

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Краев Андрей Владимирович

Свойства относительных порядков и их роль при решении обратных задач управления

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена на *кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики*
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: **Фомичев Василий Владимирович,**
доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Официальные оппоненты: **Четвериков Владимир Николаевич,**
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования факультета фундаментальных наук федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Павлова Наталья Геннадьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации факультета физико-математических и естественных наук федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Ведущая организация: федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук»

Защита состоится 16 марта 2016 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 при ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», расположенном по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, д.1, стр. 52, 2-й учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», а также на официальном сайте факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова: <http://cs.msu.ru> в разделе «Диссертации».

Автореферат разослан «_____» _____ 2016 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 501.001.43,

доктор физико-математических наук, профессор

Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Задача обращения динамических систем является одной из актуальных задач теории управления. Данная задача в различных постановках возникает во многих отраслях науки и техники, связанных с проектированием и эксплуатацией автоматических систем и устройств в условиях неопределённого внешнего воздействия, а также в ряде случаев может найти своё применение в задачах прогнозирования и предсказания. Если представлять динамическую систему в виде блока, преобразующего входное воздействие в выходной сигнал, который можно измерять (например, при помощи датчика), то задача обращения динамических систем заключается в нахождении неизвестного входного воздействия по известным параметрам блока (коэффициентам системы) и измеряемому выходу (показаниям датчика). Математическое описание динамической системы предполагает наличие у блока постоянных характеристик, задаваемых коэффициентами системы, а также внутренней памяти, характеризуемой переменным вектором состояний, значения которого вместе с входным воздействием участвуют в формировании выходного сигнала. Данная модель динамических объектов используется в описании различных технических объектов и устройств в различных областях, от авиапрома до горнодобывающей промышленности. Случай линейных систем является наиболее изученным в классе задач обратной динамики, как в непрерывной так и в дискретной постановке. Здесь уместно сообщить, что линейная стационарная дискретная динамическая система в общем случае задаётся следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} x^{t+1} = Ax^t + B\xi^t \\ y^t = Cx^t + D\xi^t, \end{cases} \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

с переменными параметрами $x^t \in \mathbb{R}^n$, $y^t \in \mathbb{R}^l$, $\xi^t \in \mathbb{R}^m$ и постоянными матрицами A, B, C, D соответствующих размерностей. Устоявшаяся терминология теории управления использует обозначения ξ^t для входа, y^t для выхода и x^t для вектора состояний системы, имея в виду, что индекс t означает соответствующий момент времени.

Линейный случай для непрерывных систем в различных постановках исследовался многократно (например, [9]), начиная со второй половины 20-го века. В качестве примера можно привести работы L.M.Silverman [10], P.M. Van Dooren, P Dewilde, J Wandewalle [11]. Например, в работе Силвермана исследована задача обращения, в которой неизвестный вход непосредственно может влиять на измеряемый выход, т.е. матрица D в (1) может быть ненулевой, что является самой общей постановкой для случая стационарных линейных систем. Значительный вклад в исследование обратных задач управления внесли советские и российские математики Ю.С. Осипов и А.В. Кряжимский ([12], [13], [14]).

В настоящей работе делается попытка исследования одного специального случая обращения линейной дискретной системы. Особенностью предлагаемой работы является то, что рассматривается постановка задачи обращения для систем с нулевой матрицей D , что является также весьма распространённым и актуальным случаем в моделировании физических процессов и автоматических систем. Задача при нулевой матрице D представляет собой значительно более сложный частный случай, так как в этом случае обратный оператор физически не реализуем. Основным моментом является тот факт, что полученные необходимые и достаточные условия корректности постановки задачи обращения динамических систем формируют т.н. класс 'обратимых' систем. Эти условия изначально не совпадают с условиями применимости полученных на первом этапе алгоритмов обращения, которые формируют класс т.н. 'образаемых' систем. Указанные алгоритмы обращения

применимы лишь для тех обратимых систем, для которых дополнительно выполнено определение относительного порядка по Исидори. Именно системы, составляющие разность этих классов, т.е. обратимые системы без относительного порядка, представляют интерес для дополнительного исследования с точки зрения их обращения, и этому посвящена значительная часть настоящей работы. Существенным результатом настоящего исследования является рассмотрение свойств относительного порядка, его аналогов, и методов сведения задачи с невыполненными свойствами относительного порядка к задаче для системы, обладающей свойством относительного порядка, необходимым для применимости алгоритмов обращения. Хотя все рассуждения проводятся для случая дискретных линейных систем, во многих случаях полученные результаты могут быть обобщены и на непрерывный случай.

Цель диссертационной работы

В проведённом в диссертации исследовании ставятся следующие цели:

1) Определить условия, при которых рассматриваемая постановка задачи обращения корректна, т.е. задача имеет единственное решение или все её решения являются асимптотически сходящимися друг к другу.

2) Используя свойства классического определения относительного порядка (которое выполняется не для всех систем), предложить алгоритмы решения задачи обращения в рассматриваемой постановке для случая SISO и MIMO систем с выполненным определением относительного порядка. Определить условия применимости предложенных алгоритмов.

3) Исследовать свойства относительного порядка квадратных MIMO-систем и предложить алгоритмы сведения произвольной исходной задачи к задаче обращения для системы с относительным порядком.

4) Ввести в рассмотрение аналоги относительного порядка и исследовать их свойства и роль в решении задачи обращения. Предложить алгоритм решения задачи обращения для систем со столбцовым относительным порядком.

5) Рассмотреть свойства систем с неполным относительным порядком. Обобщить понятие относительного порядка на случай таких систем.

6) В конечном итоге на основе полученных результатов предложить общий алгоритм обращения дискретных линейных стационарных систем.

Методы исследования

Основные результаты получены методами теории устойчивости, разностных уравнений, Z-преобразований, матричными методами линейной алгебры и методами функционального анализа.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1) Определены условия существования и единственности (с точностью до асимптотически исчезающих слагаемых) решения задачи обращения.

2) Установлен ряд свойств относительного порядка векторных систем по Исидори. Введено в рассмотрение определение столбцового относительного порядка. Исследованы его свойства.

3) Предложены алгоритмы решения задачи обращения для скалярных и векторных систем с относительным порядком по Исидори или столбцовым относительным порядком. Условия их применимости при наличии относительного порядка совпадают с условиями существования и единственности (с точностью до асимптотически исчезающих слагаемых) решения задачи обращения в рассматриваемой постановке.

4) Исследован вопрос приводимости системы без относительного порядка к виду с относительным порядком невырожденным преобразованием выходов, либо сдвигом компоненты выхода по времени. Предложены алгоритмы такого преобразования.

5) Разработана теория неполных относительных порядков, в рамках которой введено понятие обобщённого относительного порядка и получен крите-

рий приводимости линейным невырожденным преобразованием выходов системы к виду с относительным порядком.

6) Предложен общий алгоритм обращения дискретных линейных стационарных систем.

Практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Разработанные алгоритмы допускают программную реализацию, которая может быть непосредственно использована для решения задачи в тех областях автоматического управления, где она возникает.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- 1) Условия обратимости линейных дискретных систем.
- 2) Свойства относительного порядка квадратных ММО-систем по Исидори.
- 3) Определение и свойства столбцового относительного порядка.
- 4) Алгоритмы обращения скалярных и векторных квадратных систем с относительным порядком по Исидори.
- 5) Алгоритмы обращения векторных квадратных систем со столбцовым относительным порядком.
- 6) Алгоритмы приведения квадратной системы к виду с относительным порядком невырожденным преобразованием выходов.
- 7) Обобщения понятия относительного порядка.
- 8) Алгоритм приведения квадратной системы к виду с относительным порядком преобразованием выходов общего вида.
- 9) Общий алгоритм обращения линейных стационарных дискретных систем.
- 10) Программная реализация алгоритма обращения.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на научном семинаре «Проблемы нелинейной динамики: качественный анализ и управление», а также на следующих конференциях:

- международной конференции "Системный анализ и информационные технологии" (Переславль-Залесский, 2005 г., 2006 г.);
- международной конференции "Системный анализ и информационные технологии" (Обнинск, 10-14 сентября 2007 г.);
- научной конференции "Тихоновские чтения" (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 25-29 октября 2010 года);
- научной конференции "Ломоносовские чтения" (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 16-25 апреля 2012 года);
- научной конференции "Тихоновские чтения" (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 29 октября - 2 ноября 2012 года);
- научной конференции "Тихоновские чтения" (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 28 октября - 1 ноября 2013 года);
- научной конференции "Тихоновские чтения" (Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 27 октября - 31 октября 2014 года).

Публикации.

Основные результаты исследования опубликованы в 8 работах ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]), первые 7 статей из этого списка опубликованы в журналах из списка ВАК.

Личный вклад автора

Постановка задачи, исследовавшейся в диссертации, принадлежит академику С.К. Коровину. Методы исследования и достигнутые с их помощью результаты, включённые в главы 1,3,4,5 диссертации, разработаны и получены автором лично. Результаты главы 2 получены в соавторстве с профессорами ВМК МГУ В.В. Фомичевым и С.К. Коровиным, при этом Краев А.В. выполнил техническую работу по получению оценок результатов работы ал-

горитмов. Результаты глав 6 и 7 получены в соавторстве со студентом ВМК МГУ Роговским А.И. (под научным руководством Краева А.В.), при этом Краеву А.В. принадлежит постановка задачи, формулировка итоговых результатов в виде утверждений, которые должны были быть доказаны, а также указание методов исследований с примерами их применения. В частности, идеи доказательств результатов главы 6 впервые были опробованы и использованы Краевым А.В. при получении результатов главы 4. Профессор ВМК МГУ В.В. Фомичев участвовал в обсуждении результатов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, восьми глав, включая результаты моделирования, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 145 страниц текста, 9 иллюстраций. Список литературы включает в себя 43 наименования.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулированы цели и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава посвящена изучению условий существования и единственности решения задачи обращения. Рассматривается задача обращения для системы

$$\begin{cases} x^{t+1} = Ax^t + B\xi^t \\ y^t = Cx^t, \end{cases} \quad t=0,1,2,\dots \quad (2)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$, $\xi \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$.

Под задачей обращения понимается нахождение неизвестного входного

сигнала ξ^t при известных параметрах системы A, B, C и измерениях выхода y^t .

На первом этапе получено необходимое условие существования и единственности решения в виде соотношения между количеством входов m и выходов l системы. На основе полученного соотношения делается вывод о целесообразности рассмотрения в дальнейшем только квадратных систем, т.е. систем с одинаковым количеством входов и выходов. Далее для таких систем получены достаточные условия единственности решения, которые формулируются в терминах устойчивости инвариантных нулей системы.

Определение 1. Матрицей Розенброка системы (2) называется следующая блочная матрица:

$$R(z) = \begin{pmatrix} zI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Определение 2. Инвариантными нулями системы (2) называются такие значения z , при которых ранг матрицы Розенброка понижается

Известно, что инвариантные нули системы являются корнями характеристического полинома нулевой динамики и определяют её устойчивость.

Заметим, что в матричном виде однородная задача может быть аписана в виде системы для Z -преобразований:

$$\begin{pmatrix} zI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta \Xi \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

При формулировке достаточных условий единственности рассматривается три вида решения: точное, финитное и асимптотическое. Каждому случаю соответствует своя формулировка условия единственности. Получены также условия существования решения задачи обращения и критерий неединственности решения. Основным результатом данной главы являются следующие утверждения:

Достаточные условия единственности решения задачи при $m = l$:

Единственность решения в смысле точного совпадения входов.

Решение единственно, если инвариантные нули отсутствуют, т.е. нулевая динамика отсутствует.

Единственность решения в финитном смысле. Совпадение входов, начиная с некоторого момента времени, имеет место, если единственным инвариантным нулём системы является число 0.

Единственность решения в асимптотическом смысле. Асимптотическая сходимость всех решений друг к другу имеет место, если все инвариантные нули системы устойчивы (в дискретном случае лежат внутри единичного круга), т.е. нулевая динамика устойчива.

Критерий неединственности. Единственность решения задачи обращения для квадратной линейной стационарной системы не имеет места, если и только если хотя бы одному неустойчивому инвариантному нулю отвечает вектор решения (4) с ненулевой компонентой $\Delta \Xi$.

Данные условия получаются рассмотрением однородной системы для системы (2) в матричном виде и использованием метода Z-преобразований, а также анализом свойств нулевой динамики.

О существовании решения при указанных условиях единственности можно судить по тому факту, что для излагаемых в настоящей работе алгоритмов обращения в дискретном случае условия применимости охватывают достаточные условия единственности решения задачи для квадратных управляемых и наблюдаемых систем, при этом алгоритмы дают однозначное, финитное либо асимптотическое решение.

Условия корректности. Задача обращения для управляемой и наблюдаемой квадратной системы поставлена корректно тогда и только тогда, когда инвариантные нули системы устойчивы или отсутствуют.

Результаты этой главы отражены в публикации [3].

Во второй главе, результаты которой отражены в публикации [1], подробно рассмотрена задача обращения скалярной системы и приведены алгоритмы её обращения, как по состоянию, так и по выходу. Подробно рассмотрен случай, когда известна волновая модель неизвестного входа. Приведены оценки ошибки оценивания входа по указанным алгоритмам в случае, если входные данные задаются с погрешностью. Особенностью постановки в скалярном случае является то, что относительный порядок определён для всех систем, удовлетворяющих условиям корректности. Поэтому задача обращения по выходу решается достаточно просто для всех рассматриваемых систем в скалярном случае. Это возможно вследствие того, что для систем, обладающих относительным порядком, существует линейное невырожденное преобразование пространства состояний, приводящее систему к каноническому виду с выделением нулевой динамики. Приведённая к такому виду система содержит выделенную подсистему, описывающую нулевую динамику. В случае устойчивости нулевой динамики, что имеет место, когда выполнены условия корректности постановки задачи обращения, выделенная подсистема устойчива и её уравнение может быть использовано как уравнение наблюдателя состояния части фазового вектора. Отдельно рассматриваются случаи систем с первым относительным порядком (более простая структура канонической формы) и систем с более высоким относительным порядком (более сложная структура канонической формы). Для каждого из этих случаев структура канонической формы позволяет найти неизвестный вход по известному выходу точно (в случае отсутствия нулевой динамики), с финитной точностью или асимптотически точно.

В третьей главе, результаты которой отражены в публикации [2], приведены обобщения алгоритмов обращения в скалярном случае на случай век-

торной системы:

$$\begin{cases} x^{t+1} = Ax^t + B\xi^t \\ y^t = Cx^t, \end{cases} \quad t=0,1,2,\dots \quad (5)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$, $\xi \in \mathbb{R}^l$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$.

Также как и в главе 2, рассмотрен случай волновой модели и приведены оценки ошибок в определении входа при неточно заданных данных. Особенностью векторного случая является то, что относительный порядок определён не для всех векторных систем, поскольку условия в его определении могут быть несовместными:

Определение 3 (по Исидори ([15])). Вектор $r = (r_1, \dots, r_l)$ - вектор относительного порядка системы (5), если выполнены условия:

1) $C_i A^j B = 0, j = 1, \dots, r_i - 2; C_i A^{r_i-1} B \neq 0$, для всех $i = 1, \dots, l$.

2) $\det H(r_1, \dots, r_l) \neq 0$, где $H(r) = \begin{pmatrix} C_1 A^{r_1-1} B \\ \dots \\ C_l A^{r_l-1} B \end{pmatrix}$ (здесь C_i - строки

матрицы C).

Поэтому предлагаемые в данной главе алгоритмы обращения по выходу, основанные на выделении нулевой динамики, применимы только к тем векторным системам, для которых выполнено определение относительного порядка. Структура самой канонической формы с выделением нулевой динамики и вытекающие из её вида рассуждения во многом повторяют всё, что было описано в главе 2 применительно к скалярному случаю.

Дальнейшее содержание работы посвящено задаче обобщения алгоритмов обращения дискретных динамических систем на случай векторных систем без относительного порядка. При этом делается попытка построить преобразования, сводящие задачу обращения для системы без относительного порядка к задаче для эквивалентной системы, обладающей относительным

порядком.

Четвёртая глава посвящена изучению свойств относительного порядка. Целью этой главы является выяснение условий и методов приведения системы к виду с относительным порядком посредством невырожденного линейного преобразования выходов. Основой проведённых рассуждений является тот факт, что хотя линейное преобразование пространства состояний не меняет относительный порядок системы, применение линейного невырожденного преобразования только к выходам может повлиять на выполнение условий относительного порядка системы, и в частности, таким преобразованием можно добиться выполнения условий относительного порядка, если они не были выполнены для исходной системы. При этом инвариантные нули системы не претерпевают изменений и условия обратимости не нарушаются. Рассмотрение преобразованной системы с точки зрения задачи обращения означает обращение по преобразованному вектору выходов, который можно вычислить по старому выходу, поскольку преобразование задаётся известной матрицей. Однако ни алгоритм поиска такого преобразования, ни ответ на вопрос о самом его существовании до настоящего момента известен не был. В данной главе были намечены подходы к изучению этих вопросов, и в частности, сформулирован и доказан ряд свойств относительного порядка. Для начала вводится определение неполного относительного порядка (НОП). Это такой вектор r , для которого выполнено только первое условие определения классического относительного порядка (выполнение второго условия определения не требуется).

Естественный интерес вызывает вопрос о том, возможна ли ситуация, при которой в двух разных базисах матрицы C , связанных невырожденным преобразованием выходов (для определённости $C^* = T_1 C$ и $C' = T_2 C$) выполняется первое условие определения относительного порядка по Исидори для одного и того же вектора r^* , но при этом второе условие этого определе-

ния выполнено только для одного из этих представлений (C^*). Ответ на этот вопрос даётся следующим утверждением. Будем обозначать $H'(r^*)$ матрицу H , составленную по правилам из второго условия определения по Исидори, принимая за исходные данные строки матрицы C' (на это указывает штрих в обозначении H') и вектор r^* (на это указывает аргумент в скобках). По аналогии будем пользоваться обозначениями $H(r^*)$, $H^*(r^*)$ и т.д., при этом, не ограничивая общности рассуждений будем считать, что векторы относительного порядка упорядочены по неубыванию компонент.

Утверждение 1. Пусть для системы $\{A, B, C^*\}$, выполнено определение относительного порядка по Исидори для вектора $r^* = (r_1^*, r_2^*, \dots, r_l^*)$. Если для системы $\{A, B, C'\}$, где $C' = TC^*$, $|T| \neq 0$, выполнено первое условие относительного порядка по Исидори для вектора r^* , то для этой системы выполнено и второе условие определения относительного порядка по Исидори, т.е. $|H'(r^*)| \neq 0$.

Представим ситуацию, что существует базис, в котором матрица C имеет вид C^* , для которого выполнены оба условия Исидори для вектора r^* . Пусть в каком-то другом базисе α определение не выполняется. Возникает вопрос о возможности перехода от базиса α к базису β , который сопровождается увеличением какой-либо одной компоненты НОП. Ответ на этот вопрос может сыграть свою роль при разработке пошаговых алгоритмов перехода от произвольного базиса к базису с относительным порядком. Ответ на этот вопрос даётся в следующем утверждении.

Утверждение 2. Пусть дана система $\{A, B, C\}$, для которой не выполнено определение относительного порядка по Исидори. Пусть существует вид $\{A, B, C^*\}$, где $C^* = T_1 C$, $|T_1| \neq 0$, при котором выполнено определение относительного порядка по Исидори для вектора $r^* = (r_1^*, r_2^*, \dots, r_l^*)$. Если для системы $\{A, B, C_\alpha\}$, где $C_\alpha = T_2 C$, $|T_2| \neq 0$, выполнено первое условие относительного порядка по Исидори для вектора r_α , причём $(r_\alpha)_i \leq r_i^*$ и

хотя бы в одном случае неравенство строгое, то невырожденным преобразованием выхода можно увеличить некоторую компоненту вектора НОП r_α , не превосходящую $(r_\alpha)_{i^*}$, до величины, не меньшей, чем $r_{i^*}^*$, где i^* - один из индексов, для которого выполнено строгое неравенство $(r_\alpha)_{i^*} < r_{i^*}^*$.

Утверждение 3. Если для системы порядка n выполнено определение относительного порядка по Исидори, то никакая компонента вектора относительного порядка не может быть больше n .

На основе этих свойств предложен алгоритм поиска линейного невырожденного преобразования выходов (приводящего систему к виду с относительным порядком) на основе обхода связного графа конечного размера. Предложенный алгоритм за приемлемое время даёт ответ на оба поставленных вопроса. Результаты этой главы отражены в публикациях [8], [4].

В пятой главе подробно рассмотрен симметричный аналог классического относительного порядка — столбцовый относительный порядок:

Определение 4. Вектор $r = (r_1, \dots, r_l)$ - вектор столбцового относительного порядка системы (5), если выполнены условия:

$$1) CA^j B_i = 0, j = 1, \dots, r_i - 2; CA^{r_i-1} B_i \neq 0, \text{ для всех } i = 1, \dots, l.$$

$$2) \det H(r_1, \dots, r_l) = \det \begin{pmatrix} CA^{r_1-1} B_1 \dots CA^{r_l-1} B_l \end{pmatrix} \neq 0,$$

где B_i - столбцы матрицы B .

Показано, что системы, обладающие столбцовым относительным порядком, также могут быть приведены линейным невырожденным преобразованием пространства состояний к виду с выделением нулевой динамики. Получены алгоритмы обращения на основе выделения нулевой динамики для систем, обладающих столбцовым относительным порядком. Показано, что класс систем, не имеющих классического относительного порядка, но имеющих столбцовый - непуст. Более того, существуют системы, не только не имеющие классического относительного порядка, но и не приводящиеся к нему линейным невырожденным преобразованием выходов, в то же время имею-

щие столбцовый относительный порядок, либо приводящиеся к нему линейным невырожденным преобразованием входов. Это позволяет утверждать, что рассмотрение столбцового относительного порядка расширяет класс систем, для которых удаётся построить инвертор на основе выделения нулевой динамики. Тем не менее, оказывается, что существуют системы не имеющие ни классического, ни столбцового относительного порядка, и не приводящиеся к виду с ними невырожденными преобразованиями выходов (входов), поэтому вопрос о построении инвертора для таких систем остаётся открытым. Результаты главы отражены в публикации [5].

В шестой главе приводится обобщение понятия относительного порядка - главный неполный относительный порядок. Дается определение неполного относительного порядка (НОП). Это такой вектор r , для которого выполнено только первое условие определения классического относительного порядка (выполнение второго условия определения не требуется).

Упорядочим компоненты вектора НОП по возрастанию (это всегда можно сделать, перенумеровав строки матрицы C). Пусть среди компонент этого вектора k различных. Тогда

$$r = (r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, \dots, r_{n_1}^{(1)}, \dots, r_1^{(s)}, r_2^{(s)}, \dots, r_{n_s}^{(s)}, \dots, r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \dots, r_{n_k}^{(k)}),$$

где

$$r_i^{(p)} = r_j^{(p)}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n_p\};$$

$$r_i^{(p)} < r_j^{(q)} \quad \text{при } p < q, \quad i \in \{1, 2, \dots, n_p\}, j \in \{1, 2, \dots, n_q\}$$

и $n_1 + n_2 + \dots + n_k = l$.

Т.е. вектор r разбивается на «секции», состоящие из одинаковых элементов. Таким образом, для элементов вектора r вводится два вида нумерации: обычная последовательная (одномерная), а также двумерная, в которой каждый элемент определяется номером «секции» (верхний индекс) и «местом в

секции» (нижний индекс). Заметим, что поскольку компоненты вектора r соответствуют строкам матрицы $H(r)$, определяемой во втором условии определения относительного порядка, то строки данной матрицы аналогичным образом разбиваются на секции и для них также можно ввести двумерную нумерацию, что используется в дальнейшем.

Определение 5. Вектор r назовем *главным неполным относительным порядком* (ГНОП) системы (5), если r – вектор НОП, и для всех $p \in \{1, 2, \dots, k\}$ строки $\{H_j^{(p)}\}_{j=1}^{n_p}$ линейно независимы. Иначе говоря, r является вектором ГНОП, если строки $H_m^{(p)}$ линейно независимы внутри каждой «секции», при этом линейной независимости всего набора строк не требуется.

Далее показано, что введённое понятие ГНОП однозначно определено для широкого класса систем (включая все системы общего положения), и в случае системы с классическим относительным порядком совпадает с ним. При этом показано, что любая система, заданная в виде, не соответствующем определению ГНОП, может быть приведена к виду с ГНОП невырожденным линейным преобразованием выходов, следовательно под ГНОП системы подразумевается ГНОП приведённой системы. Данное обобщение позволяет ответить на вопрос о приводимости системы без относительного порядка линейным невырожденным преобразованием выходов к виду с относительным порядком и позволяет предложить алгоритм такого приведения – достаточно выбирать преобразования, последовательно увеличивающие компоненты вектора НОП в произвольном порядке до тех пор, пока это возможно, т.е. привести систему к виду с ГНОП. Если в этом представлении определение относительного порядка выполнено, то задача приведения системы к требуемому виду решена, иначе приведение невозможно. Отсюда в частности, следует, что аналогичный алгоритм, основанный на обходе графа из главы 4 можно оптимизировать – проход по рёбрам связности достаточно вести только в од-

ном направлении. Результаты главы отражены в публикации [6].

В главе 7 исследуется вопрос о дополнительных преобразованиях выходов, не являющихся линейными стационарными, которые можно предпринять для тех систем, которые не приводятся к виду с относительным порядком методами, рассмотренными в главе 6. В качестве таких преобразований в дискретном случае рассмотрен сдвиг компоненты выхода по времени с соответствующим преобразованием матрицы выходов. Показано, что комбинация линейных невырожденных преобразований выхода и сдвиг его компонент по времени, применяемые поочерёдно, по указанным в алгоритме правилам, всегда способны привести векторную линейную квадратную стационарную дискретную систему к виду с относительным порядком, что исчерпывающе решает задачу обращения для всего класса обратимых дискретных систем. Алгоритм приведения к виду с ОП состоит из двух следующих шагов, применяемых поочерёдно.

1. Пусть дана система $\{A, B, C^{(0)}\}$, для которой характеристический полином нулевой динамики $\beta^{(0)}(s) \neq 0$. Приведем ее к виду с вектором ГНОП $r^{(0)}$ преобразованием $T^{(0)}$. Для преобразованной системы характеристический полином нулевой динамики $\tilde{\beta}^{(0)}(s) = |T^{(0)}|\beta^{(0)}(s)$. Если r является вектором ОП, система приведена к требуемому виду, иначе перейдем к шагу 2.
2. Так как $r^{(0)}$ – вектор ГНОП системы $\{A, B, \tilde{C}^{(0)}\}$, то строки $C_1 A^{r_1-1}, C_2 A^{r_2-1}, \dots, C_l A^{r_l-1}$ линейно независимы, следовательно, можно рассмотреть систему $\{A, B, C^{(1)}\}$, где $C_i^{(1)} = C_i A^{r_i-1}$. Для этой системы $\beta^{(1)}(s) = s^{|r^{(0)}|-l} \tilde{\beta}^{(0)}(s) = |T^{(0)}| s^{|r^{(0)}|-l} \beta(s)$. Приведем ее к виду с ГНОП $r^{(1)}$, положив $\tilde{C}^{(1)} = T^{(1)} \cdot C^{(1)}$, при этом $\tilde{\beta}^{(1)}(s) = |T^{(1)}| |T^{(0)}| s^{|r^{(0)}|-l} \beta(s)$. Если $r^{(1)}$ – вектор относительного порядка системы, то она приведена к требуемому виду, иначе переходим к шагу 1.

Последующие шаги делаются аналогично.

Процесс не может идти бесконечно, поскольку на каждом шаге увеличивается степень полинома $\beta(s)$, а она не может превосходить $n - m$.

Результаты этой главы отражены в публикации [7].

В восьмой главе приведены примеры и результаты моделирования в виде графиков. Даётся ссылка на программную реализацию алгоритма. Результаты моделирования полностью подтверждают теоретические выводы.

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Сформулированы необходимые и достаточные условия разрешимости задачи обращения для линейной стационарной динамической дискретной системы.

2. Исследованы свойства классического относительного порядка для линейных систем, позволяющие предложить алгоритмы приведения системы к виду с относительным порядком линейным невырожденным преобразованием выходов.

3. Впервые рассмотрен аналог относительного порядка - столбцовый относительный порядок, исследованы его свойства. Предложен алгоритм обращения на основе выделения нулевой динамики для систем, обладающих столбцовым относительным порядком.

4. Впервые введено в рассмотрение понятие главного неполного относительного порядка, на основе которого построена теория обобщённого относительного порядка. В рамках этой теории впервые даётся ответ на вопрос о приводимости системы невырожденным линейным преобразованием выходов к виду с относительным порядком и предлагается алгоритм поиска такого преобразования. Новое понятие обобщает понятие классического относитель-

ного порядка на широкий класс систем, включая все системы общего положения.

5. Для дискретных систем, не приводящихся к виду с относительным порядком линейным невырожденным преобразованием выходов, предложен иной тип преобразования выходов - сдвиг компоненты выхода по времени с одновременным преобразованием матрицы выходов. Предложен алгоритм, комбинирующий два рассмотренных типа преобразований выходов, который всегда приводит систему из рассматриваемого класса к виду с относительным порядком. Результативность алгоритма обоснована теоретически и подтверждена моделированием.

6. Все полученные результаты в совокупности позволяют предложить универсальный алгоритм обращения дискретных линейных стационарных систем на основе приведения системы к виду с относительным порядком и последующим выделением нулевой динамики. Область применимости алгоритма охватывает все системы, для которых задача обращения поставлена корректно, и в частности, все системы общего положения. Предложена также программная реализация алгоритма.

В заключение автор выражает огромную благодарность доктору физико-математических наук В.В. Фомичеву за постоянное внимание к работе и стимулирование исследовательских усилий.

Также автор хочет поблагодарить весь коллектив кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления ВМК МГУ за помощь и поддержку в работе.

Список публикаций

1. Korovin S.K., Kraev A.V., Fomichev V.V. Some inversion algorithms for discrete systems // Computational Mathematics and Modeling. 2007. Vol. 18, no. 4. P. 369–376.
2. Kraev A.V. Some algorithms for inversion of vector discrete systems // Computational Mathematics and Modeling. 2013. Vol. 24, no. 2. P. 271–278.
3. А.В.Краев. Необходимые условия обратимости линейных дискретных динамических систем // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 4. С. 592–594.
4. А.В.Краев. О приведении векторной линейной системы третьего порядка к форме с относительным порядком по Исидори // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1558–1560.
5. Краев А.В. Об аналоге относительного порядка для линейных динамических ММО-систем // Доклады Российской Академии наук. 2014. Т. 454, № 2. С. 152–157.
6. Роговский А.И., Краев А.В., Фомичев В.В. К обобщению относительного порядка // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 8. С. 1128–1132.
7. Роговский А.И., Краев А.В., Фомичев В.В. О приведении векторной системы к виду с относительным порядком // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2015. № 3. С. 20а–26.
8. Краев А.В. Некоторые свойства относительного порядка линейных стационарных динамических систем // Нелинейная динамика и управление.

Сборник статей под ред. С.В.Емельянова, С.К.Коровина. 2013. Т. 8.
С. 105–112.

Цитированная литература

9. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. Москва: Наука, 1976.
10. L.M.Silverman. Inversion of multivariable linear systems // IEEE Trans Aut Contr. 1969. Vol. 14. P. 270–276.
11. P.M.Van Dooren, P.Dewilde, J.Wandewalle. On the determination of the Smith-MacMillan form of a rational matrix from its Laurent expansion // IEEE Trans. Circ. Syst. 1979. Vol. 26. P. 180–189.
12. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В. О динамическом решении операторных уравнений // Известия АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. Т. 269, № 3. С. 552–556.
13. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В. О моделировании управления в динамической системе // Известия АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. Т. 269, № 2. С. 51–60.
14. Osipov Y.S., Kryazhimskii A.V. Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
15. A.Isidori. Nonlinear control systems. London: Springer-Verlag, 1995.