УДК 539.3, 624.131.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОЙСТВ ПЕСКОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Артамонова Н.Б., Шешенин С.В.
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия,
e-mail: artamonovanb@mail.ru, sergey.sheshenin@mail.ru

Аннотация: Предлагается теоретический способ определения свойств песков с помощью асимптотического метода осреднения. Метод осреднения был разработан Н.С.Бахваловым [1] и применялся для вычисления упругих модулей пород [2]. В данной работе этот метод используется для определения тензора передачи порового давления и коэффициента относительного расширения песка при замерзании жидкости в порах. Расчеты проводились на примере песчаных грунтов разного состава с помощью метода конечных элементов.
Ключевые слова: песчаные грунты, асимптотический метод осреднения, тензор передачи порового давления.

Вычисление тензора передачи порового давления.

Тензор передачи порового давления $\boldsymbol{\alpha}$ входит в формулу расчета эффективных напряжений [5]:

$$\sigma_{ij}^{\mathrm{eff}} = \langle \sigma_{ij}^{\Pi} \rangle - \alpha_{ij} \langle p \rangle, \qquad \sigma_{ij}^{\mathrm{eff}} = C_{ijpq}^{\mathrm{eff}} \langle \varepsilon_{pq} \rangle.$$

Здесь $\langle \sigma_{ij}^{\Pi} \rangle$ – осредненные полные напряжения, ${\sigma_{ij}}^{\mathrm{eff}}$ – осредненные эффективные напряжения в твердой фазе грунта, передающиеся по контактам между зернами породы, $\langle p \rangle$ – осредненное давление жидкости, C_{ijpq}^{eff} – эффективные модули упругости, $\langle \varepsilon_{pq} \rangle$ – осредненные деформации. Параметр $\boldsymbol{\alpha}$ показывает, какая часть давления жидкости является «активной» при формировании макроскопических деформаций.

Определение эффективных модулей упругости и тензора передачи порового давления базируется на осреднении уравнения равновесия неоднородной упругой пористой среды и предполагает решение локальных задач в представительной области.

Стандартным способом вводятся быстрые координаты ξ_i: $\xi_i = x_i/\varepsilon$, $\varepsilon = l/L \ll 1$, где x_i – медленные координаты, l – характерный размер представительной области (RVE) пористой среды, L – характерный глобальный размер всей пористой среды. Асимптотическое разложение перемещений имеет следующий вид:

$$u_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = v_k(\boldsymbol{x}) + \varepsilon N_{kpq}(\boldsymbol{\xi}) v_{p,q}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon M_k(\boldsymbol{\xi}) p(\boldsymbol{x}) + \cdots,$$

где $N_{kpq_1\ldots q_m}(\boldsymbol{\xi})$, $M_{kq_1\ldots q_m}(\boldsymbol{\xi})$ – локальные функции быстрых координат. При подстановке выражения для u_k в уравнение равновесия:

$$\left[C_{ijkl} u_{k,l}\right]_{,j} + X_i = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_{\mathrm{RVE}}$$

получаем локальные задачи в RVE для определения упругих модулей и коэффициентов передачи порового давления. Среднее напряжение, обусловленное действием порового давления, представляется в виде:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle C_{ijkl} M_{k,l} \rangle p,$$

где тензор передачи порового давления равен:

$$\alpha_{ij} = -\langle C_{ijkl} M_{k,l} \rangle.$$

Вычисление тензора относительного расширения песка при замерзании воды в порах. Предполагается, что для дисперсных пород при моделировании взаимодействия воды с зернами грунта можно ограничиться только механическим взаимодействием. Тензоры напряжений σ_{ij} и малых деформаций ε_{ij} связаны определяющим соотношением, которое представляет собой обобщение закона термоупругости на случай фазового перехода поровой жидкости:

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = C_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})[\varepsilon_{kl}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) - \alpha_{kl}(\boldsymbol{\xi}) T(\boldsymbol{x}) - \chi_{kl}(\boldsymbol{\xi}) H(\boldsymbol{x})].$$

Здесь C_{ijkl} – модули упругости; α_{kl} – тензор теплового расширения; T – изменение температуры; $\chi_{kl} = \chi(\boldsymbol{\xi})\delta_{kl}$, χ – коэффициент относительного расширения жидкости при замерзании, $\chi = \chi_{\mathrm{ice}}$ в области поры Ω_p, $\chi = 0$ в области скелета грунта Ω_s; $\gamma_{ij} = C_{ijkl}\chi_{kl}$, γ_{ij} – тензор расширения водонасыщенной пористой среды при замерзании; $H = 0$, где замерзание не произошло, и $H = 1$, где жидкость замерзла.

Перемещения представимы в виде асимптотического разложения, первые члены которого имеют вид:

$$u_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = v_k(\boldsymbol{x}) + \varepsilon N_{kpq}(\boldsymbol{\xi}) v_{p,q}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon M_k(\boldsymbol{\xi}) T(\boldsymbol{x}) + \varepsilon L_k(\boldsymbol{\xi}) H(\boldsymbol{x}) + \cdots,$$

где N_{kpq}, M_k и L_k – локальные функции быстрых координат, а $v_k(\boldsymbol{x})$ – «медленные» компоненты вектора перемещения. Подстановка выражения для u_k в уравнение равновесия приводит к трем локальным задачам для определения функций N_{kpq}, M_k и L_k. Нас интересует третья локальная задача, так как ее решение позволит вычислить тензор расширения водонасыщенной пористой среды при замерзании $\gamma_{ij}^{\mathrm{eff}}$.

Учтем тот факт, что образование льда начинается вдали от границы поры и при замерзании между льдом и границей зерен остается тонкий слой воды. В этом слое действует гидростатическое давление p, которое препятствует расширению льда и способствует сжатию зерен. Для определения p будем использовать неизменность объема представительной области Ω_{RVE}:

$$\theta_s(1-n)+\theta_{\mathrm{ice}}n=0,$$

n – пористость грунта.

Для несвязных грунтов относительные изменения объема льда θ_{ice} и объема зерен θ_s связаны с давлением p следующими соотношениями:

$$\gamma-p=K_{\mathrm{ice}}\theta_{\mathrm{ice}},\quad p=-K_s\theta_s,$$

где $\gamma=K_{\mathrm{ice}}\theta_{\mathrm{ice}}^{\mathrm{full}}$, K_{ice} – коэффициент объемного изотермического расширения льда, $\theta_{\mathrm{ice}}^{\mathrm{full}}=0{,}09$, K_s – коэффициент объемного расширения материала зерен.

Уравнение сохранения объема с учетом выражений для p и $\gamma-p$ имеет вид:

$$\frac{p}{K_s}(1-n)+\frac{p-\gamma}{K_{\mathrm{ice}}}n=0.$$

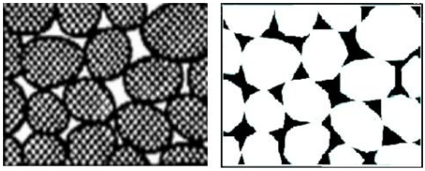
Отсюда находим давление жидкости в тонком слое между льдом и зернами грунта:

$$p=\frac{n\gamma K_s}{(1-n)K_{\mathrm{ice}}+nK_s}.$$

Для несвязных грунтов осредненное напряжение, возникшее в результате замерзания, численно равно поровому давлению. Следовательно, для песка коэффициент относительного расширения при замерзании находится в виде формулы и численного решения не требуется:

$$\gamma_{ij}^{\mathrm{eff}}=\langle-\sigma_{ij}\rangle=p\delta_{ij}.$$

Пример расчета. В качестве примера приведем результаты расчета свойств хорошо отсортированного и окатанного песка однородного состава. Срез песка и модель, используемая для расчета, показаны на рисунке:



Пористость исследуемого образца – 17% (определялась в программе СТИМАН [3]). Исследовалась зависимость свойств песка от минерального состава зерен, расчеты проводились для кварцевых и полевошпатовых песков. В расчетах задавались упругие свойства материала зерен: кварца – $E = 96400$ МПа, $\nu = 0{,}08$ и полевого шпата – $E = 63600$ МПа, $\nu = 0{,}31$.

Для кварцевого песка коэффициенты передачи порового давления: в горизонтальном направлении $\alpha_{11} = 0{,}64$, в вертикальном – $\alpha_{22} = 0{,}62$; для полевошпатового песка соответственно: $\alpha_{11} = 0{,}75$ и $\alpha_{22} = 0{,}74$. Как видно, коэффициенты α зависят от минерального состава песков. Известна зависимость параметра α от коэффициента Пуассона ν зерен грунта [4]: чем меньше ν, тем меньше α, поэтому коэффициенты передачи порового давления для кварцевого песка получились закономерно меньше, чем для полевошпатового. Как показали расчеты, образец песка проявляет весьма слабую анизотропию по коэффициенту альфа, он практически изотропен, что объясняется хаотическим расположением зерен.

Коэффициент относительного расширения песка при замерзании воды в порах также получился меньше для кварцевого песка ($\gamma^{\mathrm{eff}} = 363$ МПа), чем для полевошпатового ($\gamma^{\mathrm{eff}} = 433$ МПа).

Заключение. В данной работе асимптотический метод осреднения применяется для определения свойств песка – тензора передачи порового давления и коэффициента относительного расширения песка при замерзании воды в порах. Эти свойства сложно определять экспериментально, а применение методики осреднения дает общий способ их вычисления. Результаты расчета получились закономерные и хорошо согласуются с экспериментальными исследованиями.

Список литературы:

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984, - 352 с.
2. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984, - 336 с.
3. *Соколов В.Н., Юрковец Д.И., Разгулина О.В., Мельник В.Н.* Программно-аппаратный комплекс для исследования микроморфологии поверхности твердых тел по РЭМ-изображениям // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, 1988, № 1, с. 33-41.
4. *Шешенин С.В., Артамонова Н.Б., Мукатова А.Ж.* Применение метода осреднения для определения коэффициента передачи порового давления // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 2015, № 2, с. 42-45.
5. *Gueguen Y., Bouteca M.* Mechanics of fluid-saturated rocks. – Elsevier Acad. Press., 2004, - 450 p.

DETERMINATION OF THE PROPERTIES OF SANDY SOILS USING THE COMPUTATIONAL TECHNIQUE

Artamonova N.B., Sheshenin S.V.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia,

e-mail: artamonovanb@mail.ru, sergey.sheshenin@mail.ru

Annotation: A theoretical method for determining the properties of sands using the asymptotic homogenization method is proposed. The homogenization method was developed by N.S. Bakhvalov [1] and was used for calculating the elastic moduli of rocks [2]. In this paper, this method is used to determine the pore pressure transfer tensor and the expansion coefficient of sand during freezing processes. Calculations were carried out on sandy soils of different composition using the finite element implementation.

Keywords: sandy soils, asymptotic homogenization method, pore pressure transfer tensor.