

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Морозова Наталья Сергеевна

## **Управление движением строя в мультиагентных системах**

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**Автореферат**  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: **Фомичёв Василий Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

Официальные оппоненты: **Канатников Анатолий Николаевич**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического моделирования федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана»

**Жуковский Сергей Евгеньевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Российский университет дружбы народов»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук (ИАПУ ДВО РАН)

Защита состоится 16 марта 2016 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Ломоносовский проспект, д. 27.

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 201 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,  
д.ф.-м.н., проф.

Е. В. Захаров

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Данная работа посвящена актуальной проблеме математического моделирования и теории управления: задаче децентрализованного управления мультиагентной системой, состоящей из агентов, моделирующих автономных роботов, с целью обеспечения движения группы агентов строем, имеющим заданную геометрическую форму.

Управление мультиагентными системами является крайне динамично развивающимся направлением в течение нескольких последних десятилетий (в русскоязычной литературе также иногда используются аналогичные понятия «групповое управление», «управление многоагентной системой»). В приложении к робототехнике под мультиагентной системой понимается группа автономных роботов, которая помещена в некоторую область пространства для выполнения определённой миссии. Агенты-роботы могут получать только локальную информацию (в пределах действия собственных сенсоров). В целом по принципу управления все подходы к управлению мультиагентными системами можно поделить на централизованные и децентрализованные (основные черты каждого из подходов, а также примеры реализации разобраны в книге И. А. Каляева [9]). Децентрализованное управление подразумевает отсутствие единого управляющего центра формирования координационных команд для каждого из элементов группы. Росту популярности использования децентрализованного управления для решения практических задач в значительной мере способствовало удешевление элементной базы с одновременным уменьшением её размерных характеристик, что сделало возможным использование групп роботов. Также повышению интереса к децентрализованным методам благоприятствовали рост сложности задач, возлагаемых на роботов, увеличение доли неопределённости в условиях выполнения миссии, а также рост степени доверия к роботизированным системам. Указанные факторы приводили к необходимости оперативного принятия решения и максимизации самостоятельности действий роботов. При этом особенно актуальна задача построения математической модели мультиагентной системы для проведения серий вычислительных экспериментов, так как это позволяет снизить риски и издержки, связанные с натурными экспериментами.

## Степень разработанности

Хронологически одними из первых широко распространённых децентрализованных методов управления движением группы роботов стали метод потенциальных функций [10, 11] и метод консенсуса [12–14], которые используются для решения задач «стайного» движения группы агентов. При своей простоте и устойчивости к выходу из строя любого из агентов, эти методы

имеют существенные ограничения: трудно предсказать каким будет установившееся взаимное расположение агентов, так как это зависит от конкретных обстоятельств и начальных данных, методы могут быть использованы для ограниченного набора задач, в которых не требуется детерминизма в вопросе об относительном расположении агентов и траектории их движения.

Значительный вклад в управление мультиагентными системами внёс А. Б. Куржанский. В его работах [15, 16] задача группового управления рассматривается в постановке, отличной от постановки в настоящей работе: элементы группового движения должны находиться внутри эллипсоидального контейнера в условиях взаимного нестолкновения, при этом расположение элементов относительно друг друга внутри контейнера может варьироваться и не задаётся жёстко.

Для равномерного распределения агентов в зоне выполнения миссии, поддержания устойчивой связи внутри группы и избежания столкновений роботы должны при движении соблюдать некоторую геометрическую структуру строя (определённое расположение относительно друг друга или относительно центра масс группы, образующее определённую геометрическую фигуру). Возникает необходимость проработать математическую модель, описывающую движение группы роботов, и разработать децентрализованное правило управления и алгоритм, которые бы позволили осуществлять эффективное управление движением агентов с сохранением геометрической формы строя при условиях полной автономности агента и возможности получения информации только от своих ближайших соседей.

На данный момент в литературе в большинстве случаев для решения указанной задачи используются следующие подходы: первый — задать заранее желаемое расстояние между парами агентов и применить теорию жесткости графов [17, 18]; второй — задать желаемое положение агента относительно его соседей набором векторов и воспользоваться правилами консенсуса (усреднения) [19–21]; третий — в каждый момент времени передавать агентам информацию о положении и направлении движения виртуальной формации, на основании чего каждый агент может сконструировать виртуального лидера и следовать за ним [22–24]. Далее кратко излагаются идеи, лежащие в основе данных подходов.

Суть первого подхода, основанного на теории жёсткости графов, состоит в том, чтобы задать геометрическую структуру строя как целевые расстояния между некоторыми парами агентов. Вводится граф, вершины которого соответствуют агентам, а рёбра — заданным целевым расстояниям между агентами, которым соответствуют вершины, соединённые ребром. Производится поиск условий, которым должны удовлетворять задаваемые ограниче-

ния на расстояния между парами агентов, чтобы геометрическая структура строя была жёсткой, недеформируемой при соблюдении указанных ограничений по мере движения строя. На базе заданных целевых расстояний  $a_{ij}$ ,  $a_{ij} = \|p_i - p_j\|$ , где  $p_i, p_j$  — координаты агентов  $i$  и  $j$ , составляется матрица жёсткости соответствующего графа. Исследование ранга матрицы жёсткости графа позволяет определить, является ли конструкция, заданная исследуемым набором ограничений, жёсткой [17]. Для успешного управления строем заданная при помощи  $a_{ij}$  система ограничений должна быть осуществимой (должен существовать набор точек, удовлетворяющих всем ограничениям), система ограничений должна задавать жёсткий граф, в каждой паре агентов, связанных ограничением по расстоянию, агенты должны иметь возможность знать координаты друг друга. За рамками постановок задач в данном подходе обычно остаётся рассмотрение задачи по приведению мультиагентной системы в состояние, соответствующее системе ограничений.

Второй подход к управлению движением строя был получен модификацией управления, ведущего агентов к консенсусу (достижение консенсуса — приведение к единому значению некоторого параметра состояния, которым обладает каждый агент, при помощи усреднения). Задачи по поиску консенсуса составляют отдельный класс задач по управлению мультиагентными системами (с довольно исчерпывающим обзором задач, решаемых при помощи данного подхода, можно ознакомиться в работе [19]). Одна из возможных постановок: сбор группы безразмерных агентов в единой точке. Она получила название «задача рандеву» (от англ. rendezvous problem). Управление, обеспечивающее сбор агентов в одной точке при условии, что каждый агент из группы знает координаты всех остальных агентов, имеет следующий вид:  $\dot{p}_i(t) = \sum_{j \neq i} (p_j(t) - p_i(t))$ . Если же добавить к данному правилу управления вектор сдвига  $b_{ij}$ , который отражает относительное расположение агентов  $i$  и  $j$  по обеим осям неподвижной мировой системы координат, то вместо сбора в одной точке можно получить определённую геометрическую структуру. Каждый агент будет в итоге сдвинут относительно точки «рандеву» на вектор  $b_i = \sum_{j \neq i} b_{ij}$ . Форма данной геометрической структуры задаётся кососимметричными матрицами, характеризующими относительное расположение агентов  $i$  и  $j$  вдоль разных осей координат.

Движение группы агентов с сохранением соответствия заданной геометрической структуре при использовании данного подхода, а также подхода, основанного на теории жёсткости графов, происходит следующим образом: следование за лидером, управляемым извне, или движение по рассчитываемому

мой извне мультиагентной системы траектории. В указанных двух подходах также не предусматривается возможность задания целевой ориентации строя.

Третья группа подходов, используемых для решения задач управления строем, оперирует понятиями виртуальных формаций и/или виртуальных лидеров (в зависимости от принятой терминологии). Основная идея таких подходов — следование каждого агента за некоторой точкой, изменяющей свою координату во времени по определённому закону. В некоторых подходах эта точка именуется виртуальным лидером. Её текущие координаты рассчитываются вне мультиагентной системы при помощи внешнего вычислительного ресурса и передаются агенту как входной параметр в каждый момент времени (агенты не самостоятельны). Иногда прибегают к термину «виртуальная формация». В таких постановках для каждого агента задаётся виртуальная формация (набор точек, задающий целевую геометрическую форму строя). Каждому агенту фиксированно присваивается точка виртуальной формации с определённым номером, затем задаётся траектория движения виртуальной формации и её скорость. Агент выполняет сдвиг виртуальной формации в соответствии с заданной скоростью и траекторией таким образом, чтобы «своя» точка виртуальной формации была впереди него вдоль заданного направления. Он преследует данную точку виртуальной формации с фиксированным номером. Это обеспечивает движение мультиагентной системы с сохранением геометрической структуры строя, однако фиксация может затруднять перестроения и делает подход не гибким к изменениям.

При разработке алгоритмов на основе одного из трёх перечисленных выше подходов, как правило, возникают существенные затруднения в обработке следующих внештатных ситуаций:

- выход из строя одного или нескольких агентов с последующей потерей возможности передачи информации, особенно агента-лидера;
- приобретение связи с агентом, который по мере движения к целевой точке оказался в зоне слышимости других агентов;
- неполадки связи с координационным центром (в подходах, в которых предполагается непрерывно или периодически передавать из данного центра агентам значимую для управления информацию).

При разработке приведённых выше методов предпринимались попытки сгладить указанные недостатки, но чаще всего при помощи наложения дополнительных ограничений (предположение возможности установления связи между любыми агентами [25], сохранение фиксации места каждого агента в строю с введением различных возможных геометрических структур строя для разного количества агентов [26]). Во многих существующих подходах агенты фактически не являются взаимозаменяемыми, так как место в геометриче-

ской структуре строя зачастую зафиксировано за агентом с конкретным номером. Подходы, в которых в каждый момент времени агентам передаются координаты виртуальных лидеров или виртуальных формаций и направление их движения, не вполне соответствуют принципам децентрализованного управления, так как в таких подходах предполагается наличие центра планирования заданий, из которого к каждому агенту по каналу связи поступает информация, необходимая агенту для управления своим передвижением (например, работы [24, 27]).

**Целью** данной работы является разработка полностью децентрализованного правила управления группой агентов, моделирующих мобильных роботов, которое бы обеспечивало движение группы агентов с соблюдением определённой геометрической структуры строя (определённых взаимных расстояний относительно друг друга). При этом искомое правило управления должно быть работоспособно в условиях возникновения внештатных ситуаций, описанных выше.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать существующие модели мультиагентных систем, методы управления;
2. Проанализировать основные сильные и слабые стороны существующих подходов, в том числе с учётом применимости в различных внештатных ситуациях;
3. Проработать математическую модель движения группы роботов и предложить правила управления, учитывающие уже существующие наработки, но имеющие преимущества при обработке внештатных ситуаций (выход из строя агента, внезапное присоединение нового агента);
4. Проанализировать полученные подходы аналитически;
5. Создать дискретные аналоги разработанных правил управления и алгоритмы на их основе;
6. Разработать среду компьютерного моделирования для проверки работоспособности и детального анализа полученных алгоритмов;
7. Выполнить разностороннее моделирование решения задачи с использованием разработанных правил и алгоритмов, проанализировать полученные результаты вычислительных экспериментов.

### **Методология и методы диссертационного исследования**

Для исследования работоспособности предложенных правил управления используется как формальное обоснование опорных моментов в виде доказательств определённых утверждений и теорем, так и проверка выявленных

закономерностей при помощи компьютерного моделирования. В ходе компьютерного моделирования проводится всесторонний анализ с учётом различных входных данных и параметров управления, результаты оцениваются при помощи анализа таблиц и графиков, построенных на основании данных вычислительного эксперимента, а также при помощи средств визуализации среды моделирования.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Разработанные правила децентрализованного управления движением мультиагентной системы, моделирующей группу мобильных роботов, с соблюдением заданной геометрической структуры строя в ходе движения. Первое правило предназначено для решения задачи управления при условии оказания управляющего воздействия на скорость, а второе правило — при условии оказания управляющего воздействия на ускорение агента. Также для каждого правила управления представлен его дискретный аналог;
2. Аналитическое доказательство работоспособности правила управления, предусматривающего оказание управляющего воздействия на скорость агента, в случае удовлетворения параметров управления определённым критериям и выполнения определённых условий;
3. Модификации алгоритмов для огибания препятствий, избежания коллизий между агентами, обработки ситуаций несовпадения количества агентов в группе с количеством точек в целевой геометрической структуре строя (фиксация формы строя вне зависимости от количества агентов), улучшающие модификации исходного правила управления по ускорению;
4. Масштабируемая среда моделирования, разработанная в рамках данного исследования, позволяющая выполнение вычислительных экспериментов для различных вариантов динамики роботов и различных реализаций управления, а также обеспечивающая визуализацию процесса выполнения миссии и сбор статистической информации о значении параметров в ходе выполнения миссии агентами.
5. Результаты моделирования, показывающие работоспособность алгоритмов, реализованных на основании разработанных правил управления, в стандартных условиях, в условиях непредвиденного выхода из строя некоторых роботов, формирующих группу, или присоединения очередного робота к группе, а также в условиях наличия ошибок измерений и шумов, удовлетворяющих определённым ограничениям.

### **Научная новизна**

В данной работе предлагается оригинальное децентрализованное правило управления, сочетающее в себе некоторые принципы консенсуса (усреднения), а также элементы подхода с использованием виртуальных лидеров. В постановке задачи используются новые для области элементы: сформулированы критерии построения строя, соответствующего заданной геометрической структуре с необходимой точностью, с опорой на введённые в данной работе понятия о геометрической структуре строя и виртуальных лидерах, учитывается совокупность различных ограничений. Отличительной особенностью разработанных правил управления является то, что набор виртуальных лидеров индивидуален для каждого агента, агент рассчитывает координаты виртуальных лидеров и их приоритеты по оригинальным разработанным правилам, что позволяет выбирать место в геометрической структуре строя динамически без фиксированной привязки агента к тому или иному положению в геометрической структуре строя. Полученное правило управления работоспособно в условиях возникновения внештатных ситуаций и рассмотрено для различных моделей динамики агентов.

#### **Теоретическая и практическая значимость**

Данная диссертационная работа имеет существенную научную значимость для теории управления мультиагентными системами, благодаря вкладу в разработку новых принципов децентрализованного управления. Децентрализованное управление мультиагентными системами, в свою очередь, имеет важное прикладное значение для робототехники и автоматизации: группы квадрокоптеров используются для транспортировки грузов, для съёмки и мониторинга состояния территории; группы наземных колёсных роботов используются для перемещения грузов в автоматизированных складах; группы подводных аппаратов используются для съёмок донной поверхности и поисково-спасательных работ. Таким образом, работа вносит вклад в развитие общих принципов децентрализованного управления, которые могут лечь в основу разработки управления конкретными робототехническими устройствами с учётом их специфики и возлагаемых на них миссий.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается всесторонним анализом разработанного правила управления и всех его модификаций при помощи компьютерного моделирования. Результаты данной работы находятся в соответствии с результатами, полученными другими зарубежными и отечественными авторами, и основываются на современных принципах и подходах к управлению мультиагентными системами.

#### **Апробация результатов**

Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и научных семинарах:

1. XIX международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2012» (г. Москва, 2012 г.),
2. научная конференция «Тихоновские чтения 2013» (г. Москва, 2013 г.),
3. XII всероссийское совещание по проблемам управления «ВСПУ-2014» (г. Москва, 2014 г.),
4. III международная конференция «Устойчивость и процессы управления» (г. Санкт-Петербург, 2015 г.),
5. научный семинар «Проблемы нелинейной динамики: качественный анализ и управление» под руководством академика С. В. Емельянова на кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова (2015 г.).

### Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях [1–8], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [2–4], 4 — в тезисах докладов [1, 6–8], 1 — в хронике научного семинара [5].

### Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и приложения. Полный объём диссертации составляет **123** страницы текста с **37** рисунками и **15** таблицами, объём приложения составляет **2** страницы. Список литературы содержит **38** наименований.

## Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, указывается научная новизна, теоретическая и практическая значимость представляемой работы, излагаются методы исследования, положения, выносимые на защиту, описана апробация результатов, выполненная автором.

Первая глава посвящена проработке математической модели, формализации постановки задачи, описанию предложенного правила управления по скорости и анализу указанного правила управления. В разделе 1.1 вводятся основные понятия и определения. Задача рассматривается в ограниченном открытом связном множестве  $W \in \mathbb{R}^2$  (зона выполнения миссии). В зоне присутствует конечный набор целевых точек  $T_i \in W$ , где  $i = 1, \dots, h$ , среди которых  $T^*$  — текущая целевая точка. Голономные агенты, моделирующие роботов, обозначаются как  $A_1, \dots, A_n$ . Агенты имеют в момент времени  $t$  координаты  $p_1(t), \dots, p_n(t)$  соответственно и считаются материальными

точками (везде кроме разделов 3.1, 3.2, 3.3, 4.3, в которых рассматриваются задачи огибания препятствий и избежания коллизий). Начальные позиции  $n$  агентов —  $p_1(t_0), \dots, p_n(t_0)$  задаются произвольно и заранее неизвестны. Вводится радиус слышимости агентов  $r$ : агенты  $i$  и  $j$  могут обмениваться информацией о своих координатах напрямую, если  $\|p_i - p_j\| \leq r$ . Назовем возможность передачи информации о своём местоположении отношением слышимости и предположим, что оно обладает свойством транзитивности. Под группой связности будем понимать группу агентов, в которой каждый агент находится в отношении слышимости с любым другим,  $N_p = A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  — рассматриваемая группа связности размера  $k$ . Под  $\Delta t$  понимается временной промежуток, требуемый для выполнения агентами одного цикла управления: снятие показаний сенсоров, вычисления с использованием полученной от сенсоров информации и выполнение передвижения в соответствии с выполненными вычислениями,  $V_{\max}$  — максимальная скорость агентов. Во всей диссертации, кроме главы 4, рассматривается динамика агента, характеризуемая уравнением  $\dot{p}_i(t) = u_i(t)$ , где  $u_i$  — управление для  $i$ -го агента, и именуемая управлением по скорости. В главе 4 рассматривается динамика, именуемая управлением по ускорению:  $\ddot{p}_i(t) = u_i(t)$ . Указанные варианты динамики являются самыми распространёнными при рассмотрении различных мультиагентных систем [28].

Допустимый класс управлений — это векторные функции  $u_i(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ , удовлетворяющие условиям:

- $\|u_i(t)\|$  — кусочно-постоянная функция от  $t$ ,  $u_i$  может менять свое значение в моменты  $t = q\Delta t$ ,  $q = 0, 1, \dots$ ;
- для любого  $t \geq 0$  выполнено неравенство  $\|u_i(t)\| \leq V_{\max}$ .

В этом же разделе формулируются ключевые определения целевой геометрической структуры строя (ЦГС) и виртуальных лидеров. Целевая геометрическая структура  $F_k = \{F_k^1, \dots, F_k^k\}$  — набор из  $k$  точек из  $\mathbb{R}^2$ , который задается для каждого  $k$  от 1 до  $n$  (для всех допустимых размеров групп связности). Под виртуальными лидерами понимается набор из  $k$  точек в  $W$ , координаты которых рассчитаны агентом  $A_j$ . Предлагается, что каждый агент, зная  $k$  — число агентов в группе связности, рассчитает самостоятельно координаты  $k$  виртуальных лидеров. Каждому агенту  $A_i$  и ЦГС из  $k$  точек  $\{F_k^1; \dots; F_k^k\}$  будет соответствовать группа из  $k$  лидеров  $\{L_{k,i}^1, \dots, L_{k,i}^k\}$  ( $F_k^j; A_i$ )  $\leftrightarrow L_{k,i}^j$ ,  $L_{k,i}^j \in \mathbb{R}^2$ .

Раздел 1.1 также содержит формализованную постановку задачи. Миссия для агентов  $A_1, \dots, A_n$  считается выполненной, если для рассматриваемой группы связности в некоторый момент времени  $t' < \infty$  выполнены следующие условия:

- условие достижения целевой точки, состоящее в том, что  $\|A_{\text{cm}}(t') - T^*\| \leq V_{\text{max}}\Delta t$  (где  $A_{\text{cm}}$  — центр масс агентов из рассматриваемой группы связности);
- условие соблюдения заданной структуры строя с приемлемой точностью, заключающееся в том, что начиная с определенного момента  $t^* < t'$ , для каждого агента  $A_i$  существует виртуальный лидер  $L_{k,i}^{j^*}$ , который находится в  $\delta$ -окрестности  $A_i$  и  $\delta \leq V_{\text{max}}\Delta t$ .

Лидер  $L_{k,i}^{j^*}$  — это один из набора  $k$  лидеров  $(L_{k,i}^1, \dots, L_{k,i}^k)$  агента  $A_i$ . Зависимость  $j^* = j(i, t)$  подчеркивает то, что для каждого агента  $i$  существует «избранный» лидер с индексом  $j^*$  из его набора лидеров и что  $j^*$  может изменяться по мере движения.

В разделе 1.2 приводится цепочка рассуждений, приводящих к итоговому правилу управления:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = \frac{q_i V_{\text{max}}}{\|\theta_i\|} \theta_i, \\ \theta_i = \sum_{j=1}^k c_{ij} (L_{k,i}^j - p_i), \\ L_{k,i}^j = R_\beta (F_k^j + D_u) + A_{\text{cm}}, \\ p_i(t_0) = p_{i0}. \end{cases} \quad (1)$$

В правило управления вводится коэффициент  $q_i \in [0, 1]$  для понижения скорости, коэффициент  $c_{ij} \in \{0, 1\}$  приоритета направления движения агента  $A_i$  за лидером  $L_{k,i}^j$ , управляющий параметр сдвига  $D_u \in \mathbb{R}^2$ , матрица поворота  $R_\beta$  на угол  $\beta$  для ориентации строя вдоль направления  $\overrightarrow{A_{\text{cm}}T^*}$ . Правило сконструировано таким образом, что система виртуальных лидеров изоморфна соответствующей ЦГС. Выбор следования за тем или иным лидером основывается на приоритетах  $c_{ij}$ . Так как агентами из одной группы связности при расчёте положения лидеров используются одинаковые входные данные, то (в условиях отсутствия ошибок измерений) системы виртуальных лидеров для них будут одинаковыми. Это позволяет достичь консенсуса между агентами.

Коэффициенты приоритета виртуальных лидеров предлагается выбирать следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & L_{k,i}^j \text{ в прямом преследовании агентом } A_l, l \neq i, \\ 0, & \text{агент } A_i \text{ ближайший для } L_{k,i}^l, l \neq j, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В разделе 1.3 приводится формальное обоснование работоспособности правила (1).

**Теорема.** Пусть  $D_x = 0$ ,  $0 < D_y \leq V_{max}\Delta t$  и для каждого агента  $A_i$  из группы связности  $N_p$  ( $|N_p| = k$ ) в некоторый момент  $t^*$  нашёлся единственный виртуальный лидер  $L^{j_i}$  находящийся в прямом преследовании ( $\|L^{j_i}(t^*) - p_i(t^*)\| \leq V_{max}\Delta t$ ), и имеет место взаимно однозначное соответствие  $\{A_i\}_{i=1}^k \leftrightarrow \{L^j\}_{j=1}^k$ , т. е. агенту с номером  $i$  соответствует «свой» виртуальный лидер с номером  $j_i$ , и обратно каждому виртуальному лидеру соответствует единственный агент. Тогда при предложенном правиле управления:

1. найдётся такой момент  $t' \geq t^*$ ,  $t' < \infty$ , начиная с которого будет выполнено условие достижения группой целевой точки:

$$\|T^* - A_{cm}\| \leq V_{max}\Delta t, \quad t \geq t';$$

2. при  $t \geq t^*$  для каждого агента  $i$  выполнено условие соблюдения строя:

$$\|L^{j_i} - p_i\| \leq V_{max}\Delta t; \quad e = \sum_{A_i \in N_p} \|p_i - L^{j_i} + R_\beta D_u\| = 0,$$

где  $e$  — ошибка соблюдения строя.

Миссия будет выполнена, так как целевая точка достигнута и движение происходило с сохранением соответствия строя заданной ЦГС с приемлемой точностью.

**С л е д с т в и е 1.** После первичного формирования строя в момент времени  $t^*$  при  $D_u = (0, D_y)^T$  агенты далее движутся так, что их центр масс движется вдоль вектора  $A_{cm}(t^*)T^*$ .

**С л е д с т в и е 2.** При  $D_x \neq 0$  движение агентов к целевой точке происходит по эллипсоидальной кривой. При  $D_y < 0$  направление движения противоположно  $\overrightarrow{A_{cm}T^*}$ . При  $D_y > V_{max}\Delta t$  ошибка строя превышает допустимые значения, так как агенты не успевают оказаться на расстоянии  $V_{max}\Delta t$  от виртуального лидера. В случае  $D_u = (0, 0)^T$  движение прекращается после того, как строй, соответствующий ЦГС, впервые будет сформирован.

**У т в е р ж д е н и е.** Пусть  $D_x = 0$ ,  $D_y \leq V_{max}\Delta t$  и расстояние между каждыми двумя точками ЦГС не менее величины  $2V_{max}\Delta t$  и не более  $r$ . Пусть в момент времени  $t = 0$  агенты  $A_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) образуют группу связности  $N_p$  ( $|N_p| = k$ ) и имеют координаты  $p_i(0) = p_{i0}$ . Тогда в некоторый момент  $t^* > 0$  для каждого агента  $A_i$  найдется единственный виртуальный лидер  $L^{j_i}$ , находящийся в прямом преследовании только агентом  $A_i$  (т. е.  $\|L^{j_i}(t^*) - p_i(t^*)\| \leq V_{max}\Delta t$ ), и будет иметь место взаимно однозначное соответствие  $\{A_i\}_{i=1}^k \leftrightarrow \{L^{j_i}\}_{j_i=1}^k$ .

**Вторая глава** посвящена вопросам, связанным с дискретизацией задачи, разработкой среды моделирования и визуализации, а также с проведением вычислительных экспериментов.

В разделе 2.1 обосновывается целесообразность компьютерного моделирования, приводится обзор доступных средств моделирования, делается вывод о необходимости разработки среды моделирования и визуализации.

В разделе 2.2 формулируются требования к среде моделирования, описывается архитектура среды моделирования, приводятся UML-диаграммы взаимодействия программных сущностей, указаны способы расширения функционала среды моделирования. Архитектура программного комплекса такова, что в случае разработки дополнительных библиотек реализация алгоритма управления может быть выполнена для конкретных роботов без кардинальных изменений всех компонентов комплекса. Ознакомиться с разработанным программным комплексом можно по следующей URL-ссылке: <https://www.dropbox.com/sh/isqd70sg3558yto/AABD3QLueWTPuB9-dNJS09Ka?dl=0>.

В разделе 2.3 проводится дискретизация правила управления по скорости, приводится общее описание алгоритма управления.

В разделе 2.4 сформулированы критерии оценки эффективности алгоритма при моделировании, основные из которых: расстояние до целевой точки  $e_T^*$ , ошибка соблюдения строя  $e_F$  и скорость формирования строя, соответствующего заданной ЦГС. В этом же разделе исследуется при помощи компьютерного моделирования зависимость эффективности алгоритма от значения управляющего параметра  $D_u$ . Моделирование подтверждает следствия из теоремы 1. Представлен анализ результатов компьютерного моделирования и выполнено их соотнесение с аналитически полученными результатами, приводятся графики и таблицы, использованные для анализа результатов. Показано, что утверждения, доказанные аналитически, подтверждаются моделированием. Рассматривается работа алгоритма в условиях внештатных ситуаций, которые могут возникать на практике: непредсказуемый выход из строя любого из агентов, а также неожиданное присоединение к группе очередного агента. Показано, каким образом разработанный алгоритм обрабатывает подобные ситуации.

**Третья глава** посвящена различным модификациям правила управления по скорости (1), а также анализу его работоспособности в условиях существования неточностей при измерении и передаче информации о координатах агентов.

В разделе 3.1 описывается используемая модель препятствий, разрабатываются модификации правила с целью огибания препятствий, рассматриваются результаты моделирования при наличии препятствий на пути группы

агентов. Препятствия  $H_l \in W$ ,  $l = 1, \dots, L$  являются ограниченными замкнутыми множествами произвольной формы. Размером  $R_l$  препятствия  $H_l$  будем называть радиус круга  $B_l$ , содержащего  $H_l$ . Центр круга  $B_l$  находится в центре масс препятствия — точке  $h_l$ , а его радиус  $R_l$  равен  $\max_{H \in H_l} \|\mathbf{r}(H) - h_l\|$  ( $H$  — точка внутри  $H_l$ , а  $\mathbf{r}(H)$  — её радиус вектор). Текущее расположение и размеры препятствия заранее не известны агентам. Предполагается, что они могут при помощи сенсоров различить текущее положение препятствия и его размеры ( $h_l$  и  $R_l$ ), если препятствие попадает в зону действия сенсоров, т. е. выполнено неравенство  $\|h_l - p_i\| \leq r$ . Таким образом, для агентов препятствие моделируется кругом с центром в точке  $h_l$  и радиусом  $R_l$ . Агенты считаются сплошными кругами с центром в точке  $p_i$  и радиусом  $r_A$ . Препятствия классифицируются по размеру (в зависимости от соотношения  $\frac{R_l}{r_A}$ ) на малые, средние и крупные. В диссертационной работе рассматривается огибание малых и средних препятствий, так как огибание крупных препятствий — отдельная задача поиска пути (правильного расположения целевых точек), в которой группа агентов может рассматриваться как цельная сущность. Для огибания препятствий в правило управления (1) вводится отталкивающий от обнаруженных агентом препятствий ( $H_l : \|h_l - p_i\| \leq r$  при  $l = 1, \dots, L'$ ) компонент:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_i = u_{i,L'}, \\ u_{i,l} = \frac{V_{\max}}{\|u_{i,(l-1)} + \theta'_{i,l}\|} \left( u_{i,(l-1)} + \theta'_{i,l} \right), \text{ при } l = 1, \dots, L', \\ u_{i,0} = u_i, \\ \theta'_{i,l} = -\frac{\rho'_l (h_l - p_i)}{\|h_l - p_i\| - (r_A + R_l)}, \\ \rho'_l = \frac{V_{\max}^2}{V_{\max} + r_A + R_l}. \end{array} \right.$$

В работе приводятся рекомендованные значения для весовых коэффициентов  $\rho'_l$ , регулирующих силу отталкивания от препятствия, обеспечивающие решение задачи при компьютерном моделировании. Результаты моделирования огибания препятствий, движущихся с постоянной скоростью, заключаются в том, что успешное огибание с использованием рекомендованных значений параметров алгоритма реализуется в случае, если препятствие двигается со скоростью не выше чем  $0.6V_{\max}$ .

В разделе 3.2 исследуется вопрос избежания коллизий между агентами. Решение данного вопроса проводится в целом аналогично огибанию препятствий. Приводятся результаты моделирования для итогового модифицированного правила управления, учитывающего и огибание препятствий и избежание коллизий.

Раздел 3.3 подытоживает полученные в разделах 3.1 и 3.2 результаты.

В разделе 3.4 изучаются условия применимости правила управления (1) в условиях помех связи и ошибок измерения, приводятся результаты моделирования. На каждом шаге алгоритма к информации агента  $A_i$  относительно собственного расположения, а также расположения его соседей по группе связности, добавляется вектор  $\alpha_{ij}(t) \in \mathbb{R}^2, j = 1, \dots, k$ , компоненты которого — случайные величины с равномерным распределением на отрезке  $[-B, B], B \in \mathbb{R}^+$ :

$$\bar{P}_i(t) = P(t) + \begin{pmatrix} \alpha_x^{i1} & \alpha_y^{i1} \\ \alpha_x^{i2} & \alpha_y^{i2} \\ \dots & \dots \\ \alpha_x^{ik} & \alpha_y^{ik} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Моделирование выявило зависимость эффективности алгоритма от значения соотношения  $\frac{B}{V_{\max}\Delta t}$ : ошибка строя стабилизируется в приемлемом значении, если  $\frac{B}{V_{\max}\Delta t} \leq 1$ .

В разделе 3.5 разработана модификация алгоритма управления по скорости, позволяющая корректно обрабатывать ситуации намеренной фиксации количества точек в геометрической структуре строя, вследствие чего возможно несовпадение количества агентов и количества точек в геометрической структуре строя, приводятся результаты моделирования для указанной модификации.

В четвертой главе приводится адаптация правила (1) к управлению по ускорению, при помощи моделирования исследуется его работоспособность и помехоустойчивость.

В разделе 4.1 рассматривается случай управления по ускорению:

$$\begin{cases} \ddot{p}_i(t) &= u_i(t), \\ \dot{p}_i(t_0) &= V_{i0}, \\ p_i(t_0) &= p_{i0}. \end{cases}$$

В данной системе  $u_i(t)$  - управление для  $i$ -го агента, процесс управления начинается с  $t = t_0$ . Такую динамику будем называть управлением по ускорению.

Ограничения допустимых состояний системы выражаются в том, что для агента недопустимо превышение максимального ускорения и максимальной скорости:  $\|\ddot{p}_i\| \leq a_{\max}, \|\dot{p}_i\| \leq V_{\max}$  ( $a_{\max}, V_{\max} \in \mathbb{R}^+$ ). Из этого следует необходимость выполнения дополнительного условия:  $\|u_i(t)\| \leq a_{\max}$ . Целесообразно рассматривать класс ограничений  $a_{\max} < \frac{V_{\max}}{\Delta t}$ , так как в прочих случаях изменение скорости происходит достаточно быстро, и может быть применена модель управления по скорости. При выполнении неравенства  $a_{\max} < \frac{V_{\max}}{\Delta t}$

анализируются ситуации, когда быстрая остановка движения (т.е. полное прекращение движения за временной промежуток, не превышающий быстродействия системы —  $\Delta t$ ) не возможна.

Управление по ускорению предлагается в двух вариантах, один из которых (модифицированный вариант) позволяет достичь ускоренной стабилизации ошибки строя. Базовое правило управления по ускорению выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p}_i = \frac{\min \{ V_{\max}, \|V_i\| \}}{\|V_i\|} V_i, \\ \dot{V}_i = \frac{\min \{ a_{\max}, \|\theta_i\| \}}{\|\theta_i\|} \theta_i, \\ \theta_i = \sum_{j=1}^k c_{ij} (L_{k,i}^j - p_i), \\ L_{k,i}^j = R_\beta (F_k^j + D_u) + A_{\text{см}}, \\ p_i(t_0) = p_{i0}, \dot{p}_i(t_0) = (0, 0)^T. \end{array} \right. \quad (3)$$

В этом же разделе приводится дискретный аналог правила управления по ускорению и анализ результатов моделирования при разных соотношениях  $a_{\max} \Delta t$  и  $V_{\max}$ . Вывод заключается в том, что чем ближе соотношение  $\frac{a_{\max} \Delta t}{V_{\max}}$  к единице, тем быстрее затухают колебания и тем меньше шагов требуется для достижения целевых точек. Таким образом, проблема колебаний ошибки строя наиболее актуальна, когда  $a_{\max}$  значительно ниже  $\frac{V_{\max}}{\Delta t}$ .

Для ускоренного снижения амплитуды колебаний ошибки строя вводится следующая модификация правила (3) при условии наличия виртуального лидера в  $V_{\max} \Delta t$ -окрестности агента  $A_i$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{p}_i = -\frac{a_{\max}}{\left\| \frac{\dot{p}_i}{\Delta t} \right\|} \frac{\dot{p}_i}{\Delta t}, \text{ если } 0.5 \left\| \left( 2\dot{p}_i(t) - \frac{a_{\max}}{\left\| \frac{\dot{p}_i}{\Delta t} \right\|} \frac{\dot{p}_i}{\Delta t} \Delta t \right) \Delta t \right\| \leq \|\theta_i\|, \\ \ddot{p}_i = -\frac{\min \{ a_{\max}, \left\| \frac{\dot{p}_i}{\Delta t} \right\| \}}{\left\| \frac{\dot{p}_i}{\Delta t} \right\|} \frac{\dot{p}_i}{\Delta t} \text{ иначе,} \\ \theta_i = L_{k,i}^j - p_i, \\ L_{k,i}^j = R_\beta (F_k^j + D_u) + A_{\text{см}}, \\ p_i(t_0) = p_{i0}, \dot{p}_i(t_0) = (0, 0)^T, \\ \|\dot{p}_i(t)\| \leq V_{\max}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Результаты моделирования подтверждают более быстрое затухание колебаний ошибки строя при применении модификации (4).

В разделе 4.2 проводится сравнительный анализ базового управления по ускорению (3) с вариантом, учитывающим модификацию (4), при помощи компьютерного моделирования. Делается вывод о том, что алгоритмы на базе данных методов успешно решают поставленную задачу при определённых значениях управляющих параметров. При этом базовый метод позволяет быстрее достигнуть целевой точки, а модифицированный метод позволяет добиться более высокой точности соблюдения строя (особенно на начальном этапе, в ходе которого происходит стабилизация ошибки строя), однако ценой более медленного продвижения к целевой точке и переменного скоростного режима (с очень малой амплитудой) при установившемся движении.

Для того чтобы использовать достоинства обоих подходов, сгладив их недостатки, необходимо до выхода в установившийся режим использовать модифицированное правило управления (это обеспечит более быструю стабилизацию ошибки строя), а затем переключаться на исходное правило управления (это обеспечит более скорое достижение целевой точки группой агентов и сократит количество усилий на разгон и торможение в установившемся режиме). Для случаев когда, с точки зрения выполняемой миссии, наиболее приоритетной задачей является максимизация точности соблюдения строя, лучше подходит модифицированный вариант, а для случаев, когда приоритетнее быстрота достижения целевых точек — метод управления по ускорению (3).

В разделе 4.3 рассматривается модификация правила управления по ускорению для обеспечения огибания препятствий и избежания коллизий аналогично тому, как это было выполнено для управления по скорости. Введём в правило управления компонент, обеспечивающий отталкивание агентов, аналогичным образом, как в случае решения задачи огибания препятствий (считаем другого агента препятствием малого размера). Тогда правило управления с учётом огибания препятствий и избежания коллизий имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{p}_i = \frac{\min\{a_{\max}, \|u_i + \theta'_i + \theta''_i\|\}}{\|u_i + \theta'_i + \theta''_i\|} (u_i + \theta'_i + \theta''_i), \\ \theta' = - \sum_{h_l: \left\{ \begin{array}{l} \|h_l - p_i\| \leq r; \\ d_{h_l} \leq d_{h_l}^* \end{array} \right.} \frac{\rho'_l (h_l - p_i)}{\|h_l - p_i\| - (r_A + R_l)}, \\ \theta'' = - \sum_{p_j: \left\{ \begin{array}{l} \|p_j - p_i\| \leq r; \\ d_{p_j} \leq d_{p_j}^* \end{array} \right.} \frac{\rho'_j (p_j - p_i)}{\|p_j - p_i\| - 2r_A}, \\ d_{p_j}^* = 2 \frac{V_{\max}^2}{a_{\max}}; d_{h_l}^* = 2 \frac{V_{\max}^2}{a_{\max}}, \\ d_{p_j} = \|p_j - p_i\| - 2r_A, d_{h_l} = \|h_l - p_i\| - r_A - R_l. \end{array} \right. \quad (5)$$

Рассмотрение случая огибания движущихся препятствий при помощи моделирования выявило необходимость следующей модификации правила (5):

$$\ddot{p}_i = \begin{cases} \frac{\min\{a_{\max}, \|\theta'_i + \theta''_i\|\}}{\|\theta'_i + \theta''_i\|}(\theta'_i + \theta''_i), & \exists h_l : \|h_l - p_i\| \leq r, d_{h_l} \leq d_{h_l}^*, \\ \frac{\min\{a_{\max}, \|u_i + \theta''_i\|\}}{\|u_i + \theta''_i\|}(u_i + \theta''_i), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6)$$

По итогам моделирования успешное огибание движущихся препятствий при рекомендованной параметризации и использовании правила (5) с учётом модификации (6) возможно при скорости препятствия  $V_{\text{obs}} \leq 0.6V_{\text{max}}$ .

В разделе 4.4 для базового управления по ускорению (3) проводится анализ его работоспособности в условиях наличия ошибок измерений и шумов. Внедрение помех и ошибок измерения в модель выполнена идентичным образом, как в случае с управлением по скорости. Каждый агент при расчётах использует искажённую по закону (2) информацию о координатах. Графики, построенные по результатам моделирования, показывают скорость роста количества шагов в зависимости от  $B$  выше, чем линейная, рост, тем не менее, не носит экспоненциального характера. При  $B \in [0, 2V_{\text{max}}\Delta t]$  количество шагов возрастает не более, чем на 30% от количества шагов в условиях отсутствия ошибок измерения и шумов. Моделирование показывает, что медиана ошибки строя остаётся в пределах допустимого отклонения (т. е. в пределах  $[0, V_{\text{max}}\Delta t]$ ) при  $B \leq 3V_{\text{max}}\Delta t$ .

Проводится сравнительный анализ помехоустойчивости управлений по скорости (1) и по ускорению (3), по итогам которого делается вывод о том, что в целом управление по ускорению менее устойчиво к помехам и ошибкам измерения в сравнении с управлением по скорости, которое по результатам моделирования выглядит более надёжным и проигрывает только в скорости достижения целевой точки с ростом  $B$ , по всем остальным показателям показывая превосходство.

В **заклЮчении** резюмируются основные проделанные работы и полученные результаты, оговариваются сильные и слабые стороны предложенных правил управления, а также возможные дальнейшие направления развития.

**Основные результаты работы** заключаются в следующем:

1. В работе разработаны новые математические методы моделирования движения строя роботов, рассмотрены два варианта динамики агентов в составе мультиагентной системы, моделирующей группу роботов. Для каждого из вариантов дана строгая постановка задачи на основании введённых в работе определений. Для решения задач управления строем разработаны оригинальные правила управления по скорости и по уско-

рению, обладающие рядом преимуществ по сравнению с другими методами: полная децентрализация управления в сочетании с динамическим выбором геометрической формы строя из ранее заданного набора, что позволяет эффективно обрабатывать внештатные ситуации, такие как выход агентов из строя.

2. Выполнено аналитическое доказательство того, что предложенное в диссертации управление по скорости решает поставленную задачу при определённых значениях управляющих параметров и определённых начальных условиях, указаны диапазоны приемлемых значений этих параметров, а также то, как они влияют на процесс управления.
3. Спроектирована и разработана масштабируемая среда моделирования — программный комплекс, позволяющий выполнение вычислительных экспериментов для различных вариантов динамики роботов и различных алгоритмов управления, а также обеспечивающий визуализацию процесса и сбор статистической информации о значении параметров в ходе выполнения миссии агентами. С использованием численных методов была проведена дискретизация задачи, получены дискретные аналоги предложенных правил управления, разработаны и реализованы в среде моделирования алгоритмы управления.
4. Выполнены комплексные исследования проблемы управления движением строя в мультиагентных системах с применением математического моделирования и вычислительного эксперимента. При помощи вычислительных экспериментов показана работоспособность правил управления и разработанных на их основе алгоритмов при решении поставленных задач, в том числе в случае изменения числа агентов вследствие выхода из строя или внезапного приобретения связи с очередным агентом, а также в условиях наличия ошибок измерений и шумов, удовлетворяющих определённым ограничениям.
5. Были разработаны модификации исходных правил управления и алгоритмов для решения дополнительных подзадач, в том числе для обхода препятствий по мере движения, а также для избежания коллизий между самими агентами. Вычислительные эксперименты показали, что модифицированные правила управления и алгоритмы на их основе успешно решают поставленные задачи.

За заключением следует перечень всех рисунков, встречающихся в работе, а также перечень всех таблиц.

В приложении содержатся дополнительные сравнительные таблицы, объём приложения составляет 2 страницы.

В заключение автор выражает благодарность доктору физико-математических наук В. В. Фомичёву за помощь в постановке задачи и ценные советы и замечания, а также всем сотрудникам кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления ВМК МГУ за поддержку.

## Публикации автора по теме диссертации

1. Морозова Н. С. Формирование строя и движение строем для мультиагентной системы с динамическим выбором структуры строя и положения агента в строю // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления «ВСПУ-2014». М.: ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. С. 3822–3833.
2. Морозова Н. С. Виртуальные формации и виртуальные лидеры в задаче о движении строем группы роботов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 1. С. 135–149.
3. Морозова Н. С. Управление движением строя для мультиагентной системы, моделирующей автономных роботов // Вестник московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 2015. № 4. С. 23–31.
4. Морозова Н. С. Децентрализованное управление движением строя роботов при динамически изменяющихся условиях // Искусственный интеллект и принятие решений. 2015. № 1. С. 65–74.
5. Морозова Н. С. Задача управления движением строя для мультиагентной системы в приложении к робототехнике (в разделе «О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова») // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 8. С. 1117–1119.
6. Морозова Н. С. Огибание препятствий при децентрализованном управлении движением строя роботов // Устойчивость и процессы управления: Материалы III международной конференции (Санкт-Петербург, 5 – 9 октября 2015 г.). СПб.: Издательский Дом Фёдоровой Г. В., 2015. С. 537–538.
7. Мисатюк (Морозова) Н. С. К вопросу об управлении группой роботов: комбинирование централизованного и децентрализованного методов // Сборник тезисов XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2012» секция «Вычислительная математика и кибернетика». М.: МАКС Пресс, 2012. С. 82–84.
8. Морозова Н. С. Алгоритмы управления движением для мультиагентных систем // Сборник тезисов научной конференции «Тихоновские чтения».

М.: Издательский отдел Факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. МАКС Пресс, 2013. С. 10–11.

## Список литературы

9. Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г. Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 280 с.
10. Hengster-Movric K., Bogdan S., Draganjac I. Multi-Agent Formation Control Based on Bell-Shaped Potential Functions // Intelligent Robotic Systems. 2010. Vol. 58, N 2. P. 165–189.
11. Yang J., Lu Q., Lang X. Flocking shape analysis of multi-agent systems // Science China Technological Sciences. 2010. Vol. 53, N 3. P. 741–747.
12. Vicsek T., Czirok A., Jacob E. B., et al. Novel type of phase transitions in system of self-driven particles // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75, N 6. P. 1226–1229.
13. Reynolds C. Flocks, birds, and schools: A distributed behavioural model // Comput. Graph. 1987. Vol. 21, N. 4. P. 25–34.
14. Tanner H. G., Jadbabaie A., Pappas G. J. Flocking in Teams of Nonholonomic Agents // LNCIS. Cooperative control. 2005. Vol. 309. P. 229–239.
15. Куржанский А. Б. О задаче группового управления в условиях препятствий // Труды Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 166–179.
16. Куржанский А. Б. Задача о нестолкновениях при групповом движении в условиях препятствий // Труды Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 134–149.
17. Eren T., Belhumeur P., Anderson B. et al. A framework for maintaining formation based on rigidity // Proc. of the 15th IFAC World Congress. Vol. 15. Barcelona: International Federation of Automatic Control, 2002. P. 1306–1306.
18. Rodrigues J., Figueira D., Neves C., et al. Leader-following graph-based distributed formation control // Robotica. 2009. N 75. P. 8–14.
19. Olfati-Saber R., Fax J. A., Murray R. M. Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems // Proceedings of the IEEE. 2007. Vol. 95, N 1. P. 215–233.

20. Wang J., Nian X., Wang H. Consensus and formation control of discrete-time multi-agent systems // Journal of Central South University of Technology. 2011. Vol. 18, N 4. P. 1161–1168.
21. Zhengping W., Zhihong G., Xianyong W., et al. Consensus Based Formation Control and Trajectory Tracing of Multi-Agent Robot Systems // Journal of Intelligent Robotic Systems. 2007. Vol. 48, N 3. P. 397–410.
22. Lalish E., Morgansen K., Tsukamaki T. Formation tracking control using virtual structures and deconfliction // Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Decision and Control. San Diego: IEEE, 2006. P. 5699–5705.
23. Zhonghai Z., Jian Y., Wenxia Z., et al. Formation control based on a virtual-leader-follower hierarchical structure for autonomous underwater vehicles // International journal of advancements in computing technology. 2012. Vol. 4, N 2. P. 111–121.
24. Lewis M. A., Tan K. High precision formation control of mobile robots using virtual structures // Autonomous Robots. 1997. Vol. 4, N 4. P. 387–403.
25. Eren T., Morse A. S., Belhumeur P. N. Closing ranks in vehicle formations based on rigidity // Proc. of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. 2002. Vol. 3. P. 2959–2964.
26. Xue D., Yao J., and Wang J.  $H_\infty$  Formation Control and Obstacle Avoidance for Hybrid Multi-Agent Systems // Journal of Applied Mathematics. 2013. Vol. 2013. Article ID 123072. URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/123072> (accessed 14.11.2015)
27. Иванов Д. Я. Построение формаций в группах квадрокоптеров с использованием виртуального строя // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления «ВСПУ-2014». М.: ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. С. 1971–1978.
28. Gazi V., Fidan B. Coordination and Control of Multi-agent Dynamic Systems: Models and Approaches // Swarm Robotics. Lecture Notes in Computer Science. 2007. Vol. 4433. P. 71–102.