

## Рабочая программа дисциплины

### 1. Название дисциплины

Вариационные и проекционные методы решения задач вычислительной физики.

### 2. Лектор

*д.ф.м.н., профессор Быков Алексей Александрович (кафедра математики физического факультета МГУ).*

### 3. Аннотация дисциплины

Курс «Вариационные и проекционные методы решения задач вычислительной физики» (**ВПМ**) рассчитан на 1 семестр, по 2 лекционных часа в неделю. Он охватывает численные, аналитические, численно-аналитические и асимптотические вариационные методы (**ВМ**) и проекционные методы (**ПМ**) для решения задач, возникающих при исследовании математических моделей экспериментальной и теоретической физики. В рамках учебного курса **ВМП** мы рассматриваем линейные и нелинейные математические модели и их компьютерную реализацию для широкого круга физических процессов, описываемых дифференциальными и интегральными уравнениями, допускающими вариационную и проекционную формулировку. Рассматриваются как **ПМ** с полной дискретизацией, приводящие непосредственно к алгебраической системе большой размерности, так и различные варианты метода частичной дискретизации, приводящие к задачам Коши и краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений меньшей размерности, в том числе неполный метод Галеркина. Исследуются одномерные стационарные задачи, задачи о собственных колебаниях линейных объектов, одномерные, двумерные и трехмерные линейные и нелинейные нестационарные задачи. Рассматриваются как классические модели, основанные на эволюционных уравнениях, волновых уравнениях, уравнениях Лапласа и Пуассона и их обобщениях для неоднородных сред, так и линейные и нелинейные уравнения более сложных типов, описывающих распространение волн в нелинейных, стратифицированных средах, в жидкостях и газах. Большое внимание уделяется **ВМ** и **ПМ** методам вычислительной электродинамики, теплодинамики, теории наносистем и полупроводников, динамики жидкости и газа. В курсе рассматриваются также задачи на собственные значения, задачи расчета направляемых волн волноведущих систем, направляемых мод открытых волноводов. Курс основан на классическом понимании **ВМ** и **ПМ**, развитом в работах [1,4,6,8]. Одна из задач курса состоит также в том, чтобы познакомить слушателей с современным пониманием **ВМ** и **ПМ**, основанном на применении методов нелинейного функционального анализа [11]. Мы рассматриваем **ВМ** и **ПМ** в основном как средство решения математической модели. Математическая модель включает исследование существования и единственности решения, устойчивости решения по отношению к возмущениям данных задачи, представление решения в виде сходящейся в некотором смысле функциональной последовательности так называемых приближенных решений, исследование существования и единственности задачи для приближенного решения, аналитическое исследование скорости сходимости. Таким образом, в курсе будет дано также представление о **ВМ** и **ПМ** как о средстве исследования существования и единственности решения задач математической физики. В рамках курса **ВМП** рассматривается также компьютерная реализация интересующего нас класса методов. Компьютерное моделирование включает описание методики создания и тестирования эффективных компьютерных кодов. В рамках данного курса рассматривается также методика использования математических инструментов (MathCad, MatLab, Mathematica, Maple) для компьютерного моделирования указанного круга задач. В рамках данного курса рассматриваются также вариационные и проекционные методы решения конечно-разностных систем уравнений, уравнений метода

конечных элементов. Каждый слушатель в процессе самостоятельной работы выполняет несколько заданий по основным вопросам курса.

#### **4. Цели освоения дисциплины**

Данный курс нацелен на то, что прослушавший специалист сможет самостоятельно решать задачи вычислительной физики, самостоятельно находить, свободно читать и изучать литературу по данной теме.

#### **5. Задачи дисциплины**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен овладеть классическими и современными методами математического моделирования, получить навыки их применения для решения практических задач. Обучающийся осваивает теоретические основы и практические навыки применения вариационных и проекционных методов, необходимых в современной физике.

#### **6. Компетенции**

##### **6.1. Компетенции, необходимые для освоения дисциплины.**

ОНК-5, ОНК-6, ИК-1, ИК-3, ИК-4, ПК-1, ПК-2

##### **6.2. Компетенции, формируемые в результате освоения дисциплины.**

ОНК-5, ОНК-6, ПК-2, ПК-3, ПК-6

#### **7. Требования к результатам освоения содержания дисциплины**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен знать основные методы решения теоретических и прикладных задач вычислительной физики с помощью вариационных и проекционных методов, уметь формулировать строгую математическую модель соответствующей задачи с помощью вариационных и проекционных методов, уметь исследовать сформулированную модель на математическую непротиворечивость: однозначную разрешимость, корректность и устойчивость по входным данным, выбирать наиболее эффективные численные или аналитические методы исследования сформулированной модели, проводить необходимую для исследования серию вычислений или аналитические выкладки.

#### **8. Содержание и структура дисциплины**

##### **8.1. Распределение учебной нагрузки по видам образовательной активности**

| Вид работы                                                      | Семестр |   |  | Всего   |
|-----------------------------------------------------------------|---------|---|--|---------|
|                                                                 | 8       |   |  |         |
| <b>Общая трудоёмкость, акад. часов</b>                          | 108     |   |  | 108     |
| <b>Аудиторная работа:</b>                                       | 54      |   |  | 54      |
| Лекции, акад. часов                                             | 54      |   |  | 54      |
| Семинары, акад. часов                                           | -       | - |  | -       |
| Лабораторные работы, акад. часов                                | -       | - |  | -       |
| <b>Самостоятельная работа, акад. часов</b>                      | 54      |   |  | 54      |
| <b>Вид итогового контроля (зачёт, зачёт с оценкой, экзамен)</b> | Экзамен |   |  | Экзамен |

## 8.2. Структура и содержание дисциплины, недельный план

| Номер недели | Раздел программы                                                                                                                                                                                                                                                                          | Лекции | Семинары | Практические занятия | Самостоятельная работа |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|----------|----------------------|------------------------|
| 1            | Основные классы вариационных и проекционных методов. Методы моментов, Ритца, Галеркина. Методы с полной дискретизацией. Методы с частичной дискретизацией. Неполный метод Галеркина. Одномерные и многомерные задачи.                                                                     | 2 часа |          |                      | 2 часа                 |
| 2            | Краевая задача и оператор краевой задачи. Энергетическое пространство оператора. Энергетическое пространство положительно определенного оператора. Естественные граничные условия. Основные примеры положительно определенных операторов классической математической физики.              | 2 часа |          |                      | 2 часа                 |
| 3            | Энергетический метод для положительно определенного оператора. Функционал энергии. Теорема о минимуме функционала энергии. Обобщенное решение задачи о минимуме функционала энергии. Минимизирующая последовательность. Достаточные условия сходимости минимизирующей последовательности. | 2 часа |          |                      | 2 часа                 |
| 4            | Энергетический метод: Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные физические приложения энергетического метода. Пример: Изгиб и кручение балки переменного сечения.                                                                                       | 2 часа |          |                      | 2 часа                 |
| 5            | Энергетический метод: Решение краевых задач для уравнений эллиптического типа. Основные физические приложения энергетического метода. Пример: Изгиб и равновесие тонких упругих оболочек.                                                                                                 | 2 часа |          |                      | 2 часа                 |
| 6            | Энергетический метод для разностных краевых задач. Вариационно-разностные схемы.                                                                                                                                                                                                          | 2 часа |          |                      | 2 часа                 |
| 7            | Задачи на собственные значения. Метод моментов. Абстрактная линейная задача на собственные значения для самосопряженного оператора. Теоремы сходимости.                                                                                                                                   | 2 часа |          |                      | 2 часа                 |
| 8            | Решение краевых задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Ритца. Примеры: Задача устойчивости нагруженного стержня. Расчет собственных волн неоднородного в поперечном сечении волновода, одномерная задача.                                      | 2 часа |          |                      | 2 часа                 |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                         |        |  |  |        |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|--|--|--------|
| 9  | Решение краевых задач на собственные значения для уравнений эллиптического типа методом Ритца. Пример: Задача устойчивости нагруженной упругой оболочки. Расчет собственных волн неоднородного в поперечном сечении волновода, двумерная задача.        | 2 часа |  |  | 2 часа |
| 10 | Оценивание собственных значений положительно определенного оператора. Односторонние оценки. Двусторонние оценки. Методика численного оценивания. Пример: Расчет собственных колебаний двумерного резонатора с границей сложной формы, двумерная задача. | 2 часа |  |  | 2 часа |
| 11 | Метод Галеркина для интегрального уравнения Фредгольма. Физические приложения: внутренние и внешние краевые задачи.                                                                                                                                     | 2 часа |  |  | 2 часа |
| 12 | Метод Галеркина для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.                                                                                                                                                                  | 2 часа |  |  | 2 часа |
| 13 | Метод Галеркина для решения краевых задач для уравнений эллиптического типа.                                                                                                                                                                            | 2 часа |  |  | 2 часа |
| 14 | Метод Галеркина для решения начально-краевых задач для эволюционных уравнений.                                                                                                                                                                          | 2 часа |  |  | 2 часа |
| 15 | Неполный метод Галеркина (метод частичной дискретизации) для решения задач в ограниченной области. Метод Галеркина в неограниченной области.                                                                                                            | 2 часа |  |  | 2 часа |
| 16 | Метод Галеркина для квазилинейных эволюционных уравнений. Метод Галеркина для нелинейных уравнений Соболевского типа.                                                                                                                                   | 2 часа |  |  | 2 часа |
|    |                                                                                                                                                                                                                                                         |        |  |  |        |

## **9. Место дисциплины в структуре ООП ВПО**

### **9.1. Профиль, к которому относится данная дисциплина**

Дисциплина является Дисциплиной профиля (обязательная).

### **9.2. Блок, к которому относится данная дисциплина**

Вариативная часть, профессиональный блок, дисциплина профиля (обязательная).

### **9.3. Связи с другими дисциплинами**

Некоторые элементы данного курса связаны с дисциплиной «Функциональный анализ». Все необходимые сведения из функционального анализа даются в лекционной форме.

#### **9.3.1. Дисциплины и практики, которые должны быть освоены для начала освоения данной дисциплины**

«Математический анализ», «Линейная алгебра», «Дифференциальные уравнения», «Методы математической физики».

#### **9.3.2. Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее**

Данная дисциплина предусмотрена в 8-ом семестре, ее освоение необходимо для научно-исследовательской работы, курсовой работы, преддипломной практики, дипломной работы.

## **10. Образовательные технологии**

Курс рассчитан на применение современных визуальных средств изложения материала. Изложение сопровождается также демонстрацией работы компьютерных кодов, реализующих основные задачи курса ВПМ.

## **11. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

### **11.1. Текущая аттестация**

#### **11.1.1. Форма и методика проведения текущей аттестации**

Текущая аттестация проводится еженедельно. Критерии формирования оценки – посещаемость занятий, активность студентов на лекциях, уровень подготовки к лекциям, собеседование после лекций, выполнение домашнего задания.

#### **11.1.2. Список контрольных вопросов промежуточной аттестации**

Список контрольных вопросов к текущей аттестации соответствует учебному плану (8.1).

### **11.2. Промежуточная аттестация**

#### **11.2.1. Форма и методика проведения промежуточной аттестации**

проводится на 9 неделе в форме контрольной работы с оценкой. Критерии формирования

оценки – уровень знаний пройденной части курса.

### 11.2.2. Список контрольных вопросов промежуточной аттестации

Символом  $\blacklozenge$  отмечены вопросы теоретического характера.

Символом  $\star$  отмечены вопросы прикладного характера, демонстрирующие применение методов к практически важным задачам вычислительной физики.

Символом  $\bullet$  отмечены задачи, в которых решение должно быть получено аналитически и доведено до числового значения.

Символом  $\blacksquare$  отмечены задачи, в которых решение должно быть получено с применением математического инструмента и доведено до числового значения.

#### 11.2.2.1. Операторные уравнения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

1.  $\blacklozenge$  Сформулируйте постановку задачи о решении операторного уравнения.
2.  $\blacklozenge$  Сформулируйте определение оператора краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке.
3.  $\star$  Сформулируйте определение оператора краевой задачи первого рода (Дирихле) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке.
4.  $\star$  Сформулируйте определение оператора краевой задачи второго рода (Неймана) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке.
5.  $\star$  Сформулируйте определение оператора краевой задачи третьего рода для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке.

#### 11.2.2.2. Положительно определенные операторы краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

6.  $\blacklozenge$  Сформулируйте определение положительно определенного оператора.
7.  $\star$  +++Сформулируйте постановку задачи, сформулируйте и докажите теорему о достаточных условиях симметрии и положительной определенности оператора краевой задачи первого рода (Дирихле) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке. Найдите константу положительной определенности.
8.  $\star$  +++Сформулируйте постановку задачи, сформулируйте и докажите теорему о достаточных условиях симметрии и положительной определенности оператора краевой задачи второго рода (Неймана) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке. Найдите константу положительной определенности.
9.  $\star$  Сформулируйте и докажите теорему о достаточных условиях положительной определенности оператора краевой задачи третьего рода для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке.

#### 11.2.2.3. Метод моментов и метод Галеркина

10.  $\blacklozenge$  Сформулируйте определение координатной системы для решения операторного уравнения методом моментов.
11.  $\blacklozenge$  +++Сформулируйте алгоритм метода моментов для решения операторного уравнения.
12.  $\blacklozenge$  +++Сформулируйте и докажите теорему о равносильности равенства  $P_n z = 0$  системе равенств  $(z, \varphi_m) = 0$ ,  $m = 1, \dots, n$ , где  $P_n$  есть оператор проектирования на линейную оболочку  $L(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  конечной подсистемы координатной системы.
13.  $\blacklozenge$  Выведите и запишите систему линейных алгебраических уравнений метода моментов для решения операторного уравнения.

14. ♦ В чем состоит разница между методом моментов и методом Галеркина?
15. ♦ Выведите и запишите систему линейных алгебраических уравнений метода Галеркина для решения операторного уравнения.
16. ♦ Сформулируйте и докажите теорему о двух координатных системах.

#### **11.2.2.4. Алгоритм метода моментов и метода Галеркина для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих физические приложения**

17. ★ Сформулируйте алгоритм решения краевой задачи первого рода (Дирихле) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке методом Галеркина. Приведите пример координатной системы. Сформулируйте теорему о достаточных условиях сходимости Галеркинских приближений.
18. ★ Сформулируйте алгоритм решения краевой задачи второго рода (Неймана) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке методом Галеркина. Приведите пример координатной системы. Сформулируйте теорему о достаточных условиях сходимости Галеркинских приближений.
19. ★ Сформулируйте алгоритм решения краевой задачи с квазипериодическими условиями (условиями Флоке) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке методом Галеркина. Приведите пример координатной системы.
20. ● Решите методом Галеркина задачу  $-u'' + (1+x)u = 1$ ,  $0 < x < 1$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$ , используя координатную систему  $\varphi_1(x) = x(1-x)$  для  $n = 1$ .
21. ● Решите методом Галеркина задачу  $-u'' + (1+\sin x)u = 1$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(\pi) = 0$ , используя координатную систему  $\varphi_1(x) = \sin x$  для  $n = 1$ .

#### **11.2.2.4. Асимптотические методы решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке**

22. ★ Постройте асимптотическое разложение решения краевой задачи первого рода для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке с малым параметром  $\varepsilon$ ,  $-u'' + (r_0(x) + \varepsilon r_1(x))u = f(x)$ ,  $0 < x < b$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(b) = 0$ , в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Найдите нулевой и первый члены ряда для случая  $r_0(x) = \text{const}$ . Используйте метод Галеркина.
23. ★ Постройте асимптотическое разложение решения краевой задачи с квазипериодическими условиями (условиями Флоке) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке с малым параметром  $\varepsilon$ ,  $-u'' + (r_0(x) + \varepsilon r_1(x))u = f(x)$ ,  $0 < x < b$ ,  $u(b) = e^{i\tau b}u(0)$ ,  $u'(b) = e^{i\tau b}u'(0)$ , в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Найдите нулевой и первый члены ряда для случая  $r_0(x) = \text{const}$ . Используйте метод Галеркина.

#### **11.2.2.5. Вариационный метод**

24. ♦ Сформулируйте постановку задачи минимизации функционала.
25. ♦ Сформулируйте определение ограниченного функционала.
26. ♦ Сформулируйте теорему об ограниченности снизу функционала  $F(x) = g(x) - 2lx$  для квадратичного функционала  $g(x)$  и линейного функционала  $lx$ .
27. ♦ Сформулируйте определение минимизирующей последовательности.

28. ♦ Сформулируйте и докажите теорему о минимизирующей последовательности для ограниченного снизу функционала.  
29. ♦ Сформулируйте и докажите теорему о минимизирующей последовательности для положительно определенного функционала.

#### **11.2.2.7. Метод Рунца**

30. ♦ Сформулируйте метод Рунца минимизации функционала.  
31. ♦ Сформулируйте и докажите свойства линейного функционала на подпространстве – линейной оболочке конечной координатной подсистемы.  
32. ♦ Сформулируйте и докажите свойства квадратичного функционала на подпространстве – линейной оболочке конечной координатной подсистемы.  
33. ♦ Сформулируйте и докажите свойства функционала  $F(x) = g(x) - 2lx$  на подпространстве – линейной оболочке конечной координатной подсистемы.  
34. ♦ Выведите и запишите систему линейных алгебраических уравнений, равносильную методу Рунца для решения задачи минимизации функционала.

#### **11.2.2.7. Метод наименьших квадратов**

35. ♦ Сформулируйте метод наименьших квадратов для решения операторного уравнения.  
36. ♦ Сформулируйте метод Рунца для решения задачи минимизации **функционала наименьших квадратов** для решения операторного уравнения.  
37. ♦ Сформулируйте определение пространства образов координатной системы для решения операторного уравнения.  
38. ♦ Сформулируйте и докажите теорему о равносильности (1) условия принадлежности элемента  $x$  гильбертова пространства  $H$  замкнутой линейной оболочке координатной системы и (2) сходимости последовательности результата действия оператора  $P_n$  проектирования в пространстве  $H$  элемента  $x$  на линейную оболочку конечномерной подсистемы координатной системы.  
39. ♦ Сформулируйте и докажите теорему о невязке операторного уравнения и принадлежности правой части операторного уравнения линейной оболочке образов координатной системы.  
40. ♦ Сформулируйте и докажите теорему о невязке операторного уравнения и полноте системы образов координатной системы.  
41. ♦ Сформулируйте и докажите теорему о сходимости метода Рунца–наименьших квадратов для решения операторного уравнения для случая существования ограниченного обратного оператора.

### **11.3. Итоговая аттестация**

#### **11.3.1. Форма и методика проведения итоговой аттестации**

Итоговая аттестация проводится в форме экзамена.

#### **11.3.2. Список контрольных вопросов итоговой аттестации**

##### **11.3.2.1. Энергетический метод**

42. ♦ Сформулируйте определение энергетического скалярного произведения для положительно определенного симметрического оператора в гильбертовом пространстве.

- 43. ♦ Докажите теорему о корректности определения энергетического скалярного произведения для положительно определенного симметрического оператора в гильбертовом пространстве.
- 44. ♦ +++Сформулируйте определение энергетической нормы для положительно определенного симметрического оператора в гильбертовом пространстве.
- 45. ♦ +++Сформулируйте определение энергетического пространства для положительно определенного оператора в гильбертовом пространстве.
- 46. ♦ +++Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности нормы в исходном гильбертовом пространстве относительно энергетической нормы для положительно определенного оператора.
- 47. ♦ +++Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности энергетической нормы элемента  $u$  относительно нормы элемента  $Au$  в исходном гильбертовом пространстве для положительно определенного оператора.

#### **11.3.2.1. Энергетический метод и метод Рунца**

- 48. ♦ Сформулируйте определение функционала энергии для решения операторного уравнения.
- 49. ♦ +++Сформулируйте метод Рунца минимизации функционала энергии для решения операторного уравнения.
- 50. ♦ Выведите и запишите систему линейных алгебраических уравнений, равносильную методу Рунца для решения задачи минимизации функционала энергии для решения операторного уравнения.
- 51. ♦ Сформулируйте и докажите теорему об элементе, на котором достигает своего наименьшего значения функционал энергии при проектировании в энергетическом пространстве на линейную оболочку конечной подсистемы координатной системы.
- 52. ♦ +++Сформулируйте и докажите теорему о сходимости в энергетической метрике метода Рунца решения операторного уравнения.
- 53. ♦ +++Сформулируйте и докажите теорему о сходимости в метрике исходного гильбертова пространства метода Рунца решения операторного уравнения.
- 54. ♦ Сформулируйте и докажите теорему о сходимости метода Рунца решения операторного уравнения в метрике исходного гильбертова пространства для случая координатной системы, полной в энергетическом пространстве.

#### **11.3.2.1. Методика проверки полноты координатной системы в энергетическом пространстве**

- 55. ♦ Сформулируйте и докажите теорему о достаточных условиях полноты координатной системы в энергетическом пространстве (операторная теорема сравнения).
- 56. ♦ Сформулируйте и докажите теорему о достаточных условиях полноты координатной системы в энергетическом пространстве (полнота пространства образов).

#### **11.3.2.1. Операторные уравнения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа**

- 57. ★ Сформулируйте определение оператора краевой задачи первого рода (Дирихле) для дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа в области на плоскости, ограниченной кусочно-гладкой кривой.
- 58. ★ Сформулируйте определение оператора краевой задачи второго рода (Неймана) для дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа в области на плоскости, ограниченной кусочно-гладкой кривой.

59. ★ Сформулируйте определение оператора краевой задачи третьего рода для дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа в области на плоскости, ограниченной кусочно-гладкой кривой.

**11.3.2.2. Положительно определенные операторы краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа**

60. ★ Сформулируйте и докажите (1) теорему о достаточных условиях симметрии и (2) теорему о достаточных условиях положительной определенности оператора краевой задачи первого рода (Дирихле) для уравнения  $-u_{xx} - u_{yy} + ru = f$  в области на плоскости, ограниченной кусочно-гладкой кривой.
61. ★ Сформулируйте и докажите (1) теорему о достаточных условиях симметрии и (2) теорему о достаточных условиях положительной определенности оператора краевой задачи второго рода (Неймана) для уравнения  $-u_{xx} - u_{yy} + ru = f$  в области на плоскости, ограниченной кусочно-гладкой кривой.
62. ★ Сформулируйте и докажите (1) теорему о достаточных условиях симметрии и (2) теорему о достаточных условиях положительной определенности оператора краевой задачи третьего рода для уравнения  $-u_{xx} - u_{yy} + ru = f$  в области на плоскости, ограниченной кусочно-гладкой кривой.

**11.2.2.4. Алгоритм метода моментов и метода Галеркина для решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа**

63. ★ Сформулируйте алгоритм решения краевой задачи первого рода (Дирихле) для дифференциального уравнения  $-u_{xx} - u_{yy} + ru = f$  в области на плоскости, ограниченной кусочно-гладкой кривой методом Галеркина. Приведите пример координатной системы для прямоугольной области. Сформулируйте теорему о достаточных условиях сходимости Галеркинских приближений.
64. ★ Сформулируйте алгоритм решения краевой задачи второго рода (Неймана) для дифференциального уравнения  $-u_{xx} - u_{yy} + ru = f$  в области на плоскости, ограниченной кусочно-гладкой кривой методом Галеркина. Приведите пример координатной системы для прямоугольной области. Сформулируйте теорему о достаточных условиях сходимости Галеркинских приближений.

**11.2.2.4. Алгоритм метода Галеркина для решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа**

65. ★ Сформулируйте алгоритм решения начально-краевой задачи на отрезке с граничными условиями первого рода (Дирихле) для уравнения теплопроводности методом Галеркина. Приведите пример координатной системы. Выведите и запишите задачу Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.
66. ★ Сформулируйте алгоритм решения начально-краевой задачи на отрезке с граничными условиями второго рода (Неймана) для уравнения теплопроводности методом Галеркина. Приведите пример координатной системы. Выведите и запишите задачу Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

**11.2.2.4. Алгоритм метода Галеркина для решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа**

67. ★ Сформулируйте алгоритм решения начально-краевой задачи на отрезке с граничными условиями первого рода (Дирихле) для уравнения колебаний методом Галеркина. Приведите пример координатной системы. Выведите и запишите задачу Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.
68. ★ Сформулируйте алгоритм решения начально-краевой задачи на отрезке с граничными условиями второго рода (Неймана) для уравнения колебаний методом Галеркина. Приведите пример координатной системы. Выведите и запишите задачу Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

#### **11.2.2.4. Алгоритм метода Галеркина для решения краевых задач для обобщенного уравнения Гельмгольца**

69. ★ Сформулируйте алгоритм решения краевой задачи в прямоугольной области на плоскости с граничными условиями первого рода (Дирихле) для обобщенного уравнения Гельмгольца  $-u_{xx} - u_{yy} + ru = f$  методом Галеркина. Приведите пример координатной системы. Выведите и запишите систему линейных алгебраических уравнений метода Галеркина. Сформулируйте теорему о достаточных условиях сходимости Галеркинских приближений.

#### **11.2.2.4. Алгоритм неполного метода Галеркина для решения краевых задач для обобщенного уравнения Гельмгольца**

70. ★ Сформулируйте алгоритм решения краевой задачи в прямоугольной области на плоскости с граничными условиями первого рода (Дирихле) для обобщенного уравнения Гельмгольца  $-u_{xx} - u_{yy} + ru = f$  с помощью неполного метода Галеркина. Приведите пример координатной системы. Выведите и запишите систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений неполного метода Галеркина. Сформулируйте теорему о достаточных условиях сходимости Галеркинских приближений.

#### **11.2.2.4. Задачи на собственные значения для операторных уравнений**

71. ◆ Сформулируйте предположения о свойствах оператора для задачи на собственные значения, в рамках которых проводится обоснование метода Галеркина. Сформулируйте и докажите теорему о выражении энергетической нормы и энергетического скалярного произведения через собственные векторы и собственные значения.
72. ◆ Сформулируйте и докажите теорему об экстремальном свойстве наименьшего собственного значения для задачи на собственные значения для линейного операторного уравнения. Сформулируйте и докажите теорему об экстремальном свойстве  $k$ -го собственного значения.
73. ◆ Сформулируйте и докажите теорему об максимально-минимальном свойстве  $k$ -го собственного значения для задачи на собственные значения для линейного операторного уравнения.
74. ◆ Сформулируйте алгоритм решения задачи на собственные значения для операторного уравнения методом Галеркина. Выведите и запишите систему линейных алгебраических уравнений, включающую спектральный параметр. Сформулируйте определение сходимости.
75. ◆ Сформулируйте и докажите теорему о монотонности приближения к точному собственному значению для задачи на собственные значения операторного уравнения, решаемой методом Галеркина.

76. ♦ Сформулируйте теорему о достаточных условиях сходимости Галеркинских приближения для собственных значений операторного уравнения. Поясните проблемы, возникающие при установлении сходимости собственных элементов.

#### 11.2.2.4. Задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений

77. ★ Сформулируйте алгоритм решения краевой задачи на собственные значения для обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке с однородными граничными условиями первого рода методом Галеркина. Приведите пример координатной системы. Выведите и запишите систему линейных алгебраических уравнений, включающую спектральный параметр.
78. ● Решите методом Галеркина задачу на собственные значения  $-u'' + (1 + \sin x)u = \Omega^2 u$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(\pi) = 0$ , используя координатную систему  $\varphi_1(x) = \sin x$  для  $n = 1$ .
79. ● Решите методом Галеркина задачу на собственные значения  $-u'' + (1 + x)u = \Omega^2 u$ ,  $0 < x < 1$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(1) = 0$ , используя координатную систему  $\varphi_1(x) = x(1 - x)$  для  $n = 1$ .

#### 11.2.2.4. Задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений в частных производных

80. ★ Сформулируйте алгоритм решения краевой задачи на собственные значения с однородными граничными условиями первого рода для уравнения  $-u_{xx} - u_{yy} + ru = \Omega^2 u$  в области на плоскости, ограниченной кусочно-гладкой кривой, методом Галеркина, где  $\Omega$  спектральный параметр. Сформулируйте определение сходимости. Приведите пример координатной системы для прямоугольной области. Выведите и запишите систему линейных алгебраических уравнений, включающую спектральный параметр.
81. ★ Сформулируйте алгоритм решения задачи на собственные значения с однородными граничными условиями первого рода для уравнения  $u_{xx} + u_{yy} + r(x)u = 0$  в полосе  $0 < x < a$  на плоскости, методом Галеркина, причем ищутся только решения вида бегущей волны,  $u(x, y) = v(x)e^{i\gamma y}$ , где  $\gamma$  спектральный параметр. Приведите пример координатной системы. Выведите и запишите систему линейных алгебраических уравнений, включающую спектральный параметр.

#### 11.2.2.4. Асимптотические методы для решения задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений

82. ★ Постройте асимптотическое разложение решения краевой задачи на собственные значения с граничными условиями первого рода для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке с малым параметром  $\varepsilon$ ,  $u'' + \Omega^2(r_0(x) + \varepsilon r_1(x))u = 0$ ,  $0 < x < b$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(b) = 0$ , в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Найдите нулевой и первый члены ряда для случая  $r_0(x) = \text{const}$ . Используйте метод Галеркина.
83. ★ Постройте асимптотическое разложение решения краевой задачи с квазипериодическими условиями (условиями Флоке) для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке с малым параметром  $\varepsilon$ ,  $u'' + \Omega^2(r_0(x) + \varepsilon r_1(x))u = 0$ ,

$0 < x < b$ ,  $u(b) = e^{i\tau b} u(0)$ ,  $u'(b) = e^{i\tau b} u'(0)$ , в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Найдите нулевой и первый члены ряда для случая  $r_0(x) = \text{const}$ . Используйте метод Галеркина.

#### **11.2.2.4. Асимптотические методы для решения задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений в частных производных**

84. \* Постройте асимптотическое разложение решения краевой задачи первого рода для уравнения  $u_{xx} + u_{yy} + \Omega^2 (r_0(x, y) + \varepsilon r_1(x, y)) u = f(x, y)$ ,  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ ,  $u|_{\Gamma} = 0$ , в ряд по степеням малого параметра. Найдите нулевой и первый члены ряда для случая  $r_0(x, y) = \text{const}$ . Используйте метод Галеркина.

## **12. Учебно-методическое обеспечение дисциплины**

### **12.1. Основная литература**

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. - 512 с.
2. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.
3. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений. М., Наука, 1971.
4. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. - 416 с.
5. Struwe M. Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems. Springer, 2007, 302p.
6. Гулин А.В., Самарский А.А. Численные методы. "Наука", Москва, 1989.
7. Blanchard P., Brüning E. Variational methods in mathematical physics. Springer-Verlag, 1992, 420 p.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. "Наука", Москва, 1987.
9. Komzsik L. Applied Calculus of Variations for Engineers. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. - 170 p.
10. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967. - 460 с.
11. Корпусов М.О., Свешников А.Г. Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике. М., 2011.
12. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., Государственное изд-во физико-математической литературы, 1962.

### **12.2. Дополнительная литература**

13. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФизМатЛит, 2002. - 488 с.

### **12.3. Основные учебно-методические работы**

14. Fletcher C.A.J. Computational Galerkin Methods. Springer-Verlag 1984.
15. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988.

### **12.4. Основные научные статьи**

16. Свешников А.Г. К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах. - Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963. Т.3. N2. С.314-326.
17. Свешников А.Г. Неполный метод Галеркина. - Докл. АН СССР, 1977. Т.236. N 5. С.1076-1079.

## 12.4. Рекомендуемые источники для самостоятельного чтения

Символом ★ отмечены ссылки на дополнительную литературу, которые можно использовать для изучения предмета на более высоком уровне. .

|   | Раздел программы                                                                                                                                                                                                                                                                          | Рекомендуемые источники                                                                                                                  |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Основные классы вариационных и проекционных методов. Методы моментов, Ритца, Галеркина. Методы с полной дискретизацией. Методы с частичной дискретизацией. Неполный метод Галеркина. Одномерные и многомерные задачи.                                                                     | Канторович, Крылов-1962, стр. 278-282.<br>Марчук, Агошков-1981, стр. 21-23.<br>Гавурин-1971, стр. 44-51.<br>★Треногин-2002, стр.323-330. |
| 2 | Краевая задача и оператор краевой задачи. Энергетическое пространство оператора. Энергетическое пространство положительно определенного оператора. Естественные граничные условия. Основные примеры положительно определенных операторов классической математической физики.              | Михлин-1970, стр. 62-75.<br>Гавурин-1971, стр. 69-76.                                                                                    |
| 3 | Энергетический метод для положительно определенного оператора. Функционал энергии. Теорема о минимуме функционала энергии. Обобщенное решение задачи о минимуме функционала энергии. Минимизирующая последовательность. Достаточные условия сходимости минимизирующей последовательности. | Михлин-1970, стр. 86-94.<br>Гавурин-1971, стр. 69-76.                                                                                    |
| 4 | Энергетический метод: Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные физические приложения энергетического метода.                                                                                                                                           | Михлин-1970, стр. 110-117.<br>Канторович, Крылов-1986, стр. 282-292.<br>Гавурин-1971, стр. 76-86.                                        |
| 5 | Энергетический метод: Решение краевых задач для уравнений эллиптического типа.                                                                                                                                                                                                            | Михлин-1970, стр. 124-135.<br>Канторович, Крылов-1986, стр. 292-302.<br>Гавурин-1971, стр. 86-96.                                        |
| 6 | Энергетический метод для разностных краевых задач. Вариационно-разностные схемы.                                                                                                                                                                                                          | Михлин-1970, стр. 195-108.<br>Марчук, Агошков-1981, стр. 56-59.<br>Марчук, Агошков-1981, стр. 182-200.                                   |
| 7 | Задачи на собственные значения. Метод моментов. Абстрактная линейная задача на собственные значения для самосопряженного оператора. Теоремы сходимости.                                                                                                                                   | Михлин-1970, стр. 207-227.<br>Канторович, Крылов-1986, стр. 312-322.<br>Марчук, Агошков-1981, стр. 60-63.<br>Гавурин-1971, стр. 116-122. |

|    |                                                                                                                                                  |                                                                                                                                  |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 8  | Решение краевых задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге.                                         | Михлин-1970, стр. 237-246.<br>Флетчер-1988, стр. 14-24.<br>Марчук, Агошков-1981, стр. 160-169.                                   |
| 9  | Решение краевых задач на собственные значения для уравнений эллиптического типа методом Рунге.                                                   | Михлин-1970, стр. 2249-254.<br>Флетчер-1988, стр. 73-78.<br>Марчук, Агошков-1981, стр. 182-200.                                  |
| 10 | Оценивание собственных значений положительно определенного оператора. Односторонние оценки. Двусторонние оценки. Методика численного оценивания. | Михлин-1970, стр. 213-227.<br>Михлин-1970, стр. 340-346.<br>Гавурин-1971, стр. 123-129.                                          |
| 11 | Метод Галеркина для интегрального уравнения Фредгольма. Физические приложения: внутренние и внешние краевые задачи.                              | Флетчер-1988, стр. 208-217.<br>Марчук, Агошков-1981, стр. 230-237.<br>*Треногин-2002, стр.334-335.                               |
| 12 | Метод Галеркина для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.                                                           | Гавурин-1971, стр. 76-86.<br>*Треногин-2002, стр.331-333.                                                                        |
| 13 | Метод Галеркина для решения краевых задач для уравнений эллиптического типа.                                                                     | Флетчер-1988, стр. 265-270.<br>Марчук, Агошков-1981, стр. 182-200.<br>*Треногин-2002, стр.332-333.                               |
| 14 | Метод Галеркина для решения начально-краевых задач для эволюционных уравнений.                                                                   | Гавурин-1971, стр. 112-116.<br>Флетчер-1988, стр. 276-280.<br>Флетчер-1988, стр. 312-314.<br>Марчук, Агошков-1981, стр. 205-218. |
| 15 | Неполный метод Галеркина (метод частичной дискретизации) для решения задач в ограниченной области. Метод Галеркина в неограниченной области.     | Свешников-1963, стр. 314-326.<br>Свешников-1977, стр. 1076-1079.                                                                 |
| 16 | Метод Галеркина для квазилинейных эволюционных уравнений. Метод Галеркина для нелинейных уравнений Соболевского типа.                            | Корпусов, Свешников-2011.                                                                                                        |
| 17 | Обзор направлений развития метода Галеркина. Метод наименьших квадратов. Вариационно-разностные методы. Понятие: метод конечных элементов.       | *Треногин-2002, стр.330-331.<br>*Треногин-2002, стр.335-338.<br>*Треногин-2002, стр.339-340.                                     |
|    |                                                                                                                                                  |                                                                                                                                  |

### 13. Учебно-методическое обеспечение дисциплины в интернет

abkov.ru

