

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЖЕСТКОСТИ ШПРЕНГЕЛЬНОЙ ФЕРМЫ

*Рассмотрена плоская балочная ферма, усиленная дополнительными стойками и раскосами. Выводится точная аналитическая зависимость прогиба статически определимой фермы от ее размеров, нагрузки и числа панелей. Рассматривается равномерное нагружение по верхнему поясу, нижнему и сосредоточенной силой в середине пролета. Для определения усилий в стержнях используется метод вырезания узлов, реализованный в программе, написанной в системе компьютерной математики Maple. Обобщение решения на произвольное число панелей производится методом индукции. Выводится рекуррентное уравнение, которому удовлетворяет последовательность коэффициентов. В системе компьютерной математики находится его решение. Полученная зависимость прогиба от числа панелей имеет минимум, позволяющий оптимизировать конструкцию по весу. Находятся формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях. Анализируются асимптотические свойства решений.*

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, индукция, Maple, аналитическое решение

Ферма с треугольной решеткой (рис. 1) усилена шпренгельными элементами. Ставится задача вывода аналитической зависимости прогиба фермы в середине пролета от числа панелей. Применяется алгоритм, предложенный в [1].

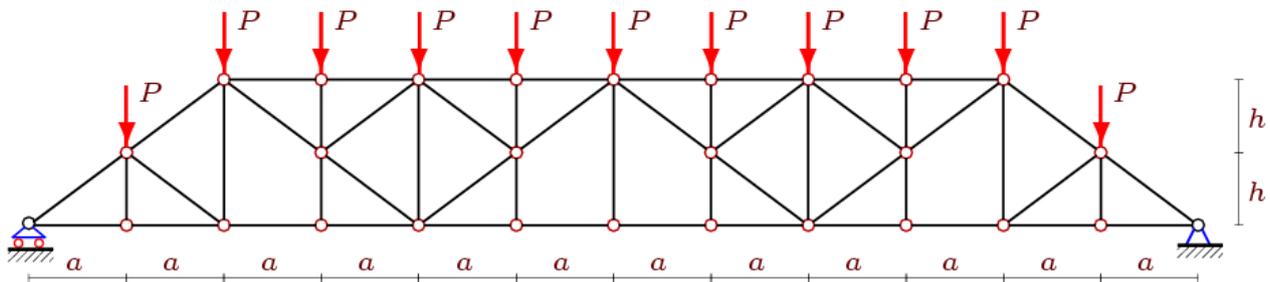


Рисунок 1 – Ферма,  $n=3$

В ферме с  $n$  панелями содержится  $10n-2$  шарниров и  $m=20n+4$  стержней вместе с тремя опорными стержнями, два из которых моделируют правую неподвижную шарнирную опору, один — левую подвижную. Усилия в стержнях фермы одновременно с реакциями опор определяются методом вырезания узлов, составлением общей для всей фермы системы уравнений равновесия узлов в проекциях на оси координат. Матрица системы состоит из направляющих косинусов усилий. Для их вычисления в программу вводятся координаты узлов. Приведем характерный фрагмент программы, написанный на языке системы Maple (рис. 2). Начало координат находится в левой опоре:

```
> for i to 4*n+1 do x[i]:=a*(i-1); y[i]:=0; od:
> for i to 4*n-3 do x[i+4*n+1]:=a*i+a; y[i+4*n+1]:=2*h; od:
> for i to 2*n do x[i+8*n-2]:=2*a*i-a; y[i+8*n-2]:=h; od:
```

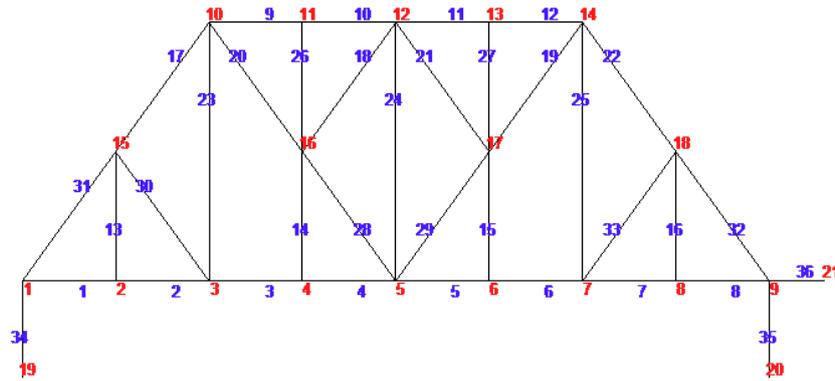


Рисунок 2 – Нумерация узлов и стержней,  $n=2$

Конфигурация решетки фермы вводится специальными векторами, содержащими номера концов соответствующих стержней. Стержни нижнего пояса, например, вводятся так

```
> for i to 4*n do N[i]:= [i,i+1]; od:
```

Матрица  $G$  направляющих косинусов заполняется в цикле по числу стержней  $m$ . Учитывается, что направляющие косинусы противоположных концов одного стержня имеют разные знаки

```
> for i to m do
>   Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
>   Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
> L[i]:=subs(a^2+h^2=c^2,sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2));
> for j to 2 do
>   jj:=2*N[i][2]-2+j:
>   if jj<=m then G[jj,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
>   jj:=2*N[i][1]-2+j:
>   if jj<=m then G[jj,i]:= Lxy[j]/L[i]: fi;
> od;
> od:
```

### Решение

Решение в системе компьютерной математики Maple дает символьные выражения для усилий, позволяющие по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} \frac{S_i s_i l_i}{EF},$$

получить искомую формулу для перемещения. Введены обозначения:  $S_i$  – усилие в стержне  $i$  от действия внешней нагрузки,  $s_i$  – усилие в стержне  $i$  от действия единичной вертикальной силы, приложенной в середине пролета к узлу нижнего пояса,  $EF$  – жесткость стержней,  $l_i$  – их длины. Суммирование ведется по деформируемым стержням. Три опорные стержня приняты жесткими и в сумму не входят. В результате расчета ферм с разным числом панелей ( $n>1$ ) оказывается, что решение имеет один и тот же вид

$$\Delta_1 = P \frac{Aa^3 + Cc^3}{2h^2 EF}, \quad (1)$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$  — длина раскосов. Коэффициенты  $A$  и  $C$  в полученной формуле зависят только от  $n$ . Зависимость коэффициентов от числа панелей можно найти только методом

индукции. Для этого последовательность коэффициентов вводится в аргументы оператора `rgf_findrecur` системы Maple [1], который дает рекуррентное уравнение. Решение уравнения возвращает оператор `rsolve`. Для работы оператора `rgf_findrecur` требуется четное число членов последовательности, достаточное для выявления закономерности. В результате получаем

$$A = (3(-1)^n + 10n^2 + 9 + 20n^4) / 6,$$

$$C = (3 + (-1)^n + 8n^2) / 2.$$

Проверку коэффициентов можно выполнить в численной моде этой же программы при любых значениях  $n$ . Аналогично задача решается и для равномерной нагрузки по нижнему поясу фермы. Формула для прогиба почти не отличается от (1)

$$\Delta_2 = P \frac{Aa^3 + Cc^3 + Hh^3}{2h^2 EF}. \quad (2)$$

Коэффициенты  $A$  и  $C$  при этом остаются прежними, а коэффициент  $H$  имеет вид  $H = 2(1 - (-1)^n)$ . Получим также формулу для прогиба фермы от действия сосредоточенной силы в середине пролета

$$\Delta_3 = P \frac{Aa^3 + Cc^3 + Hh^3}{h^2 EF}. \quad (3)$$

Коэффициенты в этой формуле весьма просты

$$A = n / 3 + 2n^3 / 3,$$

$$C = n,$$

$$H = 1 + (-1)^{n+1}.$$

Линейность задачи позволяет рассчитывать широкий круг задач с разнообразными нагрузками, получающимися комбинацией решений (1) – (3). Найденное решение также легко обобщается на случай различных жесткостей стержней. Так, если, например, жесткость стоек равна  $k_h EF$ , а жесткость раскосов  $k_c EF$ , где  $EF$  жесткость поясов, то в соответствующую формулу вводятся поправочные коэффициенты [2]:

$$\Delta = P \frac{Aa^3 + Cc^3 / k_c + Hh^3 / k_h}{2h^2 EF}.$$

### Анализ прогиба

Сравним прогиб фермы от трех видов нагрузок. Пусть во всех трех случаях суммарная нагрузка одинакова  $P_0 = (4n - 1)P$ , где  $P_0$  – нагрузка в третьем случае (одна сила в середине пролета). Фиксируем пролет фермы  $L = 4na = 40$  м. Обозначим безразмерный прогиб фермы  $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$ . Кривые зависимости прогиба середины пролета при  $h=4$  м приведены на рисунке 3. Кривые  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  практически совпадают, отличаясь в четвертой значащей цифре. Резкие скачки кривой  $\Delta_3$  объясняются наличием "мигающего" слагаемого в коэффициенте  $H$ .

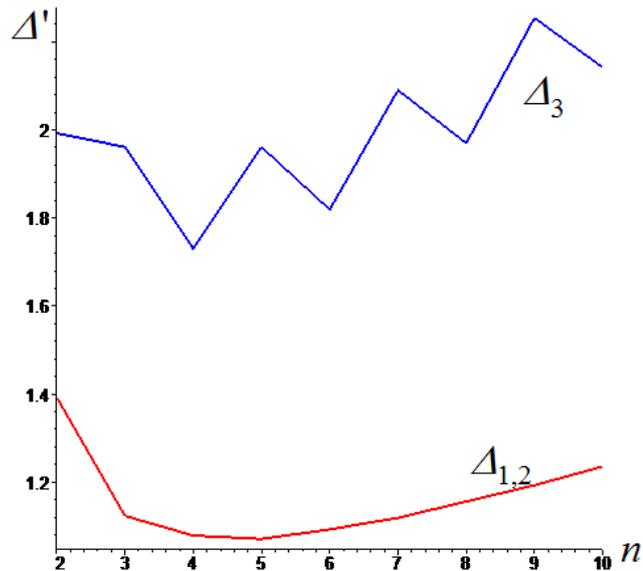


Рисунок 3 – Прогиб в зависимости от числа панелей

С увеличением числа панелей  $n$  прогиб растет. Прослеживается наклонная асимптота кривых  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ . Угол наклона асимптоты следует из предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_1' / n = h / (2L)$ . Асимптоту кривой  $\Delta_3(n)$ , имеющей значительные скачки, система Maple не выделяет.

### Анализ усилий в стержнях

В процессе вычисления прогиба определялись и усилия во всех стержнях фермы. Для практического инженера наиболее интересны стержни с максимальными сжимающими и растягивающими усилиями. Метод сечений применим здесь только для нечетных  $n$ , поэтому выделим интересующие нас усилия из общего решения, полученного методом индукции. Рассмотрим равномерную нагрузку по верхнему поясу. Наиболее сжатый стержень в середине верхнего пояса имеет усилие

$$S_{6n-2} = -\frac{aP(2n^2 + (-1)^n)}{2h},$$

а растянутый стержень в середине нижнего пояса

$$S_{2n} = \frac{aP(2n^2 - 1 - (-1)^n)}{2h}.$$

### Выводы

Методом индукции при математической поддержке пакета Maple получены компактные формулы для прогиба фермы с усиленной решеткой. Сложная решетка не позволяет находить усилия непосредственно методом сечений или последовательным вырезанием узлов. Использование же пакета символьных вычислений не только преодолевает "проклятие размерности" — бич систем с большим числом элементов, но и позволяет получить результаты, доступные для математического анализа. Как всегда, цель такого анализа — оптимиза-

ция конструкции по весу, прочности и устойчивости. Полученные оценки могут быть использованы при проектировании и оценке достоверности численных расчетов.

Аналогичные решения методом индукции на основе программы [1] получены для плоских [2-10] и пространственных [12,13] ферм. Обзоры аналитических решений для прогиба плоских ферм даны в работах [14-16].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирсанов, М. Н. Maple и Maplet. Решение задач механики/ М.Н. Кирсанов. — СПб.: Изд-во Лань, 2012. — 512 с.
2. Кирсанов, М. Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях симметричной балочной фермы/М. Н. Кирсанов // Строительство и реконструкция. — 2017.— 1(69). — С.19–23.
3. Kirsanov, M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type/ M. Kirsanov //Architecture and Engineering. — 2016. — Т. 1.— № 3. — С. 14–17.
4. Voropai, R.A. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss/R.A.Voropai, I.Yu. Kazmiruk// Bulletin of Scientific Conferences.— 2016.— № 2-1(6).— Pp. 10–12.
5. Voropai, R. A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice/R. A. Voropai// Science Almanac.—2016.—N4-3(18). — С.238–240.
6. Shipaeva, A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple/ A.S. Shipaeva //Science Almanac. —2016.— N 5-3(19).— Pp. 236–239.
7. Bolotina, T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels/ T. D. Bolotina //Bulletin of Scientific Conferences. —2016.— № 4-3(8). — Pp.7–8.
8. Al-Shahrabi, A. M. Line of influence of the deflection for cantilever truss / A. M. Al-Shahrabi, M.N. Kirsanov // Вестник научных конференций. — 2016. № 2-1(6). — С. 6—7.
9. Dong, X. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels/ X. Dong, M.N. Kirsanov //Вестник научных конференций.— 2016. —№ 1–4 (5). — С. 6—7.
10. Jiang, H. An analytical expression for the influence line of the truss/ H. Jiang, M.N. Kirsanov // Вестник научных конференций. — 2016. — № 1–5(5). — С.10—11.
11. Ponomareva, M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load/ M.A. Ponomareva//Научный альманах. —2016. — № 4–3(18). — С.257—259.
12. Ершов, Л.А. Формулы для расчета деформаций пирамидального купола/ Л.А Ершов //Научный альманах. — 2016. — N11-2(25). — С.315-318
13. Кирсанов, М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость/М. Н. Кирсанов //Строительная механика и расчет сооружений.— 2012.— № 3.— С. 48–51.
14. Кийко, Л. К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки / Л.К. Кийко // Научный вестник. — 2016. — № 1 (7). — С. 247—254.
15. Тиньков, Д. В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций/ Д. В. Тиньков // Инженерно-строительный журнал. — 2015. — №5(57). — С. 66—73.
16. Тиньков, Д. В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций/ Д. В. Тиньков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2015.— №6. — С. 21–28.

### Гавриленко Антон Борисович

Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва  
старший преподаватель  
E-mail: [gavrilenkoab@mpei.ru](mailto:gavrilenkoab@mpei.ru)

### Кирсанов Михаил Николаевич

Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва  
Доктор физико-математических наук, профессор  
E-mail: [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)

GAVRILENKO A. B., KIRSANOV M. N.

## ANALYTICAL EVALUATION OF STIFFNESS OF THE TRUSS

*The flat girder, reinforced by additional struts and braces is considered. Displays the exact analytical dependence of the deflection of statically determinate trusses from its size, load and number of*

panels. Considered uniform loading on the upper belt, bottom and a concentrated force at Midspan. To determine the forces in the bars the method of cutting out nodes, implemented in a program written in the computer mathematics system Maple is used. Generalization of the solution for an arbitrary number of panels produced by the method of induction. The recurrence equation that satisfies the sequence of coefficients is detected. Solution is obtained in the system of computer mathematics. The dependence of the deflection of the panels has an extremum, which allows to optimize the design for a weight. A formula for forces in the most compression and tie rods are found. Analyzes the asymptotic properties of the solutions.

**Keywords:** truss, deflection, induction, Maple, analytical solution

## REFERENCES

1. Kirsanov, M. N. Maple i Maplet. Resheniye zadach mekhaniki/ M.N. Kirsanov. — SPb.: Izd-vo Lan', 2012. — 512 s.
2. Kirsanov, M. N. Formuly dlya rascheta progiba i usilii v sterzhnyakh simmetrichnoy balochnoy fermy/M. N. Kirsanov // Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. — 2017. — 1(69). — S.19–23.
3. Kirsanov, M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type/ M. Kirsanov //Architecture and Engineering. — 2016. — T. 1.— № 3. — S. 14–17.
4. Voropai, R.A. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss/R.A.Voropai, I.Yu. Kazmiruk// Bulletin of Scientific Conferences.— 2016.— № 2-1(6).— Pp. 10–12.
5. Voropai, R. A. Analysis of the deflection of the regular truss with cross type lattice/R. A. Voropai// Science Almanac.—2016.—№4-3(18). — S.238–240.
6. Shipaeva, A.S. Calculation of the deflection of girder beam loaded on the bottom flange in the system Maple/ A.S. Shipaeva //Science Almanac. —2016.— N 5-3(19).— Pp. 236–239.
7. Bolotina, T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels/ T. D. Bolotina //Bulletin of Scientific Conferences. —2016.— № 4-3(8). — Pp.7–8.
8. Al-Shahrabi, A. M. Line of influence of the deflection for cantilever truss / A. M. Al-Shahrabi, M.N. Kirsanov // Vestnik nauchnykh konferentsiy. — 2016. № 2-1(6). — S. 6–7.
9. Dong, X. The dependence of the deflection of the truss from the position of the load for an arbitrary number of panels/ X. Dong, M.N. Kirsanov //Vestnik nauchnykh konferentsiy.— 2016. —№ 1-4 (5). — S. 6–7.
10. Jiang, H. An analytical expression for the influence line of the truss/ H. Jiang, M.N. Kirsanov // Vestnik nauchnykh konferentsiy. — 2016. — № 1-5(5). — S.10–11.
11. Ponamareva, M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load/ M.A. Ponamareva//Nauchnyy al'manakh. —2016. — № 4-3(18). — S.257–259.
12. Yershov, L.A. Formuly dlya rascheta deformatsiy piramidal'nogo kupola/ L.A Yershov //Nauchnyy al'manakh. — 2016. — N11-2(25). — S.315-318
13. Kirsanov, M.N. Raschet prostranstvennoy sterzhnevoy sistemy, dopuskayushchey mgnovennuyu izmenyayemost'/M. N. Kirsanov //Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy.— 2012.— № 3.— S. 48–51.
14. Kiyko, L. K. Analiticheskaya otsenka progiba arochnoy fermy pod deystviyem vetrovoy nagruzki / L.K. Kiyko // Nauchnyy vestnik. — 2016. — № 1 (7). — S. 247–254.
15. Tin'kov, D. V. Sravnitel'nyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruktsiy/ D. V. Tin'kov // Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal. — 2015. — №5(57). — S. 66–73.
16. Tin'kov, D. V. Analiz tochnykh resheniy progiba regulyarnykh sharnirno-sterzhnykh konstruktsiy/ D. V. Tin'kov // Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy. — 2015.— №6. — S. 21–28.

### Gavrilenko A. B.

National Research University "MPEI", Moscow  
senior lecturer  
E-mail:[gavrilenkoab@mpei.ru](mailto:gavrilenkoab@mpei.ru)

### Kirsanov M. N.

National Research University "MPEI", Moscow  
Dr. Sci (Math.), professor  
E-mail:[c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)