,s)}), \quad r_j^{(s)} < r < \rho_j^{(s)},\end{aligned}$$

в секции D_1 выражение поперечной компоненты в сечении $z = z_1$ имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\perp}(r, z_{j+1} + 0) &= \sum_{n=1}^{N_{j+1}} (\overset{\rightarrow}{\mathbf{e}}_{\perp n}^{(j+1)}(r) A_n^{(j+1)} + \overset{\leftarrow}{\mathbf{e}}_{\perp n}^{(j+1)}(r) B_n^{(j+1)}), \\ \mathbf{H}_{\perp}(r, z_{j+1} + 0) &= \sum_{n=1}^{N_{j+1}} (\overset{\rightarrow}{\mathbf{h}}_{\perp n}^{(j+1)}(r) A_n^{(j+1)} + \overset{\leftarrow}{\mathbf{h}}_{\perp n}^{(j+1)}(r) B_n^{(j+1)}),\end{aligned}$$

где $j = 0$. В качестве системы проекционных функций [1] используем $\mathbf{e}_{\perp m}^{(j+1)}(r)$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{S_j} \int_{r_j^{(s)}}^{\rho_j^{(s)}} [\sum_{n=1}^{N_j^{(s)}} (\overset{\rightarrow}{\mathbf{e}}_{\perp n}^{(j,s)}(r) V_n^{(j,s)} + \overset{\leftarrow}{\mathbf{e}}_{\perp n}^{(j,s)}(r) W_n^{(j,s)})] \mathbf{e}_{\perp m}^{(j+1)}(r) r dr = \\ = \int_{r_{j+1}}^{\eta_{j+1}} [\sum_{n=1}^{N_{j+1}} (\overset{\rightarrow}{\mathbf{e}}_{\perp n}^{(j+1)}(r) A_n^{(j+1)} + \overset{\leftarrow}{\mathbf{e}}_{\perp n}^{(j+1)}(r) B_n^{(j+1)})] \mathbf{e}_{\perp m}^{(j+1)}(r) r dr,\end{aligned}\quad (3)$$

где $m = m_1 = 1, \dots, N_1$, $j = 0$. То же сделаем для сшивания поперечной компоненты

магнитного поля. Для правой границы каждого из блоков $D_1^{(s)}$, $s = 0; 1$, в качестве системы проекционных функций используем координатные функции $\mathbf{h}_{\perp m}^{(j,s)}(r)$:

$$\begin{aligned} \int_{r_j^{(s)}}^{\rho_j^{(s)}} \left[\sum_{n=1}^{N_j^{(s)}} (\vec{\mathbf{h}}_{\perp n}^{(j,s)} V_n^{(j,s)} + \overleftarrow{\mathbf{h}}_{\perp n}^{(j,s)} W_n^{(j,s)}) \right] \mathbf{h}_{\perp m_{j,s}}^{(j,s)}(r) r dr = \\ = \int_{r_j^{(s)}}^{\rho_j^{(s)}} \left[\sum_{n=1}^{N_{j+1}} (\vec{\mathbf{h}}_{\perp n}^{(j+1)} A_n^{(j+1)} + \overleftarrow{\mathbf{h}}_{\perp n}^{(j+1)} B_n^{(j+1)}) \right] \mathbf{h}_{\perp m_{j,s}}^{(j,s)}(r) r dr, \end{aligned} \quad (4)$$

где $s = 0; 1$, $m_{s,j} = 1, \dots, N_j^{(s)}$, $j = 0$. Теперь пусть однородный блок слева прилегает к неоднородному блоку справа в сечении $\zeta_1 = z_2$. Аналогично получим

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{S_j} \int_{r_j^{(s)}}^{\rho_j^{(s)}} \left[\sum_{n=1}^{N_j^{(s)}} (\vec{\mathbf{e}}_{\perp n}^{(j,s)}(r) V_n^{(j,s)} + \overleftarrow{\mathbf{e}}_{\perp n}^{(j,s)}(r) W_n^{(j,s)}) \right] \mathbf{e}_{\perp m}^{(j-1)}(r) r dr = \\ = \int_{r_{j-1}}^{\eta_{j-1}} \left[\sum_{n=1}^{N_{j+1}} (\vec{\mathbf{e}}_{\perp n}^{(j-1)}(r) A_n^{(j-1)} + \overleftarrow{\mathbf{e}}_{\perp n}^{(j-1)}(r) B_n^{(j-1)}) \right] \mathbf{e}_{\perp m}^{(j-1)}(r) r dr, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \int_{r_j^{(s)}}^{\rho_j^{(s)}} \left[\sum_{n=1}^{N_j^{(s)}} (\vec{\mathbf{h}}_{\perp n}^{(j,s)} V_n^{(j,s)} + \overleftarrow{\mathbf{h}}_{\perp n}^{(j,s)} W_n^{(j,s)}) \right] \mathbf{h}_{\perp m_{j,s}}^{(j,s)}(r) r dr = \\ = \int_{r_j^{(s)}}^{\rho_j^{(s)}} \left[\sum_{n=1}^{N_{j-1}} (\vec{\mathbf{h}}_{\perp n}^{(j-1)} A_n^{(j-1)} + \overleftarrow{\mathbf{h}}_{\perp n}^{(j-1)} B_n^{(j-1)}) \right] \mathbf{h}_{\perp m_{j,s}}^{(j,s)}(r) r dr, \end{aligned} \quad (6)$$

для $m = 1, \dots, N_{j-1}$, $j = 2$, $s = 0; 1$, $m_{j,s} = 1, \dots, N_j^{(s)}$. Составим матрицы $P^{(j,s)}$ размера $[N_j, N^{(s,j)}]$, $Q^{(j,s)}$ размера $[N^{(s,j)}, N_j]$, элементы которых равны

$$\begin{aligned} P_{m,n}^{(j,s)} = \int_{r_j^{(s)}}^{\rho_j^{(s)}} \vec{\mathbf{e}}_{\perp n}^{(j,s)}(r) \mathbf{e}_{\perp m}^{(j+1)}(r) r dr, \quad m = 1, \dots, N_{j+1}, \quad n = 1, \dots, N_j^{(s)}, \\ Q_{m,n}^{(j,s)} = \int_{r_j^{(s)}}^{\rho_j^{(s)}} \overleftarrow{\mathbf{h}}_{\perp n}^{(j+1)}(r) \mathbf{h}_{\perp m_{j,s}}^{(j,s)}(r) r dr, \quad m = 1, \dots, N_j^{(s)}, \quad n = 1, \dots, N_{j+1}. \end{aligned}$$

Запишем (3), (4) в векторно-матричной форме:

$$\sum_{s=0}^{S_j} \mathbf{R}_j^{(s)} (\mathbf{V}_j^{(s)} + \mathbf{W}_j^{(s)}) = \mathbf{A}_{j+1} + \mathbf{B}_{j+1}, \quad \mathbf{V}_j^{(s)} - \mathbf{W}_j^{(s)} = \mathbf{Q}_{j+1}^{(s)} (\mathbf{A}_{j+1} - \mathbf{B}_{j+1}), \quad s = 0, \dots, S_j, \quad (7)$$

здесь записано N_j условий в первой строке и $N_j^{(0)} + \dots + N_j^{(S_j)}$ условий во второй строке. Из (5), (6) в векторно-матричной форме получим

$$\sum_{s=0}^{S_j} \mathbf{P}_j^{(s)} (\mathbf{A}_j^{(s)} + \mathbf{B}_j^{(s)}) = \mathbf{V}_{j-1} + \mathbf{W}_{j-1}, \quad \mathbf{A}_j^{(s)} - \mathbf{B}_j^{(s)} = \mathbf{S}_j^{(s)} (\mathbf{V}_{j-1} - \mathbf{W}_{j-1}), \quad s = 0, \dots, S_j. \quad (8)$$

Пусть $\zeta_j - z_j = d_j$ для $j = 1; 2$, $z_{j+1} - \zeta_j = g_j$ для $j = 0; 1; 2$. Тогда

$$\mathbf{V}_j^{(s)} = e^{i\mathbf{G}_j^{(s)} d_j} \mathbf{A}_j^{(s)}, \quad \mathbf{W}_j^{(s)} = e^{-i\mathbf{G}_j^{(s)} d_j} \mathbf{B}_j^{(s)}, \quad \mathbf{V}_j = e^{i\Upsilon_j g_j} \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{W}_j = e^{-i\Upsilon_j g_j} \mathbf{B}_j, \quad (9)$$

Условия Флоке дают такие уравнения для коэффициентных векторов на концах одной ячейки периодической структуры: $\mathbf{V}_2^{(0)} = e^{i\Upsilon l} \mathbf{A}_0^{(0)}$, $\mathbf{W}_2^{(0)} = e^{i\Upsilon l} \mathbf{B}_0^{(0)}$. Граничные условия на концах перекладины буквы Т имеют вид $e^{-i\mathbf{G}_0^{(1)} d_0} \mathbf{V}_0^{(1)} + e^{i\mathbf{G}_0^{(1)} d_0} \mathbf{W}_0^{(1)} = 0$,

$e^{iG_2^{(1)}d_2}\mathbf{A}_2^{(1)} + e^{-iG_2^{(1)}d_2}\mathbf{B}_2^{(1)} = 0$. Собирая (8-9), получим однородную линейную систему с квадратной матрицей, зависящей от параметров κ и γ , а также от всех геометрических размеров системы. Требуется найти все (или некоторые) значения γ , при которых задача имеет нетривиальные решения. Запишем эту задачу в виде $L(\gamma)u = 0$. Здесь γ есть неизвестное волновое число, L есть оператор краевой задачи на собственные значения, включающий граничные условия и условия Флоке, u вектор неизвестных.

6. Метод гомотопии. Для решения мы предлагаем метод, основанный на использовании гомотопии [3], т.е. погружения задачи о собственных колебаниях в семейство задач, зависящих от параметра, который мы будем называть параметром гомотопии и обозначать τ . Рассмотрим вместе с $L(\gamma)u = 0$ семейство краевых задач $M(\gamma, \tau)u(\tau) = 0$. Предполагаем, что $M(\gamma, 1) = L(\gamma)$ и оператор $M(\gamma, 0)$ таков, что задача $M(\gamma, 0)u = 0$ имеет известное решение u_0 (выражающееся аналитически через элементарные функции) и соответствующее значение спектрального параметра γ_0 . Для построения решения продифференцируем по τ :

$$M(du/d\tau) = -(\partial M / \partial \gamma)(d\gamma/d\tau)u - (\partial M / \partial \tau)u.$$

Заметим, что однородное уравнение $M(du/d\tau) = 0$ имеет нетривиальное решение $u(\tau)$. Поэтому неоднородное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда имеет место условие ортогональности правой части каждому из решений однородного уравнения. Отсюда получим задачу Коши для дифференциального уравнения: $d\gamma/d\tau = -((\partial M / \partial \gamma)u, u)^{-1}((\partial M / \partial \tau)u, u)$, $\gamma(0) = \gamma_0$. Метод гомотопии и метод проекционного сшивания позволяют строить эффективные алгоритмы численного и аналитического расчета собственных волн периодических лестничных структур. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00690-а).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гавурин М.К. Численные методы. М.: Наука, 1971.
- [2] Свешников А.Г. К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963. Т.3. С.314-326.
- [3] Касти Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. М.: Мир, 1976.