შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია

უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მონათესავე პრობლემები



International Scientific Conference

Related Problems of Continuum Mechanics

მოხსენებათა კრებული
PROCEEDINGS

12-13.10.2018
Kutaisi

საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია

უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მონათესავე პრობლემები

ეძღვნება აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის დაარსებიდან 85 წლისთავს

ეძღვნება პროფესორ ავთანდილ თვალჭრელიძის ხსოვნას და დაბადებიდან 70 წლისთავს

International Scientific Conference

Related Problems of Continuum Mechanics

Dedicated to 85th Anniversary of the AkakiTsereteli State University

The Conference is dedicated to the memory of Professor Avtandil Tvalchrelidze and his 70th birth anniversary

კონფერენცია ტარდება
პროექტის "მათემატიკური მოდელი და კომპიუტერული პროგრამები მრავალშრიანი ტექსტილის მრავალფუნქციური კვლევისათვის" ფარგლებში, რომელიც ხორციელდება შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის ფინანსური მხარდაჭერით

Conference is held within project "Mathematical Models and Computer Program for Multi-functional Researches of Multi-layer Textile Composites" implementing under financial support of the Shota Rustaveli National Science Foundation

რედაქტორი: მიხეილ ნიქაბაძე, პროფესორი, პროექტის სამეცნიერო ხელმძღვანელი
ოვიკ მატევოსიანი, პროფესორი

Editor: Mikhail Nikabadze, Professor, Scientific Head of the Project
Hovik Matevossian, Professor

ISBN 978-9941-484-11-7

სამეცნიერო კომიტეტი

ნიქაბაძე მიხეილი (მ.ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი, რუსეთის ფედერაცია, პროექტის სამეცნიერო ხელმძღვანელი), თავმჯდომარე

ვაშაყმაძე თამაზი (თსუ ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი & ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, საქართველო)

ვერო რენე (შიკოტუმის კვებეკის უნივერსიტეტი, კანადა)

კიკვიძე ომარი (აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, საქართველო)

კირთაძე შალვა (აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, საქართველო)

ლეკვეიშვილი დავითი (აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, საქართველო)

ლემეტრ ჯერარდ (ექს-მარსელ უნივერსიტეტი, საფრანგეთი)

ლურიე სერგეი (რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის გამოყენებითი მექანიკის ინსტიტუტი, მ. ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, რუსეთის ფედერაცია)

მარდალეიშვილი ნოდარი (აკაკი წერეთლის სახლემწიფო უნივერსიტეტი, საქართველო)

მატევოსიანი ოვიკ (რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის კვლევითი ცენტრი „ინფორმატიკა და მართვა“, რუსეთის ფედერაცია)

მიულერი ვოლფგანგ (ბერლინის ტექნიკური უნივერსიტეტი, გერმანია)

მოსეშვილი თამარი (აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, საქართველო)

ნატროშვილი დავითი (საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი & თსუ ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი, საქართველო)

ნორდო ჯიორჯიო (მესინას უნივერსიტეტი, იტალია)

საკო ტოკუეი (ნიჰონის უნივერსიტეტი, იაპონია)

საღინაძე ივანე (აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, საქართველო)

სურგულაძე თეიმურაზი (აკაკი წერეთლის სახელწიფო უნივერსიტეტი, საქართველო)

ულუხანიანი არმინე (ბაუმანის სახელობის ტექნიკური უნივერსიტეტი, რუსეთის ფედერაცია)

ყიფიანი გელა (საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტი, საქართველო)

ჯაიანი გიორგი (თსუ ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი & ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, საქართველო)

საორგანიზაციო კომიტეტი

კირთაძე შალვა (აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი)- თავმჯდომარე

მარდალეიშვილი ნოდარი (აკაკი წერეთლის სახლემწიფო უნივერსიტეტი, საქართველო)

მოსეშვილი თამარი (აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, საქართველო)

ნიქაბაძე მიხეილი (მ.ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, რუსეთი)

ცხაკაია ქეთევანი (აკ. წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი)

ძაძამია დავითი (აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი)

Scientific Committee

Nikabadze Mikhail (Lomonosov Moscow State University, Russian Federation), Chair
Jaiani George (Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Faculty of Exact and Natural Sciences & Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics, Georgia)
Kikvidze Omar (Akaki Tsereteli State University, Georgia)
Kirtadze Shalva (Akaki Tsereteli State University, Georgia)
Kipiani Gela (Georgian Aviation University, Georgia)
Lekveishvili David (Akaki Tsereteli State University, Georgia)
Lemaitre Gerard R. (Aix-Marseille University, France)
Lurie Sergei (Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Russian Federation)
Mardaleishvili Nodari (Akaki Tsereteli State University, Georgia)
Matevossian Hovik (Federal Research Center "Computer Science and Control", Russian Academy of Sciences, Russian Federation)
Moseshvili Tamari (Akaki Tsereteli State University, Georgia)
Müller Wolfgang H. (Technical University of Berlin, Germany)
Natroshvili David (Georgian Technical University & Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics of Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Georgia)
Nordo Giorgio (University of Messina, Italy)
Sako Tokuei (Nihon University, Japan)
Saginadze Ivane (Akaki Tsereteli State University, Georgia)
Surguladze Teimuraz (AkakiTsereteli State University, Georgia)
Vashakmadze Tamaz (Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Faculty of Exact and Natural Sciences & Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics, Georgia)
Verreault René (Université du Québec à Chicoutimi, Canada)
Ulukhanyan Armine (Bauman Moscow State Technical University, Russian Federation)

Organizing Committee

Kirtadze Shalva, Chairman (Akaki Tsereteli State University, Georgia)
Dzadzamia David (Akaki Tsereteli State University, Georgia)
Mardaleishvili Nodari (Akaki Tsereteli State University, Georgia)
Moseshvili Tamari (Akaki Tsereteli State University, Georgia)
Nikabadze Mikhail (Lomonosov Moscow State University, Russian Federation)
Tskhakaia Ketevan (Akaki Tsereteli State University, Georgia)

წინასიტყვაობა

კონფერენცია „უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მონათესავე პრობლემები“ ტარდება საგრანტო პროექტის „მათემატიკური მოდელი და კომპიუტერული პროგრამები მრავალშრიანი ტექსტილის მრავალფუნქციური კვლევისათვის'' ფარგლებში. პროექტი ხორციელდება აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მიერ შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის ფინანსური მხარდაჭერით.

კრებულში წარმოდგენილია სტატიები შემდეგი სექციების მიხედვით:

- თხელ სხეულთა მექანიკა
- მრავალშრიანი კონსტრუქციების მათემატიკური მოდელირება
- უწყვეტ გარემოთა მექანიკის გამოყენებითი ამოცანები
- ანალიზის მონათესავე საკითხები

კონფერენციის კრებულში შევიდა 37 მოხსენება, რომლებიც წარმოდგენილია მეცნიერების მიერ მსოფლიოს 7 ქვეყნიდან.

იმედს გამოვთქვამთ, რომ აღნიშნული კონფერეცია ხელს შეუწყობს საქართველოს და სხვა ქვეყნების ორგანიზაციების სამეცნიერო თანამშრომლობის განვითარებას უწყვეტ გარემოთა მექანიკის საკითხებში.

Preface

Conference on Related Problems of Continuum Mechanics is held within project “Mathematical Models and Computer Program for Multi-functional Researches of Multi-layer Textile Composites”. Project is implementing by the Akaki Tsereteli State University (Kutaisi, Georgia) under financial support of the Shota Rustaveli National Science Foundation (Georgia).

This book includes the papers covering the following topics:

- Mechanics of Thin Bodies
- Mathematical Modeling of Multilayered Structures
- Applied Problems of Continuum Mechanics
- Related Problems of Analysis

Proceeding of the Conference includes 37 papers of scientists from 7 countries.

We do hope that this Conference will support the scientific relations between Georgian and foreign institutions on continuum mechanics fields.



მიხეილ ნიქაბაძე, კონფერენციის სამეცნიერო კომიტეტის თავმჯდომარე

Mikhail Nikabadze, Chair of Scientific Committee

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი - 85 წლისაა

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ისტორია 85 წლის წინათ დაიწყო და, ამჟამად, იგი საქართველოში შესანიშნავი ტრადიციებით გამორჩეული უმაღლესი სასწავლებელია, რომელმაც ღირსეული ადგილი დაიმკვიდრა ქართველი ერის კულტურულ-ინტელექტუალური და ზნეობრივი აღზრდის საქმეში. კადრების მომზადების, სამეცნიერო პოტენციალის მაღალი დონისა და მოწინავე ქვეყნების სამეცნიერო სასწავლებლებთან დამყარებული ფართო კავშირების შედეგად უნივერსიტეტმა საყოველთაო აღიარება მოიპოვა.



ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ფაქტობრივად, თბილისის ივანე ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის წიაღში ჩამოყალიბდა. 1930 წლის ივლისში ხელისუფლებამ თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი გააუქმა და მის ბაზაზე ოთხი დამოუკიდებელი უმაღლესი სასწავლებელი შექმნა. ერთ-ერთი მათგანი იყო სახელმწიფო პედაგოგიური ინსტიტუტი, რომელიც, ამ დროიდან მოყოლებული, 1933 წლამდე, თბილისში ფუნქციონირებდა. 1933 წელს ხსენებულმა ინსტიტუტმა ამავე წლის 13 თებერვლიდან ქუთაისში განაგრძო ფუნქციონირება. 1933-1990 წლებში სასწავლებელი ალექსანდრე წულუკიძის სახელობის სახელმწიფო პედაგოგიური ინსტიტუტის სტატუსით არსებობდა.

1990 წელს უმაღლესი სასწავლებელი ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტად გარდაიქმნა, რაც ლოგიკური დაგვირგვინება იყო იმ დიდი საქმიანობისა, რომელსაც ინსტიტუტი წარმატებით ეწეოდა მისი არსებობის თითქმის ექვსი ათწლეულის განმავლობაში.

ქუთაისის ნ. მუსხელიშვილის სახელობის პოლიტექნიკურ ინსტიტუტს ოფი-

ციალური სტატუსი 1973 წლის 23 სექტემბერს მიენიჭა და იგი საზეიმოდ 1974 წლის 1 სექტემბერს გაიხსნა. სასწავლებელს 1977 წელს აკადემიკოს ნიკო მუსხელიშვილის სახელი მიენიჭა. 1992 წლის 21 სექტემბერს ქუთაისის ნ.მუსხელიშვილის სახელობის პოლიტექნიკურ ინსტიტუტს უნივერსიტეტის სტატუსი მიენიჭა და იგი ქუთაისის ნიკო მუსხელიშვილის სახელობის სახელმწიფო ტექნიკურ უნივერსიტეტად იწოდებოდა.

საქართველოს მთავრობის 2006 წლის 23 თებერვლის №39 დადგენილების თანახმად განხორციელდა საჯარო სამართლის იურიდიული პირების - ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტისა და ქუთაისის ნ. მუსხელიშვილის სახელობის სახელმწიფო ტექნიკური უნივერსიტეტის რეორგანიზაცია მათი გაერთიანების გზით. საგანმანათლებლო დაწესებულებას სტატუსად განესაზღვრა უნივერსიტეტი და ეწოდა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი.



საქართველოს მთავრობის 2010 წლის 16 ნოემბრის № 353 დადგენილებით, საჯარო სამართლის იურიდიული პირი - სუბტროპიკული მეურნეობის სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტი მიუერთდა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტს. დასავლეთ საქართველოს სუბტროპიკული სოფლის მეურნეობის მომსახურების მოტივით 1952 წელს მის ისტორიულ, გეოგრაფიულ და ეკონომიკურ ცენტრში ქუთაისში გაიხსნა სასოფლო სამეურნეო ინსტიტუტი. 1959 წელს იგი გადატანილ იქნა სოხუმში - ტიპიურ სუბტროპიკულ ზონაში- და ეწოდა საქართველოს სუბტროპიკული მეურნეობის ინსტიტუტი. მეოცე საუკუნის 90-იან წლებში, აფხაზეთში განვითარებული მოვლენების გამო, ინსტიტუტი ლტოლვილის სტატუსით კვლავ ქუთაისში აღმოჩნდა. ინსტიტუტში აღდგა სასწავლო პროცესი, რაშიც, ქალაქის ხელმძღვანელობასთან ერთად, დიდი წვლილი მიუძღვის აკაკი წერეთლის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტს და ქალაქის წარმოება-დაწესებულებებს.

ყოველივე ზემოთაღნიშნულის შედეგად, მივიღეთ საქართველოს ერთ-ერთი ყვე-

ლაზე დიდი და მრავალპროფილური რეგიონული უნივერსიტეტი, რომლის პროფილი მოიცავს ისეთ მიმართულებებს, როგორიცაა ჰუმანიტარული და სოციალური მეცნიერებები, განათლება, პოლიტიკის მეცნიერებები, ბიზნესი, სამართალი, ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებები, ინჟინერია, აგრარული მეცნიერებები, მედიცინა. 2019 წლიდან უნივერსიტეტი, თეატრისა და კინოს უნივერსიტეტთან ერთად, გეგმავს სახელოვნებო დარგების განვითარებას.

უნივერსიტეტის ძირითად საგანმანათლებლო სტრუქტურულ ერთეულებს წარმოადგენს ცხრა ფაკულტეტი: 1. ბიზნესის, სამართლისა და სოციალურ მეცნიერებათა ფაკულტეტი; 2. ჰუმანიტარულ მეცნიერებათა ფაკულტეტი; 3. ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი; 4. პედაგოგიკის ფაკულტეტი; 5. მედიცინის ფაკულტეტი; 6. საინჟინრო-ტექნიკური ფაკულტეტი; 7. საინჟინრო-ტექნოლოგიური ფაკულტეტი; 8. აგრარული ფაკულტეტი; 9. საზღვაო-სატრანსპორტო ფაკულტეტი.

2018 წლისათვის აწსუ ახორციელებს უმაღლესი განათლების სამივე საფეხურის - საბაკალავრო, სამაგისტრო, სადოქტორო, მასწავლებლის მომზადების (ერთწლიანი) და ქართულ ენაში მომზადების საგანმანათლებლო პროგრამებს, ასევე აწსუ პროფესიული განათლების ერთ-ერთი მსხვილი პროვაიდერია რეგიონში. აწსუ-ს ძირითადი საგანმანათლებლო ერთეულების - ფაკულტეტების დონეზე აკუმულირებული ცოდნა ხმარდება როგორც ახალი თაობების და მაღლაკვალიფიციური სპეციალისტების აღზრდას, აგრეთვე ფუნდამენტური და გამოყენებითი კვლევების განხორციელებას.

უნივერსიტეტის ზრუნვის საგანია ადგილობრივი და უცხოელი სტუდენტებისათვის ხარისხიანი განათლების მიცემა და დასაქმების ხელშეწყობა, მრავალფეროვანი სტუდენტური ცხოვრების უზრუნველყოფა, სამეცნიერო კვლევისა და სწავლების მაქსიმალური დაახლოება, კვლევის შედეგების სასწავლო პროცესში იმპლემენტაციის ხარისხის ამაღლება.

უნივერსიტეტს თავისი საქმიანობით წვლილი შეაქვს ქალაქის, რეგიონისა და მთლიანად ქვეყნის განვითარებაში. შესაბამისად, უნივერსიტეტი აცნობიერებს სოციალური პასუხიმგებლობის მნიშვნელობას და მიზნად ისახავს, ხელი შეუწყოს საზოგადოების სოციალურ-ეკონომიკურ პროგრესს და მდგრად განვითარებას. ამ მიზნით იგი უზრუნველყოფს ცხოვრების მანძილზე უწყვეტი განათლების პროგრამებისა და სერვისების მიწოდებას, ახალი ცოდნის გენერირება-გავრცელებას და სხვადასხვა დაინტერესებულ პირებთან ერთად ჩართულია საზოგადოებრივი პოლიტიკის ფორმირების პროცესში.

ავთანდილ თვალჭრელიძე

1947-2014

ინჟინერ-მექანიკოსი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი.



ავთანდილ თვალჭრელიძე დაიბადა 1947 წლის 11 მარტს სამხედრო მოსამსახურის ოჯახში.

1965 წელს დაამთავრა თბილისის 56-ე საშუაო სკოლა ოქროს მედლით. მან 1971 წელს დაამთავრა მოსკოვის ნ.ე. ბაუმანის სახელობის უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებელი ინჟინერ-მექანიკოსის კვალიფიკაციით, ხოლო 1975 წელს - მ. ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი, მათემატიკის სპეციალობით.

ავთანდილ თვალჭრელიძემ 1975 წელს მოსკოვის ნ.ე. ბაუმანის სახელობის სახელმწიფო ტექნიკური სასწავლებელში წარმატებით დაიცვა საკანდიდატო დისერტაცია და მიენიჭა ტექნიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხი. 1994 წელს კი თბილისის ივანე ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტში წარმატებით დაიცვა სადოქტორო დისერტაცია და მიენიჭა ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორის სამეცნიერო ხარისხი.

1974 წელს ავთანდილ თვალჭრელიძემ თავისი სამეცნიერო და პედაგოგიური საქმიანობა დაუკავშირა ქუთაისის პოლიტექნიკურ ინსტიტუტს (შემდგომში - ქუთაისის ტექნიკური უნივერსიტეტი, აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი), სადაც სხვადასხვა თანამდებობებზე (დოცენტი, პროფესორი, კათედრის გამგე, დეპარტამენტის ხელმძღვანელი, ფაკულტეტის დეკანი) მუშაობდა გარდაცვალებამდე - 2014 წლამდე.

პროფ. ა. თვალჭრელიძე არის 125 სამეცნიერო ნაშრომის, მათ შორის : ... მონოგრაფიისა და ... სამეცნიერო სტატიის ავტორი. მისი სამეცნიერო ხელმძღვანელობითა და კონსულტაციებით მომზადდა 20-ზე მეტი საკანდიდატო და სადოქტორო დისერტაცია.

ავთანდილ თვალჭრელიძეს ახასიათებდა ღრმა ერუდიცია და მეცნიერული პრობლემების ხედვის უნარი, მაღალი მათემატიკური კულტურა და შრომისმოყვარეობა, რაც მისი ბრწყინვალე განათლების შედეგი იყო. ის წარმატებით მოღვაწეობდა ფუნდამენტურ მეცნიერებათა სხვადასხვა დარგებში. მისი მოღვაწეობის პირველი, ე.წ. მოსკოვური პერიოდი დაკავშირებულია ენერგეტიკული დანადგარების, კერძოდ, კომპრესორების თეორიასთან, რომელიც თერმოდინამიკის, სითბოგადაცემისა და ჰიდროდინამიკის ფუნდამენტალურ კანონებს ეფუძნება. ხოლო მოღვაწეობის მეორე, ე.წ. ქუთაისური პერიოდი კი მყარი დეფორმირებადი სხეულების მექანიკას, კერძოდ, გარსთა თეორიას ეძღვნება. ცხოვრების ბოლო წლებში კი განსაკუთრებით იყო დაინ-

ტერესებული ელექტრომექანიკური პროცესების მათემატიკური მოდელირების საკითხებით.

ავთანდილ თვალჭრელიძის განსაკუთრებულ სამეცნიერო მიღწევას წარმოადგენს მის მიერ შექმნილი ახალი დაზუსტებული გარსთა თეორია, რომელსაც დაერქვა გარსთა თეორია რამოდენიმე საბაზისო ზედაპირის გამოყენებით. მან განიხილა სტრუქტურის პირისახის ზედაპირები, როგორც საბაზო ზედაპირები, და ააგო ანიზოტროპული სხეულების დაძაბულ-დეფორმირებული განსაზღვრისათვის შესაბამისი ორგანზომილებიანი ძლიერად-ელიფსური კერძო წარმოებულიან განტოლებათა სისტემა სათანადო სასაზღვრო პირობებით. საჭიროა აღინიშნოს, რომ ახალი მიდგომა განსაკუთრებით პერსპექტულია მრავალფენიანი თხელკედლოვანი (მათ შორის კომპოზიციური) სტრუქტურებისათვის რიგი ჰიერარქიული მოდელის გამოყენებით (ერთბაზოვანი დაზუსტებული თეორიის ორბაზოვანით ჩანაცვლებით).

აღსანიშნავია, რომ ავთანდილ თვალჭრელიძე ერთ-ერთი იმათთაგანია, ვინც იდგა ნიკო მუსხელიშვილის სახელობის პოლიტექნიკური ინსტიტუტის ჩამოყალიბების სათავეებთან. მას დიდი დამსახურება მიუძღვის ინსტიტუტის თანამშრომელთა მეცნიერულ სარბიელზე ინტენსიური წინსვლის საქმეში. ავთანდილ თვალჭრელიძე იყო მეცნიერული იდეების უშრეტი გენერატორი, ამ იდეებს იგი უხვად და უანგაროდ უზიარებდა თავის მოწაფეებსა და კოლეგებს და საერთოდ ყველას, ვინც მას დახმარებისათვის მიმართავდა.

ავთანდილ თვალჭრელიძე იყო არა მარტო დიდი მეცნიერი, არამედ არაჩვეულებრივი პიროვნული თვისებებითა და ღირსებებით დაჯილდოებული ადამიანი, რომელთა შორის აღსანიშნავია მისთვის დამახასიათებელი თავმდაბლობა და მეგობრობის მდიდარი გრძნობა. ყურადღებიანი, გულისხმიერი, სამშობლოსა და ოჯახის მოყვარული, იუმორის გრძნობის მქონე, უაღრესად კეთილშობილი პიროვნება – ასეთი დარჩა ის კოლეგებისა და მეგობრების მეხსიერებაში.

პროფესორ ავთანდილ თვალჭრელიძემ დატოვა უმდიდრესი და პერსპექტიული სამეცნიერო მემკვიდრეობა, რითაც მისი სახელი ჩაიწერება სახელოვან ქართველ მეცნიერთა შორის.

თხელ სხეულთა მექანიკა
Mechanics of Thin Bodies

Adhesion model of hyperfine structures. Mechanical and dynamical properties

S.A., Lurie[1], P.A Belov[2], M.U. Nikabadze[3]

[1,2]Institute of Applied Mechanics of RAS, Moscow, Russia
[1]Computing Center FRC CSC RAS, Moscow, Russia
[3]Lomonosov State University, Moscow, Russia
[3]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
[1]salurie@mail.ru, [2]Petr.A.Belov@boeing.com, [3]munikabadze@yandex.ru

ABSTRACT

In this work we propose the model of hyperfine two-dimensional medium with potential energy defined only by the surface potential energy. For the modelling we use the generalized adhesion theory of Gurtin-Murdoch of common possible properties of the adhesion interactions (adhesion tensor modulus) determined by four parameters. The feature of this model is connected with two additional modulus compared to Young-Laplace model. Based on the introduced above two-dimensional medium, we propose the model of the hyperfine structu (grafen-type strictures) and single wall nanotubes (SWNTs). We show that the parameters of the model describe flexural rigidity on infinitely thin structural system and predict the possible extremely high flexural characteristics of ultrafine structures. As one of the a results, a model of SWNT represents the version of generalized semi-membrane theory of shells with non-zero bending properties of SWNT and boundary effects.

Keywords: adhesion MODELS, gradient models, hyperfine two-dimensional structures

1 INTRODUCTION

Modern research of adhesive properties of surfaces and interfaces in solid deformable bodies, in the mechanics of heterogeneous structures and in mechanics of composites is constantly developed in many scientific publications and analyzed in detail in scientific reviews (see as examples Altenbach et al, 2011; Huang and Wang, 2013; Povstenko, 2013 and Eremeyev, 2015). In the work by Lurie et al, 2010, it was shown that introduction of scale effects due to the adhesive properties of the surface of the body in gradient theories, may take great importance (scale effects of the first order). General gradient theory of second order, which can be considered a generalization of the theory of Steigmann-Ogden, 1999, is described in the book of Belov and Lurie, 2014. In the work by Lurie et al, 2016, sequential analysis of variational formulation of the theories of adhesive interactions and the classification of adhesion models by the degree of accuracy of scale effect accounting were presented. We consider a linearly elastic body of a volume V. We assume that an elastic body is limited by adhesively active surface F and apply the Lagrangian which allows to simulate the adhesive properties of ideal (defect-free) classic media surfaces as follows

$$L = A - \iiint_V U_V dV - \iint_F U_F dF,$$

where A_P is the work of external body forces and of surface forces, U_V is the volume density of the potential energy, U_F is the surface density of the potential energy of adhesively active surface F. Let us further assume that the density of the potential energy of the surface U_F as well as the density of strain energy in volume depends on the first derivatives of the vector of displacements. We do not involve any hypothesis regarding the structure of the surface density of the potential energy U_F. We postulate only a quadratic form of surface density of potential energy, which corresponds to physical linearity of the theory

$$2U_F = A_{ijmn} d_{i,j} d_{m,n}, \quad d_{m,n} = \partial R_m / \partial x_n,$$

R_m is the vector of displacements. In this case, Green formulas are determined by adhesion stresses a_{ij}:

$$a_{ij} = \partial U_F / d_{ij} = A_{ijmn} R_{m,n}.$$

We consider hyperfine shells and try to form adhesion theory of such structures. Note that the influence of adhesion interactions on the behavior of thin plates was investigated in the works of Eremeyev et al, 2009; Lurie and Tuchkova, 2009; Altenbach and Eremeev, 2010. In the present work we propose that the potential energy of hyperthin structures such as graphene and single walled nanotubes (SWNT) is defined only by the surface potential energy. In this case we could not use any hypothesis to describe two-dimensions objects from three dimensioned bodies. In the present work we study axisymmetric deformation of SWNT as cylindrical hyperthin shells on the basis of a generalized adhesion model of Murdoch-Gurtin (see Murdoch-Gurtin,1975), suggested in the works of Belov and Lurie, 2009a, 2014b. For a generalized adhesion continuum model the adhesive elastic moduli take the form

$$A_{ijmn} = \lambda^F \eta_{ij} \eta_{mn} + \mu^F (\eta_{im}\eta_{jn} + \eta_{in}\eta_{jm}) + \chi^F (\eta_{im}\eta_{jn} - \eta_{in}\eta_{jm}) + \delta^F n_i n_m \eta_{jn}. \qquad (1)$$

In the equation (1) $\eta_{ij} = (\delta_{ij} - n_i n_j)$, δ_{ij} is the Kronecker delta, λ^F, μ^F are the elastic constants similar to Lame coefficients in Hooke's law in the body volume, that determine the interfacial interactions in the model of Gurtin M.E.& Murdoch A.I. (see Murdoch-Gurtin,1975), χ^F is related to the possible non-symmetric of adhesive stresses in the adhesive interaction of surfaces and it is usually set to zero for the reasons of material indifference of model (we assume further that $\chi^F = 0$), δ^F is the modulus of elasticity that defines the surface resistance in bending. In a more general case for the gradient second order of the theory of elasticity and adhesion theory, the surface density of potential energy must be written as

$$2U_F = A_{ijmn} d_{ij} d_{mn} + A_{ijkmnl} d_{ij,k} d_{mn,l} . \qquad (2)$$

It can be shown that using the gradient adhesion moduli leads to introduce for the axisymmetric deformation two additional physical constants A_1, A_2 in the adhesion model of shells (model of SWNT).

2 VARIATIONAL MODEL OF THE SWNT

We propose that for modeling of the hyperthin structures we can use the Lagrangian defined only by the potential surface energy. The potential energy in the volume can be neglected for such structure of thickness almost equal to zero. Thus we write:

$$L = A - (1/2) \iint_{\Omega} [A_{ijmn} d_{ij} d_{mn} + A_{ijkmnl} d_{ij,k} d_{mn,l}] dF. \qquad (3)$$

We assume that the mechanical properties are isotropic on the SWNT surface. Further we will assume that $A_{ijkmnl} = 0$ in the equation (3). Let us consider the cylindrical coordinates x, ϕ, r and introduce the following orts X_i - ort of an axial coordinate, s_i - ort of the circle coordinate, n_i - ort of a normal to cylindrical surface. Then, using the tensor properties of the adhesion moduli, we can define the tensor of adhesion properties for the cylindrical coordinates in the form similar (1)

$$A_{ijmn} = a_1 \eta_{ij} \eta_{mn} + a_2 (\eta_{im} \eta_{jn} + \eta_{in} \eta_{jm}) + a_3 n_i n_m \eta_{jn}, \qquad (4)$$

where $\eta_{ij} = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ is the flat Kronecker's tensor. The displacement vector in the cylindrical coordinates is written as:

$$R_i = U(x,\phi) X_i + V(x,\phi) s_i + W(x,\phi) n_i . \qquad (5)$$

Let us consider the axisymmetric problem. Next, using (3)-(5) we can find the surface density of potential energy as

$$\begin{aligned} 2U_F = A_{ijmn} d_{ij} d_{mn} = \{ & a_1 (rU' - W)(rU' - W)/r + \\ & + a_3 (r^2 W'W' + VV)/r^2 + a_2 [(2U'U' + V'V')r^2 + VV + W'W' + 2WW)]/r^2 \}. \end{aligned} \qquad (6)$$

It can be established that using (6) we can write the equilibrium equations of the SWNT in displacements

$$\begin{aligned} & r(a_1 + 2a_2)U'' - a_1 W' + r q_x = 0, \\ & a_2 r^2 V'' - (a_2 + a_3) V + r^2 q_\varphi = 0, \end{aligned} \qquad (7)$$

$$r(a_1+2a_2)U''-a_1W'+rq_r=0.$$

Here q_x, q_φ, q_r are the given surface forces.

3 ANALYSIS OF EQUILIBRIUM EQUATIONS

3.1 *Axial deformation and bending of edge effects*

Let us assume that torsion does not occur. Next, displacement V is equal to zero, and the system of equilibrium equations (7) becomes as follows:

$$r(a_1+2a_2)U''-a_1W'+rq_x=0,$$

$$a_1rU'+(a_2+a_3)r^2W''-(a_1+2a_2)W+r^2q_r=0.$$

The first and second equilibrium equations are integrable in quadratures. As a result, we receive:

$$(a_1+2a_2)U(x)-\frac{(a_1+2a_2)a_1}{4(a_1^{11}+a_2^{11})a_2}r(a_2+a_3)W'(x)=$$

$$=\int_0^x\{N(x)+\frac{(a_1+2a_2)a_1}{4(a_1+a_2)a_2}r[q_r+\frac{a_1}{(a_1+2a_2)}\frac{1}{r}N(x)]\}dx,$$

$$(a_2+a_3)W''-\frac{4(a_1+a_2)a_2}{(a_1+2a_2)}\frac{1}{r^2}W+q_r+\frac{a_1}{(a_1+2a_2)}\frac{1}{r}N(x)=0,$$

The boundary conditions take the following form:

$$[\sigma_x-q_x(x)]\delta U+[\sigma_x-(a_2+a_3)W']\delta W\Big|_{x=0}^{x=l}=0,$$

where σ_x are the normal stresses. Therefore, the mathematical theory of momentless cylindrical shells, which take into account scale effects, is formulated. This theory is applicable to both nanotubes and to membrane type shells provided that their thickness is almost equal to zero. In the proposed model of the hyperthin shells the boundary problem with governing equation of the second order respect deflections W can be considered separately, contains only one coupled boundary condition: deflections W or Saint-Venat's type (not Kirchhoff type) transversal force $(a_2+a_3)W'$ are defined at the edges of the nanotube. Therefore, the adhesive modulus (a_2+a_3) shows a physical sense of shear rigidity and defines a slowly changing part of solution. In the limiting case, ever the tube radius tends to infinity, we obtain an equation for hyperthin 2D structures of the graphene type. Note that the proposed adhesionless membrane theory of

cylindrical shells admits the existence of non-classical edge effect in cylindrical shells with a characteristic length l_*:

$$l_* = r\sqrt{(a_2 + a_3)(a_1 + 2a_2)/[4(a_1 + a_2)a_2]}.$$

This is indeed an edge effect, but not the scale effect, since parameter l_* depends on the radius r, and not on the ratio of the elasticity moduli of different dimensions. As three combinations of the adhesive moduli a_1, a_2, a_3 are added to the equilibrium equations, there is an opportunity to formulate experimental tests to directly define all three moduli.

3.2 *Torsion of hyperthin shells (SWNT)*

Let us consider the case of nanotubes torsion. The case of torsion assumes that axial displacement does not occur $U = 0$. Similarly to theory of thin-walled cores the hypothesis of an invariance of cross section is accepted that leads to absent of deflections $W = 0$. As a result, only the circular displacement introduces in the equation for the potential energy (6). Then the variational equation gives:

$$\delta L = \int_0^l [a_2 V'' - (a_2 + a_3)V/r^2 + q_\varphi]\delta V dx + 2\pi r[\tau - a_2 V']\delta V\Big|_{x=0}^{x=l} = 0. \qquad (8)$$

Here q_φ is the given shear force on the surface and τ is the internal shear stress.

Governing equation for the torsion problem follows from equation (8) and can be written as

$$a_2 V'' - (a_2 + a_3)V/r^2 + q_\varphi = 0. \qquad (9)$$

For the case $r \to \infty$ (r is the radius of nanotubes) we can find from (9) the classical equation for the torsion problem: $a_2 V'' + q_\varphi = 0$. At small values of radius of SWNT torsion has nature of edge effect and fades at order distances $r\sqrt{a_2/(a_2 + a_3)}$.

3.3 *About gradient generalized adhesion models*

Let us shortly discuss the possible gradient generalization of the adhesion models of SWNT. We use the more common case of the gradient adhesion theory with the density of surface potential energy (2) where two additional physical constants A_1, A_2 are added to the adhesion model of SWNT. Then the system of the governing equations is written as the following

$$-15A_1rU''''+6A_1W'''+r(a_1+2a_2)U''-a_1W'+rq_x=0,$$

$$-3A_1r^4W''''+2(6A_1+A_2)r^2W''-3A_1W-6A_1r^3U'''+ \qquad (10)$$

$$+(a_2+a_3)r^2W''-(a_1+2a_2)r^2W+a_1r^3U'+r^4q_r=0.$$

In the particular case, when $r\to\infty$ we receive from (9), the gradient model of the hyperthin plates (graphene type films):

$$-15A_1U''''+(a_1+2a_2)U''+q_x=0,$$

$$-3A_1W''''+(a_2+a_3)W''+q_r=0.$$

It can be shown that the system of equations (10) leads to the equation of the sixth order concerning deflections, that includes the equation of the classical theory of cylindrical shells as particular case. Moreover, it can be shown that the governing equation in the proposed theory of SWNT is presented as product of three operators of the second order over a deflection. The analysis of this equation shows that it is impossible to share edge effects (when the indicator of attenuation depends only on sizes, in this case – from SWNT radius) and multiscale-effects (when the indicator of attenuation depends only on the relations of adhesive modules of different dimension.

Similarly, we can consider the torsion problem with two additional physical adhesion moduli A_1 and A_2. Governing equation for the gradient adhesion torsion problem of SWNT takes the following form

$$3A_1V''''-(a_2r^2+6A_1+4A_2)V''/r^2-((a_2+a_3)r^2+15A_1)V/r^4+q_\varphi=0. \qquad (11)$$

In the particular case, when the adhesion moduli of the generalized Gurtin M.E.& Murdoch A.I. model are equal to zero, $A_{ijmn}=0$ we can find

$$3A_1V''''-(6A_1+4A_2)V''/r^2+15A_1V/r^4+q_\varphi=0.$$

In the models of torsion of SWNT (10) and (11) two fundamental solutions are generally complex-conjugated. Similarly to the case of tension/compression, they do not allow to allocate separately a nonclassical edge effect and a multi-scale effect, having a combined character.

4 DYNAMIC PROBLEMS OF THE 2D HYPERFINE STRACTURES.

Let us formulate the kinetic energy to describe the dynamic problem. For the momentless theory of the hyperfine structures with the displacement vector (5) the kinetic energy must be written as:

$$K = \int_{t_0}^{t_1} \iint \rho_{ij} \dot{R}_i \dot{R}_j dF dt.$$

Here $\dot{R}_i$ - the velocity vector which is defined by the equation (5).

In the general case of the hyperfine structures the kinetic energy must be modified to take into account the inertia of the 2D structures in the direction of the normal to the surface that is differ from the insertion in the tangential plane. In the result the density of such structures are defined by the transversal isotropic tensor of the second rank:

$$\rho_{ij} = \rho_1 \eta_{ij} + \rho_2 n_i n_j.$$

Here ρ_1, ρ_2 define the dynamic properties of the hyperfine structures in the normal of the surface and in the tangential plane of the surface.

For the gradient models of the hyperfine structures, the density of the kinetic energy must be consistent with the potential energy (2), and should include convolution of velocity gradients:

$$K = \int_{t_0}^{t_1} \iint (\rho_{ij} \dot{R}_i \dot{R}_j + \rho_{ijmn} \dot{R}_{i,j} \dot{R}_{m,n}) dF dt.$$

The generalized transversely isotropic tensor of the fourth rank ρ_{ijmn}, which characterizes the inertial properties of 2D structures, in the general case should contain three more “generalized densities”:

$$\rho_{ijmn} = \rho_3 \eta_{ij} \eta_{mn} + \rho_4 (\eta_{im} \eta_{jn} + \eta_{in} \eta_{jm}) + \rho_5 n_i n_m \eta_{jn},$$

where ρ_3, ρ_4, ρ_5 are the dynamic characteristics.

To write the vibrational statement of the dynamic problem the principle of stationary action must be used:

$$\delta H = 0,$$

$$H = A + \int_{t_0}^{t_1} \iint (\rho_{ij} \dot{R}_i \dot{R}_j + \rho_{ijmn} \dot{R}_{i,j} \dot{R}_{m,n}) dF dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \iint [A_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} + A_{ijkmnl} R_{i,jk} R_{m,nl}] dF dt.$$

Variational equation $\delta H = 0$ gives a closed formulation of the problem, including equations of motion, initial and boundary conditions.

CONCLUSIONS.

We proposed the adhesion variational model of the hyperfine structures. Equilibrium equations and boundary conditions for the theory of the hyperfine structures are written, the spectrum of boundary value problems are received. Momentless theories of tension-compression-bending shells and the torsion model of hyperfine structures are considered. The applied theories of SWNT tension and torsion are formulated in the work to study the mechanical properties of 2D-objects, to set and solve test problems that can be used for the experimental investigations. It is established that the mechanical properties of cylindrical shells (SWNT) received within the framework of the adhesion model, are described by the three adhesive modules that can be determined experimentally across effective properties of hyperfine structures. The formulated membrane theory does not describe scale effects, however, nonclassical edge effects that do not exist in the classical theory of momentless shells takes the place. We show that adhesion membrane model of SWNT formulated in the paper can be generalized to the adhesion gradient model of hyperfine shells that allow to formulate the moment theory of hyperfine shells. In this case the mechanical properties of the SWNT for the tension problem is defined by five non-classical moduli, correspondingly the torsion problem is defined by four moduli. The characteristic feature of all statements is the fact that the mechanical properties of the hyperfine structures are not defined by "volumetric" moduli but by the adhesive ones, of different physical dimension that coincides with the dimension of the corresponding stiffness of classical and nonclassical plates and shells.

4.1 *Acknowledgment*

This work was carried out within the framework of the state program at the Institute of Applied Mechaics of RAS and was supported particularly by the Russian Foundation of Basic Research grants 18-01-00553-a.

References

Altenbach, H., Eremeyev, V., Lebedev, L. 2011. On the spectrum and stiffness of an elastic body with surface stresses. *ZAMM* 91(9): 699–710.

Belov, P., & Lurie, S. 2009 a. Continuum model of microheterogeneous media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 73(5): 599–608.

Belov P., Lurie S. 2014 b. Mathematic theory of damaged media. Gradient theory of elasticity. Formulations. Hierarchy. Comparative analysis. *Palmarium Academic Publishing.* ISBN 978-3-639-73761-5

Gurtin, M.E., Murdoch, A.I.1975. A continuum theory of elastic material surfaces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 57(4): 291–323.

Povstenko, Y. 2013. Mathematical modeling of phenomena caused by surface stresses in solids. In: H. Altenbach, N.F. Morozov (eds.) *Surface Effects in Solid Mechanics:* 135-153. Springer

Eremeyev V. A., Altenbach H., Morozov N. F. 2009. The Influence of Surface Tension on the Effective Stiffness of Nanosized Plates.*Doklady Physics,* 54(2): 98 – 100

Eremeyev, V. A. 2015. On effective properties of materials at the nano- and microscales considering surface effects. *Acta Mech* 42:29–42.

Huang, Z., Wang, J. 2013 Micromechanics of nanocomposites with interface energy effect. In: S.Li, , X.L Gao,.(eds). *Handbook on Micromechanics and Nanomechanics*: 303-348. Pan Stanford Publishing, Stanford

Lurie, S. and Tuchkova, N. 2009. A continuous adhesion model for deformed solid bodies and media with nanostructures, Composites and Nanostructures. 2:25–43.

Lurie S., Belov P., Tuchkova N. 2010. Gradient theory of media with conserved dislocations: application to microstructured materials. In: G. Maugin, Metrikine A.(eds). *One hundred years after the Cosserats. Series: advances in mechanics and mathematics*, 21: 223-234. Springer.

Lurie, S. Belov, P. and Altenbach H. 2016. Classification of Gradient Adhesion Theories Across Length Scale, In H. Altenbach and S. Forest (eds.) *Book Title Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials* Series 42, Springer: 261-277

Steigmann, D.J., Ogden, R.W.1999. Elastic surface-substrate interactions. *Proceedings of the Royal Society A* 455: 437–474.

Application of eigenvalue problems for tensor-block matrices in mechanics

Mikhail Nikabadze
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia,
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia,
E-mail: munikabadze@yandex.ru

Abstract. The statement of the eigenvalue problem for a tensor-block matrix (TBM) of any order and of any even rank is formulated, and also some of its special cases are considered. In particular, using the canonical presentation of the TBM of the tensor of elastic modules of the micropolar theory, in the canonical form the specific deformation energy and the constitutive relations are written. With the help of the introduced TBM operator, the equations of motion of a micropolar arbitrarily anisotropic medium are written, and also the boundary conditions are written down by means of the introduced TBM operator of the stress and the couple stress vectors. The formulations of initial-boundary value problems in these terms for an arbitrary anisotropic medium are given. The questions on the decomposition of initial-boundary value problems of elasticity and thin body theory for some anisotropic media are considered. In particular, the initial-boundary problems of the micropolar (classical) theory of elasticity are presented with the help of the introduced TBM operators (tensors-operators). In the case of an isotropic micropolar elastic medium (isotropic and transversely isotropic classical media), the TBM operator (tensors-operators) of cofactors to TBM operators (tensors-tensors) of the initial-boundary value problems are constructed that allow decomposing initial-boundary value problems. We also find the determinant and the tensor of cofactors to the sum of six tensors used for decomposition of initial-boundary value problems. From three-dimensional decomposed initial-boundary value problems, the corresponding decomposed initial-boundary value problems for the theories of thin bodies are obtained.

Keywords: tensor-operator of equations, stress tensor-operator, tensor-operator of stress and couple stress, tensor-block matrix operator, canonical presentation of tensor-block matrix.

1 Statement of eigenvalue problem of a tensor-block matrix of any even rank

Find all tensor columns $\mathbb{U}$ which satisfy equation

$$\mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U} = \lambda \mathbb{U},$$

where λ is scalar, and

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{U}_m \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \cdots & \mathbf{A}_{1m} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \cdots & \mathbf{A}_{2m} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \cdots & \mathbf{A}_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \mathbf{A}_{m3} & \cdots & \mathbf{A}_{mm} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\mathbb{M}=\mathbb{M}_{i_1i_2\cdots i_p}^{j_1j_2\cdots j_p}\mathbf{R}^{i_1\cdots i_p}\mathbf{R}_{j_1\cdots j_p}=\mathbb{M}_i^j\mathbf{R}^i\mathbf{R}_j,\ \ \mathbf{R}_{i_1\cdots i_p}=\mathbf{r}_1\otimes\cdots\otimes\mathbf{r}_p,$$
$$\mathbf{R}_i\overset{p}{\otimes}\mathbf{R}^j=g_i^j,\ \ \mathbf{A}_{kl}=A_{kl,\,j_1j_2\cdots j_p}^{i_1i_2\cdots i_p}\mathbf{R}_{i_1i_2\cdots i_p}\mathbf{R}^{j_1j_2\cdots j_p}=A_{kl,\,\cdot\cdot\,j}^{i\,\cdot}\mathbf{R}_i\mathbf{R}^j,$$
$$\mathbf{U}_{k,\,i_1i_2\cdots i_p}\mathbf{R}^{i_1\cdots i_p},\ \ k,l=\overline{1,m},\ \ i_1,i_2,\ldots,i_p,\ \ j_1,j_2,\ldots,j_p=\overline{1,n},$$
$$i,j=\overline{1,N},\ \ N=n^p.$$

Note that this problem is solved for the tensor of any even rank and the tensor-block matrix of any even rank consisting of four tensors, as well as for the tensor and the tensor-block matrix of the fourth rank, and published in [1]. Therefore, here we will not dwell on the presentation of this problem with the aim of shortening the letter, but, if necessary, we will refer to the work mentioned in the previous sentence. We also note that, solving the eigenvalue problem for a tensor-block matrix of any even rank consisting of four tensors, there is no difficulty in solving the analogous problem for the tensor-block matrix $\mathbb{M}$ (see (1)). Thus, we assume that the eigenvalue problem for a tensor-block matrix of any order and of any even rank is solved and we will consider some its applications below.

2 Equations of motion relative to the displacement and rotation vectors for an elastic material without a center of symmetry

The constitutive relations (CR) for a linearly elastic inhomogeneous anisotropic material without a center of symmetry for small displacements and rotations and isothermal processes have the form

$$\underset{\sim}{\mathbf{P}}=\underset{\approx}{\mathbf{A}}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\gamma}+\underset{\approx}{\mathbf{B}}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\varkappa},\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}=\underset{\approx}{\mathbf{C}}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\gamma}+\underset{\approx}{\mathbf{D}}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\varkappa}\quad(\underset{\sim}{\gamma}=\nabla\mathbf{u}-\underset{\sim}{\mathbf{C}}\cdot\boldsymbol{\varphi},\quad \underset{\sim}{\varkappa}=\nabla\boldsymbol{\varphi}),\tag{2}$$

where $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ и $\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}$ — stress and couple-stress tensors, $\underset{\sim}{\gamma}$ и $\underset{\sim}{\varkappa}$ — tensors of deformation and bending-torsion, $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ — displacement and rotation vectors, $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{C}}=\underset{\approx}{\mathbf{B}}^T$ и $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ — material tensors of the fourth rank, $\underset{\sim}{\mathbf{C}}$ — discriminant tensor of third rank, $\overset{2}{\otimes}$ — the inner 2-product [1–6], the superscript T in the upper right corner of the quantities denotes transposition.

Introducing the tensor columns of the deformation and bending-torsion tensors and stress and couple-stress tensors, as well as the tensor-block matrix (TBM) of the elastic modulus tensors

$$\mathbb{X}=\begin{pmatrix}\underset{\sim}{\gamma}\\ \underset{\sim}{\varkappa}\end{pmatrix}\ \left(\mathbb{X}^T=(\,\underset{\sim}{\gamma},\,\underset{\sim}{\varkappa}\,)\right),\quad \mathbb{Y}=\begin{pmatrix}\underset{\sim}{\mathbf{P}}\\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}\end{pmatrix}\ \left(\mathbb{Y}^T=(\,\underset{\sim}{\mathbf{P}},\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}\,)\right),$$

$$\underset{\approx}{\mathbb{M}}=\begin{pmatrix}\underset{\approx}{\mathbf{A}} & \underset{\approx}{\mathbf{B}}\\ \underset{\approx}{\mathbf{C}} & \underset{\approx}{\mathbf{D}}\end{pmatrix}\ (\underset{\approx}{\mathbb{M}}^T=\underset{\approx}{\mathbb{M}}),\tag{3}$$

the specific strain energy and the CR can be written in the form

$$2\Phi(\underset{\sim}{\gamma},\underset{\sim}{\varkappa})=\underset{\sim}{\gamma}\overset{2}{\otimes}\underset{\approx}{\mathbf{A}}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\gamma}+2\underset{\sim}{\gamma}\overset{2}{\otimes}\underset{\approx}{\mathbf{B}}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\varkappa}+\underset{\sim}{\varkappa}\overset{2}{\otimes}\underset{\approx}{\mathbf{D}}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\varkappa}=\mathbb{X}^T\overset{2}{\otimes}\underset{\approx}{\mathbb{M}}\overset{2}{\otimes}\mathbb{X},\quad \mathbb{Y}=\underset{\approx}{\mathbb{M}}\overset{2}{\otimes}\mathbb{X}.\tag{4}$$

If the material has a center of symmetry in the sense of elastic properties, then $\underset{\approx}{\mathbf{B}} = \underset{\approx}{\mathbf{0}}$, where $\underset{\approx}{\mathbf{0}}$ — zero tensor of the fourth rank and the tensor-block matrix of the elastic modulus tensors (3) will take the form of a tensor-block-diagonal matrix.

Substituting (2) in the equations of motion for small displacements and rotations

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{F} = \rho\partial_t^2\mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} + \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{m} = \underset{\sim}{\mathbf{J}}\partial_t^2\boldsymbol{\varphi},$$

and introducing the tensor-block matrix operator of the equations of motion and the vector columns of the displacement and rotation vectors and vectors of volume forces and moments

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{A}} & \underset{\sim}{\mathbf{B}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{C}} & \underset{\sim}{\mathbf{D}} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X} = \begin{pmatrix} \rho\mathbf{F} \\ \rho\mathbf{m} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

we obtain the equations of motion in displacements and rotations in the form

$$\mathbb{M} \cdot \mathbb{U} + \mathbb{X} = 0, \tag{6}$$

where the differential tensors-operators $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{C}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ have expressions

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{\mathbf{A}} = \underset{\sim}{\mathbf{A}}' - \underset{\sim}{\mathbf{E}}\rho\partial_t^2, \quad \underset{\sim}{\mathbf{A}}' = \mathbf{r}_j\mathbf{r}_l(A^{ijkl}\nabla_i + \nabla_i A^{ijkl})\nabla_k, \\
&\underset{\sim}{\mathbf{B}} = \mathbf{r}_j\mathbf{r}_l[(B^{ijkl}\nabla_i + \nabla_i B^{ijkl} - C^{l\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,mn}A^{mnkj})\nabla_k - C^{l\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,mn}\nabla_i A^{mnij}], \\
&\underset{\sim}{\mathbf{C}} = \mathbf{r}_j\mathbf{r}_l(B^{klij}\nabla_i + \nabla_i B^{klij} + C^{j\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,mn}A^{mnkl})\nabla_k, \quad \underset{\sim}{\mathbf{D}} = \underset{\sim}{\mathbf{D}}' - \underset{\sim}{\mathbf{J}}\partial_t^2, \\
&\underset{\sim}{\mathbf{D}}' = \mathbf{r}_j\mathbf{r}_l\{[D^{ijkl}\nabla_i + \nabla_i D^{ijkl} + (g_s^j g_t^l - g_s^l g_t^j)C^{s\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,mn}B^{mnkt}]\nabla_k - \\
&- C^{l\,\cdot\,\cdot}_{\cdot\,pq}(A^{pqmn}C^{\cdot\,\cdot\,j}_{mn\cdot} + \nabla_i B^{pqij})\}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Here and below $\underset{\sim}{\mathbf{E}}$ is the unit tensor of the second rank, t is the time, and ∂_t is the partial derivative operator with respect to time.

If we solve the eigenvalue problem for the tensor-block matrix (3), then we obtain its canonical presentation [1,6]

$$\mathbb{M} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underset{\sim}{\mathbb{W}}_p \otimes \underset{\sim}{\mathbb{W}}_p^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p \otimes \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p & \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p \otimes \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p \\ \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p \otimes \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p & \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p \otimes \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix}, \tag{8}$$

where λ_p, $p = \overline{1,18}$, are eigenvalues for positive-definite TBM (3). Moreover, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_{18} > 0$, a $\underset{\sim}{\mathbb{W}}_p = (\underset{\sim}{\mathbf{u}}_p, \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p)^T$, $p = \overline{1,18}$, is a complete orthonormal system of eigentensor columns satisfying the orthonormality conditions [1,6]

$$(\underset{\sim}{\mathbb{W}}_p, \underset{\sim}{\mathbb{W}}_q) = \underset{\sim}{\mathbb{W}}_p^T \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbb{W}}_q = \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{u}}_q + \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{v}}_q = \delta_{pq}, \quad p,q = \overline{1,18}. \tag{9}$$

Taking into account the expressions for TBM (3), from (8) we get

$$\underset{\approx}{\mathbf{A}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p, \quad \underset{\approx}{\mathbf{B}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}}^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p, \quad \underset{\approx}{\mathbf{D}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p.$$

It is not difficult to prove that the inverse TBM $\underset{\approx}{\mathbb{M}}^{-1}$ to (8) has the form

$$\underset{\approx}{\mathbb{M}}^{-1} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \underset{\sim}{\mathbb{W}}_p \underset{\sim}{\mathbb{W}}_p^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p & \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p \\ \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p \underset{\sim}{\mathbf{u}}_p & \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p \underset{\sim}{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Generally speaking, for any integer α we have

$$\underset{\approx}{\mathbb{M}}^{\alpha}=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p^{\alpha}\underset{\sim}{\mathbb{W}}_p\underset{\sim}{\mathbb{W}}_p^T=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p^{\alpha}\begin{pmatrix}\underline{\mathbf{u}}_p\underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{u}}_p\underline{\mathbf{v}}_p\\ \underline{\mathbf{v}}_p\underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{v}}_p\underline{\mathbf{v}}_p\end{pmatrix}. \tag{11}$$

In particular, from (11) for $\alpha=0$ we have

$$\underset{\approx}{\mathbb{E}}=\underset{\approx}{\mathbb{M}}^{0}=\sum_{p=1}^{18}\underset{\sim}{\mathbb{W}}_p\otimes\underset{\sim}{\mathbb{W}}_p^T=\sum_{p=1}^{18}\begin{pmatrix}\underline{\mathbf{u}}_p\otimes\underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{u}}_p\otimes\underline{\mathbf{v}}_p\\ \underline{\mathbf{v}}_p\otimes\underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{v}}_p\otimes\underline{\mathbf{v}}_p\end{pmatrix}, \tag{12}$$

where $\underset{\approx}{\mathbb{E}}$ is the unit TBM of the fourth rank relative to the operations of the inner 2-product. Given (8), from (4) we get

$$2\Phi(\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}},\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}})=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p\underset{\sim}{\mathbb{X}}^T\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbb{W}}_p\underset{\sim}{\mathbb{W}}_p^T\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbb{X}},\quad \underset{\sim}{\mathbb{Y}}=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p\underset{\sim}{\mathbb{W}}_p\underset{\sim}{\mathbb{W}}_p^T\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbb{X}}. \tag{13}$$

Multiplying both sides of the second relation (13) scalarly by $\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha}$ and taking into account (9), the CR can be written in the form

$$(\underset{\sim}{\mathbb{Y}},\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha})=\lambda_{\alpha}(\underset{\sim}{\mathbb{X}},\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha})\ \left(\underset{\sim}{\mathbb{Y}}^T\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha}=\lambda_{\alpha}\underset{\sim}{\mathbb{X}}^T\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha}\right),\ \ \langle\alpha=\overline{1,18}\rangle. \tag{14}$$

Note that the formulas (14) give equivalent records of the CR. Introducing the notations

$$\begin{aligned}&\mathbb{X}_{\alpha}=(\underset{\sim}{\mathbb{X}},\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha})=\underset{\sim}{\mathbb{X}}^T\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha}=\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha}^T\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbb{X}}=\underline{\mathbf{u}}_{\alpha}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}+\underline{\mathbf{v}}_{\alpha}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}},\\ &\mathbb{Y}_{\alpha}=(\underset{\sim}{\mathbb{Y}},\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha})=\underset{\sim}{\mathbb{Y}}^T\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha}=\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha}^T\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbb{Y}}=\underline{\mathbf{u}}_{\alpha}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbf{P}}+\underline{\mathbf{v}}_{\alpha}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}},\ \ \langle\alpha=\overline{1,18}\rangle,\end{aligned} \tag{15}$$

the specific deformation energy (the first equality of (13)) and the CR (14) are represented in the form

$$2\Phi(\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}},\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}})=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p\mathbb{X}_p^2,\quad \mathbb{Y}_{\alpha}=\lambda_{\alpha}\mathbb{X}_{\alpha},\ \ \langle\alpha=\overline{1,18}\rangle.$$

Multiplying both sides of the first equality (15) from the left tensorly by $\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha}$, and then if we sum the resulting ratio from 1 to 18, then by (12) we get

$$\begin{aligned}&\underset{\sim}{\mathbb{X}}=\sum_{\alpha=1}^{18}\mathbb{X}_{\alpha}\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{18}(\underline{\mathbf{u}}_{\alpha}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}+\underline{\mathbf{v}}_{\alpha}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}})\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha},\\ &\underset{\sim}{\mathbb{Y}}=\sum_{\alpha=1}^{18}\mathbb{Y}_{\alpha}\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{18}(\underline{\mathbf{u}}_{\alpha}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbf{P}}+\underline{\mathbf{v}}_{\alpha}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}})\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha},\end{aligned} \tag{16}$$

where the second formula (16) is obtained by analogy with the first. It should be noted that the formulas (16) are decompositions of the tensor columns $\underset{\sim}{\mathbb{X}}$ and $\underset{\sim}{\mathbb{Y}}$ with respect to the orthonormal basis $\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha}$, $\alpha=\overline{1,18}$, and $\mathbb{X}_{\alpha}$ and $\mathbb{Y}_{\alpha}$ are projections $\underset{\sim}{\mathbb{X}}$ and $\underset{\sim}{\mathbb{Y}}$ respectively on $\underset{\sim}{\mathbb{W}}_{\alpha}$.

It is not difficult to see that, taking into account the first equality (15), from the second relation (13) we obtain the following presentations of stress and couple-stress tensors:

$$\begin{aligned}&\underset{\sim}{\mathbf{P}}=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p\mathbb{X}_p\underline{\mathbf{u}}_p=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p(\underline{\mathbf{u}}_p\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}+\underline{\mathbf{v}}_p\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}})\underline{\mathbf{u}}_p,\\ &\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p\mathbb{X}_p\underline{\mathbf{v}}_p=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p(\underline{\mathbf{u}}_p\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}+\underline{\mathbf{v}}_p\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}})\underline{\mathbf{v}}_p.\end{aligned} \tag{17}$$

It is not difficult to write the reverse CR. In fact, for example, from the second equality (4) by virtue of (10) and the second equality (15) we find

$$\begin{aligned}&\underset{\sim}{\mathbb{X}}=\underset{\approx}{\mathbb{M}}^{-1}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbb{Y}}=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p^{-1}\underset{\sim}{\mathbb{W}}_p\underset{\sim}{\mathbb{W}}_p^T\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbb{Y}}=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p^{-1}\mathbb{Y}_p\underset{\sim}{\mathbb{W}}_p,\\&\mathbb{X}_\alpha=\lambda_\alpha^{-1}\mathbb{Y}_\alpha,\quad\langle\alpha=\overline{1,18}\rangle.\end{aligned}\tag{18}$$

Taking into account the second equality (15), from the first equality (18) similarly to (17) we have

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}&=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p^{-1}\mathbb{Y}_p\underset{\sim}{\mathbf{u}}_p=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p^{-1}(\underset{\sim}{\mathbf{u}}_p\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbf{P}}+\underset{\sim}{\mathbf{v}}_p\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}})\underset{\sim}{\mathbf{u}}_p,\\\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}&=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p^{-1}\mathbb{Y}_p\underset{\sim}{\mathbf{v}}_p=\sum_{p=1}^{18}\lambda_p^{-1}(\underset{\sim}{\mathbf{u}}_p\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbf{P}}+\underset{\sim}{\mathbf{v}}_p\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}})\underset{\sim}{\mathbf{v}}_p.\end{aligned}$$

It is not difficult to see that $\underset{\sim}{\mathbb{X}}$ can be represented as

$$\underset{\sim}{\mathbb{X}}=\begin{pmatrix}\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}\\\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{r}^i\underset{\sim}{\mathbf{E}}\nabla_i-\underset{\approx}{\mathbf{C}}\\\mathbf{r}^i\underset{\sim}{\mathbf{E}}\nabla_i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\\boldsymbol{\varphi}\end{pmatrix}=\underset{\approx}{\mathbb{H}}\cdot\mathbb{U},\quad\underset{\approx}{\mathbb{H}}=\begin{pmatrix}\mathbf{r}^i\underset{\sim}{\mathbf{E}}\nabla_i-\underset{\approx}{\mathbf{C}}\\\mathbf{r}^i\underset{\sim}{\mathbf{E}}\nabla_i\end{pmatrix}.\tag{19}$$

By virtue of the (19), the CR (4) can also be written in the form

$$\underset{\sim}{\mathbb{Y}}=\underset{\approx}{\mathbb{M}}\overset{2}{\otimes}\underset{\approx}{\mathbb{H}}\cdot\mathbb{U}.\tag{20}$$

3 On static boundary conditions in the linear three-dimensional micropolar theory of elasticity. Tensor-operator of stress and couple-stress

Given (2), the static boundary conditions can be written as follows:

$$\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{P}}=\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(1)}\cdot\mathbf{u}+\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(2)}\cdot\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{P},\quad\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}=\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}\cdot\mathbf{u}+\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(4)}\cdot\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\mu},\tag{21}$$

which by virtue of (20) is still equivalent to equalities

$$\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbb{Y}}=\begin{pmatrix}\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(1)}&\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(2)}\\\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}&\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(4)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\\boldsymbol{\varphi}\end{pmatrix}=\mathbf{n}\cdot\underset{\approx}{\mathbb{M}}\overset{2}{\otimes}\underset{\approx}{\mathbb{H}}\cdot\mathbb{U}.\tag{22}$$

Here $\mathbf{P}$ and $\boldsymbol{\mu}$ are the stress and couple-stress vectors given on the body surface and the following differential tensors-operators are introduced:

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(1)}&=\mathbf{r}_j\mathbf{r}_l n_i A^{ijkl}\nabla_k,\quad\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(2)}=\mathbf{r}_j\mathbf{r}_l n_i B^{ijkl}\nabla_k-\mathbf{n}\cdot\underset{\approx}{\mathbf{A}}\overset{2}{\otimes}\underset{\approx}{\mathbf{C}},\\\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}&=\mathbf{r}_j\mathbf{r}_l n_i C^{ijkl}\nabla_k,\quad\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(4)}=\mathbf{r}_j\mathbf{r}_l n_i D^{ijkl}\nabla_k-\mathbf{n}\cdot\underset{\approx}{\mathbf{C}}\overset{2}{\otimes}\underset{\approx}{\mathbf{C}}.\end{aligned}\tag{23}$$

Introducing the tensor-block matrix operator stress and couple-stress and the vector column of stress and couple-stress vectors

$$\mathbb{T}=\begin{pmatrix}\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(1)}&\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(2)}\\\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}&\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(4)}\end{pmatrix}=\mathbf{n}\cdot\underset{\approx}{\mathbb{M}}\overset{2}{\otimes}\underset{\approx}{\mathbb{H}},\quad\mathbb{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{P}\\\boldsymbol{\mu}\end{pmatrix},\tag{24}$$

the static boundary conditions (21), taking into account the notation given by the second relation (5), can be written in the form

$$\mathbb{T} \cdot \mathbb{U}\big|_S = \mathbb{Q}. \tag{25}$$

We note that the kinematic boundary conditions are represented in the form

$$\mathbb{U}\big|_S = \mathbb{Z} \quad \left(\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\psi} \end{pmatrix}\right), \tag{26}$$

mixed boundary conditions can be written as follows:

$$\mathbb{T} \cdot \mathbb{U}\big|_{S_1} = \mathbb{Q}; \quad \mathbb{U}\big|_{S_2} = \mathbb{Z}, \tag{27}$$

and the initial conditions have the form

$$\mathbb{U}|_{t=t_0} = \mathbb{U}_0 \quad \mathbb{V}|_{t=t_0} = \mathbb{V}_0, \tag{28}$$

where

$$\mathbb{U}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \boldsymbol{\varphi}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{V}_0 = \frac{d\mathbb{U}}{dt}\Big|_{t=t_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \boldsymbol{\omega}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{u}}{dt}\Big|_{t=t_0}, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}\Big|_{t=t_0}.$$

Here $\mathbf{f}$ and $\boldsymbol{\psi}$ are the displacement and rotation vectors given on the body surface, $\mathbf{u}_0$ and $\boldsymbol{\varphi}_0$ are the displacement and rotation vectors given at the initial instant of time (for $t = t_0$), $\mathbf{v}_0$ and $\boldsymbol{\omega}_0$ are the velocity and angular velocity vectors given at the initial instant of time, S is the body surface, $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = S$.

4 Formulation of initial-boundary value problems

Let us introduce the definitions.

Definition 1. If the displacement and rotation vectors (kinematic boundary conditions) are given on the body boundary S, then such conditions are called boundary conditions of the first kind, and the problem of the micropolar solids mechanics (SM), using these conditions, and also the initial conditions is called the first initial-boundary value problem.

In the case under consideration, the first initial-boundary value problem includes: the motion equations (6), the kinematic boundary conditions (26) and the initial conditions (28).

Definition 2. If static boundary conditions (stress and couple-stress vectors) are given on the body boundary S, then such boundary conditions are called boundary conditions of the second kind, and the problem of micropolar SM using them and initial conditions is called the second initial-boundary value problem.

In this case, the second initial-boundary value problem includes: the equations of motion (6), the static boundary conditions (25) and the initial conditions (28).

Definition 3. If kinematic boundary conditions are given on one part of the body boundary S_1, and on the remaining part of it S_2 are given the static boundary conditions, where $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, then such boundary conditions are

called mixed boundary conditions, and the problem of micropolar SM, using them and initial conditions is called the mixed initial-boundary value problem.

In this case, the mixed (third) initial-boundary value problem includes: the equations of motion (6), the kinematic boundary conditions (26) on one part of the body boundary and the static boundary conditions (25) on the rest of the body boundary and the initial conditions (28) (see also (27)).

Note that, excluding the characteristics of the micropolar theory from the above definitions, we obtain the corresponding definitions for classical SM.

It should be noted that the kinematic boundary conditions and the initial conditions do not need to be split, since they are set in a split form. Hence, for the splitting of the first initial-boundary value problem, it is sufficient to split only the equations of motion, since, as already mentioned in the previous proposition, the kinematic boundary conditions and the initial conditions are split. In this connection, the splitting of the static boundary conditions is of great interest. If the equations of motion (6) and the static boundary conditions (25) can be split under some conditions, then under the same conditions all the initial-boundary value problems formulated above can be split. Hence, it is necessary to establish the conditions under which the equations of motion (6) and the static boundary conditions (25) are split.

5 Decomposition of the motion equation in the case of a homogeneous isotropic micropolar medium

In this case, as many authors (see, for example, [7–9]) consider $\underset{\sim}{\mathbf{B}} = 0$ and differential tensors-operators $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{C}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ (see (7)) have the form

$$\begin{gathered}\underset{\sim}{\mathbf{A}}=\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_2+d\nabla\nabla,\ \ \underset{\sim}{\mathbf{B}}=\underset{\sim}{\mathbf{C}}=-2\alpha\underset{\approx}{\mathbf{C}}\cdot\nabla,\ \ \underset{\sim}{\mathbf{D}}=\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_4+m\nabla\nabla,\\ Q_2=b\Delta-\rho\partial_t^2,\ \ Q_4=g\Delta-l-J\partial_t^2,\ \ Q_1=Q_2+d\Delta,\ \ Q_3=Q_4+m\Delta,\ \ \underset{\sim}{\mathbf{J}}=J\underset{\sim}{\mathbf{E}},\\ d=\lambda+\mu-\alpha,\ \ l=4\alpha,\quad b=\mu+\alpha,\quad g=\delta+\beta,\ \ m=\gamma+\delta-\beta,\end{gathered}$$

where Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 are wave operators, and the elasticity tensors have expressions

$$\underset{\approx}{\mathbf{A}}=a_1\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)}+a_2\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)}+a_3\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(3)},\quad \underset{\sim}{\mathbf{D}}=d_1\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)}+d_2\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)}+d_3\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(3)}. \tag{29}$$

Here $\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)}$, $\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)}$ и $\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(3)}$ are basic isotropic tensors of the fourth rank, and for material constants we use the notation $a_1=\lambda$, $a_2=\mu$, $a_3=\alpha$, $b_1=\gamma$, $b_2=\delta$ и $b_3=\beta$.

Denoting by

$$\underset{\approx}{\mathbb{M}}_*=\begin{pmatrix}\hat{\underset{\approx}{\mathbf{A}}} & \hat{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}^{(1)}\\ \hat{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}^{(2)} & \hat{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}\end{pmatrix} \tag{30}$$

the tensor-block matrix operator of the cofactors for the tensor-block matrix operator $\underset{\approx}{\mathbb{M}}$ of the equation (6), after cumbersome calculations we obtain [4, 5, 10]

$$\begin{gathered}\hat{\underset{\approx}{\mathbf{A}}}=Q_3P\underset{\approx}{\mathbf{R}}\ \ (\hat{\underset{\approx}{\mathbf{A}}}^T=\hat{\underset{\approx}{\mathbf{A}}}),\ \ \hat{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}=\hat{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}^{(1)}=\hat{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}^{(2)}=Q_1Q_3P\underset{\sim}{\mathbf{B}}\ \ (\hat{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}^T=-\hat{\underset{\sim}{\mathbf{B}}}),\\ \hat{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}=Q_1P\underset{\sim}{\mathbf{T}}\ \ (\hat{\underset{\sim}{\mathbf{C}}}^T=\hat{\underset{\sim}{\mathbf{C}}});\ \ \underset{\sim}{\mathbf{R}}=\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_1Q_4-(dQ_4-4\alpha^2)\nabla\nabla,\ \ \underset{\sim}{\mathbf{B}}=-2\alpha\underset{\approx}{\mathbf{C}}\cdot\nabla,\\ \underset{\sim}{\mathbf{T}}=\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_2Q_3-(mQ_2-4\alpha^2)\nabla\nabla,\ \ P=Q_2Q_4+4\alpha^2\Delta.\end{gathered} \tag{31}$$

It is easy to see that by virtue of (31) the tensor-block matrix operator of the cofactors (30) can be represented as follows:

$$\underset{\sim}{\mathbb{M}}_* = P\begin{pmatrix} Q_3\hat{\underset{\sim}{\mathbf{R}}} & Q_1Q_3\underset{\sim}{\mathbf{B}} \\ Q_1Q_3\underset{\sim}{\mathbf{B}} & Q_1\hat{\underset{\sim}{\mathbf{T}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PQ_3 & 0 \\ 0 & PQ_1 \end{pmatrix}\underset{\sim}{\mathbb{N}}^{(1)} = \underset{\sim}{\mathbb{N}}^{(2)}\begin{pmatrix} PQ_3 & 0 \\ 0 & PQ_1 \end{pmatrix},$$

where tensor-block matrix operators are introduced

$$\underset{\sim}{\mathbb{N}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{R}} & Q_1\underset{\sim}{\mathbf{B}} \\ Q_3\underset{\sim}{\mathbf{B}} & \underset{\sim}{\mathbf{T}} \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{\mathbb{N}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{R}} & Q_3\underset{\sim}{\mathbf{B}} \\ Q_1\underset{\sim}{\mathbf{B}} & \underset{\sim}{\mathbf{T}} \end{pmatrix}.$$

It is easy to prove the relations

$$\underset{\sim}{\mathbb{M}}\cdot\underset{\sim}{\mathbb{N}}^{(1)T} = \underset{\sim}{\mathbb{N}}^{(2)T}\cdot\underset{\sim}{\mathbb{M}} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_1P & \underset{\sim}{\mathbf{O}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{O}} & \underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_3P \end{pmatrix}, \quad |\underset{\sim}{\mathbb{M}}| = \det(\underset{\sim}{\mathbb{M}}) = Q_1Q_3P^2. \tag{32}$$

Then if we shall seek the solution of the equation (6) in the form (similar to Galerkin)

$$\mathbb{U} = \underset{\sim}{\mathbb{N}}^{(1)T}\cdot\mathbb{V} \quad \left(\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\psi} \end{pmatrix}\right),$$

then, by virtue of the appropriate relation (32), we obtain the split equations:

$$Q_1(Q_2Q_4 + 4\alpha^2\Delta)\mathbf{v} + \rho\mathbf{F} = 0, \quad Q_3(Q_2Q_4 + 4\alpha^2\Delta)\boldsymbol{\psi} + \rho\mathbf{m} = 0.$$

Applying the operator $\underset{\sim}{\mathbb{N}}^{(2)T}$ to the left of (6), by the first relation (32) we will have

$$\begin{aligned} &Q_1[(Q_2Q_4 + 4\alpha^2\Delta)\mathbf{u} + 2\alpha(\underset{\sim}{\mathbf{C}}\cdot\nabla)\cdot(\rho\mathbf{m})] + [\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_1Q_4 - (dQ_4 - 4\alpha^2)\nabla\nabla]\cdot(\rho\mathbf{F}) = 0, \\ &Q_3[(Q_2Q_4 + 4\alpha^2\Delta)\boldsymbol{\varphi} + 2\alpha(\underset{\sim}{\mathbf{C}}\cdot\nabla)\cdot(\rho\mathbf{F})] + [\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_2Q_3 - (mQ_2 - 4\alpha^2)\nabla\nabla]\cdot(\rho\mathbf{m}) = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

For $\alpha = 0$ (the case of a reduced medium), the classical equation follows from the first equation (33), and the second equation has a similar form.

6 Decomposition of static boundary conditions

In the case of an isotropic micropolar material without a center of symmetry, by virtue of (29) и $\underset{\approx}{\mathbf{B}} = b_1\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)} + b_2\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)} + b_3\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(3)}$, from (23) we have

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(1)} = a_2\underset{\sim}{\mathbf{E}}\mathbf{n}\cdot\nabla + a_1\mathbf{n}\nabla + a_3(\mathbf{n}\nabla)^T, \ \underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(2)} = b_2\underset{\sim}{\mathbf{E}}\mathbf{n}\cdot\nabla + b_1\mathbf{n}\nabla + b_3(\mathbf{n}\nabla)^T - (a_2 - a_3)\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{C}}, \\ &\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)} = b_2\underset{\sim}{\mathbf{E}}\mathbf{n}\cdot\nabla + b_1\mathbf{n}\nabla + b_3(\mathbf{n}\nabla)^T, \ \underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(4)} = d_2\underset{\sim}{\mathbf{E}}\mathbf{n}\cdot\nabla + d_1\mathbf{n}\nabla + d_3(\mathbf{n}\nabla)^T - (b_2 - b_3)\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{C}}. \end{aligned}$$

Note that some authors (see [7–9]) consider that $\underset{\approx}{\mathbf{B}}$ is an asymmetric tensor, therefore in the case of an isotropic medium it is zero, as was done above. However, some authors prove that $\underset{\approx}{\mathbf{B}}$ is a symmetric tensor, therefore, in the case of an isotropic medium, it is not equal to zero, and how any isotropic fourth-rank tensor is generally

determined by three parameters, as is customary in this case. Further it is easy to see that

$$\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(2)}=\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}-(a_2-a_3)\mathbf{n}\cdot\underset{\approx}{\mathbf{C}},\quad \underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(4)}=\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{\prime(4)}-(b_2-b_3)\mathbf{n}\cdot\underset{\approx}{\mathbf{C}},$$

$$\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{\prime(4)}=d_2\underset{\sim}{\mathbf{E}}\mathbf{n}\cdot\nabla+d_1\mathbf{n}\nabla+d_3(\mathbf{n}\nabla)^T.$$

Assuming that the body has a piecewise-plane boundary and denoting by $\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{(1)}$ and $|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(1)}|$, $\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{(3)}$ and $|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}|$, $\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{\prime(4)}$ and $|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{\prime(4)}|$ the differential tensors-operators of the cofactors and determinants for the tensor operators $\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(1)}$, $\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{\prime(4)}$ respectively, after simple calculations we obtain

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{(1)}=[(a_1+a_2)(a_2+a_3)\underset{\sim}{\mathbf{E}}\mathbf{n}\cdot\nabla-a_3(a_1+a_2)\mathbf{n}\nabla\\
&-a_1(a_2+a_3)(\mathbf{n}\nabla)^T]\mathbf{n}\cdot\nabla+a_1a_3[\nabla\nabla+(\mathbf{nn}-\underset{\sim}{\mathbf{E}})\Delta],\\
&|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(1)}|=a_2[(a_1+a_2)(a_2+a_3)\overset{2}{\mathbf{nn}\otimes}\nabla\nabla-a_1a_3\Delta]\mathbf{n}\cdot\nabla,\\
&\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{(3)}=[(b_1+b_2)(b_2+b_3)\underset{\sim}{\mathbf{E}}\mathbf{n}\cdot\nabla-b_3(b_1+b_2)\mathbf{n}\nabla\\
&-b_1(b_2+b_3)(\mathbf{n}\nabla)^T]\mathbf{n}\cdot\nabla+b_1b_3[\nabla\nabla+(\mathbf{nn}-\underset{\sim}{\mathbf{E}})\Delta],\\
&|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}|=b_2[(b_1+b_2)(b_2+b_3)\overset{2}{\mathbf{nn}\otimes}\nabla\nabla-b_1b_3\Delta]\mathbf{n}\cdot\nabla,\\
&\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{\prime(4)}=[(d_1+d_2)(d_2+d_3)\underset{\sim}{\mathbf{E}}\mathbf{n}\cdot\nabla-d_3(d_1+d_2)\mathbf{n}\nabla\\
&-d_1(d_2+d_3)(\mathbf{n}\nabla)^T]\mathbf{n}\cdot\nabla+d_1d_3[\nabla\nabla+(\mathbf{nn}-\underset{\sim}{\mathbf{E}})\Delta],\\
&|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{\prime(4)}|=d_2[(d_1+d_2)(d_2+d_3)\overset{2}{\mathbf{nn}\otimes}\nabla\nabla-d_1d_3\Delta]\mathbf{n}\cdot\nabla.
\end{aligned}$$

Note that we want to obtain boundary conditions separately for $\mathbf{u}$ and $\boldsymbol{\varphi}$. In order to shorten the letter, we consider the case when $b_2=b_3$, $a_2=a_3$. Then $\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(2)}=\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}$, $\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(4)}=\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{\prime(4)}$ and the boundary conditions (25) can be written in the form

$$\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(1)}\cdot\mathbf{u}+\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}\cdot\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{P},\quad \underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}\cdot\mathbf{u}+\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{\prime(4)}\cdot\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\mu}.$$

In this case, it is easy to obtain the boundary conditions separately for $\mathbf{u}$ and $\boldsymbol{\varphi}$

$$\begin{aligned}
&\left(|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{\prime(4)}|\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{(3)T}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(1)}-|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}|\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{\prime(4)T}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}\right)\cdot\mathbf{u}=|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{\prime(4)}|\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{(3)T}\cdot\mathbf{P}-|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}|\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{\prime(4)T}\cdot\boldsymbol{\mu},\\
&\left(|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}|\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{(1)T}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}-|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(1)}|\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{(3)T}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{\prime(4)}\right)\cdot\boldsymbol{\varphi}=|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(3)}|\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{(1)T}\cdot\mathbf{P}-|\underset{\sim}{\mathbf{T}}^{(1)}|\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^{(3)T}\cdot\boldsymbol{\mu}.
\end{aligned}$$

It should be noted that the eigenvalue problem can also be considered for differential tensor-operator and tensor-block matrix operator. Consequently, in this case the eigenvalues are differential operators whose product, taking into account their multiplicities, will be equal to the determinant of the object for which the eigenvalue problem is considered. Of course, we can find our eigenoperators from the solution of the characteristic equation. For example, the characteristic equation for an arbitrary tensor-block matrix $\underset{\sim}{\mathbb{M}}$ of the second rank consisting of four second-rank tensors of three-dimensional space has the form [1,6]

$$\eta^6-I_1(\underset{\sim}{\mathbb{M}})\eta^5+I_2(\underset{\sim}{\mathbb{M}})\eta^4-I_3(\underset{\sim}{\mathbb{M}})\eta^3+I_4(\underset{\sim}{\mathbb{M}})\eta^2-I_5(\underset{\sim}{\mathbb{M}})\eta+I_6(\underset{\sim}{\mathbb{M}})=0,$$

$$S_k = I_k(\mathbb{M}) = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & s_1 & k \\ s_k & s_{k-1} & \cdots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1,6}, \tag{34}$$

$$S_k = I_k(\mathbb{M}), \quad s_k = I_1(\mathbb{M}^k), \quad k = \overline{1,6}, \quad \mathbb{M}^k = \overbrace{\mathbb{M}\cdot\mathbb{M}\cdot\ldots\cdot\mathbb{M}}^{k},$$

where $I_k(\mathbb{M})$, $k = \overline{1,6}$, denote the invariants of the tensor-block matrix $\mathbb{M}$. In this case, the inverse relations to (34) are represented in the form

$$s_k = I_1(\mathbb{M}^k) = \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2S_2 & S_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kS_k & S_{k-1} & S_{k-2} & \cdots & S_1 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1,6}.$$

Replacing here $\underset{\sim}{\mathbb{M}}$ by the tensor-block matrix operators of the equations of motion in displacements and rotations under various anisotropic media, we obtain the characteristic equations for them. If we find the roots (eigenoperators) of the obtained characteristic equations for the above tensor-block matrix operators, then their determinants can be represented as a product of simple eigenoperators. Thus, the equations are split.

7 Decomposition of the canonical equations of the classical elasticity theory for the transversely isotropic body

Under the canonical equations we call equations that are obtained by the canonical presentations of the material tensors. In a similar sense, the term canonical mechanics can also be used. Thus, in this case the elastic tensor $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ is represented in the canonical form [1,6], that is

$$\underset{\approx}{\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{6} \lambda_k \underset{\sim}{\mathbf{w}}_k \underset{\sim}{\mathbf{w}}_k, \tag{35}$$

where λ_k and $\underset{\sim}{\mathbf{w}}_k$, $k = 1,\ldots,6$, are the eigenvalues and eigentensors for $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$. Then by (35) the vector equation with respect to the displacement vector can be written in the form

$$\underset{\sim}{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{u} + \rho\mathbf{F} = 0, \quad \underset{\sim}{\mathbf{L}} = \sum_{k=1}^{6} \lambda_k \underset{\sim}{\mathbf{w}}_k \cdot\nabla \underset{\sim}{\mathbf{w}}_k \cdot\nabla. \tag{36}$$

It is seen that for the splitting of the last equation it is necessary to find the cofactors $\underset{\sim}{\mathbf{L}}_*$ for $\underset{\sim}{\mathbf{L}}$ (see the second relation (36)), and for this, in turn it is necessary to find expressions for the determinant of a linear combination of several tensors of the second rank (from two to six). We give below the expressions for the determinant and the cofactors of the sum of six second-rank tensors without proofs, from which,

in turn, it is easy to obtain analogous expressions for the sum of a smaller number of tensors. The expressions for the determinant and the cofactor tensot of the sum of six tensors of the second rank are presented as follows:

$$|\sum_{k=1}^{6}\underset{\sim}{\mathbf{A}}_k|=\sum_{k=1}^{6}|\underset{\sim}{\mathbf{A}}_k|+\sum_{i=1}^{6}I_2(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i)\big[\delta_{ii}\sum_{j=1}^{6}I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_j)-I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i)\big]+\prod_{i=1}^{3}\big[I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_{2i-1})+I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_{2i})\big]+$$
$$+\sum_{i=1}^{3}I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_{2i-1})I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_{2i})\big[\delta_{ii}\sum_{k=1}^{6}I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_k)-I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_{2i-1})-I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_{2i})\big]+$$
$$+\sum_{i=1}^{6}\big[\sum_{j=1}^{6}I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i^2\cdot\underset{\sim}{\mathbf{A}}_j)-I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i^3)\big]+\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=i+1}^{5}\sum_{k=j+1}^{6}I_1\big[\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i\cdot(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_j\cdot\underset{\sim}{\mathbf{A}}_k+\underset{\sim}{\mathbf{A}}_k\cdot\underset{\sim}{\mathbf{A}}_j)\big]-$$
$$-\big[\sum_{i=1}^{6}I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i)\big]\big[\sum_{j=1}^{5}\sum_{k=j+1}^{6}I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_j\cdot\underset{\sim}{\mathbf{A}}_k\big],\ \delta_{ii}=1,\ (i=\overline{1,6});$$
$$\big(\sum_{i=1}^{6}\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i\big)_*=\sum_{i=1}^{6}\underset{\sim}{\mathbf{A}}_{i*}+\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{6}{}^4\underset{\sim}{\mathbf{A}}_{i*}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{A}}_j;\quad \underset{\sim}{\mathbf{A}}_{i*}\equiv\frac{\partial|\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i|}{\partial\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i},\quad {}^4\underset{\sim}{\mathbf{A}}_{i*}\equiv\frac{\partial^2|\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i|}{\partial\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i\partial\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i}.$$

Given

$$I_1({}^4\underset{\sim}{\mathbf{A}}_{i*}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{A}}_j)=I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i)I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_j)-I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i\cdot\underset{\sim}{\mathbf{A}}_j),$$

from the previous formula we obtain

$$I_1\big[\big(\sum_{i=1}^{6}\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i\big)_*\big]=I_2\big(\sum_{i=1}^{6}\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i\big)=\sum_{i=1}^{6}I_2\big(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i\big)+\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=i+1}^{6}\big[I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i)I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_j)-I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}_i\cdot\underset{\sim}{\mathbf{A}}_j)\big].$$

Here $\underset{\sim}{\mathbf{A}}_{i*}$ и ${}^4\underset{\sim}{\mathbf{A}}_{i*}$, $i=\overline{1,6}$, are tensors of cofactors of second rank and second order and fourth rank and first order, respectively.

Further, before we consider the canonical presentations of tensors, we introduce the definition.

Definition 4. The symbol $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\}$, where k is the number of different eigenvalues of the tensor, and α_i is the multiplicity of the eigenvalue λ_i $(i=1,2,\ldots,k)$, is called the anisotropy symbol (structure symbol) of the tensor.

We note that on the basis of this definition, the classification of classical and microcontinuum anisotropic materials is given in [1,6]. By virtue of this classification, classical (micropolar) isotropic materials are special cases of materials in which the anisotropy symbol consists of not more than two (three) elements. A similar situation occurs for other anisotropies [1, 6]. In particular, classical transversely isotropic materials are special cases of anisotropic materials whose anisotropy symbols consist of four elements, and orthotropic materials are special cases of anisotropic media whose structure symbols consist of no more than 6 elements. The anisotropy symbol of an orthotropic micropolar material with a symmetry center consists of not more than 9 elements [1,6].

We now consider the canonical representation of the transversely isotropic elastic modulus tensor with the anisotropy symbol {1,1,2,2} [1,6]:

$$\underset{\approx}{\mathbf{A}}=\mu_1\underset{\sim}{\mathbf{w}}_1\underset{\sim}{\mathbf{w}}_1+\mu_2\underset{\sim}{\mathbf{w}}_2\underset{\sim}{\mathbf{w}}_2+\mu_3(\underset{\sim}{\mathbf{w}}_3\underset{\sim}{\mathbf{w}}_3+\underset{\sim}{\mathbf{w}}_4\underset{\sim}{\mathbf{w}}_4)+\mu_5(\underset{\sim}{\mathbf{w}}_5\underset{\sim}{\mathbf{w}}_5+\underset{\sim}{\mathbf{w}}_6\underset{\sim}{\mathbf{w}}_6).\qquad(37)$$

(According to the classification of materials adopted in [1,6], transversely isotropic materials can be of the following types: {1,1,2,2}, {1,2,1,2}, {1,2,2,1}, {2,1,1,2}, {2,1,2,1}, {2,2,1,1}).

For the material under consideration, the eigenvalues are determined by the formulas [1,6]

$$\begin{aligned}&\mu_1 = 1/2(A_{11}+A_{12}+A_{33}-\sqrt{(A_{11}+A_{12}-A_{33})^2+8A_{13}^2}),\\&\mu_2 = 1/2(A_{11}+A_{12}+A_{33}+\sqrt{(A_{11}+A_{12}-A_{33})^2+8A_{13}^2}),\\&\mu_3=\mu_4=A_{11}-A_{12},\ \ \mu_5=\mu_6=A_{55},\end{aligned}\tag{38}$$

and the eigentensors are represented in the form

$$\begin{aligned}&\underset{\sim}{\mathbf{w}}_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha(\underset{\sim}{\mathbf{e}}_1+\underset{\sim}{\mathbf{e}}_2)+\cos\alpha\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\underset{\sim}{\mathbf{I}}+\cos\alpha\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3,\ \ \underset{\sim}{\mathbf{e}}_\alpha=\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\alpha,\ \ \alpha=1,2,3,\\&\underset{\sim}{\mathbf{w}}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha(\underset{\sim}{\mathbf{e}}_1+\underset{\sim}{\mathbf{e}}_2)+\sin\alpha\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\underset{\sim}{\mathbf{I}}+\sin\alpha\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3,\ \ \underset{\sim}{\mathbf{e}}_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3),\\&\underset{\sim}{\mathbf{w}}_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(\underset{\sim}{\mathbf{e}}_1-\underset{\sim}{\mathbf{e}}_2),\ \ \underset{\sim}{\mathbf{w}}_4=\underset{\sim}{\mathbf{e}}_4,\ \ \underset{\sim}{\mathbf{w}}_5=\underset{\sim}{\mathbf{e}}_5,\ \ \underset{\sim}{\mathbf{w}}_6=\underset{\sim}{\mathbf{e}}_6,\ \ \mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\sqrt{2}A_{13}}{A_{11}+A_{12}-A_{33}},\\&\underset{\sim}{\mathbf{e}}_5=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1),\ \ \underset{\sim}{\mathbf{e}}_6=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2),\ \ \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij},\ \ i,j=1,2,3,\\&\underset{\sim}{\mathbf{e}}_m\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbf{e}}_n=\delta_{mn},\ \ m,n=\overline{1,6},\ \ \underset{\sim}{\mathbf{I}}=\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2=\underset{\sim}{\mathbf{e}}_1+\underset{\sim}{\mathbf{e}}_2.\end{aligned}\tag{39}$$

The canonical representations of the tensor-operator of the equations and its determinant and the tensor of cofactors and its components, as well as the stress tensor-operator, its determinant and the components of the tensor-operator of cofactors by virtue of (37) – (39) have the form

$$\begin{aligned}&\underset{\sim}{\mathbf{L}}=(a_1\underset{\sim}{\mathbf{I}}+a_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)\Delta+a_2\nabla^0\nabla^0+a_5[\mathbf{e}_3\nabla^0+(\mathbf{e}_3\nabla^0)^T]\partial_3+(a_3\underset{\sim}{\mathbf{I}}+a_4\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)\partial_3^2;\\&|\underset{\sim}{\mathbf{L}}|=A\Delta^3+B\Delta^2\partial_3^2+C\Delta\partial_3^4+D\partial_3^6=k(\Delta+k_1\partial_3^2)(\Delta+k_2\partial_3^2)(\Delta+k_3\partial_3^2),\\&k=A,\ \ k_1+k_2+k_3=B/A,\ \ k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3=C/A,\ \ k_1k_2k_3=D/A;\\&\underset{\sim}{\mathbf{L}}_*=a(a_3\underset{\sim}{\mathbf{I}}+a_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)\Delta^2-a_2a_3\Delta\nabla^0\nabla^0-a_1a_5[\mathbf{e}_3\nabla^0+(\mathbf{e}_3\nabla^0)^T]\partial_3+\\&+\Big\{\Big[[(a_2+a_3)a_4+c(a_3+a_5)]\underset{\sim}{\mathbf{I}}+a_3(a+a_1)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3\Big]\Delta+(a_5^2-a_2a_4)\nabla^0\nabla^0\Big\}\partial_3^2-\\&-a_3a_5[\mathbf{e}_3\nabla^0+(\mathbf{e}_3\nabla^0)^T]\partial_3^3-a_3(a_4\underset{\sim}{\mathbf{I}}-a_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)\partial_3^4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\underset{\sim}{\mathbf{T}}=(a_1\underset{\sim}{\mathbf{I}}+a_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)\mathbf{n}^0\cdot\nabla^0-b\mathbf{n}^0\nabla^0+a_1(\mathbf{n}^0\nabla^0)^T+n_3[-c\mathbf{e}_3\nabla^0+a_3(\mathbf{e}_3\nabla^0)^T]+\\&+[n_3(a_3\underset{\sim}{\mathbf{I}}+a_4\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)-c\mathbf{n}^0\mathbf{e}_3+a_3\mathbf{e}_3\mathbf{n}^0]\partial_3,\\&|\underset{\sim}{\mathbf{T}}|=a_1a_3\{[b-(b+c)n_3^2]\Delta+2a_2\mathbf{n}^0\mathbf{n}^0\overset{2}{\otimes}\nabla^0\nabla^0\}\mathbf{n}^0\cdot\nabla^0+\{b(a_1a_4-a_3^2)+a_1c^2-\\&-[(c-b)a_3^2+a(c^2+ba_4)]n_3^2\}n_3\Delta\partial_3+2a_1[(a_3+c)a_5+a_2a_4]n_3\mathbf{n}^0\mathbf{n}^0\overset{2}{\otimes}\nabla^0\nabla^0\partial_3+\\&+a_3\{-a_1c+[a_1c+(a+a_1)a_4-c^2]n_3^2\}\mathbf{n}^0\cdot\nabla^0\partial_3^2-a_3^2[c-(c+a_4)n_3^2]n_3\partial_3^3,\end{aligned}\tag{40}$$

$$\begin{aligned}&\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*=a_3\mathbf{n}^0\cdot\nabla^0[a\underset{\sim}{\mathbf{I}}\mathbf{n}^0\cdot\nabla^0+b\mathbf{n}^0\nabla^0-a_1(\mathbf{n}^0\nabla^0)^T]+ca_3n_3^2(\underset{\sim}{\mathbf{I}}\Delta-\nabla^0\nabla^0)\\&+\frac{1}{2}\{[(3a_1+a_2)a_4-c^2]\underset{\sim}{\mathbf{I}}\mathbf{n}^0\cdot\nabla^0+(ba_4+c^2)\mathbf{n}^0\nabla^0-(2a_1a_4-a_3^2)(\mathbf{n}^0\nabla^0)^T\}n_3\partial_3+\\&+a_3[(a_4n_3^2+c|\mathbf{n}^0|^2)\underset{\sim}{\mathbf{I}}-c\mathbf{n}^0\mathbf{n}^0]\partial_3^2-\underset{\sim}{\mathbf{C}}\overset{2}{\otimes}\mathbf{n}^0\nabla^0\{ba_3[n_3\underset{\sim}{\mathbf{C}}\cdot(\mathbf{e}_3\nabla^0)^T-\mathbf{e}_3\underset{\sim}{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{n}^0\partial_3-\\&-a_1c(\underset{\sim}{\mathbf{C}}\cdot\mathbf{n}^0\mathbf{e}_3\partial_3-n_3\mathbf{e}_3\underset{\sim}{\mathbf{C}}\cdot\nabla^0)\}-a_1\mathbf{n}^0\cdot\nabla^0\{a_3[n_3(\mathbf{e}_3\nabla^0)^T+\mathbf{e}_3\mathbf{n}^0\partial_3]-\\&-c(\mathbf{n}^0\mathbf{e}_3\partial_3+n_3\mathbf{e}_3\nabla^0)\}-a_3^2[n_3^2(\mathbf{e}_3\nabla^0)^T\partial_3+n_3\mathbf{e}_3\mathbf{n}^0\partial_3^2]+ca_3(n_3^2\mathbf{e}_3\nabla^0\partial_3+n_3\mathbf{n}^0\mathbf{e}_3\partial_3^2)\\&+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3[a_1b|\mathbf{n}^0|^2\Delta+2a_1a_2\mathbf{n}^0\mathbf{n}^0\overset{2}{\otimes}\nabla^0\nabla^0+(a_1a_5+a_2a_3)n_3\mathbf{n}^0\cdot\nabla^0\partial_3+a_3^2n_3^2\partial_3^2].\end{aligned}$$

where the following notations are introduced:

$$A=aa_1a_3,\ B=a(a_3^2+a_1a_4)+ca_1(a_3+a_5),\ C=a_3[(a+a_1)a_4+c(a_3+a_5)];\ a=a_1+a_2,$$
$$c=a_3-a_5,\ D=a_3^2a_4,\ a_1=(1/2)\mu_3,\ a_2=(1/2)(\mu_1\sin^2\alpha+\mu_2\cos^2\alpha),\ a_3=(1/2)\mu_5,$$
$$a_4=\mu_1\cos^2\alpha+\mu_2\sin^2\alpha,\ a_5=(1/2)[\sqrt{2}(\mu_2-\mu_1)\sin\alpha\cos\alpha+\mu_5],\ \Delta=\partial_1^2+\partial_2^2,$$
$$\mathbf{n}^0=n_I\mathbf{e}_I,\ \nabla^0=\mathbf{e}_I\partial_I,\ \mathbf{n}^0\mathbf{n}^0\overset{2}{\otimes}\nabla^0\nabla^0=n_In_J\partial_I\partial_J,\ \underset{\sim}{\mathbf{C}}=C_{IJ}\mathbf{e}_I\mathbf{e}_J,\ b=a_1-a_2.$$

If we apply the operator $\underset{\sim}{\mathbf{L}}_*$ from the left with a single multiplication to the equation (the first relation (36)), and the operator $\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^T$ (see the corresponding relations from (40)) to the boundary conditions $\underset{\sim}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{P}$, then we obtain the following split equations and boundary conditions:

$$|\underset{\sim}{\mathbf{L}}|\mathbf{u}+\underset{\sim}{\mathbf{L}}_*^T\cdot(\rho\mathbf{F})=0,\quad |\underset{\sim}{\mathbf{T}}|\mathbf{u}=\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^T\cdot\mathbf{P}, \tag{41}$$

and if we look for the solution $\mathbf{u}$ in the form $\mathbf{u}=\underset{\sim}{\mathbf{L}}_*\cdot\mathbf{v}$, then we have the following split equations and boundary conditions:

$$|\underset{\sim}{\mathbf{L}}|\mathbf{v}+\rho\mathbf{F}=0,\quad |\underset{\sim}{\mathbf{T}}|(\underset{\sim}{\mathbf{L}}_*\cdot\mathbf{v})=\underset{\sim}{\mathbf{T}}_*^T\cdot\mathbf{P}. \tag{42}$$

When obtaining (41) and (42), we took into account the relation $\underset{\sim}{\mathbf{F}}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{F}}_*^T=\underset{\sim}{\mathbf{F}}_*^T\cdot\underset{\sim}{\mathbf{F}}=\underset{\sim}{\mathbf{E}}|\underset{\sim}{\mathbf{F}}|,\ \forall\underset{\sim}{\mathbf{F}}$.

Further, applying, for example, to the split equations from (42), the kth moment operator [4, 5], the equations for prismatic bodies in moments with respect to any system of orthogonal polynomials can be represented in the form

$$A\Delta^3\overset{(k)}{\mathbf{v}}+B\Delta^2\overset{(k)}{\mathbf{v}}{}''+C\Delta\overset{(k)}{\mathbf{v}}{}^{IV}+D\overset{(k)}{\mathbf{v}}{}^{VI}+\rho\overset{(k)}{\mathbf{F}}=0,\ \ k=\overline{0,\infty}; \tag{43}$$

where in the application of the system of Legendre polynomials, the expressions for $\overset{(k)}{\mathbf{v}}{}''$, $\overset{(k)}{\mathbf{v}}{}^{IV}$ and $\overset{(k)}{\mathbf{v}}{}^{VI}$ are defined using the following relationship:

$$\overset{(n)(2m)}{\mathbf{v}}(x')=(2n+1)\sum_{k=1}^{\infty}C_{k+2m-2}^{2m-1}\prod_{s=1}^{2m-1}(2n+2k+2s-1)\overset{(n+2k+2m-2)}{\mathbf{v}},\ n\in\mathbb{N}_0,\ m\in\mathbb{N}. \tag{44}$$

Note that analogous (43) equations can also be easily obtained from the equations (41). In order to shorten the letter, we will not write them out. By virtue of the first relation (40), it is not difficult to calculate that

$$2I_1(\underset{\sim}{\mathbf{L}})=(3a+b+2a_3)\Delta+(a_4+2a_3)\partial_3^2,\ 2I_2(\underset{\sim}{\mathbf{L}})=[(3a+b)a_3+a(a+b)]\Delta^2+$$
$$+[(3a+b)a_4-2c(c+2a_3)+(2a_3+3a+b)a_3]\Delta\partial_3^2+2(2a_4+a_3)a_3\partial_3^4, \tag{45}$$
$$I_3(\underset{\sim}{\mathbf{L}})=|\underset{\sim}{\mathbf{L}}|.$$

It should be noted that the dynamic equations (equilibrium equations) in displacements for any homogeneous anisotropic body can be written in the form

$$\underset{\sim}{\mathbf{M}}\cdot\mathbf{u}+\rho\mathbf{F}=0\ \ (\underset{\sim}{\mathbf{L}}\cdot\mathbf{u}+\rho\mathbf{F}=0),\ \text{где}\ \ \underset{\sim}{\mathbf{M}}=\underset{\sim}{\mathbf{L}}-\underset{\sim}{\mathbf{E}}\rho\partial_t^2,\ \ \underset{\sim}{\mathbf{L}}=\sum_{k=1}^{6}\lambda_k\underset{\sim}{\mathbf{w}}_k\cdot\nabla\underset{\sim}{\mathbf{w}}_k\cdot\nabla.$$

It is easy to see that

$$\begin{aligned}
&I_3(\underset{\sim}{\mathbf{M}}) = |\underset{\sim}{\mathbf{M}}| = I_3(\underset{\sim}{\mathbf{L}}) - I_2(\underset{\sim}{\mathbf{L}})\rho\partial_t^2 + I_1(\underset{\sim}{\mathbf{L}})\rho^2\partial_t^4 - \rho^3\partial_t^6,\\
&\underset{\sim}{\mathbf{M}}_* = \underset{\sim}{\mathbf{M}}^2 - I_1(\underset{\sim}{\mathbf{M}})\underset{\sim}{\mathbf{M}} + I_2(\underset{\sim}{\mathbf{M}})\underset{\sim}{\mathbf{E}} = \underset{\sim}{\mathbf{L}}_* + [\underset{\sim}{\mathbf{L}} - I_1(\underset{\sim}{\mathbf{L}})\mathbf{E}]\rho\partial_t^2 + \underset{\sim}{\mathbf{E}}\rho^2\partial_t^4 =\\
&= \underset{\sim}{\mathbf{L}}^2 - \underset{\sim}{\mathbf{L}}[I_1(\underset{\sim}{\mathbf{L}}) - \rho\partial_t^2] + \underset{\sim}{\mathbf{E}}[I_2(\underset{\sim}{\mathbf{L}}) - I_1(\underset{\sim}{\mathbf{L}})\rho\partial_t^2 + \rho^2\partial_t^4],\\
&\underset{\sim}{\mathbf{L}}_* = \underset{\sim}{\mathbf{L}}^2 - I_1(\underset{\sim}{\mathbf{L}})\underset{\sim}{\mathbf{L}} + I_2(\underset{\sim}{\mathbf{L}})\underset{\sim}{\mathbf{E}}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Consequently, the split equations will have the form

$$|\underset{\sim}{\mathbf{M}}|\mathbf{u} + \underset{\sim}{\mathbf{M}}_*\cdot(\rho\mathbf{F}) = 0, \quad \big(|\underset{\sim}{\mathbf{L}}|\mathbf{u} + \underset{\sim}{\mathbf{L}}_*\cdot(\rho\mathbf{F}) = 0\big).$$

Next, we represent $|\underset{\sim}{\mathbf{M}}|$ (see the first equality of (46))) as a product of simple operators

$$\begin{aligned}
&|\underset{\sim}{\mathbf{M}}| = I_3(\underset{\sim}{\mathbf{L}}) - I_2(\underset{\sim}{\mathbf{L}})\rho\partial_t^2 + I_1(\underset{\sim}{\mathbf{L}})\rho^2\partial_t^4 - \rho^3\partial_t^6 = (b_1 - \rho\partial_t^2)(b_2 - \rho\partial_t^2)(b_3 - \rho\partial_t^2) =\\
&= b_1b_2b_3 - (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)\rho\partial_t^2 + (b_1 + b_2 + b_3)\rho^4\partial_t^4 - \rho^3\partial_t^6;\\
&I_1(\underset{\sim}{\mathbf{L}}) = b_1 + b_2 + b_3, \quad I_2(\underset{\sim}{\mathbf{L}}) = b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3, \quad I_3(\underset{\sim}{\mathbf{L}}) = b_1b_2b_3.
\end{aligned} \tag{47}$$

From this we see that b_1, b_2 and b_3 are eigenoperators for $\underset{\sim}{\mathbf{L}}$, and $b_1 - \rho\partial_t^2$, $b_2 - \rho\partial_t^2$ and $b_3 - \rho\partial_t^2$ are the eigenoperators for $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$.

Note that, knowing the expressions for $I_k(\underset{\sim}{\mathbf{L}})$, $k = 1, 2, 3$, (the case of a transversally isotropic medium, see (45)), the simple (linear) operators b_k, $k = 1, 2, 3$, can be found using (47).

8 The case of a classical isotropic medium

Classical isotropic media, as mentioned above, must be sought among materials for which the anisotropy symbol consists of one ($\{6\}$) or two elements ($\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{3,3\}$, $\{4,2\}$, $\{5,1\}$) [1,6]. At the same time, traditional isotropic materials must be sought among materials for which the anisotropy symbol consists of two elements. Consider, for example, materials $\{6\}$, $\{1,5\}$ and $\{5,1\}$. For them elastic modulus tensors are represented respectively in the form

$$\begin{aligned}
&\{6\}\colon\ \underset{\approx}{\mathbf{A}} = \lambda\underset{\approx}{\mathbf{E}}, \ \{1,5\}\colon\ \underset{\approx}{\mathbf{A}} = (\lambda_1 - \lambda_2)\underset{\sim}{\mathbf{W}}_1\underset{\sim}{\mathbf{W}}_1 + \lambda_2\underset{\approx}{\mathbf{E}};\\
&\{5,1\}\colon\ \underset{\approx}{\mathbf{A}} = \lambda_1\underset{\approx}{\mathbf{E}} - (\lambda_1 - \lambda_6)\underset{\sim}{\mathbf{W}}_6\underset{\sim}{\mathbf{W}}_6.
\end{aligned} \tag{48}$$

Here $\underset{\approx}{\mathbf{E}} = (1/2)(\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)} + \underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(3)})$ is unit tensor of the fourth rank.

From (48) you can see $\{6\}$ is a one-constant isotropic material. In [11] it is called perfectly elastic (see also [12,13]). The materials $\{1,5\}$ and $\{5,1\}$ are not isotropic. For their isotropy, it is necessary and sufficient that $\underset{\sim}{\mathbf{W}}_1\underset{\sim}{\mathbf{W}}_1$ and $\underset{\sim}{\mathbf{W}}_6\underset{\sim}{\mathbf{W}}_6$ be isotropic, i.e. $\underset{\sim}{\mathbf{W}}_1 = \underset{\sim}{\mathbf{W}}_6 = \underset{\sim}{\mathbf{E}}$.

Then it is not difficult to see that the tensors-operators, differential operators, and split equations for isotropic media, in virtue of (48), will have the form

$$\begin{aligned}
&\{6\}:\ \underset{\sim}{\mathbf{L}}'' = p''(\underset{\sim}{\mathbf{E}}\Delta + \nabla\nabla);\ \underset{\sim}{\mathbf{M}}'' = \underset{\sim}{\mathbf{E}}(p''\Delta - \rho''\partial_t^2) + p''\nabla\nabla = \underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_2 + p''\nabla\nabla,\\
&Q_2'' = p''\Delta - \rho''\partial_t^2, \ Q_1'' = Q_2'' + p''\Delta = 2p''\Delta - \rho''\partial_t^2, \ p'' = \frac{1}{2}\lambda,\\
&\underset{\sim}{\mathbf{M}}_*'' = Q_2''(\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_1'' - p''\nabla\nabla) = Q_2''\underset{\sim}{\mathbf{N}}'', \ \underset{\sim}{\mathbf{N}}'' = \underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_1'' - p''\nabla\nabla,\\
&\underset{\sim}{\mathbf{M}}''\cdot\underset{\sim}{\mathbf{N}}'' = \underset{\sim}{\mathbf{N}}''\cdot\underset{\sim}{\mathbf{M}}'' = \underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_1''Q_2'', \ Q_1''Q_2''\mathbf{u} + \underset{\sim}{\mathbf{N}}''\cdot(\rho''\mathbf{F}'') = 0, \ |\underset{\sim}{\mathbf{M}}''| = Q_1''Q_2''^2;
\end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
\{1,5\}: \ \underset{\sim}{\mathbf{L}}=p\underset{\sim}{\mathbf{E}}\Delta+q\nabla\nabla; \ \underset{\sim}{\mathbf{M}}=\underset{\sim}{\mathbf{E}}(p\Delta-\rho\partial_t^2)+q\nabla\nabla=\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_2+q\nabla\nabla, \\
Q_2=p\Delta-\rho\partial_t^2, \ Q_1=Q_2+q\Delta=(p+q)\Delta-\rho\partial_t^2, \ p=\frac{1}{2}\lambda_2, \\
q=\frac{1}{6}(2\lambda_1+\lambda_2), \ \underset{\sim}{\mathbf{M}}_*=Q_2(\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_1-q\nabla\nabla)=Q_2\underset{\sim}{\mathbf{N}}, \ \underset{\sim}{\mathbf{N}}=\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_1-q\nabla\nabla, \\
\underset{\sim}{\mathbf{M}}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{N}}=\underset{\sim}{\mathbf{N}}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{M}}=\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_1Q_2, \ Q_1Q_2\mathbf{u}+\underset{\sim}{\mathbf{N}}\cdot(\rho\mathbf{F})=0, \ |\underset{\sim}{\mathbf{M}}|=Q_1Q_2^2; \\
\{5,1\}: \ \underset{\sim}{\mathbf{L}}'=p'\underset{\sim}{\mathbf{E}}\Delta+q'\nabla\nabla; \ \underset{\sim}{\mathbf{M}}'=\underset{\sim}{\mathbf{E}}(p'\Delta-\rho'\partial_t^2)+q'\nabla\nabla=\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_2'+q'\nabla\nabla, \\
Q_2'=p'\Delta-\rho'\partial_t^2, \ Q_1'=Q_2'+q'\Delta=(p'+q')\Delta-\rho'\partial_t^2, \ p'=\frac{1}{2}\lambda_1, \\
q'=\frac{1}{6}(\lambda_1+2\lambda_6), \ \underset{\sim}{\mathbf{M}}_*'=Q_2'(\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_1'-q'\nabla\nabla)=Q_2'\underset{\sim}{\mathbf{N}}', \ \underset{\sim}{\mathbf{N}}'=\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_1'-q'\nabla\nabla, \\
\underset{\sim}{\mathbf{M}}'\cdot\underset{\sim}{\mathbf{N}}'=\underset{\sim}{\mathbf{N}}'\cdot\underset{\sim}{\mathbf{M}}'=\underset{\sim}{\mathbf{E}}Q_1'Q_2', \ Q_1'Q_2'\mathbf{u}+\underset{\sim}{\mathbf{N}}'\cdot(\rho'\mathbf{F})=0, \ |\underset{\sim}{\mathbf{M}}'|=Q_1'Q_2'^2.
\end{gathered}
\tag{49}
$$

Here Q_1^*, Q_1, Q_1' и Q_2^*, Q_2, Q_2' are wave operators of longitudinal and transverse waves, respectively. From the corresponding relations (49), it is seen that the propagation velocities of these waves are expressed in terms of the material density and the eigenvalues of the elastic modulus tensors as follows:

$$
\{6\}: \ v_1''=\sqrt{\frac{2p''}{\rho''}}, \ v_2''=\sqrt{\frac{p''}{\rho''}}; \ \{1,5\}: \ v_1=\sqrt{\frac{p+q}{\rho}}, \ v_2=\sqrt{\frac{p}{\rho}};
$$

$$
\{5,1\}: \ v_1'=\sqrt{\frac{p'+q'}{\rho'}}, \ v_2'=\sqrt{\frac{p'}{\rho'}}.
$$

It should be noted that for the material $\{6\}$ the Poisson's ratio $\nu=0$, for $\{1,5\}$ changes on the interval $0<\nu<1/2$, and for $\{5,1\}$ takes their values from the interval $-1<\nu<0$ [1,6,12,13].

We now consider the eigenvalue problem, for example, for $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$, which is as follows. Find all the vectors $\mathbf{a}$ that satisfy the equation $\underset{\sim}{\mathbf{M}}\cdot\mathbf{a}=\mu\mathbf{a}$, where μ is a scalar operator. The characteristic equation and its solutions have the form

$$
\big(\det(\underset{\sim}{\mathbf{M}}-\mu\underset{\sim}{\mathbf{E}})=0\big)\Leftrightarrow\big(\mu^3-I_1(\underset{\sim}{\mathbf{M}})\mu^2+I_2(\underset{\sim}{\mathbf{M}})\mu-I_3(\underset{\sim}{\mathbf{M}})=0\big);
$$

$$
I_1(\underset{\sim}{\mathbf{M}})=Q_1+2Q_2, \ I_2(\underset{\sim}{\mathbf{M}})=Q_2(2Q_1+Q_2), \ I_3(\underset{\sim}{\mathbf{M}})=Q_1Q_2^2, \ \mu_1=Q_1, \ \mu_2=\mu_3=Q_2.
$$

We see that the wave operators Q_1 and Q_2 are eigenoperators for the tensor-operator $\underset{\sim}{\mathbf{M}}$. In this case, the second wave operator Q_2 is a double root of the characteristic equation. To determine the eigenvectors, we obtain the equations $(\underset{\sim}{\mathbf{E}}\Delta-\nabla\nabla)\cdot\mathbf{a}_1=0, \ \nabla\nabla\cdot\mathbf{a}_2=0$, solutions which are the following eigenvectors: $\mathbf{a}_1=\nabla\varphi, \ \mathbf{a}_2=\nabla\times\boldsymbol{\psi}+1/3A\mathbf{r}$.

9 Quasistatic canonical problem of the micropolar theory of elasticity in displacements and rotations

To reduce the letter, we consider an isotropic material with a center of symmetry. The mechanical properties of such a linear material are characterized by two fourth-rank tensors, each of which in turn is determined by three essential components.

These materials are special cases of materials whose anisotropy symbols consist of three elements and the number of which, according to the classification adopted above, is 28 [1,6], among which the materials $\{1,5,3\}$ and $\{5,1,3\}$ are. The first of them has a positive Poisson's ratio, and the second one has negative Poisson's ratio. Under the canonical problem we mean the problem, in the formulation of which the material tensors are written in the canonical form. We confine ourselves to the isotropic material $\{1,5,3\}$. In this case, the material tensors have the expressions

$$\begin{aligned}\underset{\approx}{\mathbf{A}} &= \frac{1}{3}(\lambda_1-\lambda_2)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)}+\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_7)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)}+\frac{1}{2}(\lambda_2-\lambda_7)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(3)},\\ \underset{\approx}{\mathbf{D}} &= \frac{1}{3}(\mu_1-\mu_2)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)}+\frac{1}{2}(\mu_2+\mu_7)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)}+\frac{1}{2}(\mu_2-\mu_7)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(3)}.\end{aligned} \tag{50}$$

Then, by virtue of (50), it is not difficult to obtain equations analogous to (33), from which in the case of a quasistatic we have

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{1}{12}(\lambda_1+2\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_7)(\mu_2+\mu_7)\Delta^3-\frac{1}{3}\lambda_2\lambda_7(\lambda_1+2\lambda_2)\Delta^2\Big]\mathbf{u}+\mathbf{S}^*=0,\\ &\Big\{\frac{1}{12}(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+\mu_7)(\lambda_2+\lambda_7)\Delta^3-\lambda_7\Big[\frac{1}{3}\lambda_2(\mu_1+2\mu_2)+\\ &+\frac{1}{2}(\mu_2+\mu_7)(\lambda_2+\lambda_7)\Big]\Delta^2+2\lambda_2\lambda_7^2\Delta\Big\}\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{H}^*=0,\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{S}^*=\lambda_7Q_1^*(\underset{\approx}{\mathbf{C}}\cdot\nabla)\cdot(\rho\mathbf{m})+[\underset{\approx}{\mathbf{E}}Q_1^*Q_4^*-(dQ_4^*-\lambda_7^2)\nabla\nabla]\cdot(\rho\mathbf{F}),\quad Q_1^*=(b+d)\Delta,\\ &\mathbf{H}^*=\lambda_7Q_3^*(\underset{\approx}{\mathbf{C}}\cdot\nabla)\cdot(\rho\mathbf{F})+[\underset{\approx}{\mathbf{E}}Q_2^*Q_3^*-(mQ_2^*-\lambda_7^2)\nabla\nabla]\cdot(\rho\mathbf{m}),\quad Q_4^*=g\Delta-l,\\ &Q_2^*=b\Delta,\quad Q_3^*=(g+m)\Delta-l,\quad d=\frac{1}{6}(2\lambda_1+\lambda_2)-\frac{1}{2}\lambda_7,\ \ l=2\lambda_7,\\ &b=\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_7),\ \ m=\frac{1}{6}(2\mu_1+\mu_2)-\frac{1}{2}\mu_7,\ \ g=\frac{1}{2}(\mu_2+\mu_7).\end{aligned} \tag{52}$$

For $\alpha=0$, that is, in the case of a reduced medium from (51) and (52) we obtain

$$\Delta^2\mathbf{u}+\mathbf{G}=0,\quad \Delta^2\boldsymbol{\varphi}+\mathbf{H}=0, \tag{53}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{G}=\frac{1}{\lambda_2(\lambda_1+2\lambda_2)}[2\underset{\approx}{\mathbf{E}}(\lambda_1+2\lambda_2)\Delta-(2\lambda_1+\lambda_2)\nabla\nabla]\cdot(\rho\mathbf{F});\\ &\mathbf{H}=\frac{1}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+\mu_7)}[2\underset{\approx}{\mathbf{E}}((\mu_1+2\mu_2)\Delta-(2\mu_1+\mu_2-3\mu_7)\nabla\nabla]\cdot(\rho\mathbf{m}),\end{aligned}$$

where the first from the equations (53) is a classical equation, and the second has a similar to him form.

10 The quasistatic canonical problem of the micropolar theory of prismatic bodies of constant thickness in displacements and rotations and in the moments of displacement and rotation vectors

Let's consider a prismatic body of constant thickness $2h$. As the base plane, we take the middle plane. Then in this case $g_M^{\hat{P}}=\delta_M^P$, $g_{\hat{P}}^3=0$, $g^{33}=h^{-2}$ and the

nabla-operator, the Laplacian Δ, $\hat{\Delta}^2$ and $\hat{\Delta}^3$ are represented in the form

$$\begin{aligned}
&\hat{\nabla}\mathbb{F} = (\mathbf{r}^P\partial_P + \mathbf{r}^3\partial_3)\mathbb{F} = (\mathbf{r}^P\partial_P + h^{-1}\mathbf{n}\partial_3)\mathbb{F}, \quad -1 \le x^3 \le 1\\
&\hat{\Delta}\mathbb{F} = \hat{\nabla}^2\mathbb{F} = (g^{PQ}\nabla_P\nabla_Q + g^{33}\partial_3^2)\mathbb{F} = (\bar{\Delta} + h^{-2}\partial_3^2)\mathbb{F}, \quad \bar{\Delta} = g^{PQ}\nabla_P\nabla_Q,\\
&\hat{\Delta}^2 = \bar{\Delta}^2 + 2h^{-2}\bar{\Delta}\partial_3^2 + h^{-4}\partial_3^4, \quad \hat{\Delta}^3 = \bar{\Delta}^3 + 3h^{-2}\bar{\Delta}^2\partial_3^2 + 3h^{-4}\bar{\Delta}\partial_3^4 + h^{-6}\partial_3^6.
\end{aligned} \tag{54}$$

By the corresponding formulas (54), the equations (51) for the theory of prismatic bodies of constant thickness in displacements and rotations can be written as

$$\begin{aligned}
&[\bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2 + \frac{1}{h^2}(3\bar{\Delta}+2A)\bar{\Delta}\partial_3^2 + \frac{1}{h^4}(3\bar{\Delta}+A)\partial_3^4 + \frac{1}{h^6}\partial_3^6]\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{S}}^{**} = 0,\\
&[\bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta}+A)\bar{\Delta} + \frac{1}{h^2}[(3\bar{\Delta}+2B)\bar{\Delta}+C]\partial_3^2 + \frac{1}{h^4}(3\bar{\Delta}+B)\partial_3^4 + \frac{1}{h^6}\partial_3^6]\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \hat{\mathbf{H}}^{**} = 0;
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\hat{\mathbf{S}}^{**} = \frac{12\hat{\mathbf{S}}^{*}}{(\lambda_1+2\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_7)(\mu_2+\mu_7)}, \quad \hat{\mathbf{H}}^{**} = \frac{12\hat{\mathbf{H}}^{*}}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+\mu_7)(\lambda_2+\lambda_7)},$$

$$A = -\frac{4\lambda_2\lambda_7}{(\lambda_2+\lambda_7)(\mu_2+\mu_7)}, \quad C = \frac{24\lambda_2\lambda_7^2}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+\mu_7)(\lambda_2+\lambda_7))},$$

$$B = -\frac{2\lambda_7[2\lambda_2(\mu_1+2\mu_2)+3(\lambda_2+\lambda_7)(\mu_2+\mu_7)]}{(\mu_1+2\mu_2)(\mu_2+\mu_7)(\lambda_2+\lambda_7)}.$$

Applying the kth moment operator of some system of orthogonal polynomials (Legendre, Tchebyshev) to the equations (55), we find the following equations for the micropolar theory of prismatic bodies of constant thickness in the moments of the displacement and rotation vectors:

$$\begin{aligned}
&[\bar{\Delta}^3 + (B\bar{\Delta}+A)\bar{\Delta}]\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{h^2}[(3\bar{\Delta}+2B)\bar{\Delta}+C]\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}{}'' + \frac{1}{h^4}(3\bar{\Delta}+B)\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}{}^{IV} + \frac{1}{h^6}\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}{}^{VI} + \overset{(k)}{\mathbf{H}}{}^{**} = 0,\\
&[\bar{\Delta}^3 + A\bar{\Delta}^2]\overset{(k)}{\mathbf{u}} + \frac{1}{h^2}(3\bar{\Delta}+2A)\bar{\Delta}\overset{(k)}{\mathbf{u}}{}'' + \frac{1}{h^4}(3\bar{\Delta}+A)\overset{(k)}{\mathbf{u}}{}^{IV} + \frac{1}{h^6}\overset{(k)}{\mathbf{u}}{}^{VI} + \overset{(k)}{\mathbf{S}}{}^{**} = 0, \ k \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned} \tag{56}$$

Having the equations (56), by the formula (44) it is easy to obtain systems of equations of any approximation in moments with respect to the system of Legendre polynomials. We note that the equations of the fifth (in the classical case) and the 8th (in the micropolar case) approximations in moments were obtained in the papers [4, 5, 10] for isotropic material in the traditional form, as well as the similarly to (51), (53), (55) and (56) equations in the traditional form are given in [4, 5, 10]. Equations in moments for thin bodies with two small dimensions and thin multilayered structures are also given there.

Adding the corresponding canonical boundary conditions to the equations (56), we obtain a canonical statement of quasistatic boundary value problems for prismatic bodies. In order to shorten the letter, we shall not dwell on this in this paper, but refer to the interested reader in the papers [4, 5], in which the formulations of boundary-value problems in the traditional form are given in detail, and they easily extend to canonical statements.

It should be noted that for the theory of thin bodies, the split equations at equilibrium, depending on the order of approximation, are equations of elliptical type of high order [4, 5, 10] and using the I.N. Vekua method [14], for them it is possible to write out analytical solutions.

Conclusion

The statement of the eigenvalue problem for TBM of any order and any even rank is formulated, and also particular cases are considered. The canonical form the specific deformation energy and the CR are written. The equations of motion of a micropolar arbitrarily anisotropic medium and the boundary conditions are obtained by means of the introduced TBM operators. The formulations of initial-boundary value problems in terms of the introduced TBM operators for an arbitrary anisotropic medium are given. In particular, the initial-boundary value problems of the micropolar (classical) theory of elasticity are presented with the help of the introduced TBM operators (tensors-operators). In the case of an isotropic micropolar elastic medium (isotropic and transversely isotropic classical media) with the constructed TBM operator (tensors-operators) of cofactors to TBM operator (tensors-tensors) of the initial-boundary value problems the initial-boundary value problems are decomposed. The determinant and the cofactor tensor for the sum of six tensors are obtained. From three-dimensional decomposed initial-boundary value problems, the corresponding decomposed initial-boundary value problems for the theories of thin bodies are given.

Acknowledgements: the work was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation (project no. DI-2016-41) and the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–29–10085–мк).

Список литературы

[1] Nikabadze M. U. 2017, Topics on tensor calculus with applications to mechanics *J. Math. Sci.* **225**:1 194 p. DOI: 10.1007/s10958-017-3467-4

[2] Vekua I. N. 1978, *Fundamentals of tensor analysis and covariant theory* (M.: Nauka), 296 p.

[3] *Nikabadze M.U.* 2014, Construction of Eigentensor Columns in the Linear Micropolar Theory of Elasticity *Moscow Univ. Mech. Bull.* **69**, 1, 1–9. DOI: 10.3103/S0027133014010014

[4] Nikabadze M. U. 2014, *Development of the method of orthogonal polynomials in the classical and micropolar mechanics of elastic thin bodies* (M.: Mos. Univ. Press.) 515 p.http://istina.msu.ru/media/publications/book/707/ea1/6738800/Monographiya.pdf

[5] Nikabadze M.U. 2014, The Method of Orthogonal Polynomials in the Classical and Micropolar Mechanics of Elastic Thin Bodies. Diss. Dr. Phys. Math. Sci. (M.: MAI) 384 p. http://istina.msu.ru/media/dissertations/dissertation/659/37c/6738997/dissertatsiya.pdf

[6] Mikhail U. Nikabadze 2016, *Eigenvalue problems of a tensor and a tensor-block matrix (TMB) of any even rank with some applications in mechanics* H. Altenbach and S. Forest (eds.), Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials, Advanced Structured Materials 42 279-317 DOI 10.1007/978-3-319-31721-2_14

[7] Eringen A. C. 1999, *Microcontinuum field theories. 1. Foundation and solids* (N.Y.: Springer-Verlag), 342 p.

[8] Kupradze V. D., Gegelia T. G., Basheleishvili M. O. and Burchuladze T. V. 1976, *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity* (M.: Nauka), 664 p.

[9] Novacky W. 1975, *Theory of elasticity* (M.: Mir), 872 p.

[10] Mikhail U. Nikabadze and Armine R. Ulukhanyan 2016, *Analytical Solutions in the Theory of Thin Bodies* H. Altenbach and S. Forest (eds.), Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials, Advanced Structured Materials 42, 319-361. DOI 10.1007/978 – 3 – 319 – 31721 – 2_15

[11] Rykhlewsky J. 1983, *"CEIIINOSSSTTUV" Mathematical structure of elastic solid1s* Preprint. (M.: Institute for Problems in Mechanics AS USSR) no. 217. 113 p.

[12] Ostrosablin N. I. 1985, *On the classification of anisotropic materials* Dynamic problems of an inelastic medium 71, 82–95.

[13] Ostrosablin N. I. 1986, On the structure of the elastic modulus tensor and the classification of anisotropic materials. *J. appl. mech. and techn. physics* 4, 127–135

[14] Vekua I. N. 1948, *New methods for solving elliptic equations* (M.: OGIZ), 296 p.

The Problem of Eigenvalues of Material Tensor Objectives and Velocities of Wave Propagation

S. Lurie[1,2], H. Matevossian[1,3], M. Nikabadze[4,5], A. Ulukhanyan[5]

[1] FRC "Computer Science and Control RAS, Moscow, Russia

[2] Institute of Applied Mechanics of RAS, Moscow, Russia

[3] Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

[4] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

[5] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

salurie@mail.ru, hmatevossian@graduate.org, nikabadze@mail.ru, armine_msu@mail.ru

Аннотация

It is known that the eigenvalues of the tensor and the tensor-block matrix are invariant quantities. Therefore, in this work, our goal is to find the expression for the velocities of wave propagation of certain media through the eigenvalues of the material tensors. In particular, we consider materials with the anisotropy symbol {1.5} and {5.1}, as well as isotropic materials, and for them we determine the expressions for the velocities of wave propagation.

In addition, we obtained expressions for the velocities of wave propagation for materials of cubic syngony with the anisotropy symbol {1,2,3} (the matrix of the elastic modulus tensor components has three independent components), hexagonal system (transversal isotropy) with anisotropy symbol {1,1,2,2} (the matrix of the elastic modulus tensor components has five independent components), trigonal system with anisotropy symbol {1,1,2,2} (the matrix of the elastic modulus tensor components has six independent components), tetragonal system with anisotropy symbol {1,1,1,2,1} (the matrix of the elastic modulus tensor components has six independent components).

We also obtained the expressions for the velocities of wave propagation for a micro-polar medium with the anisotropy symbol {1.5.3} and {5.1.3}, and for an isotropic micro-polar material.

1 Kinematic and dynamic conditions on the surface of a strong discontinuity in micro-polar mechanics

Consider a moving regular surface in an unbounded space, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$, whose equation in a fixed Cartesian coordinate system is given by

$$\psi(x,t) = 0. \tag{1}$$

The regularity of the equation (1) means the existence of the unit normal vector $\mathbf{n}(x,t)$ at each point of the surface (1) at time t:

$$\mathbf{n}(x,t) = \frac{\nabla_x \psi}{|\nabla_x \psi|}, \quad \nabla_x \psi = \mathbf{k}_i \partial_i \psi, \quad i = 1,2,3,$$

as well as the required number of times continuously differentiable functions ψ of x. For our purpose it is sufficient the existence of the unit normal, i.e. $\psi \subset C^1$. Here

$\mathbf{k}_i$ is an orthonormal basis[1] of the Cartesian coordinate system, and C^1 is the set of continuously differentiable functions.

Definition 1. If the vectors $\mathbf{u}$ and $\boldsymbol{\varphi}$ are continuous when passing through the surface (1), and the first derivatives $\partial_k\mathbf{u}$, $\partial_t\mathbf{u}$, $\partial_k\boldsymbol{\varphi}$, $\partial_t\boldsymbol{\varphi}$ undergo a discontinuity such that on each side of this surface they take different finite values, then the surface (1) is called the surface of a strong discontinuity (or a stress wave and a moment stress).

Definition 2. If the vectors $\mathbf{u}$, $\partial_k\mathbf{u}$, $\partial_t\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\partial_k\boldsymbol{\varphi}$ and $\partial_t\boldsymbol{\varphi}$ are continuous when passing through the surface (1), and the second derivatives of the vectors $\mathbf{u}$ and $\boldsymbol{\varphi}$ with respect to x_k and t undergo a discontinuity such that on each side of this surface they take different finite values, then the surface (1) is called the surface of a weak discontinuity (or an acceleration wave).

We introduce the notation: $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Next, the surface of a strong discontinuity is studied.

As in [16–19], the velocity of moving an arbitrary point of the surface (1) in the direction of the normal of this surface at this point, we denote by c:

$$c = -\frac{1}{|\nabla_x\psi|}\partial_t\psi, \quad \nabla\psi = \mathbf{k}_i\partial_i\psi. \tag{2}$$

If the wavefront (the surface of strong discontinuity) of (1) moves in a medium having a velocity field $\mathbf{v}(x,t)$, then the velocity of the wavefront relative to the particles of the medium will be determined by the formula

$$\theta = c - v_n, \quad v_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}. \tag{3}$$

1.1 Kinematic conditions on the surface of a strong discontinuity

The kinematic conditions on the surface of strong discontinuity can be obtained in the same way as is done, for example, in [16–18] for the classical case. In this case, the difference lies in that instead of a motion vector should be considered two independent vectors $\mathbf{u}(x,t)$, $\boldsymbol{\varphi}(x,t)$, and they have the form

$$c[\partial_i\mathbf{u}] + n_i[\partial_t\mathbf{u}] = 0, \quad c[\partial_i\boldsymbol{\varphi}] + n_i[\partial_t\boldsymbol{\varphi}] = 0, \tag{4}$$

where c is determined by the first formula (2), n_i are the components of the unit normal $\mathbf{n}$ to the wave front. Writing $[\mathbf{w}] = \mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-$, where $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ or $\mathbf{w} = \boldsymbol{\varphi}$, means a jump in the value of $\mathbf{w}$ relative to the wave front, $\mathbf{w}^-$ ($\mathbf{w}^+$) is the limiting value of $\mathbf{w}$ when the arbitrarily chosen point is in front (behind) the wave front to the point at the wave front. The square brackets [] will be called the jump operator.

[1] We use the usual rules of tensor calculus [1–6]. We mainly preserve the notation and conventions of the previous works, capital Latin indices assume the values 1, 2. Over repeated indices there is a summation.

1.2 Laws of conservation of mass and the tensor of moments of inertia at the wave front

Applying the law of conservation of mass and the law of the tensor of moments of inertia

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV = 0, \quad \frac{d}{dt}\int\limits_V \underset{\sim}{\mathbf{J}} dV = 0,$$

where ρ is a material density, and $\underset{\sim}{\mathbf{J}}$ is the density of the inertia tensor (a special dynamic characteristic of the medium) of the particles of the medium [11–13], to the elementary cylinder isolated in the medium. After simple transformations analogous to the classical case [16–18], we obtain the required laws

$$[\theta\rho] = 0, \quad [\theta\underset{\sim}{\mathbf{J}}] = 0, \tag{5}$$

where θ is defined in (3).

1.3 Dynamic conditions on the wave front

Dynamic conditions on the wave front can be easily obtained with the help of the law on the change of momentum and of the theorem on the change in the angular momentum of the internal rotational motions of the particles of the medium, which are defined as follows:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\mathbf{v}dV = \int\limits_V \rho\mathbf{F}dV + \int\limits_\Sigma \mathbf{P}_{(n)}d\Sigma, \\ &\frac{d}{dt}\int\limits_V \underset{\sim}{\mathbf{J}}\cdot\boldsymbol{\omega}dV = \int\limits_V (\rho\mathbf{m} + \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}})dV + \int\limits_\Sigma \boldsymbol{\mu}_{(n)}d\Sigma, \end{aligned} \tag{6}$$

where $\mathbf{F}$ is is the mass force, $\mathbf{m}$ is the mass moment, $\mathbf{P}_{(n)}$ and $\boldsymbol{\mu}_{(n)}$are the voltage and moment stress vectors on the area with a unit vector of the normal $\mathbf{n}$ respectively, V is the volume of the body, Σ is the boundary of the body, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$, where the dot over the letter indicates the time derivative. Like the classical case [16–18], we apply (6) to the above-mentioned cylinder and, taking into account (5), we obtain the conditions

$$\rho\theta[\mathbf{v}] = -[\mathbf{P}_{(n)}] = -\mathbf{n}\cdot[\underset{\sim}{\mathbf{P}}], \quad \theta\underset{\sim}{\mathbf{J}}\cdot[\boldsymbol{\omega}] = -[\boldsymbol{\mu}_{(n)}] = -\mathbf{n}\cdot[\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}], \tag{7}$$

where $\rho\theta = \rho^-\theta^- = \rho^+\theta^+, \quad \theta\underset{\sim}{\mathbf{J}} = \theta^-\underset{\sim}{\mathbf{J}}^- = \theta^+\underset{\sim}{\mathbf{J}}^+$.

We note that the relations (7), in which the Cauchy formulas are taken into account $\mathbf{P}_{(n)} = \mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ and $\boldsymbol{\mu}_{(n)} = \mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}$, they are also valid for any medium. We note that the conditions (7) and their analogs for different media are derived in [12].

2 Determination of wave propagation velocities in an infinite micro-polar solid

Having kinetic (4) and dynamic (7) conditions on the front of the wave, it is easy to find an equation for determining the propagation velocities of waves in any infinite

micro–polar medium, including in an infinite micro-polar solid. Consider a micro-polar solid body, the defining relations of which are represented in the form (see, [8,15,20])

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\mathbf{P}} &= \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \nabla\mathbf{u} + \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \nabla\boldsymbol{\varphi} - \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\mathbf{b}}\vartheta, \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} &= \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \nabla\mathbf{u} + \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \nabla\boldsymbol{\varphi} - \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}\vartheta, \end{aligned} \tag{8}$$

where $\underset{\sim}{\mathbf{b}} = \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{a}} + \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{d}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{a}} + \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{d}}$. Here $\overset{2}{\otimes}$ is an inner 2-product, $\underset{\approx}{\mathbf{C}} = \underset{\approx}{\mathbf{B}}^T$, $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ are the material tensors (tensors of the elastic moduli) of the 4th rank, $\vartheta = T - T_0$ is the temperature drop, $\underset{\sim}{\mathbf{b}}$ and $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}$ are the tensors of thermomechanical properties, and T in the upper corner of the tensor means the sign of transposition.

It is known [12, 13], that $\underset{\approx}{\mathbf{B}}$ is an asymmetric tensor, as mentioned above. In particular, in [14] it is proved that $\underset{\approx}{\mathbf{B}}$ is a symmetric tensor, and $\underset{\approx}{\mathbf{C}} = \underset{\approx}{\mathbf{B}}$. Here we derive these relations when $\underset{\approx}{\mathbf{C}} = \underset{\approx}{\mathbf{B}}^T$, since it is easy to obtain from them the corresponding relations for the case $\underset{\approx}{\mathbf{C}} = \underset{\approx}{\mathbf{B}}$.

Next, for simplicity, let us consider isothermal processes, i.e. we assume that $\vartheta = 0$. Then assuming that the material tensors do not undergo a discontinuity when passing through the front of the wave and applying the jump operator to (8), we have

$$[\underset{\sim}{\mathbf{P}}] = \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} [\nabla\mathbf{u}] + \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} [\nabla\boldsymbol{\varphi}], \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}] = \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} [\nabla\mathbf{u}] + \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} [\nabla\boldsymbol{\varphi}]. \tag{9}$$

Multiplying (4) by $\mathbf{k}_i$ with subsequent summation over i (hereinafter, we omit the index x of the operator ∇_x), we obtain

$$[\nabla\mathbf{u}] = -\frac{1}{c}\mathbf{n}[\mathbf{v}], \quad [\nabla\boldsymbol{\varphi}] = -\frac{1}{c}\mathbf{n}[\boldsymbol{\omega}]. \tag{10}$$

From (9) taking into account (10) we find

$$[\underset{\sim}{\mathbf{P}}] = -\frac{1}{c}(\underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{n}[\mathbf{v}] + \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{n}[\boldsymbol{\omega}]), \quad [\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}] = -\frac{1}{c}(\underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{n}[\mathbf{v}] + \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{n}[\boldsymbol{\omega}]),$$

with the help of which from the dynamic conditions (7) we arrive at the relations

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{n}\underset{\approx}{\mathbf{E}}) \cdot [\mathbf{v}] + (\mathbf{n} \cdot \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{n}\underset{\approx}{\mathbf{E}}) \cdot [\boldsymbol{\omega}] &= c\rho\theta\underset{\sim}{\mathbf{E}} \cdot [\mathbf{v}], \\ (\mathbf{n} \cdot \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{n}\underset{\approx}{\mathbf{E}}) \cdot [\mathbf{v}] + (\mathbf{n} \cdot \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{n}\underset{\approx}{\mathbf{E}}) \cdot [\boldsymbol{\omega}] &= c\theta\underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot [\boldsymbol{\omega}], \end{aligned} \tag{11}$$

where $\underset{\approx}{\mathbf{E}}$ is the unit tensor of the second rank.

We note that, in view of the laws of conservation of mass and the tensor of moments of inertia, (5), the expressions $\rho\theta$ and $\theta\underset{\sim}{\mathbf{J}}$ in (11) can be replaced by $\rho^+\theta^+$ and $\theta^+\underset{\sim}{\mathbf{J}}^+$ respectively, since in front of the wave front ρ^+ and $\underset{\sim}{\mathbf{J}}^+$, and also v_n^+ can be considered known, but to simplify the recording we will not do this.

We introduce the notation

$$\begin{aligned} &\underset{\approx}{\mathbf{A}} = (1/\rho)\mathbf{n} \cdot \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{n}\underset{\approx}{\mathbf{E}}, \ \underset{\approx}{\mathbf{B}} = (1/\rho)\mathbf{n} \cdot \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{n}\underset{\approx}{\mathbf{E}}, \\ &\underset{\approx}{\mathbf{C}} = \underset{\sim}{\mathbf{J}}^{-1} \cdot (\mathbf{n} \cdot \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{n}\underset{\approx}{\mathbf{E}}), \ \underset{\approx}{\mathbf{D}} = \underset{\sim}{\mathbf{J}}^{-1} \cdot (\mathbf{n} \cdot \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \mathbf{n}\underset{\approx}{\mathbf{E}}), \end{aligned} \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} \underset{\approx}{\mathbf{A}} & \underset{\approx}{\mathbf{B}} \\ \underset{\approx}{\mathbf{C}} & \underset{\approx}{\mathbf{D}} \end{pmatrix}, \ [\mathbb{V}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{v}] \\ [\boldsymbol{\omega}] \end{pmatrix}, \tag{12}$$

where $\underset{\sim}{\mathbb{M}}$ is called the tensor-block matrix (TBM), $\mathbb{V}$ is a vector column of vectors of linear and angular velocities, and $[\mathbb{V}]$ is the jump of this vector column, (11) can be represented in the form

$$\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{A}} & \underset{\sim}{\mathbf{B}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{C}} & \underset{\sim}{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\mathbf{v}] \\ [\boldsymbol{\omega}] \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} [\mathbf{v}] \\ [\boldsymbol{\omega}] \end{pmatrix}, \quad \lambda = c\theta \tag{13}$$

or, in short,

$$\underset{\sim}{\mathbb{M}} \cdot [\mathbb{V}] = \lambda [\mathbb{V}]. \tag{14}$$

The equality (14) (see also (13)) represents a homogeneous system of six algebraic equations with respect to six unknowns (two vectors $[\mathbf{v}]$ and $[\boldsymbol{\omega}]$ having a nontrivial solution). In order for this system to have a nontrivial solution it is necessary and sufficient that its determinant be zero. Since the determinant is of the 6th order, and $\theta^+ = c - v_n^+$, then from the equality to zero of this determinant we obtain an algebraic equation of degree 6 with respect to c^2, which is the desired dispersion equation for determining the velocities of waves in an infinite anisotropic micro-polar body and their number in a given direction.

So, we got the eigenvalue problem in the form of (14) for TBM. Obviously, $\lambda = c\theta$ is an eigenvalue, and $[\mathbb{V}]$ is its corresponding jump of the vector column. By virtue of (14) the dispersion equation (the characteristic equation for $\underset{\sim}{\mathbb{M}}$) can be written in the form

$$\det(\underset{\sim}{\mathbb{M}} - \lambda \mathbb{E}) = 0, \tag{15}$$

where $\mathbb{E}$ is a unit TBM of the 2nd rank. In the expanded form, the equation (15) can be written as follows:

$$\begin{aligned} &\lambda^6 - I_1(\underset{\sim}{\mathbb{M}})\lambda^5 + I_2(\underset{\sim}{\mathbb{M}})\lambda^4 - I_3(\underset{\sim}{\mathbb{M}})\lambda^3 + I_4(\underset{\sim}{\mathbb{M}})\lambda^2 - I_5(\underset{\sim}{\mathbb{M}})\lambda + I_6(\underset{\sim}{\mathbb{M}}) = 0, \\ &I_6(\underset{\sim}{\mathbb{M}}) = \det(\underset{\sim}{\mathbb{M}}). \end{aligned} \tag{16}$$

It is seen that the dispersion equation (16) is an algebraic equation of the 6th degree and must have six roots (eigenvalues), counting each root as many times as its multiplicity. Each multiple root determines the square of the velocity of one wave. Hence, in an arbitrary anisotropic infinite micropolar medium, in the general case, no more than six waves can arise in each direction. Note that, based on the dispersion equation of the form (16), it is easy to establish the number of waves arising in a micropolar elastic medium for different anisotropy. So, it is sufficient to find the invariants of the TBM that appear in (16), and then solve the equation itself (16). Invariants are easily found through the first invariants of powers $\underset{\sim}{\mathbb{M}}$. We have ([4, 5, 7, 9, 10])

$$S_k = I_k(\underset{\sim}{\mathbb{M}}) = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & \cdots & s_1 & k \\ s_k & s_{k-1} & \cdots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1,6}, \tag{17}$$

$$S_k = I_k(\underset{\sim}{\mathbb{M}}), \quad s_k = I_1(\underset{\sim}{\mathbb{M}}^k), \quad k = \overline{1,6}, \quad \underset{\sim}{\mathbb{M}}^k = \overbrace{\underset{\sim}{\mathbb{M}} \cdot \underset{\sim}{\mathbb{M}} \cdot \ldots \cdot \underset{\sim}{\mathbb{M}}}^{k},$$

where $I_k(\underset{\sim}{\mathbb{M}})$, $k=\overline{1,6}$, denote the invariants of TBM $\underset{\sim}{\mathbb{M}}$. In this case, the inverse relations to (17) are represented in the form

$$s_k = I_1(\underset{\sim}{\mathbb{M}}^k) = \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2S_2 & S_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kS_k & S_{k-1} & S_{k-2} & \cdots & S_1 \end{vmatrix}, \quad k=\overline{1,6}.$$

If the material has a center of symmetry, then $\underset{\sim}{\mathbf{B}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}}^T = 0$. Then $\underset{\sim}{\mathbf{B}} = 0$ and $\underset{\sim}{\mathbf{C}} = 0$, and the TBM $\underset{\sim}{\mathbb{M}}$ becomes a diagonal TBM. For such a matrix, the characteristic equation and eigenvalues (wave velocities) are easily found. We have

$$\det(\underset{\sim}{\mathbb{M}}-\lambda\underset{\sim}{\mathbb{E}}) = \det\begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{A}}-\lambda\underset{\sim}{\mathbf{E}} & \underset{\sim}{\mathbf{0}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{0}} & \underset{\sim}{\mathbf{D}}-\lambda\underset{\sim}{\mathbf{E}} \end{pmatrix} = \det(\underset{\sim}{\mathbf{A}}-\lambda\underset{\sim}{\mathbf{E}})\det(\underset{\sim}{\mathbf{D}}-\lambda\underset{\sim}{\mathbf{E}}) = 0, \qquad (18)$$

where $\underset{\sim}{\mathbf{0}}$ is the zero tensor of rank 2. The equation (18) is equivalent to the following equations:

$$\lambda^3-I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}})\lambda^2+I_2(\underset{\sim}{\mathbf{A}})\lambda-I_3(\underset{\sim}{\mathbf{A}}) = 0, \;\; \lambda^3-I_1(\underset{\sim}{\mathbf{D}})\lambda^2+I_2(\underset{\sim}{\mathbf{D}})\lambda-I_3(\underset{\sim}{\mathbf{D}}) = 0. \qquad (19)$$

So, if the material has a center of symmetry, then in this case to determine the wave velocities we have two cubic equations (19), which are easily solved. Based on (19) we can conclude that in an arbitrary anisotropic micro–polar elastic medium with a center of symmetry, no more than six waves appear in each direction.

We note that in the case of a classical medium, we have one cubic equation analogous to the first of the equations (19) provided that $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ is determined using the first relation (12), where $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ is the elastic modulus tensor. Consequently, in an arbitrary anisotropic classical elastic medium, no more than three waves appear in each direction. Note also that in the case of a micro-polar medium, it is reasonable to call $\underset{\sim}{\mathbb{M}}$ the dispersion TBM, in the case of the classical medium $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ is the dispersion tensor, since their characteristic equations are the dispersion equations.

Having the dispersion equations derived above for the micro-polar (classical) medium, we can find the propagation velocities of the waves in the media under consideration for any anisotropy. Of course, the required velocities can be found both in the traditional representation of material objects (TBM, tensors of elastic moduli) and with the help of their eigenvalues, solving in advance the eigenvalue problems of the corresponding object in the case under consideration. The eigenvalue problems for the tensor and TBM of any even rank are solved in the papers [4,5,7,9] in which the notion of the anisotropy (structure) symbol of the material is introduced and the classifications of micro–polar and classical media are given.

Therefore, for each material included in these classifications, on the basis of the corresponding dispersion equation obtained for the micro-polar (classical) medium, one can obtain a dispersion equation for the considered micro-polar (classical) medium, and then determine the number of waves and their propagation velocity.

Definition 3. The symbol $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, where k is the number of different eigenvalues of the TBM (tensor), and α_i is the multiplicity of the eigenvalue λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, is called the symbol of the anisotropy (structure) of the TBM (tensor).

Note that the anisotropy symbol is defined for the TBM (tensor) of even rank. In this case, the symbol of the anisotropy of the material TBM (material tensor) is called also the symbol of anisotropy of the material.

Next, we consider some particular cases of materials and find the propagation velocities of the waves in them using the eigenvalues of the corresponding tensor objects.

3 Classical materials with anisotropy symbols {1,5} and {5,1}

For materials with anisotropy symbols $\{1,5\}$ and $\{5,1\}$ the elastic modulus tensor is represented in the form

$$\underset{\approx}{\mathbf{A}} = (\lambda_1 - \lambda_2)\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1 + \lambda_2\underset{\approx}{\mathbf{E}}, \quad \underset{\approx}{\mathbf{B}} = \mu_1\underset{\approx}{\mathbf{E}} - (\mu_1 - \mu_6)\underset{\sim}{\mathbf{b}}_6\underset{\sim}{\mathbf{b}}_6. \tag{20}$$

Here $\underset{\approx}{\mathbf{E}} = \sum_{k=1}^{6}\underset{\sim}{\mathbf{a}}_k\underset{\sim}{\mathbf{a}}_k = \sum_{k=1}^{6}\underset{\sim}{\mathbf{b}}_k\underset{\sim}{\mathbf{b}}_k = (1/2)(\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)} + \underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(3)})$is the unit tensor of rank 4, $\underset{\sim}{\mathbf{a}}_k$ and $\underset{\sim}{\mathbf{b}}_k$, $k = \overline{1,6}$, are complete orthonormal systems of proper tensors for tensors $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ and $\underset{\approx}{\mathbf{B}}$ respectively, $\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)}$ and $\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(3)}$ are isotropic tensors of rank 4, λ_1, λ_2 and μ_1, μ_6 are eigenvalues, $\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1 = \underset{\sim}{\mathbf{a}}_1^T$ and $\underset{\sim}{\mathbf{b}}_6 = \underset{\sim}{\mathbf{b}}_6^T$ are proper tensors corresponding to eigenvalues λ_1 and μ_6 respectively.

Since $\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1$ ($\underset{\sim}{\mathbf{b}}_6$) is a symmetric tensor satisfying the orthonormality condition $\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1 = 1$ ($\underset{\sim}{\mathbf{b}}_6\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbf{b}}_6 = 1$),then in a basis constructed using a basis of an arbitrary coordinate system, it is characterized by five components, and in the main basis for $\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1$ ($\underset{\sim}{\mathbf{b}}_6$) - two components. Hence, the tensor $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ ($\underset{\approx}{\mathbf{B}}$) in a basis formed by using a basis to an arbitrary coordinate system is characterized by seven parameters: two eigenvalues and five components of the tensor $\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1$ ($\underset{\sim}{\mathbf{b}}_6$), and in the basis formed by means of the canonical basis for $\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1$ ($\underset{\sim}{\mathbf{b}}_6$), four parameters: two eigenvalues and two components of the tensor $\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1$ ($\underset{\sim}{\mathbf{b}}_6$).

Proposition. Let $\underset{\sim}{\mathbf{a}} = \underset{\sim}{\mathbf{a}}^T$. Then $\underset{\sim}{\mathbf{a}}\underset{\sim}{\mathbf{a}}$ is an isotropic tensor of rank 4 if and only if $\underset{\sim}{\mathbf{a}}$ is a spherical tensor. In this case, if $\underset{\sim}{\mathbf{a}}\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbf{a}} = 1$, then $\underset{\sim}{\mathbf{a}} = [(\pm\sqrt{3})/3]\underset{\approx}{\mathbf{E}}$, and $\underset{\sim}{\mathbf{a}}\underset{\sim}{\mathbf{a}} = (1/3)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)}$.

Here $\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)} = \underset{\approx}{\mathbf{E}}\underset{\approx}{\mathbf{E}}$ is the first of three isotropic tensors of rank 4. From this statement it follows that the tensors $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ and $\underset{\approx}{\mathbf{B}}$ of (20) will be traditionally isotropic if and only if, when $\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1 = \underset{\sim}{\mathbf{b}}_6\underset{\sim}{\mathbf{b}}_6 = (1/3)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)}$. In this case, they can be written in the form

$$\underset{\approx}{\mathbf{A}} = (1/3)(\lambda_1 - \lambda_2)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)} + \lambda_2\underset{\approx}{\mathbf{E}} = \lambda\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)} + 2\mu\underset{\approx}{\mathbf{E}}, \quad \underset{\approx}{\mathbf{B}} = \mu_1\underset{\approx}{\mathbf{E}} - (1/3)(\mu_1 - \mu_6)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)}. \tag{21}$$

We note that an isotropic material whose properties are characterized by the tensor $\underset{\approx}{\mathbf{A}}(\underset{\approx}{\mathbf{B}})$ has a positive (negative) Poisson's ratio [4,5,9]. In addition, the tensor $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ of (21) is presented in the traditional form (by the Lamé coefficients $\lambda = 1/3(\lambda_1 - \lambda_2)$, $\mu = 1/2\lambda_2$).

It is easy to see that as tensors $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ and $\underset{\approx}{\mathbf{B}}$ of (20), and the corresponding dispersion tensors $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$ have the same structure and are represented as

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}\cdot\underset{\approx}{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{n} = a(\underset{\approx}{\mathbf{E}} + \mathbf{nn}) + b\underset{\sim}{\mathbf{u}}, \quad \underset{\sim}{\mathbf{B}} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}\cdot\underset{\approx}{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{n} = f(\underset{\approx}{\mathbf{E}} + \mathbf{nn}) + g\underset{\sim}{\mathbf{v}}, \tag{22}$$

$$a=\lambda_2/(2\rho)=\mu/\rho>0,\quad b=(\lambda_1-\lambda_2)/\rho=(3\lambda)/\rho>0,\quad \underset{\sim}{\mathbf{u}}=\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1,$$
$$f=\mu_1/(2\rho)>0,\quad g=(\mu_6-\mu_1)/\rho<0,\quad \underset{\sim}{\mathbf{v}}=\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{b}}_1\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{b}}_1. \tag{23}$$

Assuming in (22) $\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1=\underset{\sim}{\mathbf{b}}_6=(\pm\sqrt{3}/3)\underset{\sim}{\mathbf{E}}$, we obtain the dispersion tensors $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$, corresponding to isotropic tensors (21),

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}}=a\underset{\sim}{\mathbf{E}}+b_1\mathbf{nn},\quad \underset{\sim}{\mathbf{B}}=f\underset{\sim}{\mathbf{E}}+g_1\mathbf{nn}, \tag{24}$$

$$a=\frac{\lambda_2}{2\rho}=\frac{\mu}{\rho}>0,\ \ b_1=\frac{2\lambda_1+\lambda_2}{6\rho}=\frac{\lambda+\mu}{\rho}>0,\ \ \underset{\sim}{\mathbf{u}}=\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1,$$
$$f=\mu_1/(2\rho)>0,\quad g_1=(\mu_1+2\mu_6)/(6\rho)>0,\quad \underset{\sim}{\mathbf{v}}=\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{b}}_1\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{b}}_1. \tag{25}$$

Obviously, the tensors (24), which are special cases of tensors (22), similarly to the latter have the same structure. In this regard, below we will consider the first tensor (22), and for the rest of tensors (22) and (24) we will obtain the corresponding relations by an appropriate renaming of the coefficients and tensors.

So, we find the propagation velocities of the waves in the material {1,5} whose dispersion tensor has the form (22), and the characteristic equation is represented as the first equation (19). To do this, we first find $I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}^k)$, $k=1,2,3$, and then using the formula (17), which is true for a tensor of the corresponding rank, we find $I_k(\underset{\sim}{\mathbf{A}})$, $k=1,2,3$. After simple calculations, we have

$$I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=4a+bI_1(\underset{\sim}{\mathbf{u}}),\quad I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}^2)=6a^2+2ab[I_1(\underset{\sim}{\mathbf{u}})+I^2]+b^2I_1^2(\underset{\sim}{\mathbf{u}}),$$
$$I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}^3)=10a^3+3a^2b[I_1(\underset{\sim}{\mathbf{u}})+3I^2]+3ab^2I_1(\underset{\sim}{\mathbf{u}})[I_1(\underset{\sim}{\mathbf{u}})+I^2]+b^3I_1^3(\underset{\sim}{\mathbf{u}}),$$
$$I_2(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=5a^2+3abI_1(\underset{\sim}{\mathbf{u}})-abI^2,\quad I_3(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=2a^3+2a^2bI_1(\underset{\sim}{\mathbf{u}})-a^2bI^2, \tag{26}$$
$$I_1(\underset{\sim}{\mathbf{u}})=\mathbf{n}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1^2\cdot\mathbf{n},\ \ I=\underset{\sim}{\mathbf{a}}_1\overset{2}{\otimes}\mathbf{nn}.$$

Further, by virtue of the corresponding invariants (26), constructing the characteristic equation from (19) for the considered tensor $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ and solving it, we obtain the following expressions for the roots:

$$\eta_1=a,\quad \eta_{2,3}=\frac{1}{2}\Big[3a+bI_1(\underset{\sim}{\mathbf{u}})\pm\sqrt{[a-bI_1(\underset{\sim}{\mathbf{u}})]^2+4abI^2}\Big]. \tag{27}$$

Theorem. The dispersion tensor is positive definite; as well as the dispersion TBM is positively determined.

It follows from this theorem that the eigenvalues of the dispersion tensor and the dispersion tensor-block matrix are positive. It is easy to prove that the eigenvalues (27) obtained above are positive. Knowing the roots of the characteristic equation of the tensor $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ (see, (27)), it is easy to find the propagation velocities of waves in an initially resting medium. We have

$$c_1=\sqrt{\eta_1},\quad c_2=\sqrt{\eta_2},\quad c_3=\sqrt{\eta_3}. \tag{28}$$

Thus, in an initially resting medium with the structure symbol {1,5} using the formulas (28), we can find the propagation velocities of the waves in an arbitrary direction. In the general case, their number is not more than three. Note that if the

medium does not rest, then to determine the wave velocities instead of (28) we will have formulas

$$c_1(c_1 - v_n^+) = \eta_1, \quad c_2(c_2 - v_n^+) = \eta_2, \quad c_3(c_3 - v_n^+) = \eta_3. \tag{29}$$

It is seen that each relation from (29) is a square equation with respect to the wave propagation velocity. Solving them we obtain explicit expressions for the propagation velocities of waves in the initially disturbing medium with the structure symbol {1,5}. It can be assumed that the number of waves arising in such a medium in an arbitrary direction will be no more than six, but not less than three. To conduct this study, and similar to the above for $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ (1st eq. of (22)) and for $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$ (2nd eq. of (22)) will not be difficult. Obviously in the latter case, it is sufficient in the above formulas for $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$, as it was said above, to replace a, b, $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{u}}$ by f, g, $\underset{\sim}{\mathbf{B}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{v}}$ respectively. In connection with this simplicity, we will not dwell on these questions.

Next, consider the first dispersion tensor (24), which corresponds to the first tensor (21), characterizing the properties of a traditionally isotropic material and being a particular case of the first tensor (22). It is easy to see that in this case analogous (26) relations are represented in the form

$$\begin{aligned} &I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}) = 3a + b_1, \quad I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}^2) = 2a^2 + (a + b_1)^2, \quad I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}^3) = 2a^3 + (a + b_1)^3, \\ &I_2(\underset{\sim}{\mathbf{A}}) = a(3a + 2b_1), \quad I_3(\underset{\sim}{\mathbf{A}}) = a^2(a + b_1). \end{aligned} \tag{30}$$

Taking into account the invariants corresponding to (30), from the first equation (19) we obtain the characteristic equation for the investigated dispersion tensor $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$. Solving it, we get

$$\eta_1 = \eta_2 = a = \frac{\lambda_2}{2\rho} = \frac{\mu}{\rho}, \quad \eta_3 = a + b_1 = \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{3\rho} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}. \tag{31}$$

The velocities of the propagation of waves in an initially resting infinite isotropic elastic medium by virtue of (31) are determined by formulas

$$c_1 = \sqrt{\eta_1} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{2\rho}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\eta_3} = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{3\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \tag{32}$$

It can be seen that by the formulas (32) the propagation velocities of the waves are expressed both in terms of the eigenvalues and the Lame's parameters. In the case under consideration, writing out the analogous (29) relations and investigating them is not difficult, so, we shall not dwell on this.

From the first tensor (24) we see that any vector perpendicular to $\mathbf{n}$ and located in the tangent plane to the wave surface, is an eigenvector of the dispersion tensor $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$, and that $\mathbf{n}$ is its eigenvector. Consequently, the system of vectors $(\mathbf{s}, \mathbf{l}, \mathbf{n})$, where $\mathbf{s}$ and $\mathbf{l}$ are mutually perpendicular unit tangent vectors to the wave surface, is the complete orthonormal system of eigenvectors of the considered dispersion tensor $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ (1st tensor of (24)). The eigenvectors of the tensor $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ can be found by solving the system of equations corresponding to these vectors, but in the case under consideration there is no such need, since they can be easily guessed. Consequently,

the canonical representation of the dispersion tensor $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ in view of what has been said above, has the form

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} = \eta_1(\mathbf{ss}+\mathbf{ll}) + \eta_3\mathbf{nn} = \eta_1\underset{\sim}{\mathbf{I}} + \eta_3\mathbf{nn}, \quad \underset{\sim}{\mathbf{I}} = \mathbf{ss}+\mathbf{ll}. \tag{33}$$

It is easy to see that by virtue of (32) from (33) for the initially resting medium, we obtain

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} = c_1^2(\mathbf{ss}+\mathbf{ll}) + c_2^2\mathbf{nn} = c_1^2\underset{\sim}{\mathbf{I}} + c_2^2\mathbf{nn} = \mathbf{v}_s\mathbf{v}_s + \mathbf{v}_l\mathbf{v}_l + \mathbf{v}_n\mathbf{v}_n, \tag{34}$$

and we also have

$$\underset{\sim}{\mathbf{V}} = \sqrt{\underset{\sim}{\mathbf{A}}} = c_1(\mathbf{ss}+\mathbf{ll}) + c_2\mathbf{nn} = c_1\underset{\sim}{\mathbf{I}} + c_2\mathbf{nn} = \mathbf{v}_s\mathbf{s} + \mathbf{v}_l\mathbf{l} + \mathbf{v}_n\mathbf{n} = \mathbf{s}\mathbf{v}_s + \mathbf{l}\mathbf{v}_l + \mathbf{n}\mathbf{v}_n, \tag{35}$$

where $\mathbf{v}_s = c_1\mathbf{s}$, $\mathbf{v}_l = c_1\mathbf{l}$ and $\mathbf{v}_n = c_2\mathbf{n}$.

From (33), (34) and (35) it is seen that the tensors $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{V}}$ are represented by the sum of two or three orthogonal tensors. In addition, it is seen from (32) that the eigenvalues of the tensor $\underset{\sim}{\mathbf{V}}$ are the wave propagation velocities, and the eigenvectors coincide with the eigenvectors of the tensor $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$, which is quite natural. In this connection the tensor $\underset{\sim}{\mathbf{V}}$ can be called the velocity tensor. Note that the vector equation for determining the eigen-tensors for $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ (1st eq. (24)) can be written in the form

$$\{(a-\eta)\underset{\sim}{\mathbf{I}} + (b_1+a-\eta)\mathbf{nn}\}\cdot[\mathbf{v}] = 0. \tag{36}$$

Consequently, for an arbitrary motion of the medium, the expression $[\mathbf{v}]$ can be represented in the form

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{v}_\tau] + [\mathbf{v}_n], \quad \mathbf{v}_\tau = v_\tau\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{v}_n = v_n\mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\tau}\perp\mathbf{n}. \tag{37}$$

Taking into account (37), from (36) we have

$$\{(a-\eta)\underset{\sim}{\mathbf{I}}\}\cdot[\mathbf{v}_\tau] + \{(b_1+a-\eta)\mathbf{nn}\}\cdot[\mathbf{v}_n] = 0. \tag{38}$$

Note that the following theorem holds, which can be proved by the kinematic conditions (1st eq. (4)).

Theorem. $\mathrm{rot}\mathbf{u} = \nabla\times\mathbf{u} = 0$ if and only if $[\mathbf{v}]\parallel\mathbf{n}$, and $\mathrm{div}\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{u} = 0$ if and only if $[\mathbf{v}]\perp\mathbf{n}$.

Note also that if $[\mathbf{v}]\parallel\mathbf{n}$ or $[\mathbf{v}]\perp\mathbf{n}$, then the wave is called longitudinal or transverse, respectively.

If now, the motion of the medium is such that $[\mathbf{v}]\parallel\mathbf{n}$ ($[\mathbf{v}]\perp\mathbf{n}$), i.e. $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n = v\mathbf{n}$, ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_\tau = v\boldsymbol{\tau}$), the from (38) we get

$$\{(b_1+a-\eta)\mathbf{nn}\}\cdot[\mathbf{v}_n] = 0 \quad \big(\{(a-\eta)\underset{\sim}{\mathbf{I}}\}\cdot[\mathbf{v}_\tau] = 0\big), \tag{39}$$

and hence it is easy to obtain the propagation velocities of longitudinal (transverse) waves. Above they were written out (32) (see also (29) (31)), therefore, here we will not write them out.

Note that an analogous to the above study can be carried out in a more general case, but for brevity we shall not dwell on this.

Further, before considering the materials of other structures, we note that for a 4th rank tensor we apply the 4-index and 2-index representations ([4,5,7,9])

$$\begin{aligned}
&\underset{\approx}{\mathbf{A}}=A_{ijkl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l=\sum_{m,n=1}^{9}A_{mn}\underset{\sim}{\mathbf{e}}_m\underset{\sim}{\mathbf{e}}_n=A_{mn}\underset{\sim}{\mathbf{e}}_m\underset{\sim}{\mathbf{e}}_n,\ \ i,j,k,l=1,2,3,\ \ m,n=\overline{1,9},\\
&\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij},\ \ i,j=1,2,3;\ \ \underset{\sim}{\mathbf{e}}_s=\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s,\ \ s=1,2,3,\ \ \underset{\sim}{\mathbf{e}}_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2),\\
&\underset{\sim}{\mathbf{e}}_5=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2),\ \ \underset{\sim}{\mathbf{e}}_6=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3),\ \ \underset{\sim}{\mathbf{e}}_7=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2),\\
&\underset{\sim}{\mathbf{e}}_8=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2),\ \ \underset{\sim}{\mathbf{e}}_9=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3),\ \ \underset{\sim}{\mathbf{e}}_m\overset{2}{\otimes}\underset{\sim}{\mathbf{e}}_m=\delta_{mn},\ m,n=\overline{1,9}.
\end{aligned}\tag{40}$$

At the same time, if the components of the tensor $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ have symmetries $A_{ijkl}=A_{klij}=A_{jikl}$, then we have

$$\begin{aligned}
&\underset{\approx}{\mathbf{A}}=A_{ijkl}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l=\sum_{m=1}^{6}\sum_{n=1}^{6}A_{mn}\underset{\sim}{\mathbf{e}}_m\underset{\sim}{\mathbf{e}}_n=A_{mn}\underset{\sim}{\mathbf{e}}_m\underset{\sim}{\mathbf{e}}_n,\\
&i,j,k,l=1,2,3,\ \ m,n=\overline{1,6}.
\end{aligned}\tag{41}$$

Further, the 2-index notation of the 4th rank tensor is mainly applied (see (40), (41)).

4 Classical material with the anisotropy symbol {1,2,3} (cubic symmetry)

In this case we have the following canonical representation of the elastic modulus tensor $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$:

$$\begin{aligned}
&\underset{\approx}{\mathbf{A}}=(\lambda_1-\lambda_4)\underset{\sim}{\mathbf{W}}_1\underset{\sim}{\mathbf{W}}_1+(\lambda_2-\lambda_4)(\underset{\sim}{\mathbf{W}}_2\underset{\sim}{\mathbf{W}}_2+\underset{\sim}{\mathbf{W}}_3\underset{\sim}{\mathbf{W}}_3)+\lambda_4\underset{\approx}{\mathbf{E}}\\
&\Big(\underset{\approx}{\mathbf{E}}=\sum_{m=1}^{6}\underset{\sim}{\mathbf{W}}_m\underset{\sim}{\mathbf{W}}_m\Big),
\end{aligned}\tag{42}$$

where the eigenvalues and proper tensors are represented in the form

$$\begin{aligned}
&\lambda_1=A_{11}+2A_{12},\quad \lambda_2=\lambda_3=A_{11}-A_{12},\quad \lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=A_{44},\\
&\underset{\sim}{\mathbf{W}}_1=\frac{\pm\sqrt{3}}{3}(\underset{\sim}{\mathbf{e}}_1+\underset{\sim}{\mathbf{e}}_2+\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3)=\frac{\pm\sqrt{3}}{3}\underset{\approx}{\mathbf{E}},\quad \underset{\sim}{\mathbf{W}}_2=\frac{\pm\sqrt{2}}{2}(\underset{\sim}{\mathbf{e}}_1-\underset{\sim}{\mathbf{e}}_2),\\
&\underset{\sim}{\mathbf{W}}_3=\frac{\pm\sqrt{6}}{6}(\underset{\sim}{\mathbf{e}}_1+\underset{\sim}{\mathbf{e}}_2-2\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3),\quad \underset{\sim}{\mathbf{W}}_4=\underset{\sim}{\mathbf{e}}_4,\quad \underset{\sim}{\mathbf{W}}_5=\underset{\sim}{\mathbf{e}}_5,\quad \underset{\sim}{\mathbf{W}}_6=\underset{\sim}{\mathbf{e}}_6.
\end{aligned}\tag{43}$$

Taking into account the expressions for the intrinsic tensors (43), from (42) we get

$$\underset{\approx}{\mathbf{A}}=\frac{1}{3}(\lambda_1-\lambda_2)\underset{\approx}{\mathbf{C}}_1+(\lambda_2-\lambda_4)\sum_{k=1}^{3}\underset{\sim}{\mathbf{e}}_k\underset{\sim}{\mathbf{e}}_k+\lambda_4\underset{\approx}{\mathbf{E}},\quad \underset{\approx}{\mathbf{E}}=\frac{1}{2}(\underset{\approx}{\mathbf{C}}_2+\underset{\approx}{\mathbf{C}}_3).\tag{44}$$

By virtue of (43), for the dispersion tensor $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ we have the expression

$$\underset{\approx}{\mathbf{A}}=a\mathbf{n}\mathbf{n}+b\underset{\approx}{\mathbf{E}}+d\sum_{k=1}^{3}n_k^2\underset{\sim}{\mathbf{e}}_k.\tag{45}$$

Based on (45) easy to find $I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}^k)$, $k=1,2,3$, and then using formulas (17), which are also true for $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$, to find $I_k(\underset{\sim}{\mathbf{A}})$, $k=2,3$. In fact, after simple calculations we find

$$I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=a+3b+d,\quad I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}^2)=a(a+2b)+2bd+3b^2+(2ad+d^2)\sum_{k=1}^{3}n_k^4,$$

$$I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}^3)=a(a^2+3ab+3b^2)+3b^2(b+d)+d[3a(a+2b)+3bd]\sum_{k=1}^{3}n_k^4+d^2(3a+d)\sum_{k=1}^{3}n_k^6,$$

$$I_2(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=\frac{1}{2}[6b^2+4ab+2ad+4bd+d^2-d(2a+d]\sum_{k=1}^{3}n_k^4],\ I_3(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=\frac{1}{3!}[6ab^2+3ad^2+$$

$$+3bd^2++6abd+6b^3+6b^2d+d^3-(9ad^2+6abd+3bd^2+3d^3)\sum_{k=1}^{3}n_k^4+$$

$$+(6ad^2+2d^3)\sum_{k=1}^{3}n_k^6].$$

Knowing the invariants $I_k(\underset{\sim}{\mathbf{A}})$, $k=1,2,3$, in view of, for example, the first equation of (19) we make the characteristic equation for the tensor under consideration, which is an algebraic equation of the third degree and always has three positive roots, counting each root as many times as its multiplicity. Thus, in the case under consideration, for any direction, depending on the multiplicity of the roots, one can determine the number of waves and find their propagation velocities. Consider, for example, three mutually perpendicular directions of wave propagation in the medium under consideration, which are determined by the following values of the components of the normal: $n_i=\delta_{i1}$, $n_i=\delta_{i2}$ $n_i=\delta_{i3}$, $i=1,2,3$. Note that for each of these directions the first invariant of the tensor $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ does not depend on the direction $\mathbf{n}$, and the second and third invariants have the same values. In particular,

$$I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=a+3b+d,\quad I_2(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=b^2(2a+3b+2d),\quad I_3(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=b^2(a+b+d).\qquad(46)$$

By (46) the dispersion equation for each of these directions is the same and has roots

$$\mu_1=\frac{\lambda_1+2\lambda_2}{3\rho},\quad \mu_2=\mu_3=\frac{\lambda_4}{2\rho}.\qquad(47)$$

Consequently, in each of these directions, in an infinite medium, in the case of cubic symmetry, two waves arise and on the basis of (47) their velocities are given by formulas

$$c_1=\sqrt{(\lambda_1+2\lambda_2)/(3\rho)},\quad c_2=\sqrt{\lambda_4/(2\rho)}.\qquad(48)$$

5 Classical material with the anisotropy symbol {1,1,2,2} (transversal isotropy)

In this case, the canonical representation of the elastic modulus tensor $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ has the form

$$\underset{\approx}{\mathbf{A}}=\mu_1\underset{\sim}{\mathbf{w}}_1\underset{\sim}{\mathbf{w}}_1+\mu_2\underset{\sim}{\mathbf{w}}_2\underset{\sim}{\mathbf{w}}_2+\mu_3(\underset{\sim}{\mathbf{w}}_3\underset{\sim}{\mathbf{w}}_3+\underset{\sim}{\mathbf{w}}_4\underset{\sim}{\mathbf{w}}_4)+\mu_5(\underset{\sim}{\mathbf{w}}_5\underset{\sim}{\mathbf{w}}_5+\underset{\sim}{\mathbf{w}}_6\underset{\sim}{\mathbf{w}}_6),\qquad(49)$$

where the eigenvalues are given by formulas

$$\mu_1=\frac{1}{2}(A_{11}+A_{12}+A_{33}-\sqrt{(A_{11}+A_{12}-A_{33})^2+8A_{13}^2}),\quad \mu_3=\mu_4=A_{11}-A_{12},$$
$$\mu_2=\frac{1}{2}(A_{11}+A_{12}+A_{33}+\sqrt{(A_{11}+A_{12}-A_{33})^2+8A_{13}^2}),\quad \mu_5=\mu_6=A_{55},$$

and the proper tensors are represented in the form

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{\mathbf{w}}_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha(\underset{\sim}{\mathbf{e}}_1+\underset{\sim}{\mathbf{e}}_2)+\cos\alpha\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\underset{\sim}{\mathbf{I}}+\cos\alpha\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3,\\
&\underset{\sim}{\mathbf{w}}_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha(\underset{\sim}{\mathbf{e}}_1+\underset{\sim}{\mathbf{e}}_2)+\sin\alpha\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\underset{\sim}{\mathbf{I}}+\sin\alpha\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3,\\
&\underset{\sim}{\mathbf{w}}_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(\underset{\sim}{\mathbf{e}}_1-\underset{\sim}{\mathbf{e}}_2),\quad \underset{\sim}{\mathbf{w}}_i=\underset{\sim}{\mathbf{e}}_i,\ \ i=4,5,6,\ \ \mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\sqrt{2}A_{13}}{A_{11}+A_{12}-A_{33}}.
\end{aligned}\tag{50}$$

Note that transversely isotropic materials according to the classification adopted in [4, 5, 9], can be of the following types: {1,1,2,2}, {1,2,1,2}, {1,2,2,1}, {2,1,1,2}, {2,1,2,1}, {2,2,1,1}.

Given (50), the tensor (49) can be written in the form

$$\begin{aligned}
&\underset{\approx}{\mathbf{A}}=a_2\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)}+(a_1-a_2)\underset{\approx}{\mathbf{E}}+a_3(\underset{\sim}{\mathbf{I}}\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3+\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3\underset{\sim}{\mathbf{I}})+a_4\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3+\\
&+\frac{1}{2}a_5(\mathbf{e}_3\underset{\sim}{\mathbf{I}}\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_I\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_I+\mathbf{e}_I\mathbf{e}_3\mathbf{e}_I\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_I\mathbf{e}_3\mathbf{e}_I),
\end{aligned}\tag{51}$$

$$\begin{aligned}
&\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)}=\underset{\approx}{\mathbf{II}},\quad \underset{\approx}{\mathbf{E}}=\frac{1}{2}(\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)}+\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(3)})=\underset{\sim}{\mathbf{e}}_1\underset{\sim}{\mathbf{e}}_1+\underset{\sim}{\mathbf{e}}_2\underset{\sim}{\mathbf{e}}_2+\underset{\sim}{\mathbf{e}}_4\underset{\sim}{\mathbf{e}}_4,\quad \underset{\sim}{\mathbf{I}}=\underset{\sim}{\mathbf{e}}_1+\underset{\sim}{\mathbf{e}}_2,\\
&a_1=\frac{1}{2}(\mu_1\sin^2\alpha+\mu_2\cos^2\alpha+\mu_3),\quad a_2=\frac{1}{2}(\mu_1\sin^2\alpha+\mu_2\cos^2\alpha-\mu_3),\\
&a_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(\mu_2-\mu_1)\sin\alpha\cos\alpha,\quad a_4=\mu_1\cos^2\alpha+\mu_2\sin^2,\quad a_5=\mu_5.
\end{aligned}\tag{52}$$

The dispersion tensor for (51) after simple calculations is written as follows:

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}}=A_1\mathbf{mm}+A_2\underset{\sim}{\mathbf{I}}+A_3(\mathbf{me}_3+\mathbf{e}_3\mathbf{m})+A_4\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3,\tag{53}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{m}=n_I\mathbf{e}_I,\quad A_1=\frac{1}{\rho}(a_1+\frac{1}{2}a_2),\quad A_2=\frac{1}{\rho}(\frac{1}{2}a_2m^2+a_5n_3^2),\\
&A_3=\frac{1}{\rho}(a_3+a_5)n_3,\quad A_4=\frac{1}{\rho}(a_4n_3^2+a_5m^2).
\end{aligned}\tag{54}$$

Then it's easy to find $\underset{\sim}{\mathbf{A}}^2$ and $\underset{\sim}{\mathbf{A}}^3$. By virtue of (53) we have

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{\mathbf{A}}^2=B_1\mathbf{mm}+B_2\underset{\sim}{\mathbf{I}}+B_3(\mathbf{me}_3+\mathbf{e}_3\mathbf{m})+B_4\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3,\\
&\underset{\sim}{\mathbf{A}}^3=C_1\mathbf{mm}+C_2\underset{\sim}{\mathbf{I}}+C_3(\mathbf{me}_3+\mathbf{e}_3\mathbf{m})+C_4\underset{\sim}{\mathbf{e}}_3,
\end{aligned}\tag{55}$$

$$\begin{aligned}
&B_1=A_1^2m^2+2A_1A_2+A_3^2,\quad B_2=A_2^2,\quad B_3=A_1A_3m^2+A_2A_3+A_3A_4,\\
&B_4=A_3^2m^2+A_4^2,\ C_1=A_1^3m^4+(3A_1^2A_2+2A_1A_3^2)m^2+3A_1A_2^2+2A_2A_3^2+A_3^2A_4,\\
&C_3=A_1^2A_3m^4+(2A_1A_2A_3+A_1A_3A_4+A_3^3)m^2+A_2^2A_3+A_2A_3A_4+A_3A_4^2,\\
&C_2=A_2^3,\quad C_4=A_1A_3^2m^4+(2A_3^2A_4+A_2A_3^2)m^2+A_4^3.
\end{aligned}\tag{56}$$

From (53) and (55), we find $I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}^k)$, $k=1,2,3$, and, by virtue of (17) we get $I_m(\underset{\sim}{\mathbf{A}})$, $m=2,3$. We have

$$I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=A_1m^2+2A_2+A_4,\ I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}^2)=B_1m^2+2B_2+B_4,\ I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}}^3)=C_1m^2+2C_2+C_4,$$
$$I_2(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=\frac{1}{2}\{A_1^2m^4+[2A_1(2A_2+A_4)-B_1]m^2+(2A_2+A_4)^2-2B_2-B_4\},$$
$$I_3(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=\frac{1}{3!}\{A_1^3m^6+3[A_1^2(2A_2+A_4)-A_1B_1]m^4+[3A_1(2A_2+A_4)^2-3A_1(2B_2+B_4)-$$
$$-3B_1(2A_2+A_4)+2C_1]m^2+(2A_2+A_4)^3-3(2A_2+A_4)(2B_2+B_4)+2(2C_2+C_4)\}. \tag{57}$$

Knowing $I_m(\underset{\sim}{\mathbf{A}})$, $m=1,2,3$ (see (57)), from the dispersion equation for any direction $\mathbf{n}$ we find the eigenvalues $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$, and then the wave velocities.

Let us find, for example, the wave velocities in the following directions: $n_i=\delta_{i1}$, $n_i=\delta_{i2}$ and $n_i=\delta_{i3}$, $i=1,2,3$. Note that from the expression for $I_m(\underset{\sim}{\mathbf{A}})$, $m=1,2,3$ (see (57)) follows that for directions $n_i=\delta_{i1}$ and $n_i=\delta_{i2}$, $i=1,2,3$, they will accept the same values. In fact, by virtue of the corresponding formulas (54) and (57) for these directions we will have

$$I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=\frac{a_1+a_2}{\rho}+\frac{a_2}{2\rho}+\frac{a_5}{\rho},\ I_2(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=\frac{a_1+a_2}{\rho}\frac{a_2}{2\rho}+\frac{a_1+a_2}{\rho}\frac{a_5}{\rho}+\frac{a_2}{2\rho}\frac{a_5}{\rho},$$
$$I_3(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=\frac{a_1+a_2}{\rho}\frac{a_2}{2\rho}\frac{a_5}{\rho}. \tag{58}$$

From (57) we see that the characteristic equation of the tensor $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ has roots

$$\mu_1=\frac{a_1+a_2}{\rho},\quad \mu_2=\frac{a_2}{2\rho},\quad \mu_3=\frac{a_5}{\rho}. \tag{59}$$

Hence, for the wave velocities in the initially resting medium, we have the following values:

$$c_1=\sqrt{\frac{a_1+a_2}{\rho}},\quad c_2=\sqrt{\frac{a_2}{2\rho}},\quad c_3=\sqrt{\frac{a_5}{\rho}}. \tag{60}$$

For the direction $n_i=\delta_{i3}$, $i=1,2,3$, similar to (58) – (60), the relations have the form

$$I_1(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=\frac{a_4}{\rho}+2\frac{a_5}{\rho},\ I_2(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=2\frac{a_4}{\rho}\frac{a_5}{\rho}+\left(\frac{a_5}{\rho}\right)^2,\ I_3(\underset{\sim}{\mathbf{A}})=\frac{a_4}{\rho}\left(\frac{a_5}{\rho}\right)^2,$$
$$\mu_1=\frac{a_4}{\rho},\quad \mu_2=\mu_3=\frac{a_5}{\rho},\quad c_1=\sqrt{\frac{a_4}{\rho}},\quad c_2=\sqrt{\frac{a_5}{\rho}}.$$

Note that the consideration of the material with the symbol of the structure {1,1,2,2} of the trigonal syngonies (6 essential components) reduces to the previous case.

6 Micro-polar material with a center of symmetry and the anisotropy symbol {1,5,3}

In this case, the properties of the medium are characterized by two tensors of the 4th rank $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ and $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$, which have the same structure. Therefore, it suffices to consider

one of these tensors, since all the relations obtained for one tensor are obtained in a completely analogous way for the other(see (19)). Consider, for example, the tensor $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$. In this case, its canonical representation has the form

$$\underset{\approx}{\mathbf{A}} = (\lambda_1 - \lambda_2)\underline{\mathbf{u}}_1\underline{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2\underset{\approx}{\mathbf{E}} + (\lambda_7 - \lambda_2)\sum_{m=7}^{9}\underline{\mathbf{u}}_m\underline{\mathbf{u}}_m, \quad \underset{\approx}{\mathbf{E}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)} = \sum_{m=1}^{9}\underline{\mathbf{u}}_m\underline{\mathbf{u}}_m. \quad (61)$$

By virtue of (61), it's easy to find $I_1(\underset{\approx}{\mathbf{A}}^k)$, $k = 1, 2, 3$, and then by virtue of (17) get $I_m(\underset{\approx}{\mathbf{A}})$, $m = 2, 3$. Knowing $I_m(\underset{\approx}{\mathbf{A}})$, $m = 1, 2, 3$, we can write the characteristic equation $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ and find its roots, and then determine the desired velocity of the waves. Formulas are cumbersome, but the main thing is that they can be obtained in an explicit form. Note that in the case of the medium {5,1,3} a similar consideration of {1,5,3}. Therefore, in the general case we will not stop. Next we consider the case of a micro-polar isotropic elastic medium with a center of symmetry and the symbol of structure {1,5,3}. In this case, the tensors $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ and $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ have representations

$$\underset{\approx}{\mathbf{A}} = a_1\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)} + a_2\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)} + a_1\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(3)}, \quad \underset{\approx}{\mathbf{D}} = d_1\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(1)} + d_2\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(2)} + d_1\underset{\approx}{\mathbf{C}}_{(3)}, \quad (62)$$

where the coefficients a_i, d_i, $i = 1, 2$, are determined in terms of the eigenvalues of these tensors by the formulas:

$$a_1 = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2), \quad a_2 = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_7), \quad a_3 = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_7),$$
$$d_1 = \frac{1}{3}(\mu_1 - \mu_2), \quad d_2 = \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_7), \quad d_3 = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_7).$$

It is easy to see that in the present case the dispersion tensors $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$, corresponding to tensors $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$ and $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ of (62) respectively have the form

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} = \frac{1}{\rho}[(a_1 + a_3)\mathbf{nn} + a_2\underset{\sim}{\mathbf{E}}, \quad \underset{\sim}{\mathbf{D}} = \frac{1}{J}[(d_1 + d_3)\mathbf{nn} + d_2\underset{\sim}{\mathbf{E}}. \quad (63)$$

From (63) we see that $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ are similar to the tensors considered above from (24). Introducing the notation

$$a = \frac{a_2}{\rho}, \quad b = \frac{a_1 + a_3}{\rho}, \quad f = \frac{d_2}{J}, \quad g = \frac{d_1 + d_3}{J},$$

the tensors (63) can be written as follows:

$$\underset{\sim}{\mathbf{A}} = a\underset{\sim}{\mathbf{E}} + b\mathbf{nn}, \quad \underset{\sim}{\mathbf{D}} = f\underset{\sim}{\mathbf{E}} + g\mathbf{nn}. \quad (64)$$

Then, similarly to (31) and (32), the roots of the dispersion equations of the tensors $\underset{\sim}{\mathbf{A}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{D}}$ and the wave velocities in the initially at rest media are determined by the formulas

$$\eta_1 = \eta_2 = a = \frac{\lambda_2 + \lambda_7}{2\rho}, \quad \eta_3 = a + b = \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{3\rho} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},$$
$$\eta_4 = \eta_5 = f = \frac{\mu_2 + \mu_7}{2\rho}, \quad \eta_6 = f + g = \frac{\mu_1 + 2\mu_2}{3\rho}, \quad (65)$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_2 + \lambda_7}{2\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{3\rho}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\mu_2 + \mu_7}{2\rho}}, \quad c_4 = \sqrt{\frac{\mu_1 + 2\mu_2}{3\rho}}. \quad (66)$$

Thus, in a micro-polar isotropic, infinite, initially resting medium, four waves appear in each direction, the velocities of which are calculated from formulas (66).

Note that to determine the direction of propagation of these waves it is necessary to find a complete system of eigenvectors and give a canonical representation of the dispersion tensors. Then, carry out the investigation in the same way as was done above in the case of a classical isotropic material. Such an investigation can always be carried out also in the case of an anisotropy of a more general nature.

The approach proposed in this article was developed in the articles of the authors, and the results obtained were presented in [21].

The results of the article were presented at the 6^{th} International Conference on Mathematical Modeling in Physical Sciences (6^{th} ICMSQUARE, August 28–31, 2017, Pafos, Cyprus).

Acknowledgments: this work was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation (project no. DI-2016-41) and the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–29–10085–мк).

Список литературы

[1] Vekua I. N., 1978, *Fundamentals of tensor analysis and covariant theory.* Nauka, Moscow (in Russian)

[2] Pobedrya B. E., 1986, Lectures in tensor analysis. Moscow State Univ., Moscow, (in Russian).

[3] Lur'e A. I., 1980, Nonlinear elasticity. Nauka, Moscow, (in Russian).

[4] Nikabadze M. U., 2017, "Topics on tensor calculus with applications to mechanics *Journal of Mathematical Sciences.* **225**:1, 194 p. DOI: 10.1007/s10958-017-3467-4

[5] Nikabadze M. U., 2015, *On Several Issues of Tensor Calculus with Applications to Mechanics.* Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. **55**, 3–194, (in Russian). http://istina.msu.ru/media/publications/book/e25/00c/10117043/M.U.Nikabadze.pdf

[6] Pobedrya B. E., 1995, *Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity. 2nd ed.* Moscow State Univ., Moscow, 366 p. (in Russian).

[7] Nikabadze M. U., 2014, "Construction of Eigentensor Columns in the Linear Micropolar Theory of Elasticity *Moscow Univ. Mech. Bull.* **69**:1, 1–9. DOI: 10.3103/S0027133014010014

[8] Nikabadze M. U., 2014, *Development of the Method of Orthogonal Polynomials in the Classical and Micropolar Mechanics of Elastic Thin Bodies.* Moscow University Press, 515 p. (in Russian). http://istina.msu.ru/media/publications/book/707/ea1/6738800/Monographiya.pdf

[9] Nikabadze M. U., 2016, *Eigenvalue Problems of a Tensor and a Tensor-Block Matrix (TMB) of Any Even Rank with Some Applications in Mechanics*, 279–317, in: Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials, Advanced Structured Materials, Vol. 42, Eds.: H. Altenbach and S. Forest, Springer. DOI 10.1007/978-3-319-31721-2_14

[10] Mikhail U. Nikabadze 2017, "To the problem of decomposition of the initial boundary value problems in mechanics *J. Phys.: Conf. Series*, **739**:1, 11 p. DOI 10.1088/1742-6596/936/1/012056

[11] Kupradze V. D., Gegelia T. G., Basheleishvili M. O., and Burchuladze T. V., 1976, *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity.* Nauka, Moscow, 664 p. (in Russian).

[12] Eringen A. C., 1999, *Microcontinuum Field Theories. 1. Foundation and solids.* Springer-Verlag. 342 p.

[13] Nowacki W., 1975, *Theory of Elasticity.* Moscow, Mir. 872 p.

[14] Baskakov V. A., Bestuzheva N. P. and Konchakova N. A., 2001, *Linear dynamic theory of thermoelastic medium with microstructure.* Voronezh: Voronezh Univer. Press. 162 p.

[15] Nikabadze M. U. and Ulukhanyan A. R., 2016, *Analytical Solutions in the Theory of Thin Bodies*, 319–361, in: Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials, Advanced Structured Materials, Vol. 42, Eds.: H. Altenbach and S. Forest, Springer. DOI 10.1007/978 − 3 − 319 − 31721 − 2_15

[16] Petrashen G. I., 1978, *Foundations of the mathematical theory of elastic wave propagation.* Questions of the dynamic theory of propagation of seismic waves. **18**. Leningrad: Nauka, 248 p. (in Russian).

[17] Petrashen G. I., 1980, *Propagation of waves in anisotropic elastic media.* Leningrad: Nauka, 280 p. (in Russian).

[18] Sagomonyan A. Ya., 1985, *Stress waves in continuous media.*, Moscow Univ.:, 416 p. (in Russian).

[19] Poruchikov V B 1986, *Methods of dynamic elasticity theory.* Moscow: Nauka, 328 p. (in Russian).

[20] Nikabadze M. U., 2007, *Some issues concerning a version of the theory of thin solids based on expansions in a system of Chebyshev polynomials of the second kind.* Mech. Solids **42**:3, 391–421.

[21] Hovik Matevossian, Mikhail Nikabadze, Armine Ulukhanian, 2017, *On solutions of biharmonic problems*, Mathematical and Numerical Aspects of Dynamical Systems Analysis, DSTA'2017: Procedings of 14th International Conference on "Dynamical Systems – Theory and Applications"(Lodz, Poland, December 11-14, 2017), 369–380.

On mathematical modeling of thin body deformation

M.U. Nikabadze
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: munikabadze@yandex.ru

Abstract. In the paper the new parametrization of a multilayer thin domain is applied [1–6]. In contrast with classic approaches, several base surfaces and an analytic method with application of orthogonal polynomial systems are used. Geometric characteristics typical for the proposed parametrizations are introduced into consideration. The new parametrization in the case of a one-layered thin body is described in detail in the works [5–10]. Various representations of the equations of motion, the heat influx, the constitutive relations of physical and heat content are given for the new body domain parametrization. The definition of the kth order moment of a certain quantity with respect to an orthonormal polynomial systems is given. The expressions of moments of first- and second-order partial derivatives of a certain tensor field are obtained and this is also done for some important expressions required for constructing different variants of the thin body theory. Various variants of the equations of motion in moments with respect to orthogonal polynomial systems are also obtained. The interlayer conditions are written down under various connections of adjacent layers of a multilayer body. Formulation of the initial boundery velue problems in the theory of multilayer thermoelastic thin bodies in moments are given.

It should be noted that the analytic method with the use of the Legendre polynomial system in constructing the one-layer thin body theory [11–39] and multilayer thin body theory [40–49] was also applied by other authors. In this direction the author had published the papers [1–8, 50–59] and others with the application of Legendre and Chebyshev polynomial systems. These expansions can be successfully used in constructing any thin body theory. Despite this, the classic theories constructed by this method are far to be complete, and the more so, the micropolar theories and theories of other reology are.

1 Parametrization of a Multilayer Thin Domain of the Three-Dimensional Euclidean Space with Several Base Surfaces

Consider a multilayer thin domain of the Euclidean space consisting of not more than countably many layers. We perform the parametrization of this domain in the same way as in [1, 2]. Let the layers be enumerated in the ascending order, i.e., for example, if $\alpha \geq 2$ is the serial number of a certain layer, then the serial number of the previous layer is $\alpha - 1$ and the serial number of the next layer is $\alpha + 1$. Each layer has two frontal surfaces. The frontal surface of the layer α, which lies to the side of the previous layer $\alpha - 1$, is called the interior base surface and is denoted by $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, whereas the frontal surface of the layer α, which lies to the side of the next layer $\alpha + 1$, is called the exterior base surface and is denoted by $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$.

If the multilayer structure consists of K layers, then $\overset{(-)}{\underset{1}{\mathrm{S}}}$ ($\overset{(+)}{\underset{1}{\mathrm{S}}}$) and $\overset{(-)}{\underset{K}{\mathrm{S}}}$ ($\overset{(+)}{\underset{K}{\mathrm{S}}}$) are the interior (exterior) surfaces of the first and last layers, respectively. In this case, $\overset{(-)}{\underset{1}{\mathrm{S}}}$ and $\overset{(+)}{\underset{K}{\mathrm{S}}}$ are also called the interior and exterior surfaces of the multilayer structure.

We assume that the frontal surfaces of each layer are regular surfaces and its lateral surface is a ruled surface in the case where the layer is bounded and unclosed.

1.1 Vector parametric equation of the layer α and the system of vector parametric equations of a multilayer thin domain

The radius-vector of an arbitrary point $\underset{\alpha}{\mathrm{M}}$ of the layer α is represented in the form

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}(x^1,x^2,x^3)=\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+x^3\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2)=(1-x^3)\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+x^3\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2) \quad (1.1)$$

for all $\alpha\in\mathbb{N}$ and $\forall\, x^3\in[0,1]$, where the vector relations

$$\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}=\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2),\quad \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}=\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2),\quad \alpha\in\mathbb{N}, \quad (1.2)$$

are the vector equations of the base surfaces $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$ and $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, respectively, x^1, x^2 are curvilinear (Gaussian) coordinates on the interior base surface $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, and $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers. The vector $\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2)=\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)-\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)$, which topologically maps the interior base surface $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$ onto the exterior base surface $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, is, in general, not orthogonal to the base surfaces, and, moreover, the endpoint of each $\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2)$ is the initial point of $\underset{\alpha+1}{\mathbf{h}}(x^1,x^2)$, $\forall\alpha$, i.e., the following relation holds:

$$\begin{aligned}\overset{(+)}{\underset{\alpha+\delta}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)&=\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+\sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+\delta}\underset{\nu}{\mathbf{h}}=\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+\sum_{\nu=\alpha+1}^{\alpha+\delta}\underset{\nu}{\mathbf{h}}=\\&=\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+\sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+\delta}\left[\overset{(+)}{\underset{\nu}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)-\overset{(-)}{\underset{\nu}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)\right]=\\&=\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+\sum_{\nu=\alpha+1}^{\alpha+\delta}\left[\overset{(+)}{\underset{\nu}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)-\overset{(-)}{\underset{\nu}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)\right]\quad\forall\alpha,\delta. \quad (1.3)\end{aligned}$$

Let a multilayer domain[1] consist of K layers. Then introducing the notation

$$\mathbf{h}=\sum_{\nu=1}^{K}\underset{\nu}{\mathbf{h}}=\sum_{\nu=1}^{K}\left[\overset{(+)}{\underset{\nu}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)-\overset{(-)}{\underset{\nu}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)\right], \quad (1.4)$$

[1]We use the usual rules of tensor calculus [9, 10, 60–63]. We mainly preserve the notation and conventions of the previous works. Under symbols, we write indices denoting the serial numbers of layers . The Greek indices under symbols assume their values according to circumstances, and capital and small Latin indices assume the values 1, 2 and 1, 2, 3, respectively.

we have

$$\underset{K}{\overset{(+)}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)=\underset{1}{\overset{(-)}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+\mathbf{h}(x^1,x^2)=\underset{1}{\overset{(-)}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+\sum_{\nu=1}^{K}\left[\underset{\nu}{\overset{(+)}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)-\underset{\nu}{\overset{(-)}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)\right]. \quad (1.5)$$

It should be noted that (1.1) for a fixed α is the vector parametric equation of the layer α, and when α varies in the corresponding range and conditions (1.3) hold, it is the system of vector parametric equations of the multilayer thin domain considered. It is easy to see that (1.1) for any x^1, x^2, and $x^3=0$ defines the interior base surface $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathrm{S}}}$, and for any x^1, x^2, and $x^3=1$, it defines the exterior lateral surface $\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathrm{S}}}$, whereas for any x^1, x^2 and $x^3=\text{const}$,where $x^3\in(0,1)$, it defines the equidistance surface for the base surfaces $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathrm{S}}}$ and $\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathrm{S}}}$, which is denoted by $\underset{\alpha}{\mathrm{S}}$.

1.2 Two-dimensional families of bases and the families of parametrizations of the surface of the layer α generated by them

For the derivatives of relations (1.1) and (1.2) in x^P at the points $\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{\mathrm{M}}}\in\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{\mathrm{S}}}$, $\star\in\{-,\emptyset,+\}\ \ \forall\alpha$, let us introduce the notation

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_P\equiv\partial_P\underset{\alpha}{\mathbf{r}}\equiv\frac{\partial_P\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}{\partial x^P},\quad \underset{\alpha}{\overset{\star}{\mathbf{r}}}_P\equiv\partial_P\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{\mathbf{r}}}\equiv\frac{\partial\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{\mathbf{r}}}}{\partial x^P},\quad \star\in\{-,+\},\ \forall\alpha. \quad (1.6)$$

The pair of vectors $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{1}$, $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{2}$, $\star\in\{-,\emptyset,+\}\ \ \forall\alpha$ defined at the points $\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{\mathrm{M}}}\in\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{S}}$, $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$ obviously compose two-dimensional covariant surface bases, and $\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{\mathrm{M}}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{1}$, $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{2}$, $\star\in\{-,\emptyset,+\}\ \ \forall\alpha$ are two-dimensional covariant surface frames, which, in turn, generate the corresponding parametrizations of the surfaces considered. As is known [60–63] (see also [9,10]), according to these frames (bases), e can construct the corresponding contravariant frames $\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{\mathrm{M}}}\underset{\alpha}{\overset{\star}{\mathbf{r}}}^1\underset{\alpha}{\overset{\star}{\mathbf{r}}}^2$ (bases $\underset{\alpha}{\overset{\star}{\mathbf{r}}}^1\underset{\alpha}{\overset{\star}{\mathbf{r}}}^2$), $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$. Naturally, the covariant and contravariant bases generate the geometric characteristics inherit for them. Defining the frames (bases) at each point of the surfaces $\underset{\alpha}{\overset{(\star)}{\mathrm{S}}}$, $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$, we obtain the corresponding families of frames (bases), which, in turn, generate the corresponding parametrizations.

1.3 Three-dimensional families of bases and the families of parametrization of the domain of the layer α generated by them

Taking into account the expression of the radius-vector $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}$ (1.1) in the first relation in (1.6) and introducing the notation $\underset{\alpha}{\mathbf{h}}_P \equiv \partial\mathbf{h}/\partial x^P \equiv \partial_P\underset{\alpha}{\mathbf{h}}$, we obtain

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_P = \underset{\alpha P}{\mathbf{r}}_- + x^3\underset{\alpha}{\mathbf{h}}_P = (1-x^3)\underset{\alpha P}{\mathbf{r}}_- + x^3\underset{\alpha P}{\mathbf{r}}_+, \ \forall\alpha. \tag{1.7}$$

Now, differentiating (1.1) in x^3, we have

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_3 \equiv \partial_3\underset{\alpha}{\mathbf{r}} \equiv \frac{\partial\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}{\partial x^3} = \underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2), \quad \forall x^3\in[0,1], \quad \forall\alpha. \tag{1.8}$$

According to (1.8), we can assume that

$$\underset{\alpha 3}{\mathbf{r}}_- \equiv \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_3 \equiv \underset{\alpha 3}{\mathbf{r}}_+ \equiv \partial_3\underset{\alpha}{\mathbf{r}} = \underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2), \quad \forall x^3\in[0,1], \quad \forall\alpha. \tag{1.9}$$

Relation (1.9) allows us to define the spatial covariant bases $\underset{\alpha p}{\mathbf{r}}_\star$, $\star\in\{-,+\}$, $\forall\alpha$ at the points $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}}\in\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$, $\star\in\{-,+\}$, $\forall\alpha$, respectively. Therefore, the third basis vector of the spatial covariant bases at the points $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}}\in\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$, $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, for each layer α is the same vector $\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2)$. In view of (1.9), we can join relations (1.7)and (1.8) and represent them as

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_p = \underset{\alpha p}{\mathbf{r}}_- + x^3\underset{\alpha}{\mathbf{h}}_p = (1-x^3)\overset{(-)}{\underset{\alpha\ p}{\mathbf{r}}}_- + x^3\overset{(+)}{\underset{\alpha\ p}{\mathbf{r}}}_+, \quad \forall\alpha. \tag{1.10}$$

The triples of vectors $\underset{\alpha 1}{\mathbf{r}}_\star\ \underset{\alpha 2}{\mathbf{r}}_\star\ \underset{\alpha 3}{\mathbf{r}}_\star$, $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$ defined at the points $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}}\in\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$, $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$ obviously compose three-dimensional covariant spatial bases, and $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}}\underset{\alpha 1}{\mathbf{r}}_\star\underset{\alpha 2}{\mathbf{r}}_\star\underset{\alpha 3}{\mathbf{r}}_\star$, $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$ compose three-dimensional spatial covariant frames, which, in turn, generate the corresponding parametrizations. As is known [9, 10, 60–62], according to these frames(bases), we can construct the corresponding contravariant frames $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\dot 1}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\dot 2}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\dot 3}$ (bases $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\dot 1}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\dot 2}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\dot 3}$), $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$. Indeed, by their definition [9, 10, 60–62], we have

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde k} = \frac{1}{2}\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{C}}{}^{\tilde k\tilde p\tilde q}\underset{\alpha^{\tilde p}}{\mathbf{r}}\times\underset{\alpha^{\tilde q}}{\mathbf{r}}, \quad \sim\in\{-,\emptyset,+\}, \ \forall\alpha, \tag{1.11}$$

where $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{C}}{}^{\tilde k\tilde p\tilde q} = (\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde k}\times\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde p})\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde q}$, $\sim\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$, are contravariant components of the discriminant tensors [60] of the layer α at the points $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}}\in\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$, $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$. It is easy to see that (1.10) is shortly represented in the form

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_p = \underset{\alpha}{g}{}_p^{\dot q}\underset{\alpha\dot q}{\mathbf{r}}_\star = \underset{\alpha}{g}{}_{p\star}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\dot q}, \ \star\in\{-,+\}, \ \forall\alpha, \tag{1.12}$$

where we have introduced the notation

$$\underset{\alpha}{g}_{\breve{p}\tilde{q}} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\breve{p}} \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{q}}, \quad \underset{\alpha}{g}^{\tilde{q}}_{\breve{p}} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\breve{p}} \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{q}}, \quad \smile \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall\alpha. \tag{1.13}$$

in view of (1.10) and (1.13), for $\underset{\alpha}{g}_{\breve{p}\tilde{q}}$ and $\underset{\alpha}{g}^{\tilde{q}}_{\breve{p}}$, we have

$$\underset{\alpha}{g}_{\breve{p}\tilde{q}} = (1-x^3)\underset{\alpha}{g}^{-}_{\breve{p}\tilde{q}} + x^3 \underset{\alpha}{g}^{+}_{\breve{p}\tilde{q}}, \quad \underset{\alpha}{g}^{\tilde{q}}_{\breve{p}} = (1-x^3)\underset{\alpha}{g}^{\tilde{q}}_{\breve{p}} + x^3 \underset{\alpha}{g}^{\tilde{q}}_{\breve{p}}, \quad \smile \in \{-, +\}, \quad \forall\alpha. \tag{1.14}$$

Also, it is easy to obtain the expressions for $\underset{\alpha}{g}_{\breve{p}\breve{q}}$. Indeed, by (1.12) and (1.14), we have

$$\underset{\alpha}{g}_{\breve{p}\breve{q}} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\breve{p}} \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\breve{q}} = \underset{\alpha}{g}_{\breve{p}\hat{n}} \underset{\alpha}{g}^{\hat{n}}_{\breve{q}} = (1-x^3)^2 \underset{\alpha}{g}^{--}_{\breve{p}\breve{q}} + x^3(1-x^3)(\underset{\alpha}{g}^{-+}_{\breve{p}\breve{q}} + \underset{\alpha}{g}^{+-}_{\breve{p}\breve{q}}) + (x^3)^2 \underset{\alpha}{g}^{++}_{\breve{p}\breve{q}}, \quad \star \in \{-, +\}, \quad \forall\alpha. \tag{1.15}$$

Let us find the expressions for $\sqrt{\underset{\alpha}{g}} = (\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_1 \times \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_2) \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_3$. By the first relation in (1.12), we obtain

$$\sqrt{\underset{\alpha}{g}} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}(\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_I \times \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_J) \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{g}}}\epsilon^{IJ}\epsilon_{KL}\underset{\alpha}{g}^{\tilde{K}}_{I}\underset{\alpha}{g}^{\tilde{L}}_{J} = \\ = \sqrt{\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{g}}}\det(\underset{\alpha}{g}^{\tilde{q}}_{p}) = \sqrt{\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{g}}}\det(\underset{\alpha}{g}^{\tilde{Q}}_{P}), \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall\alpha, \tag{1.16}$$

where ϵ^{IJ}, ϵ_{KL} are the Levi-Civita symbols and

$$\sqrt{\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{g}}} = (\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{1}} \times \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{2}}) \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{3}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \sqrt{\overset{(-)}{\underset{\alpha}{g}}} = \sqrt{\underset{\alpha}{g}}\Big|_{x^3=0}, \quad \sqrt{\overset{(+)}{\underset{\alpha}{g}}} = \sqrt{\underset{\alpha}{g}}\Big|_{x^3=1}, \quad \forall\alpha.$$

In turn, from (1.16), we have

$$\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\vartheta}} \equiv \sqrt{\underset{\alpha}{g}\,\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{g}}^{-1}} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}\epsilon_{KL}\underset{\alpha}{g}^{\tilde{K}}_{I}\underset{\alpha}{g}^{\tilde{L}}_{J} = \det(\underset{\alpha}{g}^{\tilde{Q}}_{P}), \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall\alpha. \tag{1.17}$$

It should be noted that analogously to (1.16), in a more general case, we have

$$\sqrt{\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{g}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\overset{(\smile)}{\underset{\alpha}{g}}}\epsilon^{IJ}\epsilon_{KL}\underset{\alpha}{g}^{\check{K}}_{\tilde{I}}\underset{\alpha}{g}^{\check{L}}_{\tilde{J}} = \sqrt{\overset{(\smile)}{\underset{\alpha}{g}}}\det(\underset{\alpha}{g}^{\check{Q}}_{\tilde{P}}), \quad \sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall\alpha. \tag{1.18}$$

It is easy to see from this that

$$\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\vartheta}} \equiv \sqrt{\overset{(\sim)(\smile)}{\underset{\alpha}{g}\,\underset{\alpha}{g}}^{-1}} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}\epsilon_{KL}\underset{\alpha}{g}^{\check{K}}_{\tilde{I}}\underset{\alpha}{g}^{\check{L}}_{\tilde{J}} = \det(\underset{\alpha}{g}^{\check{Q}}_{\tilde{P}}) = \det(\underset{\alpha}{g}^{\check{q}}_{\tilde{p}}), \quad \smile, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall\alpha. \tag{1.19}$$

It is seen that for $\sim = \emptyset$, $\smile \in \{-, +\}$, from (1.18) we obtain (1.16), and from (1.19), we obtain (1.17). It is easy to verify that by (1.19), we have

$$\overset{(\backsim)}{\underset{\alpha}{\vartheta}} = \overset{(\smile)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}^{-1}, \quad \smile, \sim \in \{-, +\}, \quad \forall\alpha; \qquad \overset{(\approx)}{\underset{\alpha}{\vartheta}} = 1, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall\alpha. \tag{1.20}$$

Using (1.19), we can write relations (1.17) in the following more detailed form:

$$\begin{aligned}
&\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\vartheta}} = \sqrt{\underset{\alpha}{g}\,\underset{\alpha}{\overset{(-)}{g}}{}^{-1}} = (1-x^3)^2 \overset{(=)}{\underset{\alpha}{\vartheta}} + x^3(1-x^3)\underset{\alpha}{g}{}^{\bar{I}}_{+I} + (x^3)^2 \overset{(\mp)}{\underset{\alpha}{\vartheta}},\\
&\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\vartheta}} = \sqrt{\underset{\alpha}{g}\,\underset{\alpha}{\overset{(+)}{g}}{}^{-1}} = (1-x^3)^2 \overset{(\pm)}{\underset{\alpha}{\vartheta}} + x^3(1-x^3)\underset{\alpha}{g}{}^{\bar{I}}_{-I} + (x^3)^2 \overset{\binom{+}{+}}{\underset{\alpha}{\vartheta}}, \quad \forall\alpha.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

It is easy to express $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{k}$, $\forall\alpha$, through the vectors $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}_{\tilde{m}}$ or $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{m}}$, $\sim \in \{-,+\}$, $\forall\alpha$. Indeed, taking into account the first relation in (1.12) in relation (1.11) for $\sim = \emptyset$, we obtain

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{k} = \frac{1}{2}\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}{}^{-1}\epsilon^{kpq}\epsilon_{lmn}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{m}}_{p}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{n}}_{q}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{l}}, \quad \sim \in \{-,+\}, \quad \forall\alpha, \tag{1.22}$$

where ϵ^{kpq}, ϵ_{lmn} are the Levi-Civita symbols. By (1.22),we can introduce the notation

$$\underset{\alpha}{g}{}^{k}_{\tilde{l}} = \frac{1}{2}\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}{}^{-1}\epsilon^{kpq}\epsilon_{lmn}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{m}}_{p}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{n}}_{q}, \quad \underset{\alpha}{g}{}^{k\tilde{l}} = \frac{1}{2}\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}{}^{-1}\epsilon^{kpq}\epsilon_{smn}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{m}}_{p}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{n}}_{q}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{s}\tilde{l}}, \quad \sim \in \{-,+\}, \quad \forall\alpha. \tag{1.23}$$

Using this notation, we represent relation (1.22) in the desired form

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{p} = \underset{\alpha}{g}{}^{p}_{\tilde{q}\alpha}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{q}} = \underset{\alpha}{g}{}^{p\tilde{q}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}_{\tilde{q}}, \quad \sim \in \{-,+\}, \quad \forall\alpha. \tag{1.24}$$

It is easy to see that from the first relation in (1.23), we have

$$\underset{\alpha}{g}{}^{K}_{\check{K}} = \overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}{}^{-1}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{I}}_{I}, \quad \Rightarrow \quad \underset{\alpha}{g}{}^{\check{K}}_{\check{K}} = \overset{(\simeq)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}{}^{-1}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{I}}_{\tilde{I}} = \overset{(\simeq)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{I}}_{\tilde{I}}, \quad \sim \in \{-,+\}, \quad \forall\alpha. \tag{1.25}$$

Note that in writing the second relation in (1.25), (1.19) and (1.20) were taken into account. Also, let us introduce into consideration the following objects (matrices):

$$\underset{\alpha\beta}{g}{}^{\cdot\tilde{q}}_{\check{p}\cdot} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}_{\check{p}} \cdot \underset{\beta}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{q}}, \quad \backsim, \sim \in \{-,\emptyset,+\}, \quad \forall\alpha,\beta, \tag{1.26}$$

and the objects obtained from (1.26) by alternating the indices. It is easy to calculate that the number of such objects is equal to 36. It is easy to see that for $\alpha = \beta$, (1.26) contains (1.13), (1.15), and (1.23). Indeed, from (1.26), we have

$$\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{q}}_{\tilde{p}} = \underset{\alpha\alpha}{g}{}^{\cdot\tilde{q}}_{\tilde{p}\cdot} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}_{\tilde{p}} \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{q}}, \quad \backsim, \sim \in \{-,\emptyset,+\}, \quad \forall\alpha, \tag{1.27}$$

and alternating the indices, we obviously obtain the objects considered above and also $\underset{\alpha}{g}{}^{pq} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{p} \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{q}$, $\forall\alpha$, i.e., in this case, the number of the introduced quantities is equal to 36. It is easy to see that by (1.26) and (1.27), the connections between the families of bases are represented in the form

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}_{\tilde{p}} = \underset{\alpha}{g}{}^{\check{n}}_{\tilde{p}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}_{\check{n}} = \underset{\alpha\beta}{g}{}^{\cdot\check{n}}_{\tilde{p}\cdot}\underset{\beta}{\mathbf{r}}{}_{\check{n}}, \quad \backsim, \sim \in \{-,\emptyset,+\}, \quad \forall\alpha,\beta, \tag{1.28}$$

which remains valid under index alternation. By (1.28), it is easy to show that the following relation holds:

$$\underset{\alpha\beta}{g}{}^{\cdot\check{q}}_{\tilde{p}\cdot} = \underset{\alpha\delta}{g}{}^{\cdot\check{n}}_{\tilde{p}\cdot}\,\underset{\beta\beta}{g}{}^{\star\cdot\check{q}}_{\check{n}\cdot}, \quad \backsim, \sim, \star \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall\alpha, \beta, \delta. \tag{1.29}$$

Differentiating (1.3)–(1.5) in x^I and taking into account (1.28), we obtain

$$\begin{aligned}
&\underset{\alpha+\beta I}{\mathbf{r}}{}^{+} = \underset{\alpha I}{\mathbf{r}}{}_{-} + \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+\beta}\left[\underset{\nu I}{g}{}^{\bar{k}}_{+} - \underset{\nu I}{g}{}^{\bar{k}}_{-}\right]\underset{\nu k}{\mathbf{r}}{}_{-} = \underset{\alpha I}{\mathbf{r}}{}_{+} + \sum_{\nu=\alpha+1}^{\alpha+\beta}\left[\underset{\nu I}{g}{}^{\bar{k}}_{+} - \underset{\nu I}{g}{}^{\bar{k}}_{-}\right]\underset{\nu k}{\mathbf{r}}{}_{-},\\
&\partial_I \mathbf{h}(x^1, x^2) = \sum_{\nu=1}^{N}\partial_I \underset{\nu}{\mathbf{h}}(x^1, x^2) = \sum_{\nu=1}^{N}\left[\underset{\nu I}{\mathbf{r}}{}_{+}(x^1, x^2) - \underset{\nu I}{\mathbf{r}}{}_{-}(x^1, x^2)\right] =\\
&\qquad = \sum_{\nu=1}^{N}\left[\underset{\nu I}{g}{}^{\bar{k}}_{+}(x^1, x^2) - \underset{\nu I}{g}{}^{\bar{k}}_{-}(x^1, x^2)\right]\underset{\nu k}{\mathbf{r}}{}_{-}(x^1, x^2),\\
&\underset{N I}{\mathbf{r}}{}_{+}(x^1, x^2) = \underset{1 I}{\mathbf{r}}{}_{-}(x^1, x^2) + \sum_{\nu=1}^{N}\left[\underset{\nu I}{g}{}^{\bar{k}}_{+}(x^1, x^2) - \underset{\nu I}{g}{}^{\bar{k}}_{-}(x^1, x^2)\right]\underset{\nu k}{\mathbf{r}}{}_{-}(x^1, x^2).
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Naturally, all spatial covariant and contravariant bases constructed above have geometric characteristics specific for the parametrizations generated by them. Defining the spatial frames (bases) at each point of the surfaces $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall\alpha$, we obtain the corresponding families of spatial frames (bases), which, in turn generate the corresponding families of parametrizations. Once more, we note that the structure of $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$-families frames (bases), $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall\alpha$, is such that the third basis vectors $\underset{\alpha 3}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{}} = \underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1, x^2)$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall\alpha$ are not perpendicular to the corresponding base surface $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall\alpha$ in general. However, in a particular case, they can be perpendicular, and in a more particular case, they can be unit normal vectors to the surfaces $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall\alpha$, which are denoted by $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{n}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall\alpha$, respectively.

It is seen from the material presented above that in the parametrization of a multilayer domain considered, for each layer, all the corresponding relations for a one-layered thin body under a new parametrization in the works [5–10], as well as for other parametrizations considered in the works [5–7, 11, 60], are hold under the condition that the root letters of quantities entering these relations must be equipped with the bottom index, which denote the number of the layer considered. In this connection, we do not consider the problems on the parametrization of a multilayer domain in detail. In what follows, if necessary, we write the necessary formulas from the corresponding relations of the works mentioned in this paragraph by the above method (equipping the root letters of quantities with the bottom index of the layer considered), and obtain some relations, which do not enter the above works.

1.4 Representation of the unit tensor of the second rank

It is easy to find this representation. Indeed, starting from the usual representation of this tensor [9,10,61,62], by (1.28) and (1.29), we obtain the relation [1–5]

$$\underset{\sim}{\mathbf{E}} = \underset{\widetilde{\alpha}}{\mathbf{E}} = g^{\check{n}}_{\tilde{p}\alpha}\mathbf{r}^{\tilde{p}}_{\alpha}\mathbf{r}_{\alpha\check{n}} = \underset{\widetilde{\beta}}{\mathbf{E}} = g^{\check{n}}_{\beta\tilde{p}}\mathbf{r}^{\tilde{p}}_{\beta}\mathbf{r}_{\beta\check{n}} = g^{\sim\ \check{n}}_{\alpha\beta\ \tilde{p}\ \cdot}\mathbf{r}^{\tilde{p}}_{\alpha}\mathbf{r}_{\beta\check{n}}, \quad \sim, \quad \smile \in \{-,\emptyset,+\}, \quad \forall\alpha,\beta, \quad (1.31)$$

which remains valid under index alternating. As is seen from (1.31), the quantities (1.26) and (1.27) introduced above represent the components of the unit tensor of the second rank (UTSR) for a multilayer thin domain of the three-dimensional Euclidean space. Now let us introduce the following definitions.

Definition 1.1. The parametrization considered above, which is characterized by assigning the radius-vector of an arbitrary point of any layer α in the form (1.1) and by the fulfillment of relation (1.3), is called the new parametrization of a multilayer thin domain.

Definition 1.2. The components $g^{\cdot\ \check{n}}_{\alpha\beta\ \tilde{p}\ \cdot}$, for $\tilde{p} \in \{\bar{p}, p, \overset{+}{p}\}$, $\check{n} \in \{\bar{n}, n, \overset{+}{n}\}$, $\forall\,\alpha \neq \beta$, and also the components $g^{\cdot\ \check{n}}_{\alpha\ \tilde{p}\ \cdot}$, $\forall\,\alpha$, for $\sim \neq \smile$, where $\sim, \smile \in \{+,\emptyset,-\}$, and the images obtained from them by index alternating are called the components of the unit second-rank tensor translation under the new parametrization of a multilayer thin domain.

Definition 1.3. The components $g^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta\ \tilde{p}\tilde{q}}$, $g^{\cdot\ \tilde{q}}_{\alpha\beta\ \tilde{p}\ \cdot}$, $g^{\tilde{p}\tilde{q}}_{\alpha\beta\ \cdot\cdot}$ for $\sim = -$ $(\sim = +)$, $\forall\,\alpha$, β, and the components of the translation $g^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta\ \tilde{p}\tilde{q}}$, $g^{\cdot\ \check{q}}_{\alpha\beta\ \tilde{p}\ \cdot}$, for $\sim = +, \smile = -$ $(\sim = -, \smile = +)$, $\forall\,\alpha$, β, are called the basic components of the second-rank unit tensor under the new parametrization of a multilayer thin domain if as as base surface, the inner (exterior) base surface of layers are taken.

It is easy to find the expressions for $g_{\alpha\beta\ pq}$ via basic translation components. Indeed, by (1.14), (1.26), and (1.29), we have

$$g_{\alpha\beta\ pq} = g^{\check{m}}_{p\alpha}\, g^{\check{n}}_{q\beta}\, g_{\alpha\beta\ \check{m}\check{n}} = (1-x^3)^2\, g^{--}_{\alpha\beta\ pq} + x^3(1-x^3)\big(g^{-+}_{\alpha\beta\ pq} + g^{+-}_{\alpha\beta\ pq}\big) + (x^3)^2\, g^{++}_{\alpha\beta\ pq}, \quad (1.32)$$

where $\sim, \smile \in \{-,+\}$, $\forall\alpha,\beta$. Whence, for $\alpha = \beta$, we obtain (1.15).

2 Presentation of Equations of Motion and Heat Influx and Constitutive Relations of Physical and Heat Contents of Micropolar Theory of Multilayer Elastic Thin Bodies With One Small Size

In what follows, for brevity, we present certain representations of equations of motion and constitutive relations in the case of a one-layer thin body, and then we show how one can obtain the desired relations using the rule presented above and write certain relations.

2.1 Representation of equations of motion and constitutive relations of physical and heat contents of the micropolar theory of one-layer thin bodies with one small size

The new parametrization of a one-layer thin domain [5–10] is performed by the relation, which is obtained from (1.1) under the absence of index α under the symbols. To obtain the representations of equations of motion and constitutive relations, we need the representations of the gradient and the divergence under the parametrization considered. Let us obtain the representations of these operators. Omitting the index α, from (1.12) and (1.24), we find that

$$\mathbf{r}_p = g_p^{\bar{m}}\mathbf{r}_{\underset{m}{}} = g_{pm}^{+}\mathbf{r}^{\bar{m}}, \quad \mathbf{r}^p = g^p_{\underset{m}{}}\mathbf{r}^{\bar{m}} = g^p_{\underset{m}{+}}\mathbf{r}^{\bar{m}}, \tag{2.1}$$

and also from (1.23), we have

$$\begin{gathered} g^P_{\underset{M}{}} = \overset{(-)}{\vartheta}{}^{-1}A^P_{\underset{M}{}}, \quad \overset{(-)}{\vartheta} = \det(g^{\bar{J}}_{\underset{I}{}}), \quad g^{\bar{3}}_{\underset{M}{}} = -g^{\bar{3}}_P g^P_{\underset{M}{}}, \quad g^{\bar{3}}_P = x^3 g^{\bar{3}}_{\underset{P}{+}}, \\ g^{\bar{3}}_{\underset{P}{+}} = h^{-1}\partial_P h, \quad h = |\mathbf{h}|, \quad A^P_{\underset{M}{}} \equiv g^{\bar{P}}_{\underset{M}{}} + x^3 a^P_{\underset{M}{+}}, \quad a^P_{\underset{M}{+}} \equiv (g^{\bar{I}}_{\underset{I}{+}} - 1)g^{\bar{P}}_{\underset{M}{}} - g^{\bar{P}}_{\underset{M}{+}}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Moreover, it is easy to note that the following relations hold [5–10]:

$$g^P_{\underset{M}{}} = \sum_{s=0}^{\infty} A^{\bar{P}}_{\underset{(s)M}{+}}(x^3)^s, \quad A^{\bar{P}}_{\underset{(s)M}{+}} = (g^{\bar{P}}_{\underset{N_1}{}} - g^{\bar{P}}_{\underset{N_1}{+}})\cdot(g^{\bar{N}_1}_{\underset{N_2}{}} - g^{\bar{N}_1}_{\underset{N_2}{+}})\cdot\ldots\cdot(g^{\bar{N}_{s-1}}_{\underset{M}{}} - g^{\bar{N}_{s-1}}_{\underset{M}{+}}), \quad A^{\bar{P}}_{\underset{(0)M}{+}} = g^{\bar{P}}_{\underset{M}{}}. \tag{2.3}$$

By the first and third relations in (2.2) and the second relation in (2.1), we find that

$$\mathbf{r}^P = g^P_{\underset{M}{}}\mathbf{r}^{\bar{M}}, \quad \mathbf{r}^3 = g^3_{\underset{M}{}}\mathbf{r}^{\bar{M}} + \mathbf{r}^{\bar{3}} = \mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_P\mathbf{r}^P = \mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_P g^P_{\underset{M}{}}\mathbf{r}^{\bar{M}}. \tag{2.4}$$

The gradient operator can be applied to any tensor. Therefore, denoting a certain tensor quantity by $\mathbb{F}(x', x^3)$, by the definition of the gradient [60–62] and by (2.4), we have [5–8]

$$\mathrm{grad}\mathbb{F} = \nabla\mathbb{F} = \mathbf{r}^p\partial_p\mathbb{F} = \mathbf{r}^P\partial_P\mathbb{F} + \mathbf{r}^3\partial_3\mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{M}}g^P_{\underset{M}{}}(\partial_P - g^{\bar{3}}_P\partial_3)\mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\partial_3\mathbb{F}.$$

Whence, introducing the differential operator

$$N_p = \partial_p - g^{\bar{3}}_p\partial_3, \quad \mathbf{N} = \mathbf{r}^p N_p = \mathbf{r}^P N_P = \mathbf{r}^{\bar{M}}g^P_{\underset{M}{}}N_P, \quad N_3 = 0, \tag{2.5}$$

we obtain the desired representation of the gradient in the form

$$\mathrm{grad}\mathbb{F} = \nabla\mathbb{F} = \mathbf{N}\mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\partial_3\mathbb{F} = \mathbf{r}^P N_P\mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\partial_3\mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{M}}g^P_{\underset{M}{}}N_P\mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\partial_3\mathbb{F}. \tag{2.6}$$

The divergence operator is applied to a tensor whose rank is no less than 1. Applying this operator, e.g. to a second-rank tensor $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$, by the definition, the third relation in (2.2), and (2.5), we obtain

$$\mathrm{div}\,\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \nabla\cdot\underset{\sim}{\mathbf{P}} = g^P_{\underset{M}{}}N_P\mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3\mathbf{P}^{\bar{3}} \quad (\mathbf{P}^{\bar{m}} = \mathbf{r}^{\bar{m}}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{P}}). \tag{2.7}$$

Note that (2.7) can also be easily obtained from (2.6) if in this relation, we replace the sign of tensor product, which is omitted, with the sign of inner product.

2.1.1 Representations of equations of motion

As is known [64–67], at very small displacements and rotations and gradients of displacements and rotations three-dimensional equations of motion of micropolar deformable rigid bodies are represented in the form

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{F} = \rho\partial_t^2\mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} + \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{m} = \underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2\boldsymbol{\varphi}. \tag{2.8}$$

Here, $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ and $\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}$ are tensors of stresses and couple stresses, $\underset{\simeq}{\mathbf{C}}$ is the discriminant tensor (third-rank tensor) [60], $\mathbf{u}$ is the vector of displacements, $\boldsymbol{\varphi}$ is the vector of (inner) rotation, ρ is the material density, $\mathbf{F}$ is the mass force density, $\mathbf{m}$ is the mass moment density, and $\overset{2}{\otimes}$ is the inner 2-product (for example, $\underset{\simeq}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} = \mathbf{r}^i C_{ijk} P^{jk}$). The definition of inner r-product and the problems related to it are considered in [5–10, 60, 68]. Proceeding analogously to [11], for the equations of the classical deformable rigid body mechanics (DRBM) under the classical parametrization of thin body domain, in the case considered, from (2.8), we find the following form of representation of equations of micropolar DRMB:

$$\begin{gathered}
(1/\sqrt{\overset{(-)}{g}})\partial_P(\sqrt{\overset{(-)}{g}}\,\overset{(-)}{\vartheta}\mathbf{P}^P) + \partial_3(\overset{(-)}{\vartheta}\mathbf{P}^3) + \rho\overset{(-)}{\vartheta}\mathbf{F} = \rho\overset{(-)}{\vartheta}\partial_t^2\mathbf{u}, \\
(1/\sqrt{\overset{(-)}{g}})\partial_P(\sqrt{\overset{(-)}{g}}\,\overset{(-)}{\vartheta}\boldsymbol{\mu}^P) + \partial_3(\overset{(-)}{\vartheta}\boldsymbol{\mu}^3) + \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} (\overset{(-)}{\vartheta}\underset{\sim}{\mathbf{P}}) + \rho\overset{(-)}{\vartheta}\mathbf{m} = \overset{(-)}{\vartheta}\underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2\boldsymbol{\varphi}, \\
\overset{(-)}{g} = \det(g_{\underset{--}{mn}}), \quad g_{\underset{--}{mn}} = \mathbf{r}_{\underset{-}{m}} \cdot \mathbf{r}_{\underset{-}{n}}.
\end{gathered} \tag{2.9}$$

It is easy to see that by (2.7), Eqs. (2.8) can be rewritten in the form

$$g^P_{\underset{-}{M}} N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho\mathbf{F} = \rho\partial_t^2\mathbf{u}, \quad g^P_{\underset{-}{M}} N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{m} = \underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2\boldsymbol{\varphi}. \tag{2.10}$$

It is easy to note that the following relations hold:

$$g^P_{\underset{-}{M}} N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} = g^P_{\underset{-}{m}} N_P \mathbf{P}^{\bar{m}} = N_P(g^P_{\underset{-}{m}} \mathbf{P}^{\bar{m}}) = N_P(g^P_{\underset{-}{M}} \mathbf{P}^{\bar{M}}) = N_P \mathbf{P}^P;$$

using them, we can represent Eqs. (2.10) in the form

$$\begin{gathered}
N_P \mathbf{P}^P + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho\mathbf{F} = \rho\partial_t^2\mathbf{u}, \;\; N_P \boldsymbol{\mu}^P + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{m} = \underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2\boldsymbol{\varphi}, \\
N_P(g^P_{\underset{-}{M}} \mathbf{P}^{\bar{M}}) + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho\mathbf{F} = \rho\partial_t^2\mathbf{u}, \;\; N_P(g^P_{\underset{-}{M}} \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}}) + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{m} = \underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2\boldsymbol{\varphi}.
\end{gathered} \tag{2.11}$$

Multiplying each relation in (2.10) by $\overset{(-)}{\vartheta}$ and taking into account the first relation in (2.2), we have

$$\begin{gathered}
A^P_{\underset{-}{M}} N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \overset{(-)}{\vartheta}\partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho\overset{(-)}{\vartheta}\mathbf{F} = \rho\overset{(-)}{\vartheta}\partial_t^2\mathbf{u}, \\
A^P_{\underset{-}{M}} N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \overset{(-)}{\vartheta}\partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} (\overset{(-)}{\vartheta}\underset{\sim}{\mathbf{P}}) + \rho\overset{(-)}{\vartheta}\mathbf{m} = \overset{(-)}{\vartheta}\underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2\boldsymbol{\varphi}.
\end{gathered} \tag{2.12}$$

Note that (2.9) – (2.12) are different forms of representation of the equations of micropolar DRBM (2.8) for the parametrization of thin body domain considered. They are called the different forms of the equations of micropolar deformable rigid thin body mechanic (DRTBM) under the new parametrization of thin body domain. Taking into account the first relation in (2.3), we can write Eqs. (2.10) in the form

$$\begin{gathered}\sum_{s=0}^{\infty} \underset{(s)M}{\overset{+}{A}}{}^{P}(x^3)^s N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \\ \sum_{s=0}^{\infty} \underset{(s)M}{\overset{+}{A}}{}^{P}(x^3)^s N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}.\end{gathered} \tag{2.13}$$

It is seen that Eqs. (2.13) contain infinitely many summands. Therefore, they cannot be used in practice. Naturally, we need to consider approximate equations with finitely many summands. In this connection, let us introduce the following definition.

Definition 2.1. The equations, which are obtained from (2.10) if, in the expansion of $\underset{M}{\overset{-}{g}}{}^{P}$ (see the first formula in (2.3)), we preserve first $s+1$ terms, are called the equations of approximation of order s.

Obviously, the equation of approximation of order s are represented in the form

$$\underset{(s)M}{\overset{-}{g}}{}^{P} N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho \mathbf{F} = \rho \partial_t^2 \mathbf{u}, \quad \underset{(s)M}{\overset{-}{g}}{}^{P} N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = \underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \boldsymbol{\varphi}, \tag{2.14}$$

where

$$\underset{(s)M}{\overset{-}{g}}{}^{P} = \sum_{m=0}^{s} \underset{M}{\overset{+}{A}}{}^{P}(x^3)^m, \tag{2.15}$$

From (2.14), for $s=0$, we obtain the equations of zero approximation, for $s=1$, the equations of first approximation, etc.

2.1.2 Presentation of the equation of heat influx in micropolar DRTBM

In the general case, the heat influx equation in micropolar DRBM can be represented in the form [69]

$$-\nabla \cdot \mathbf{q} + \rho q - T \frac{d}{dt}(\underset{\sim}{\mathbf{a}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \underset{\sim}{\mathbf{d}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}) + W^* = \rho c_p \partial_t T, \tag{2.16}$$

where $\mathbf{q}$ is the vector of exterior heat influx, q is the mass heat influx, T is the temperature, $\underset{\sim}{\mathbf{a}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{d}}$ are the tensors of heat extension, $\underset{\sim}{\mathbf{P}} \neq \underset{\sim}{\mathbf{P}}^T$ is the stress tensor, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} \neq \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}^T$ is the couple stress tensor, W^* is the scattering function, ρ is the medium density, and c_p is the heat capacity under a constant pressure. If we consider the physically linear medium, then the nonlinearity in (2.16) is in the third summand of the left-hand side. A similar situation holds in a particular variant of this equation, which is obtained from (2.16) for $\underset{\sim}{\mathbf{d}} = 0$ (see [63]). In the latter case, since both heat capacities c_p and c_v (the heat capacity under a constant volume) cannot be constant

simultaneously (independent of the temperature), very often, one assumes that in this summand, the temperature T is replaced with the temperature $T_0 = \text{const}$. Taking into account this assumption, we see that the desired representation of the heat influx equation has the following form analogous to (2.10):

$$-g^P_{\underset{\sim}{M}} N_P q^{\bar{M}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T_0 \frac{d}{dt}(\underset{\sim}{\mathbf{a}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \underset{\sim}{\mathbf{d}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}) + W^* = \rho c_p \partial_t T. \tag{2.17}$$

If necessary, it is easy to write the relations analogous to (2.9) and (2.12). Therefore, for brevity, we do not dwell on this. Note that by (2.17), analogously to (2.14), the heat influx equation of approximation of order s is represented in the form

$$-g^P_{\underset{(s)\sim}{M}} N_P q^{\bar{M}} - \partial_3 q^{\bar{3}} + \rho q - T_0 \frac{d}{dt}(\underset{\sim}{\mathbf{a}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \underset{\sim}{\mathbf{d}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}) + W^* = \rho c_p \partial_t T. \tag{2.18}$$

2.1.3 Representations of constitutive relations of physical and heat content

In linear micropolar elasticity theory, the constitutive relations of physical content under non-isothermal processes can be represented in the following form by the generalized Duhamel–Neumann principle [63, 69]:

$$\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} - \underset{\sim}{\mathbf{a}}\vartheta) + \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} - \underset{\sim}{\mathbf{d}}\vartheta), \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} - \underset{\sim}{\mathbf{a}}\vartheta) + \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} (\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} - \underset{\sim}{\mathbf{d}}\vartheta) \tag{2.19}$$

where $\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla\mathbf{u} - \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ is the deformation tensor in micropolar theory (see [66]), $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} = \nabla\boldsymbol{\varphi}$ is the bend-torsion tensor, $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{B}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ ($\underset{\approx}{\mathbf{C}} = \underset{\approx}{\mathbf{B}}^T$) are material tensors of the fourth rank, and ϑ is the temperature overfall. Taking into account the expression for $\underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}}$, we can write (2.19) in the form

$$\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \nabla\mathbf{u} + \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \nabla\boldsymbol{\varphi} - \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\mathbf{b}}\vartheta, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \nabla\mathbf{u} + \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \nabla\boldsymbol{\varphi} - \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}\vartheta, \tag{2.20}$$

where

$$\underset{\sim}{\mathbf{b}} = \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{a}} + \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{d}}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{a}} + \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{d}},$$

which are called the tensors of thermomechanical properties. Note that a particular case o law (2.20) was considered in [66,67], and more general relations were presented in [69, 70]. Now it is easy to find the desired representations of the Hooke law (2.20) under the new parametrization of thin body domain. Indeed, taking into account the representation of the gradient operator (2.6), after simple transformations, from (2.20), we have

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\mathbf{P}} &= \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} (g^P_{\underset{\sim}{M}} \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \mathbf{u}) + \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} (g^P_{\underset{\sim}{M}} \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \boldsymbol{\varphi}) - \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\mathbf{b}}\vartheta, \\
\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} &= \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} (g^P_{\underset{\sim}{M}} \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \mathbf{u}) + \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} (g^P_{\underset{\sim}{M}} \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \boldsymbol{\varphi}) - \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}\vartheta.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Taking into account the first relation in (2.3), it is easy to note that relations (2.21) contain infinitely many summands. Therefore, they cannot be used in such a form.

In applications, one uses approximate constitutive relations (CR), i.e., the relations represented by finitely many summands. In this connection, we introduce the following definition.

Definition 2.2. The relations obtained from (2.21) under the condition that in the expansion of $g^P_{\underset{\sim}{M}}$ (see the first formula in (2.3)), first $s+1$ are preserved are called the CR of approximation of order s.

It is easy to see that analogously to Eqs. (2.14) and (2.18), CR of approximation of order s are represented in the form

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\mathbf{P}}_{(s)} &= \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} (\underset{(s)M}{g^P_{\underset{\sim}{}}} \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \mathbf{u}) + \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} (\underset{(s)M}{g^P_{\underset{\sim}{}}} \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \boldsymbol{\varphi}) - \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\mathbf{b}} \vartheta, \\
\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_{(s)} &= \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} (\underset{(s)M}{g^P_{\underset{\sim}{}}} \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \mathbf{u}) + \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} (\underset{(s)M}{g^P_{\underset{\sim}{}}} \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \boldsymbol{\varphi}) - \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} \vartheta.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Definition 2.3. The relations obtained from (2.22) for $s=0$ are called CR of zero approximation, and for $s=1$, they are called CR of the first approximation.

It is easy to see that CR of zero approximation have the form

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\mathbf{P}}_{(0)} &= \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} (\mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \mathbf{u}) + \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} (\mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \boldsymbol{\varphi}) - \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\mathbf{b}} \vartheta, \\
\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_{(0)} &= \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} (\mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \mathbf{u}) + \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} (\mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \boldsymbol{\varphi}) - \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\simeq}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} \vartheta.
\end{aligned}$$

It should be noted that if we consider a body without center of symmetry [66, 67], then $\underset{\approx}{\mathbf{A}} = 0$, $\underset{\approx}{\mathbf{B}} = 0$, and in this case, the CR presented above simplify. Let us find the corresponding representation for the Fourier heat conduction law (which defines the relations of heat content) under the new parametrization of the thin body domain.Since the Fourier heat conduction law [63,67] has the form $\mathbf{q} = -\underset{\sim}{\Lambda} \cdot \nabla T$, where the second-rank positive-definite tensor $\underset{\sim}{\mathbf{\Lambda}}$ is called the heat conduction tensor, by (2.6), the Fourier heat conduction law of zero approximation and approximation of order s is represented in the form

$$\mathbf{q}_{(0)} = -\mathbf{\Lambda}^{\bar{M}} N_P T - \mathbf{\Lambda}^{\bar{3}} \partial_3 T, \quad \mathbf{q}_{(s)} = -\mathbf{\Lambda}^{\bar{M}} \underset{(s)M}{g^P_{\underset{\sim}{}}} N_P T - \mathbf{\Lambda}^{\bar{3}} \partial_3 T, \quad \mathbf{\Lambda}^{\bar{m}} = \underset{\sim}{\mathbf{\Lambda}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{m}}. \tag{2.23}$$

3 To Micropolar Theory With Respect to Orthonormal Chebyshev Polynomials of Second Kind

To construct the micropolar theory with respect to a certain system of orthogonal polynomials (Legendre, Chebyshev, etc.), we need recursive relations for these polynomials. For example, for the shifted Chebyshev polynomials, the main recursive

relations on the orthogonality closed interval [0,1] are represented in the following form [4–8, 55]:

$$\begin{aligned} 4tU_n^*(t) &= U_{n-1}^*(t) + 2U_n^*(t) + U_{n+1}^*(t), \qquad n \geq 1, \\ 2tU_n^{*'}(t) &= 2nU_n^*(t) + U_{n-1}^{*'}(t) + U_n^{*'}(t), \qquad n \geq 1, \\ U_n^{*'}(t) &= 4nU_{n-1}^*(t) + U_{n-2}^{*'}(t), \qquad n \geq 2, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Note that formulas (3.1) are obtained in the same way as analogous formulas for Legendre polynomials on the orthogonality closed interval [-1,1], e.g, in [71] (see also [52]). Using the main recursive relations (3.1), it is easy to obtain the following relations, which are necessary for constructing thin body theories [4–8, 55]:

$$2^{2s}t^sU_n^*(t) = \sum_{p=0}^{2s} C_{2s}^p U_{n-s+p}^*(t), \quad s, n \in \mathbb{N}_0; \tag{3.2}$$

$$2^{2s}t^sU_m^*(t)U_n^*(t) = \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{2s} C_{2s}^q U_{n-m-s+2p+q}^*(t), \quad n, m, s \in \mathbb{N}_0; \tag{3.3}$$

$$U_n^{s'}(t) = 4\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (n-2k)U_{n-(2k+1)}^*(t) = 4\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (2k+1+a)U_{2k+a}^*(t), \ n \geq 1; \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} 2^{2s}t^sU_n^{*'}(t) &= 4\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\sum_{p=0}^{2s}(n-2k)C_{2s}^p U_{n-(s+2k+1)+p}^*(t) = \\ &= 4\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}\sum_{p=0}^{2s}(2k+1+a)C_{2s}^p U_{2k+a-s+p}^*, \ n \geq 1, \ s \geq 0; \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} U_n^{*''}(t) &= 2^4\sum_{k=0}^{[(n-2)/2]}(k+1)(n-k)[n-(2k+1)]U_{n-(2k+2)}^*(t) = \\ &= 2^2\sum_{k=0}^{[(n-2)/2]}(2k+2-a)[(n+1)^2-(2k+2-a)^2]U_{2k+1-a}^*(t), \quad n \geq 2; \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} 2^{2s}t^sU_n^{*''}(t) &= 2^4\sum_{k=0}^{[(n-2)/2]}\sum_{p=0}^{2s}(k+1)(n-k)[n-(2k+1)]C_{2s}^p U_{n-(s+2k+2)+p}^* = \\ &= 2^2\sum_{k=0}^{[(n-2)/2]}(2k+2-a)[(n+1)^2-(2k+2-a)^2]C_{2s}^p U_{2k+1-a-s+p}^*, \\ &\qquad n \geq 2, \ s \geq 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Here, $a = n-1-2\big[(n-1)/2\big]$, $[x]$ is the integral part of x, and C_m^n are the binomial coefficients. It should be noted that all relations (3.2) – (3.7),which also hold for the

system of orthonormal Chebyshev polynomials of the second kind $\{\hat{U}_k^*\}_{k=0}^{\infty}$, except for (3.3), can be proved by induction. For a system of orthonormal polynomials, (3.3) is represented in the form

$$2^{2s}t^s\hat{U}_m^*(t)\hat{U}_n^*(t) = \hat{U}_0^* \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{2s} C_{2s}^q \hat{U}_{n-m-s+2p+q}^*(t), \quad n,m,s \in \mathbb{N}_0. \tag{3.8}$$

Note that extending the definition of system of Chebyshev polynomials of the second kind to the set of negative numbers, we obtain the relation $U_{-n}^* = -U_{n-2}^*$, $n \in \mathbb{N}_0$, under which (3.2) – (3.7) were obtained.

Let us consider a certain tensor field $\mathbb{F}(x^1, x^2, x^3)$, which depends on the coordinates x^1, x^2, x^3 of the thin body domain under its new parametrization. For brevity, instead of $\mathbb{F}(x^1, x^2, x^3)$, we write $\mathbb{F}(x', x^3)$, where $x' = (x^1, x^2)$, $x^3 \in [0, 1]$. Moreover, we assume that the tensor fields considered are sufficiently smooth. For example, $\mathbb{F}(x', x^3) \in C_m(V \cup \partial V)$, $m \geq 1$; V is the domain occupied by the thin body considered and ∂V is its boundary. Then the tensor field $\mathbb{F}(x', x^3)$ can be expanded in a series with respect to the system of shifted Chebyshev polynomials of the second kind $\{\hat{U}_k^*\}_{k=0}^{\infty}$ with respect to the coordinate $x^3 \in [0, 1]$ for each fixed point $x' \in \overset{(-)}{S}$ (of the inner base surface) [71]. This expansion is represented in the form

$$\mathbb{F}(x', x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \overset{(k)}{\mathbb{F}}(x')\hat{U}_k^*(x^3), \quad x' \in \overset{(-)}{S}, \quad x^3 \in [0, 1], \tag{3.9}$$

where $\overset{(k)}{\mathbb{F}}(x')$ is called the coefficient with number k in the expansion of $\mathbb{F}(x', x^3)$ in the series with respect to the polynomial system $\{\hat{U}_k^*\}_{k=0}^{\infty}$.

Definition 3.1. The moment of the kth order of a certain tensor field $\mathbb{F}(x', x^3)$ with respect to the polynomial system $\{\hat{U}_k^*\}_{k=0}^{\infty}$, which is denoted by $\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F})$, is the integral

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}) = \int_0^1 \mathbb{F}(x', x^3)\hat{U}_k^*(x^3)h^*(x^3)dx^3, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.10}$$

It is easy to prove that the following assertions hold:

Assertion 3.1. *For any tensor fields $\mathbb{F}(x', x^3)$ and $\mathbb{G}(x', x^3)$ and any functions $\alpha(x')$ and $\beta(x')$, the following relation holds:*

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}[\alpha(x')\mathbb{F} + \beta(x')\mathbb{G}] = \alpha(x')\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}) + \beta(x')\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\mathbb{G}), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.11}$$

This implies that the moment operator is a linear operator.

Assertion 3.2. *The kth-order moment of a tensor field $\mathbb{F}(x', x^3)$ with respect to the polynomial system $\{\hat{U}_k^*\}_{k=0}^{\infty}$ is equal to the coefficient with number k in the expansion of $\mathbb{F}(x', x^3)$ with respect to x^3 in this polynomial system, i.e.,*

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\mathbb{F}) = \int_0^1 \mathbb{F}(x', x^3)\hat{U}_k^*(x^3)h^*(x^3)dx^3 = \overset{(k)}{\mathbb{F}}(x'), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.12}$$

Assertion (3.11) follows from Definition (3.10), whereas Assertion (3.12) is proved by using (3.9) and (3.10) and taking into account that the system $\{\hat{U}_k^*\}_{k=0}^{\infty}$ is orthonormal. It is easy to prove that the following relations hold:

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\partial_i\mathbb{F}) = \begin{cases} \partial_I \overset{(k)}{\mathbb{F}}(x'), & i = I, \\ \overset{(k)}{\mathbb{F}}{}'(x'), & i = 3, \end{cases} \qquad \overset{(k)}{\mathbb{M}}(\partial_i\partial_j\mathbb{F}) = \begin{cases} \partial_I\partial_J \overset{(k)}{\mathbb{F}}(x'), & i = I,\ j = J, \\ \partial_I \overset{(k)}{\mathbb{F}}{}'(x'), & i = I,\ j = 3, \\ \overset{(k)}{\mathbb{F}}{}''(x'), & i = j = 3, \end{cases} \tag{3.13}$$

where we have introduced the following notation:

$$\begin{aligned} &\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}'(x') = 2^2(k+1)\sum_{p=0}^{\infty} \overset{(k+2p+1)}{\mathbb{F}}(x') = 2(k+1)\sum_{p=k}^{\infty}\left[1-(-1)^{k+p}\right]\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x') = \\ &= 2(k+1)\left[\sum_{p=k}^{N}\left(1-(-1)^{k+p}\right)\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x') + \overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'(x') - (-1)^k\overset{(-)}{\mathbb{F}}{}'(x')\right], \\ &\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}''(x') = \left(\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}'\right)' = 2^4(k+1)\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)(k+p+2)\overset{(k+2p+2)}{\mathbb{F}}(x') = \\ &= 2(k+1)\left[\sum_{p=k}^{N}(p-k)(k+p+2)\left(1+(-1)^{k+p}\right)\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x') + \overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'' + (-1)^k\overset{(-)}{\mathbb{F}}{}''\right], \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} &\overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty}\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x'), \quad \overset{(+)}{\mathbb{F}}{}''(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty}(p-k)(k+p+2)\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x'), \\ &\overset{(-)}{\mathbb{F}}{}'(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty}(-1)^p\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x'), \quad \overset{(-)}{\mathbb{F}}{}''(x') = \sum_{p=N+1}^{\infty}(-1)^p(p-k)(k+p+2)\overset{(p)}{\mathbb{F}}(x'). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Note that the first relation in (3.14) can be taken as the definition of the «prime » operator, and the second can be obtained by applying the «prime » operator to $\overset{(k)}{\mathbb{F}}$ two times. The following relations are generalizations of (3.13):

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}[P_N(x^3)\partial_i^p\partial_j^q\mathbb{F}] = \begin{cases} \partial_I^p\partial_J^q\overset{(k)}{\mathbb{M}}\left[P_N(x^3)\mathbb{F}\right], & i = I,\ j = J, \\ \partial_I\left\{\overset{(k)}{\mathbb{M}}\left[P_N(x^3)\mathbb{F}\right]\right\}^{(q)}, & i = I,\ j = 3, \\ \left\{\overset{(k)}{\mathbb{M}}\left[P_N(x^3)\mathbb{F}\right]\right\}^{(p+q)}, & i = j = 3. \end{cases} \tag{3.16}$$

where $P_N(x^3)$ is a polynomial of degree N, $k,\ N,\ p,\ q \in \mathbb{N}_0$, and $\left\{\overset{(k)}{\mathbb{M}}\left[P_N(x^3)\mathbb{F}\right]\right\}^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}_0$, means that the «prime » operator is applied m times. To prove first lines of (3.13) and (3.16), we use Definition (3.10). The second and third lines of (3.13) are proved by using (3.4) and (3.6), respectively, and the second and third lines of (3.16) are proved by induction. Using (3.2) and the last relation in (3.16), we can prove the relations

$$\begin{aligned} &\overset{(n)}{\mathbb{M}}\left[(x^3)^s\mathbb{F}\right] = \sum_{p=0}^{2s}2^{-2s}C_{2s}^p\overset{(n-s+p)}{\mathbb{F}}(x'), \\ &\overset{(n)}{\mathbb{M}}\left[(x^3)^s\partial_3^m\mathbb{F}\right] = \sum_{p=0}^{2s}2^{-2s}C_{2s}^p\overset{(n-s+p)}{\mathbb{F}}{}^{(m)}(x'), \quad n,\ s,\ m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

It can be seen that the first relation (3.17) is obtaind from the second for $m = 0$. Let us represent (3.17) for $m = 1$ in another form. Using easy transformations, the first relation in (3.14) and first two relations in (3.15), from the second relation (3.17) for $m = 1$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\overset{(k)}{\mathbb{M}}{}'\big[(x^3)^{s+1}\mathbb{F}\big] = \overset{(k)}{\mathbb{M}}\big[(x^3)^{s+1}\partial_3\mathbb{F}\big] = \sum_{p=0}^{2s+2} 2^{-2(s+1)} C^p_{2s+2}\, \overset{(p-v)}{\mathbb{F}}{}', \\
&= \sum_{p=0}^{2s+2}\sum_{q=l-1}^{N} l\, 2^{-2(s+1)} C^p_{2s+2}\big[1-(-1)^{l+q}\big]\overset{(q)}{\mathbb{F}} + a_{(s,k)}\overset{(+)}{\mathbb{F}}{}', \\
&v = s+1-k,\ \ l = k-s+p,\ \ s \geq 0,\ \ k \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

where we have introduced the notation

$$a_{(s,k)} = 2^{-(2s+1)} \sum_{p=0}^{2s+2} (k-s+p) C^p_{2s+2},\ \ s \geq 0,\ k \geq 0.$$

Let us find the expression for $\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\underset{(s)M}{g^{\ P}_{-}}\mathrm{N}_P\mathbb{F})$. By (2.5) and (3.11), we obtain

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\underset{(s)M}{g^{\ P}_{-}}\mathrm{N}_P\mathbb{F}) = \overset{(k)}{\mathbb{M}}(\underset{(s)M}{g^{\ P}_{-}}\partial_P\mathbb{F}) - \underset{P}{g^{3}_{+}}\overset{(k)}{\mathbb{M}}(x^3\,\underset{(s)M}{g^{\ P}_{-}}\partial_3\mathbb{F}). \tag{3.19}$$

Furthermore, by (2.15), (3.11), (3.16) and the first relation (3.17), we find that

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\underset{(s)M}{g^{\ P}_{-}}\partial_P\mathbb{F}) = \sum_{m=0}^{s}\sum_{n=0}^{2m} 2^{-2m} C^n_{2m}\, \underset{(m)M}{A^{\bar{P}}_{+}}\partial_P{}^{(k-m+n)}\mathbb{F}, \quad k,\, s \in \mathbb{N}_0 \tag{3.20}$$

Whence, for $s = 0$ and $s = 1$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\underset{(0)M}{g^{\ P}_{-}}\partial_P\mathbb{F}) = \overset{(k)}{\mathbb{M}}(\partial_M\mathbb{F}) = \partial_M\overset{(k)}{\mathbb{F}}, \quad k \geq 0, \\
&\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\underset{(1)M}{g^{\ P}_{-}}\partial_P\mathbb{F}) = \partial_P\overset{(k)}{\mathbb{F}} + \frac{1}{4}\underset{M}{A^{\bar{P}}_{+}}\partial_M(\overset{(k-1)}{\mathbb{F}} + 2\overset{(k)}{\mathbb{F}} + \overset{(k+1)}{\mathbb{F}}), \quad k \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Here, we have introduced the notation $\underset{M}{A^{\bar{P}}_{+}} \equiv \underset{(1)M}{A^{\bar{P}}_{+}} = \underset{M}{g^{\bar{P}}_{-}} - \underset{M}{g^{\bar{P}}_{+}}$. Moreover, we assume that $\overset{(m)}{\mathbb{F}} = 0$ if $m < 0$. On what follows, we assume that this condition holds. Analogously, by (2.15), (3.11), (3.16) and (3.18), we have

$$\begin{aligned}
&\overset{(k)}{\mathbb{M}}(x^3\,\underset{(s)M}{g^{\ P}_{-}}\partial_3\mathbb{F}) = \sum_{m=0}^{s}\underset{(m)M}{A^{\bar{P}}_{+}}\overset{(k)}{\mathbb{M}}{}'[(x^3)^{m+1}\mathbb{F}] = \sum_{m=0}^{s}\sum_{n=0}^{2m+2} 2^{-2(m+1)} C^n_{2m+2}\underset{(m)M}{A^{\bar{P}}_{+}}\overset{(n-v)}{\mathbb{F}}{}'(x') \\
&= \sum_{m=0}^{s}\sum_{n=0}^{2m+2}\sum_{q=l-1}^{N} 2^{-2(m+1)} C^n_{2m+2}\, l\, \underset{(m)M}{A^{\bar{P}}_{+}}\big[1+(-1)^{l+q}\big]\overset{(q)}{\mathbb{F}}(x') + \Big(\sum_{m=0}^{s} a_{(m,k)}\underset{(m)M}{A^{\bar{P}}_{+}}\Big)\overset{(+)}{\mathbb{F}}{}', \\
&v = m+1-k, \quad l \equiv k-m+n, \quad N \geq s+k+1, \quad k \geq 0, \quad s \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Whence, for $s=0$ and $s=1$, we find that

$$\begin{aligned}&\overset{(k)}{\mathbb{M}}(x^3\,\underset{(0)M}{g^{\,P}_{-}}\partial_3\mathbb{F})=\underset{M}{g^{\bar{P}}_{-}}\overset{(k)}{\mathbb{M}'}(x^3\mathbb{F})=\frac{1}{4}\underset{M}{g^{\bar{P}}_{-}}(\overset{(k-1)}{\mathbb{F}}{}'+2\overset{(k)}{\mathbb{F}}{}'+\overset{(k+1)}{\mathbb{F}}{}')\\&=\underset{M}{g^{\bar{P}}_{-}}\big[k\overset{(k)}{\mathbb{F}}+2(k+1)\big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbb{F}}-\overset{(k)}{\mathbb{F}}+\overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'\big)\big],\quad k\geq 0,\end{aligned}\tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}&\overset{(k)}{\mathbb{M}}(x^3\,\underset{(1)M}{g^{\,P}_{-}}\partial_3\mathbb{F})=\underset{M}{g^{\bar{P}}_{-}}\overset{(k)}{\mathbb{M}'}(x^3\mathbb{F})+\underset{M}{A^{\bar{P}}_{+}}\overset{(k)}{\mathbb{M}'}[(x^3)^2\mathbb{F}]=\\&=\underset{M}{g^{\bar{P}}_{-}}\big[k\overset{(k)}{\mathbb{F}}+2(k+1)\big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbb{F}}-\overset{(k)}{\mathbb{F}}+\overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'\big)\big]+\frac{1}{4}\underset{M}{A^{\bar{P}}_{+}}\big[(k-1)\overset{(k-1)}{\mathbb{F}}\\&-4(k+2)\overset{(k)}{\mathbb{F}}-(k+3)\overset{(k+1)}{\mathbb{F}}+8(k+1)\big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbb{F}}+\overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'\big)\big],\quad k\geq 0.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Taking into account (3.20) and (3.22), from (3.19) we obtain the desired relation in the form

$$\begin{aligned}&\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\,\underset{(r)M}{g^{\,P}_{-}}N_P\mathbb{F})=\sum_{s=0}^{r}\underset{(s)M}{A^{\bar{P}}_{+}}\big\{\nabla_P\overset{(k)}{\mathbb{M}}[(x^3)^s\mathbb{F}]-\underset{P}{g^{\bar{3}}_{+}}\overset{(k)}{\mathbb{M}'}[(x^3)^{s+1}\mathbb{F}]\big\}=\\&=\sum_{s=0}^{r}\sum_{p=0}^{2s}2^{-2s}\underset{(s)M}{A^{\bar{P}}_{+}}C^p_{2s}\nabla_P\overset{(p-u)}{\mathbb{F}}-\underset{P}{g^{\bar{3}}_{+}}\sum_{s=0}^{r}\sum_{p=0}^{2s+2}2^{-2(s+1)}\underset{(s)M}{A^{\bar{P}}_{+}}C^p_{2s+2}\overset{(p-v)}{\mathbb{F}}{}',\\&u=s-k,\ v=u+1,\end{aligned}\tag{3.25}$$

where the expression for $\overset{(p-v)}{\mathbb{F}}{}'$ is given by the first formula (3.14) for $k=p-v$.

From (3.25) for $s=0$ and $s=1$ by (3.21), (3.23) and (3.24) we find that

$$\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\,\underset{(0)I}{g^{\,J}_{-}}N_J\mathbb{F})=\overset{(k)}{\mathbb{M}}(N_I\mathbb{F})=\nabla_I\overset{(k)}{\mathbb{F}}-\underset{I}{g^{\bar{3}}_{+}}\big[k\overset{(k)}{\mathbb{F}}+2(k+1)\big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbb{F}}-\overset{(k)}{\mathbb{F}}+\overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'\big)\big],\ k\geq 0,\tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}&\overset{(k)}{\mathbb{M}}(\,\underset{(1)I}{g^{\,J}_{-}}N_J\mathbb{F})=\overset{(k)}{\mathbb{M}}[(\underset{I}{g^{\bar{J}}_{-}}+x^3\underset{I}{A^{\bar{J}}_{+}})N_J\mathbb{F}]=\nabla_I\overset{(k)}{\mathbb{F}}+\\&+\frac{1}{4}\underset{I}{A^{\bar{J}}_{+}}\nabla_J\big(\overset{(k-1)}{\mathbb{F}}+2\overset{(k)}{\mathbb{F}}+\overset{(k+1)}{\mathbb{F}}\big)-\underset{J}{g^{\bar{3}}_{+}}\big\{\underset{I}{g^{\bar{J}}_{-}}\big[k\overset{(k)}{\mathbb{F}}+2(k+1)\big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbb{F}}-\overset{(k)}{\mathbb{F}}+\overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'\big)\big]\\&+\frac{1}{4}\underset{I}{A^{\bar{J}}_{+}}\big[(k-1)\overset{(k-1)}{\mathbb{F}}-4(k+2)\overset{(k)}{\mathbb{F}}-(k+3)\overset{(k+1)}{\mathbb{F}}+8(k+1)\big(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\mathbb{F}}+\overset{(+)}{\mathbb{F}}{}'\big)\big]\big\},\ k\geq 0.\end{aligned}\tag{3.27}$$

Therefore, we have deduced the main relation in the form (3.25); using this relation from the equations of motion (2.14), the heat influx equation (2.18), CR of physical content (2.22), and CR of heat content (2.23) (second formula) of approximation of order r, we obtain the corresponding relations in moments; in turn by using the above rule, from them, we obtain the corresponding relations for multilayer thin bodies. Analogously, we obtain the boundary conditions of physical and heat contents in moments. Formulas (3.26) and (3.27) are applied in deducing the above relations from the corresponding relations of zero and first approximations. Formulas analogous to (3.26) and (3.27) certainly hold for the Legendre polynomial system. The relation for Legendre polynomial system analogous to (3.25) is very cumbersome, and so we do not write it.

4 Systems of Equations of Motion in Moments for Multilayer Thin Bodies With One Small Size

4.1 Systems of equations of motion in moments of contravariant components of stress tensors and couple stresses with respect with respect to Chebyshev polynomial systems for multilayer thin bodies with one small size

We restrict ourselves to obtaining the systems of equations of motion of approximations $(0,N)$ and $(1,N)$ in moments. Using the rule presented above, by analogous systems of equations from [8] (see also [4–7]), we represent the desired systems of equations in the form

$$\begin{gathered}\left\{\nabla_\alpha \overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{I} - \bar{g}^{3}_{+\alpha I}\left[k\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{I} + 2(k+1)\left(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{I} - \overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{I}\right)\right] + \right. \\ \left. +2(k+1)\sum_{p=k}^{N}\left[1-(-1)^{k+p}\right]\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{3}\right\} + \rho\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{F}}}{}_{\alpha} = \rho\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\partial_t^2\mathbf{u}}}, \\ \{\mathbf{P}\Rightarrow\boldsymbol{\mu}\} + \underset{\tilde{\alpha}}{\overset{2}{\mathbf{C}}}\otimes\underset{\tilde{\alpha}}{\overset{(k)}{\mathbf{P}}} + \rho\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{m}}}{}_{\alpha} = \underset{\tilde{\alpha}}{\mathbf{J}}\cdot\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\partial_t^2\boldsymbol{\varphi}}}, \quad k=\overline{0,N}, \quad \alpha=\overline{0,K};\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}\left\{\nabla_\alpha \overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{I} + \frac{1}{4}\left(\bar{g}^{J}_{-\alpha I} - \bar{g}^{J}_{+\alpha I}\right)\nabla_\alpha\nabla_\alpha\left(\overset{(k-1)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{I} + 2\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{I} + \overset{(k+1)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{I}\right) - \right. \\ -\bar{g}^{3}_{+\alpha I}\left\{\bar{g}^{I}_{-\alpha J}\left[k\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{J} + 2(k+1)\left(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{J} - \overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{J}\right)\right] + \right. \\ \left. \left. +\frac{1}{4}\left(\bar{g}^{I}_{-\alpha J} - \bar{g}^{I}_{+\alpha J}\right)\left[(k-1)\overset{(k-1)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{J} - 4(k+2)\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{J} - (k+3)\overset{(k+1)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{J} + 8(k+1)\left(\sum_{p=k}^{N}\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{J}\right)\right]\right\} + \right. \\ \left. +2(k+1)\left[\sum_{p=k}^{N}(1-(-1)^{k+p})\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{3}\right]\right\} + \rho\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{F}}}{}_{\alpha} = \rho\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\partial_t^2\mathbf{u}}}, \\ \{\mathbf{P}\Rightarrow\boldsymbol{\mu}\} + \underset{\tilde{\alpha}}{\overset{2}{\mathbf{C}}}\otimes\underset{\tilde{\alpha}}{\overset{(k)}{\mathbf{P}}} + \rho\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{m}}}{}_{\alpha} = \underset{\tilde{\alpha}}{\mathbf{J}}\cdot\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\partial_t^2\boldsymbol{\varphi}}}, \quad k=\overline{0,N}, \quad \alpha=\overline{0,K}.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Here, the notation $\{\mathbf{P}\Rightarrow\boldsymbol{\mu}\}$ means that the expression in brackets is obtained from the expression in brackets of the previous relation if the letter $\mathbf{P}$is replaced with $\boldsymbol{\mu}$; this notation is also used in what follows. Note that Eqs. (4.1) and (4.2) are also obtained by using formulas (3.26) and (3.27).

4.2 Systems of equations of motion in moments of contravariant components of stress tensors and couple stresses with respect to Legendre polynomial systems for multilayer thin bodies with one small size

Let us write systems of equations of motion of approximations $(0,N)$ and $(1,N)$ in moments taking into account only boundary conditions of physical content on frontal

surface, since the systems of equations without boundary conditions on frontal surfaces, which can be obtained by using the corresponding systems of equations from [4–6, 8], have the form analogous to (4.1) and (4.2). It is easy to prove that analogously to the system of equations for a one-layer classical elastic body [11], the desired systems of equations are represented in the form (see also [4–8])

$$\begin{gathered}\left\{\nabla_{\alpha I}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}-\underset{\alpha I}{\bar{g}^{3}_{+}}\left[k\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}-(2k+1)\sum_{p=0}^{k}\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}\right]-(2k+1)\sum_{p=0}^{k}\left[1-(-1)^{k+p}\right]\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{3}}+\right.\\ \left.+(2k+1)\left[\sqrt{\underset{\alpha}{g^{33}}}\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}+(-1)^{k}\sqrt{\underset{\alpha}{g^{33}}}\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}\right]\right\}+\rho\underset{\alpha}{\overset{(k)}{\mathbf{F}}}=\rho\partial_t^2\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}},\\ \left\{\mathbf{P}\Rightarrow\boldsymbol{\mu}\right\}+\underset{\alpha}{\overset{2}{\underset{\approx}{\mathbf{C}}}}\otimes\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}}+\rho\underset{\alpha}{\overset{(k)}{\mathbf{m}}}=\underset{\alpha}{\underset{\sim}{\mathbf{J}}}\cdot\partial_t^2\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\boldsymbol{\varphi}}},\quad k=\overline{0,N},\quad \alpha=\overline{0,K};\end{gathered}\tag{4.3}$$

$$\begin{gathered}\left\{\nabla_{\alpha I}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}+\frac{1}{2}\left(\underset{\alpha M}{\bar{g}^{P}_{-}}-\underset{\alpha M}{\bar{g}^{P}_{+}}\right)\left(\frac{k}{2k-1}\nabla_{\alpha P}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{M}}+\nabla_{\alpha P}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{M}}+\frac{k+1}{2k+3}\nabla_{\alpha P}\overset{(k+1)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{M}}\right)-\right.\\ -(2k+1)\sum_{p=0}^{k}\left[1-(-1)^{k+p}\right]\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{3}}-\underset{\alpha P}{\bar{g}^{3}_{+}}\left[\underset{\alpha M}{\bar{g}^{P}_{-}}\left[k\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{M}}-(2k+1)\sum_{p=0}^{k}\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{M}}\right]+\right.\\ \left.+(\underset{\alpha I}{\bar{g}^{P}_{-}}-\underset{\alpha I}{\bar{g}^{P}_{+}})\left[\frac{(k-1)k}{2(2k-1)}\overset{(k-1)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}+k\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}-\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}\overset{(k+1)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}-(2k+1)\sum_{p=0}^{k}\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}\right]\right]+\\ \left.+(2k+1)\left[\sqrt{\underset{\alpha}{g^{33}}}\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}+(-1)^{k}\sqrt{\underset{\alpha}{g^{33}}}\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}\right]\right\}+\rho\underset{\alpha}{\overset{(k)}{\mathbf{F}}}=\rho\partial_t^2\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}},\\ \left\{\mathbf{P}\Rightarrow\boldsymbol{\mu}\right\}+\underset{\alpha}{\overset{2}{\underset{\approx}{\mathbf{C}}}}\otimes\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}}+\rho\underset{\alpha}{\overset{(k)}{\mathbf{m}}}=\underset{\alpha}{\underset{\sim}{\mathbf{J}}}\cdot\partial_t^2\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\boldsymbol{\varphi}}},\quad k=\overline{0,N},\quad \alpha=\overline{0,K}.\end{gathered}\tag{4.4}$$

Note that Eqs. (4.3) and (4.4) are deduced by using formulas for Legendre polynomials that are analogous to (3.26) and (3.27). Also, note that $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}$ ($\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\boldsymbol{\mu}}}$) and $\overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{\mathbf{P}}}$ ($\overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{\boldsymbol{\mu}}}$) ($\alpha=\overline{1,K-1}$) are stress vectors (couple stresses) of interaction between the layers α and $\alpha+1$, which act on the surfaces $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{S}}$ and $\overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{S}}$, respectively, and $\overset{(+)}{\underset{1}{\mathbf{P}}}$ ($\overset{(+)}{\underset{1}{\boldsymbol{\mu}}}$) and $\overset{(-)}{\underset{K}{\mathbf{P}}}$ ($\overset{(-)}{\underset{K}{\boldsymbol{\mu}}}$) are given stress vectors (couple stresses) on the frontal surfaces $\overset{(+)}{\underset{1}{S}}$ and $\overset{(-)}{\underset{K}{S}}$, respectively. The systems of equations of heat influx of approximations $(0,N)$ and $(1,N)$, and also CR of heat content for multilayer thin bodies are obtained in full analogy with (4.1)–(4.4). Therefore, for brevity, we do not dwell on them. To help the reader to understand this work, we refer him to [4–8, 55], where for the theories of one-layer thin body with one small size and two small sizes, and also for theory of multilayer constructions with the use of the Legendre and Chebyshev polynomial systems, many analogous problems are presented in detail. In particular, using the deduced recursive relations for the Legendre and Chebyshev polynomial systems, these works obtained the moments of derivatives of the first and second order of a scalar function, tensors of the first and second ranks and their components, and also some differential operators of these quantities. Also, these works obtained constitutive relations of physical and heat contents, equations of motion and heat influx, boundary conditions of various kind in moments with respect to the Legendre and

Chebyshev polynomial systems, and also initial conditions of kinematic and heat contents. Moreover, the constitutive relations were also obtained for an inhomogeneous material. These works presented the statements of related and non-related dynamical problems in moments of approximation (r, N) of micropolar thermomechanics of a deformable rigid thin body and also the statement of non-stationary temperature problem in moments of approximation (r, N), where r and N are arbitrary nonnegative integers. All relations for one-layer thin body presented in this paragraph are automatically transferred to the case of multilayer thin body theory by using the rule presented above.

4.3 Systems of equations in moments of the displacement vector with respect to Legendre and Chebyshev polynomial systems for multilayer thin bodies with one small size

Let us write systems of equations of zero and first approximation in moments for the displacement vector. The system of equations of zero approximation in moments with respect to Legendre and Chebyshev polynomials has the form

$$\begin{aligned}&\underset{\alpha}{\mathbf{A}}^{\bar{I}\cdot\bar{J}\cdot}\cdot\underset{\alpha}{\nabla}_I\underset{\alpha}{\nabla}_J\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}+\Big(\underset{\alpha}{\mathbf{A}}^{\bar{3}\cdot\bar{I}\cdot}+\underset{\alpha}{\mathbf{A}}^{\bar{I}\cdot\bar{3}\cdot}\Big)\cdot\underset{\alpha}{\nabla}_I\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}{}'+\underset{\alpha}{\mathbf{A}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot}\cdot\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}{}''-\\&-\Big(\underset{\alpha}{\mathbf{b}}^{\bar{I}}\underset{\alpha}{\nabla}_I\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}+\underset{\alpha}{\mathbf{b}}^{\bar{3}}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}{}'\Big)+\rho\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{F}}}=\underset{\alpha}{\rho}\,\partial_t^2\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}},\quad k\in\mathbb{N}_0,\quad\alpha=\overline{0,K}.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Taking into account the formulas for moments of the kth order of first and second derivatives of a vector(vector components, a scalar function) with respect to these polynomial systems [4–8], from (4.5), we obtain the desired systems of equations of zero approximation in moments. For brevity, we do not write them. Analogously to (4.5), the system of equations of the first approximation is represented in the form

$$\begin{aligned}&\underset{\alpha}{\mathbf{A}}^{\bar{M}\cdot\bar{N}\cdot}\cdot\left\{\underset{\alpha M}{g^{\bar{P}}_{-}}\underset{\alpha N}{g^{\bar{Q}}_{-}}\underset{\alpha}{\nabla}_P\underset{\alpha}{\nabla}_Q\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}+\left[\underset{(1\alpha)M N}{B^{\bar{P}\bar{Q}}_{+\,+}}\underset{\alpha}{\nabla}_P\underset{\alpha}{\nabla}_Q\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{M}}}(x^3\underset{\alpha}{\mathbf{u}})+\underset{(2\alpha)M N}{B^{\bar{P}\bar{Q}}_{+\,+}}\underset{\alpha}{\nabla}_P\underset{\alpha}{\nabla}_Q\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{M}}}\big((x^3)^2\underset{\alpha}{\mathbf{u}}\big)\right]\right\}+\\&+\Big(\underset{\alpha}{\mathbf{A}}^{\bar{3}\cdot\bar{M}\cdot}+\underset{\alpha}{\mathbf{A}}^{\bar{M}\cdot\bar{3}\cdot}\Big)\cdot\left[\underset{\alpha M}{g^{\bar{P}}_{-}}\underset{\alpha}{\nabla}_P\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}{}'+(\underset{\alpha M}{g^{\bar{P}}_{-}}-\underset{\alpha M}{g^{\bar{P}}_{+}})\underset{\alpha}{\nabla}_P\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{M}}}{}'\Big(x^3\underset{\alpha}{\mathbf{u}}\Big)\right]+\underset{\alpha}{\mathbf{A}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot}\cdot\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}{}''-\\&-\underset{\alpha}{\mathbf{b}}^{\bar{M}}\left[\underset{\alpha M}{g^{\bar{P}}_{-}}\underset{\alpha}{\nabla}_P\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}+\Big(\underset{\alpha M}{g^{\bar{P}}_{-}}-\underset{\alpha M}{g^{\bar{P}}_{+}}\Big)\underset{\alpha}{\nabla}_P\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{M}}}\big(x^3\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}\big)\right]-\underset{\alpha}{\mathbf{b}}^{\bar{3}}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}{}')+\underset{\alpha}{\rho}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{F}}}=\underset{\alpha}{\rho}\,\partial_t^2\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}},\\&k\in\mathbb{N}_0,\quad\alpha=\overline{0,K},\end{aligned}\tag{4.6}$$

where we have introduced the following notation:

$$\begin{aligned}&\underset{(1\alpha)M N}{B^{\bar{P}\bar{Q}}_{+\,+}}=\Big(\underset{\alpha M}{g^{\bar{P}}_{-}}-\underset{\alpha M}{g^{\bar{P}}_{+}}\Big)\underset{\alpha N}{g^{\bar{Q}}_{-}}+\underset{\alpha M}{g^{\bar{P}}_{-}}\Big(\underset{\alpha N}{g^{\bar{Q}}_{-}}-\underset{\alpha N}{g^{\bar{Q}}_{+}}\Big),\\&\underset{(2\alpha)M N}{B^{\bar{P}\bar{Q}}_{+\,+}}=\underset{(2\alpha)M}{A^{\bar{P}}_{+}}\underset{\alpha N}{g^{\bar{Q}}_{-}}+\underset{(1\alpha)M}{A^{\bar{P}}_{+}}\underset{(1\alpha)N}{A^{\bar{Q}}_{+}}+\underset{\alpha M}{g^{\bar{P}}_{-}}\underset{(2\alpha)N}{A^{\bar{Q}}_{+}},\\&\underset{(1\alpha)M}{A^{\bar{P}}_{+}}=\underset{\alpha M}{g^{\bar{P}}_{-}}-\underset{\alpha M}{g^{\bar{P}}_{+}},\quad\underset{(2\alpha)M}{A^{\bar{P}}_{+}}=\Big(\underset{\alpha N}{g^{\bar{P}}_{-}}-\underset{\alpha N}{g^{\bar{P}}_{+}}\Big)\Big(\underset{\alpha M}{g^{\bar{N}}_{-}}-\underset{\alpha M}{g^{\bar{N}}_{+}}\Big).\end{aligned}$$

Taking into account the expressions for the kth-order moments entering (4.6) and using the corresponding formulas for Legendre and Chebyshev polynomial systems

[4–8] from (4.6), we obtain various representations of the equations of of first approximation of the displacement vector in moments with respect to these polynomial systems. Also, it is easy to deduce the equations of motion of first approximation in moments for the displacement vector with respect to the systems of Chebyshev polynomials of the first kind. For brevity, we do not write the equations in moments mentioned in this paragraph.

It should be noted that to close systems (4.1)–(4.4), we need to add to them the system of equations of heat influx, CR, boundary and initial conditions of physical and heat contents in moments of the corresponding approximations, and also inter-layer contact conditions depending on the connections of neighboring surfaces. Hence to close systems (4.5) and (4.6), we need to add to them all relations of the previous proposition, except for CR in the case of first boundary-value problem where kinematic boundary conditions are given on the whole surface. Of course, it is easy to write all missed relations and formulate the statement of problems analogous to those presented in [4–8, 55–58] (CR; see also above) for one-layer domains, except for inter-layer contact conditions, by using the rule presented above. Otherwise, we need to repeat almost all presented in [4–8, 55] being applied to multilayer thin body theory. Owing to this, we do not dwell on them and consider inter-layer contact conditions below.

5 Inter-Layer Contact Conditions

In studying strained-deformed states of multilayer constructions and composite media, as a rule, one assumes that component layers (elements, phases) work jointly, without sliding. Obviously, such a model does not cover the variety of connection methods used in technology and does not take into account the existence of interphase defects, which manifest themselves in non-perfect connection of phases in contact. Defects of such a type often are undoubt because of peculiarities of technological character (see [72–74]). Therefore, the deformation of multilayer thin bodies can be without violation or with violation of complete layer contact owing to their separation in normal or tangential direction. Between the layers, there can arise contact domain and contact-free domain. Moreover, the boundaries of these domains can vary in the deformation process, the layer can slide with respect to each other, the sliding can be with friction,etc. All these phenomena can essentially influence on the mechanical behavior of a thin body, its strained-deformed state. Of course, the account of these phenomena is necessary in studying strained-deformed state of multilayer bodies. In contrast to other parametrization, the use of frontal surfaces as base surfaces in parametrization of multilayer thin body domain allows one to easily take into account these phenomena. In consideration the phenomena occurring on frontal surfaces, the main problem is the problem of modelling the interface. In this direction,there exist two approaches. The first approach is physical, which take into account thin adhesion layers via generalized weld condition of elements being in contact. For the first time, such an approach was proposed for heat conduction problems in [75]. Later on, it was generalized to mechanical problems [76]. The second approach is phenological; it is based on the assumption that a priori, the exist

discontinuity zones of displacements. To study these problems, we assume that a multilayer thin construction consists of K layers. Denote by $\overset{(+)}{S}_{\alpha}$ and $\overset{(-)}{S}_{\alpha}$ $(\alpha = \overline{1,K})$ the exterior and inner surfaces of the layer α $(\alpha = \overline{1,K})$, respectively and consider several cases of mutual relation of neighboring surfaces $\overset{(+)}{S}_{\alpha}$ $\overset{(-)}{S}_{\alpha+1}$ $(\alpha = \overline{1,K-1})$, which are important in practice.

5.1 Weld conditions (complete ideal contact conditions)

In this case the forces and moments of interaction between the layers α and $\alpha+1$ $(\alpha = \overline{1,K-1})$ are unknown. These forces and moments certainly are equal and have opposite directions. Therefore, there additionally arise six unknown functions. However, in the case considered, we have six additional conditions, which express the continuity of displacement vectors and the rotation of welded surface points. In other words, displacement vectors and rotation vectors of contacted surfaces are equal. Denoting the forces and moments of interaction of the contacted surfaces $\overset{(+)}{S}_{\alpha}$ and $\overset{(-)}{S}_{\alpha+1}$ $(\alpha = \overline{1,K-1})$ by $\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha}$, $\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}$ and $\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1}$, $\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha+1}$ $(\alpha = \overline{1,K-1})$, respectively, and the displacement and rotation vectors of points of these surfaces by $\overset{(+)}{\mathbf{u}}_{\alpha}$, $\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}$ and $\overset{(-)}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}$, $\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}$ $(\alpha = \overline{1,K-1})$, we can represent the complete contact conditions in micropolar theory of multilayer thin bodies in the form

$$\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha} = -\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1}, \quad \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha} = -\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha+1}, \quad \overset{(+)}{\mathbf{u}}_{\alpha} = \overset{(-)}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}, \quad \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha} = \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}, \quad \alpha = \overline{1,K-1}. \tag{5.1}$$

Neglecting the characteristics of micropolar theory (the second and fourth relations) in (5.1), we obtain the ideal contact conditions for the classical theory (the first and third relations).

5.2 Conditions under relative displacement of contacted layer surfaces

As was said above, in the process of deformation of a multilayer construction, relative displacements of points of the surfaces $\overset{(+)}{S}_{\alpha}$ and $\overset{(-)}{S}_{\alpha+1}$ withe the same Gaussian coordinates (x^1, x^2) are possible. Let us consider various variants. First of all, we note that there exist bounded limit intensities of coupling forces of the layers α and $\alpha+1$ $(\alpha = \overline{1,K-1})$ in normal and tangential direction. Denote the normal and tangent components of the limit force of action of the layer α on the layer $\alpha+1$ by

$$\overset{(-)}{\mathbf{P}}{}^{*}_{\alpha+1(n)} = \overset{(-)}{P}{}^{*}_{\alpha+1(n)}(x^1,x^2)\overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}, \quad \overset{(-)}{\mathbf{P}}{}^{*}_{\alpha+1(s)} = \overset{(-)}{P}{}^{*}_{\alpha+1(s)}(x^1,x^2,\overset{(-)}{\mathbf{s}}_{\alpha+1})\overset{(-)}{\mathbf{s}}_{\alpha+1}, \quad \alpha = \overline{1,K-1},$$

respectively. Here, certainly, $\overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}$ and $\overset{(-)}{\mathbf{s}}_{\alpha+1}$ are unit exterior normal and tangent vectors to the surface $\overset{(-)}{S}_{\alpha+1}$. Note that we take into account the possibility of dependence

of the limit tangent force preventing the mutual sliding of layers of the direction in the tangent plane (anisotropy of the limit tangent force).

5.3 Conditions under relative displacement of points of ideal (smooth) contacted layer surfaces

In this case, a free slipping of layers with respect to each other can take place in the process of deformation of a multilayer thin body. The parametrization retains valid all the relations of the theory of thin bodies in the case considered here, only the required and given functions are changed. Obviously, if the layers are united, then the following equalities hold:

$$\begin{gathered}\overset{(+)}{\mathbf{r}}_{\alpha}=\overset{\circ\,(+)}{\mathbf{r}}_{\alpha}(x^1,x^2)+\overset{(+)}{\mathbf{u}}_{\alpha}(x^1,x^2),\ \overset{(-)}{\mathbf{r}}_{\alpha}(x^1,x^2)=\overset{\circ\,(-)}{\mathbf{r}}_{\alpha}(x^1,x^2)+\overset{(-)}{\mathbf{u}}_{\alpha}(x^1,x^2),\ \alpha=\overline{1,K},\\ \overset{\circ\,(+)}{\mathbf{r}}_{\alpha}=\overset{\circ\,(-)}{\mathbf{r}}_{\alpha+1}(x^1,x^2),\quad \overset{(+)}{\mathbf{r}}_{\alpha}(x^1,x^2)=\overset{(-)}{\mathbf{r}}_{\alpha+1}(x^1,x^2),\quad (\overset{(+)}{\mathbf{u}}_{\alpha}=\overset{(-)}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}),\quad \alpha=\overline{1,K-1}.\end{gathered}\tag{5.2}$$

where $\overset{(+)}{\mathbf{r}}_{\alpha}$ ($\overset{\circ\,(+)}{\mathbf{r}}_{\alpha}$) and $\overset{(-)}{\mathbf{r}}_{\alpha}$ ($\overset{\circ\,(-)}{\mathbf{r}}_{\alpha}$) are the radius-vectors of the surfaces $\overset{(+)}{S}_{\alpha}$ ($\overset{\circ\,(+)}{S}_{\alpha}$) and $\overset{(-)}{S}_{\alpha}$ ($\overset{\circ\,(-)}{S}_{\alpha}$), respectively, in the deformed (non-deformed) state of the multilayer thin body. It is not difficult to see that in this case (under a slipping of absolutely smooth contacted surfaces) we have the following relations instead of (5.2):

$$\begin{gathered}\overset{(+)}{\mathbf{r}}_{\alpha}=\overset{\circ\,(+)}{\mathbf{r}}_{\alpha}(x^1,x^2)+\overset{(+)}{\mathbf{u}}_{\alpha}(x^1,x^2),\ \overset{(-)}{\mathbf{r}}_{\alpha}(x^1,x^2)=\overset{\circ\,(-)}{\mathbf{r}}_{\alpha}(x^1,x^2)+\overset{(-)}{\mathbf{u}}_{\alpha}(x^1,x^2),\ \alpha=\overline{1,K},\\ \overset{\circ\,(+)}{\mathbf{r}}_{\alpha}=\overset{\circ\,(-)}{\mathbf{r}}_{\alpha+1}(x^1,x^2),\quad \overset{(+)}{\mathbf{r}}_{\alpha}(x^1,x^2)\neq\overset{(-)}{\mathbf{r}}_{\alpha+1}(x^1,x^2),\quad \overset{(+)}{\mathbf{u}}_{\alpha}(x^1,x^2)\neq\overset{(-)}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}(x^1,x^2),\\ \mathbf{v}_{\alpha}(x^1,x^2)=\overset{(-)}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}(x^1,x^2)-\overset{(+)}{\mathbf{u}}_{\alpha}(x^1,x^2),\quad \alpha=\overline{1,K-1}.\end{gathered}\tag{5.3}$$

Obviously, $\mathbf{v}_{\alpha}(x^1,x^2)$ is the vector of the relative displacement of the corresponding points of the contacted surfaces $\overset{(+)}{S}_{\alpha}$ and $\overset{(-)}{S}_{\alpha}$ ($\alpha=\overline{1,K-1}$), being an unknown in the considered case. The absence of the friction between the layers allows us to write the following additional relations:

$$\begin{gathered}\overset{(-)}{u}_{\alpha+1(n)}=\overset{(+)}{u}_{\alpha(n)}\ (v_{\alpha(n)}=0),\ \overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha(s)}=0,\ \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1(s)}=0,\ \overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha(n)}=-\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1(n)},\\ \alpha=\overline{1,K-1},\quad x'\in\overset{(+)}{S}{}^{0}_{\alpha}\subset\overset{(+)}{S}_{\alpha},\end{gathered}\tag{5.4}$$

where $\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha(s)}$ ($\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1(s)}$) and $\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha(n)}$ ($\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1(n)}$) are the tangent and normal components of the stress vector (the interaction force intensity) $\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha}$ ($\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1}$), i.e.,

$$\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha}=\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha(s)}+\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha(n)},\quad \overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1}=\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1(s)}+\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1(n)},\quad \alpha=\overline{1,K-1}.$$

It is not difficult to see that (5.4) implies the following relations:

$$\begin{gathered}\overset{(-)}{u}_{\alpha+1}(n)=\overset{(+)}{u}_{\alpha}(n),\quad \overset{(-)}{v}_{\alpha}(n)=0),\quad \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\mathbf{u}}_{\alpha+1},\overset{}{\vartheta}_{\alpha+1})\cdot\overset{(-)}{\mathbf{s}}_{\alpha+1}=0,\quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}(\mathbf{u},\vartheta)\cdot\overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha}=0,\\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}(\mathbf{u},\vartheta)\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}=\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\mathbf{u}}_{\alpha+1},\overset{}{\vartheta}_{\alpha+1})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha},\quad \alpha=\overline{1,K-1},\quad x'\in\overset{(+)}{S}{}^{0}_{\alpha}\subset\overset{(+)}{S}_{\alpha}.\end{gathered}\tag{5.5}$$

Here the notation $\overset{(\sim)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}(\mathbf{u},\vartheta)$, $\sim\in\{-,+\}$ means the dependence of $\overset{(\sim)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}$ on $\underset{\alpha}{\mathbf{u}}$ and $\underset{\alpha}{\vartheta}$, and $\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}=\underset{\sim}{\mathbf{P}}_{\alpha}|_{x^3=0}$, $\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}=\underset{\sim}{\mathbf{P}}_{\alpha}|_{x^3=1}$. The corresponding relations are obtained from the first equality of (2.21) with $\underset{\approx}{\mathbf{A}}_{\alpha}=0$, $\underset{\alpha}{\boldsymbol{\varphi}}=0$. In the case considered here, relations (5.5) close the system of equations of the classic theory of multilayer thin bodies. In the case of the micropolar theory of multilayer thin bodies equalities (5.5) should be replaced by the following ones:

$$\begin{gathered}\overset{(-)}{u}_{\alpha+1}(n)=\overset{(+)}{u}_{\alpha}(n),\quad \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}(n)=\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}(n),\quad \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\mathbf{u}}_{\alpha+1},\overset{}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1},\overset{}{\vartheta}_{\alpha+1})\cdot\overset{(-)}{\mathbf{s}}_{\alpha+1}=0,\\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\vartheta)\cdot\overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha}=0,\quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\vartheta)\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}=\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\mathbf{u}}_{\alpha+1},\overset{}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1},\overset{}{\vartheta}_{\alpha+1})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha},\\ \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1})\cdot\overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}=0,\quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha}(\boldsymbol{\varphi})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}=0,\\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha}(\boldsymbol{\varphi})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha}=\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha},\quad \alpha=\overline{1,K-1},\quad x'\in\overset{(+)}{S}{}^{0}_{\alpha}\subset\overset{(+)}{S}_{\alpha}.\end{gathered}\tag{5.6}$$

In this case, along with the vector of relative displacement, the vector of relative rotation $\underset{\alpha}{\boldsymbol{\psi}}=\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}-\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}$ of the corresponding points of the contacted surfaces is introduced into consideration; $\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}(n)$ and $\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}(n)$ are the normal components of the vectors $\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}$ and $\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}$, respectively. Note that relations (5.6) are written subject to the fact that each layer has a center of symmetry, i.e., the tensors $\underset{\approx}{\mathbf{A}}_{\alpha}=0$ and $\underset{\approx}{\mathbf{B}}_{\alpha}=0$ in (2.21) for all α. If this is not the case, then these relations should be replaced by other ones depending on the considered governing relations. For example, if relations (2.21) are considered as governing ones for a material having no center of symmetry (see [8]), then instead of (5.6) we have

$$\begin{gathered}\overset{(-)}{u}_{\alpha+1}(n)=\overset{(+)}{u}_{\alpha}(n),\quad \overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}(n)=\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}(n),\quad \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\mathbf{u}}_{\alpha+1},\overset{}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1},\overset{}{\vartheta}_{\alpha+1})\cdot\overset{(-)}{\mathbf{s}}_{\alpha+1}=0,\\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\vartheta)\cdot\overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha}=0,\quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\vartheta)\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}=\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\mathbf{u}}_{\alpha+1},\overset{}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1},\overset{}{\vartheta}_{\alpha})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha},\\ \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1},\overset{}{\mathbf{u}}_{\alpha+1},\overset{}{\vartheta}_{\alpha+1})\cdot\overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}=0,\quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha}(\boldsymbol{\varphi},\mathbf{u},\vartheta)\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}=0,\\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha}(\boldsymbol{\varphi},\mathbf{u},\vartheta)\cdot\overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha}=\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1},\overset{}{\mathbf{u}}_{\alpha+1},\overset{}{\vartheta}_{\alpha})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha},\quad \alpha=\overline{1,K-1},\quad x'\in\overset{(+)}{S}{}^{0}_{\alpha}\subset\overset{(+)}{S}_{\alpha}.\end{gathered}\tag{5.7}$$

Note also that the contact conditions should be supplied with the conditions of heat content on the contacted surfaces, which is not difficult. Therefore, in order to shorten the presentation, we do not consider them here.

5.4 Conditions under relative displacement of points of uneven contacted surfaces of layers

In the case considered here, the slipping with the friction of layers with respect to each other can take place in the process of deformation of the multilayer thin body. The relative slipping does not occur until the magnitude of the tangent component of the interaction force $\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha}(s)$ ($\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1}(s)$) (force of friction) between the contacted surfaces reaches its limit (maximal possible) value $\left|\overset{(+)}{\mathbf{P}}{}^{*}_{\alpha}\right|$ $\left(\left|\overset{(-)}{\mathbf{P}}{}^{*}_{\alpha+1}\right|\right)$, therefore, $\underset{\alpha}{\mathbf{v}}(x^1,x^2)=0$, $\alpha=\overline{1,K-1}$.

When the force of friction reaches its limit value, the slipping begins, and the relations presented above should be replaced by other ones. First of all, note that for the case of the classic theory of multilayer thin bodies instead of (5.5) we have

$$\begin{gathered}\overset{(-)}{u}_{\alpha+1}(n)=\overset{(+)}{u}_{\alpha}(n),\quad \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha+1}(\underset{\alpha+1}{\mathbf{u}},\underset{\alpha+1}{\vartheta})\cdot\overset{(-)}{\mathbf{s}}_{\alpha+1}=\overset{(-)}{P}{}^{*}_{\alpha+1}(s),\quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}(\underset{\alpha}{\mathbf{u}},\underset{\alpha}{\vartheta})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha}=\overset{(+)}{P}{}^{*}_{\alpha}(s),\\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}(\underset{\alpha}{\mathbf{u}},\underset{\alpha}{\vartheta})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}=\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha+1}(\underset{\alpha+1}{\mathbf{u}},\underset{\alpha+1}{\vartheta})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha},\quad \alpha=\overline{1,K-1},\quad x'\in\overset{(+)}{S}{}^{0}_{\alpha}\subset\overset{(+)}{S}_{\alpha},\end{gathered}\tag{5.8}$$

and in the case of the micropolar theory of multilayer thin bodies whose layers do not have a center of symmetry, we assume the following relations instead of (5.7):

$$\begin{gathered}\overset{(-)}{u}_{\alpha+1}(n)=\overset{(+)}{u}_{\alpha}(n),\quad \overset{(-)}{\varphi}_{\alpha+1}(n)=\overset{(+)}{\varphi}_{\alpha}(n),\quad \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha+1}(\underset{\alpha+1}{\mathbf{u}},\underset{\alpha+1}{\boldsymbol{\varphi}},\underset{\alpha+1}{\vartheta})\cdot\overset{(-)}{\mathbf{s}}_{\alpha+1}=\overset{(-)}{P}{}^{*}_{\alpha+1}(s),\\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}(\underset{\alpha}{\mathbf{u}},\underset{\alpha}{\boldsymbol{\varphi}},\underset{\alpha}{\vartheta})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha}=\overset{(+)}{P}{}^{*}_{\alpha}(s),\quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}(\underset{\alpha}{\mathbf{u}},\underset{\alpha}{\boldsymbol{\varphi}},\underset{\alpha}{\vartheta})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}=\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha+1}(\underset{\alpha+1}{\mathbf{u}},\underset{\alpha+1}{\boldsymbol{\varphi}},\underset{\alpha+1}{\vartheta})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha},\\ \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha+1}(\underset{\alpha+1}{\boldsymbol{\varphi}},\underset{\alpha+1}{\mathbf{u}},\underset{\alpha+1}{\vartheta})\cdot\overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}=\overset{(-)}{\mu}{}^{*}_{\alpha+1}(n),\quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha}(\underset{\alpha}{\boldsymbol{\varphi}},\underset{\alpha}{\mathbf{u}},\underset{\alpha}{\vartheta})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}=\overset{(+)}{\mu}{}^{*}_{\alpha}(n),\\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha}(\underset{\alpha}{\boldsymbol{\varphi}},\underset{\alpha}{\mathbf{u}},\underset{\alpha}{\vartheta})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha}=\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(-)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha+1}(\underset{\alpha+1}{\boldsymbol{\varphi}},\underset{\alpha}{\mathbf{u}},\underset{\alpha+1}{\vartheta})\cdot\overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha},\quad \alpha=\overline{1,K-1},\quad x'\in\overset{(+)}{S}{}^{0}_{\alpha}\subset\overset{(+)}{S}_{\alpha}.\end{gathered}\tag{5.9}$$

Here, naturally, $\overset{(+)}{\mu}{}^{*}_{\alpha}(n)=\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{*}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}$, $\overset{(-)}{\mu}{}^{*}_{\alpha+1}(n)=\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{*}_{\alpha+1}\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}$, where $\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{*}_{\alpha}$ ($\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{*}_{\alpha+1}$) is the intensity of the limit momentum. Therefore, $\overset{(+)}{P}{}^{*}_{\alpha}(s)$, $\overset{(-)}{P}{}^{*}_{\alpha+1}(s)$, $\overset{(+)}{\mu}{}^{*}_{\alpha}(n)$ and $\overset{(-)}{\mu}{}^{*}_{\alpha+1}(n)$ are unknown values in relations (5.8) and (5.9) determined from some a priori dependencies, conditions of slipping with friction, which, generally speaking, must depend on geometric and physical-mechanical properties of contacted bodies. In the classic case we may suppose the following relations hold:

$$\mathbf{L}(x^1,x^2,\mathbf{v}_s,\dot{\mathbf{v}}_s,[T],\mathbf{P}^{(l)*},\dots)=0,\tag{5.10}$$

where $\mathbf{v}_s$ and $\dot{\mathbf{v}}_s$ are the tangent components of the vectors of the relative displacement and relative velocity, $[T]$ is the temperature jump, $\mathbf{P}^{(l)*}$ is the limit stress vector on a plane element with the normal $\mathbf{l}$, the ellipsis denotes the dependence on some other parameters. Based on (5.10), we can accept that the generalized model of Coulomb friction is valid:

$$\mathbf{P}^{*}_{(s)}=\underset{\sim}{\mathbf{f}}(x^1,x^2,[T],\mathbf{P}^{*}_{(n)})\cdot\dot{\mathbf{v}}_s,\tag{5.11}$$

which takes into account the anisotropy of the friction. Here $\mathbf{P}^*_{(s)}$ and $\mathbf{P}^*_{(n)}$ are the limit tangent and normal components of the stress vector $\mathbf{P}^{(l)*}$. The second rank tensor $\underset{\sim}{\mathbf{f}}(x^1, x^2, [T], \mathbf{P}^*_{(n)})$ is called the tensor of friction coefficients. Obviously, in the isotropic case we have $\underset{\sim}{\mathbf{f}} = f\underset{\sim}{\mathbf{E}}$, where $\underset{\sim}{\mathbf{E}}$ is the unit second rank tensor. Representing (5.11) for contacted surfaces of a multilayer thin body, we obtain the missing required relations. Based on similar arguments in the case of the micropolar theory, we can assert that the following a priori relations are valid:

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}(x^1, x^2, \mathbf{v}_s, \dot{\mathbf{v}}_s, \boldsymbol{\psi}_n, \dot{\boldsymbol{\psi}}_n, [T], \mathbf{P}^{(l)*}, \dots) = 0, \\ &\mathbf{M}(x^1, x^2, \mathbf{v}_s, \dot{\mathbf{v}}_s, \boldsymbol{\psi}_n, \dot{\boldsymbol{\psi}}_n, [T], \boldsymbol{\mu}^{(l)*}, \dots) = 0, \end{aligned} \tag{5.12}$$

where $\boldsymbol{\psi}_n$ and $\dot{\boldsymbol{\psi}}_n$ are the normal components of the vectors of the relative internal rotation and relative internal rotation velocity of adjacent layers, $\boldsymbol{\mu}^{(l)*}$ is the limit vector of the couple stress on a plane element with the normal $\mathbf{l}$, the other parameters are the same as in (5.10). Based on (5.12) and similar to (5.11), for the micropolar theory we can assume that the following relations are valid:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^*_{(s)} &= \underset{\sim}{\mathbf{f}}(x^1, x^2, [T], \mathbf{P}^*_{(n)}) \cdot \dot{\mathbf{v}}_s + \underset{\sim}{\mathbf{h}}(x^1, x^2, [T], \mathbf{P}^*_{(n)}) \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}}_n, \\ \boldsymbol{\mu}^*_{(n)} &= \underset{\sim}{\mathbf{g}}(x^1, x^2, [T], \boldsymbol{\mu}^*_{(s)}) \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}}_n + \underset{\sim}{\mathbf{l}}(x^1, x^2, [T], \boldsymbol{\mu}^*_{(s)}) \cdot \dot{\mathbf{v}}_s, \end{aligned} \tag{5.13}$$

that take into account the anisotropy of the friction. Here $\underset{\sim}{\mathbf{f}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{h}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{g}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{l}}$ are the second rank tensors called the tensors of friction coefficients. Therefore, in the case of an isotropic friction we have $\underset{\sim}{\mathbf{f}} = f\underset{\sim}{\mathbf{E}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{h}} = h\underset{\sim}{\mathbf{E}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{g}} = g\underset{\sim}{\mathbf{E}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{l}} = l\underset{\sim}{\mathbf{E}}$, where $\underset{\sim}{\mathbf{E}}$ is the unit second rank tensor. It should be noted here that the coefficients of friction are determined by experiments and are given in tables. The author knows little in this direction for the micropolar theory, but for the classic theory these coefficients can be obtained, e.g., from [77–79]. Representing (5.13) for the contacted surfaces of a multilayer thin body, we get the missing required relations in the case of the micropolar theory.

5.5 Conditions under a partial exfoliation of contacted surfaces of layers

For the classic theory of multilayer thin bodies in this case we have the conditions

$$\underset{\alpha}{\mathbf{v}}(x^1, x^2) = \overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{\mathbf{u}}}(x^1, x^2) - \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}(x^1, x^2) \neq 0, \quad \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}(x^1, x^2) = 0, \quad \overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{\mathbf{P}}}(x^1, x^2) = 0,$$
$$(x^1, x^2) \subset \overset{(+)}{\underset{\alpha}{S}}{}^0 \subset \overset{(+)}{\underset{\alpha}{S}}, \quad \alpha = \overline{1, K-1},$$

and for the micropolar theory of multilayer thin bodies we get the conditions

$$\begin{aligned} &\underset{\alpha}{\mathbf{v}}(x^1, x^2) = \overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{\mathbf{u}}}(x^1, x^2) - \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}(x^1, x^2) \neq 0, \quad \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}(x^1, x^2) = 0, \quad \overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{\mathbf{P}}}(x^1, x^2) = 0, \\ &\underset{\alpha}{\boldsymbol{\psi}}(x^1, x^2) = \overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{\boldsymbol{\varphi}}}(x^1, x^2) - \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\boldsymbol{\varphi}}}(x^1, x^2) \neq 0, \quad \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\boldsymbol{\mu}}}(x^1, x^2) = 0, \quad \overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{\boldsymbol{\mu}}}(x^1, x^2) = 0, \\ &(x^1, x^2) \subset \overset{(+)}{\underset{\alpha}{S}}{}^0 \subset \overset{(+)}{\underset{\alpha}{S}}, \quad \alpha = \overline{1, K-1}. \end{aligned}$$

Note that if $\overset{(+)}{S}{}^{0}_{\alpha} = \overset{(+)}{S}_{\alpha}$, then we have a complete exfoliation of contacted layers. Other conditions posed on deformed and force states of exterior surfaces of multilayer thin bodies are also possible: a contact with rigid or elastic bodies, a forced displacement of points, etc. It should be noted that before the presentation of the problems concerning the conditions on contacted surfaces of thin bodies the author had acquainted himself with papers [75–77, 80–96, et al.]. Based on [56, 58, 97] and quite similarly to this paper, one can construct micropolar theories of multilayer thin bodies with two small sizes and those of plane domains with one small size, respectively (it remains to write down the corresponding relations). We do not pay attention to this in the present paper. Note also that when writing this review article the following works were used: [3, 5, 111–113].

In conclusion we note that the classic theory of elasticity predicts sufficiently well the behavior of actual rigid bodies being under different loads in all the cases when the "granularity" of the structure of the considered real bodies is not typical. However, the classic theory of elasticity is unable to explain satisfactory the mechanism of some phenomena observed in actual elastic bodies, not to say for bodies with other rheology. For example, from the viewpoint of theoretic solutions of the classic theory of elasticity, one cannot explain and predict the laws of propagation of short acoustic waves in crystalline rigid bodies, polycrystalline metals, and high polymers. The classic theory also gives no satisfactory concordance of its results with experimental data for bodies with clearly expressed polycrystalline structure under the conditions of a stressed state with a large stress gradient. In particular, this theory cannot give any intelligible explanation of the influence of the stress gradient on the fatigue characteristics of polycrystalline materials. The cause of such unconformity of the theory and experience should be evidently sought in the fact that a continuous elastic model of a rigid body lying on the base of the classic theory of elasticity is unable to represent elastic properties of real bodies determined by their discrete structure. Therefore, the explanation of these phenomena requires a new model of a rigid body in the continuum mechanics so that the properties following form the discrete structure of real bodies can be explicitly represented [98]. A series of observed effects (phenomena) than cannot be explained on the base of the classic theory were indicated in [99]. As is known, all real bodies have a "granular" structure, and hence they can be considered as a collection of spatial material compounds consisted of particular "grains," material particles positioned relative to each other at distances comparable to their sizes and linked with each other by a complicated system of interconnections. Such "grains" can be molecules of the substance, separate crystals and crystal blocks in polycrystalline materials, etc. It should be also noted that the dispersion of elastic surface Rayleigh waves cannot be explained within the classic model of continuous media [100, 101]. However, this effect gets an explanation within a Cosserat medium (or a more generalized medium). In this case the attenuation rate of the Rayleigh wave amplitude with the depth and also the ellipticity of the wave depend on material constants of the medium including the parameters describing the moment properties. This fact enables us to hope for an efficient application of such waves in possible experimental studies directed to the determination of moment behavior of materials and further to the

determination of material parameters. Thus, the practical application of the theories constructed by the author requires the determination of the material functions entering the systems of equations and determining relations. The review of the corresponding papers [64, 100–103] and others in this direction indicates that there exist several experimental methods [102, 103] for their determination and an active work is undertaken for the determination of material constants of various media (for some material they had been determined, see [64, 100–103]). Therefore, we can assume that in the nearest future they will be obtained for most of required materials and the micropolar theories of thin bodies constructed by the author will get their practical applications. Staying within the classic three-dimensional theory, we can get different improved theories from the moment ones under neglecting the moment characteristics, and these theories can be used in practice. In addition, it is necessary to point out, similar to [104], some problems requiring further development and remaining urgent at present. The further development of mathematical methods reducing three-dimensional problems of the mechanics of a deformable rigid body to two- and one-dimensional ones is an urgent problem. This includes analytic and asymptotic methods and also the method of sequential differentiation of relations of the three-dimensional theory. Such methods should be developed not only for bodies with one small size, but also for bodies with two small sizes. Obviously, the latter problem is more laborious. The main attention should be paid to dynamic theories of such bodies. Reducing three-dimensional theories to two-dimensional ones, it is expedient to attract variational methods being very efficient for the determination of internally consistent and mathematically well posed models. It is necessary to carry out further studies in the direction of mathematical justification of reduction methods, i.e., the study of convergence problems, error estimates, boundary conditions, convergence acceleration, etc. The necessity to compare the results of approximate theories with the results of analytic and numerical solutions to problems of the three-dimensional theory remains to be urgent. It is reasonable to compare the results of approximate theories with exact solutions for bodies with one small size of different cross-sections. The available comparisons in the case of the classic theory based on the plane deformation equations, or on those of generalized plane stressed state are unconvincing because these equations are approximate themselves. One of important directions is the reduction of three-dimensional models to two-dimensional ones in the case of various rheological properties of the material, of geometrically and physically nonlinear bodies, and also subject to the influence of temperature, electromagnetic, and other fields.

The other important direction is the study of eigenvalue problems for the tensor and tensor-block matrix of any even rank, since the constitutive relations for most classical and micropolar media of different rheology (here, of course, also include porous and multilayer textile media) are written using a tensor and tensor-block matrix of even rank, respectively. Several questions concerning these problems, as well as tensor calculus, have been studied in some detail in [9, 10, 68, 105–109]. A very important direction is also the investigation of internal structures of differential tensors-operators and tensor-block matrix operators of even rank. This is due to the fact that such operators are operators of systems of equations of motion and static boundary conditions with respect to kinematic characteristics (displacement,

rotation, velocity, angular velocity) for most classical and micropolar mediums. The study of these problems promotes the decomposition of initial-boundary value problems in the case of linear theories. Some questions about the decomposition of initial-boundary value problems can be found in [5, 6, 110]. Finally, mention a considerable gap existing now in the field of experimental studies.

Acknowledgements: the work was supported by the Shota Rustaveli National Science Foundation (project no. DI-2016-41).

References

[1] *M. U. Nikabadze,* Variants of mathematical theory of multilayer structures with several base surfaces. Available from VINITI No. 721–B2008. 21.08.2008. 127 p (in Russian).

[2] *M. U. Nikabadze,* A variant of the theory of multilayer structures // Mech. Solids. 2001. No. 1. 143–158.

[3] *M. U. Nikabadze,* Mathematical modeling of multilayer thin body deformation// Journal of mathematical sciences. V. 187, No 3, 2012. P. 300-336.

[4] *M. U. Nikabadze,*. The method of orthogonal polynomials in the classical and micropolar mechanics of elastic thin bodies. II // Available from VINITI No. 136-V2014, 2014, 218 p (in Russian).

[5] *M. U. Nikabadze* Development of the method of orthogonal polynomials in the classical and micropolar mechanics of elastic thin bodies // M., Publishing House of the Board of Trustees mech.-math. facul. of MSU. 2014. 515 p (in Russian). http://istina.msu.ru/media/publications/book/707/ea1/6738800/Monographiya.pdf

[6] *M. U. Nikabadze,* The method of orthogonal polynomials in the classical and micropolar mechanics of elastic thin bodies // The dissertation of the doctor of physical and mathematical sciences. M., MAI. 2014. 384 p (in Russian). http://istina.msu.ru/media/dissertations/dissertation/659/37c/6738997/dissertatsiya.pdf

[7] *M. U. Nikabadze,* The method of orthogonal polynomials in the classical and micropolar mechanics of elastic thin bodies. I // Available from VINITI No. 135-V2014, 20.05.2014, 278 p (in Russian).

[8] *M. U. Nikabadze,* The application of systems of Legendre and Chebyshev polynomials at modeling of elastic thin bodies with a small size// Available from VINITI No. 720-V2008, 21.08.2008, 287 p (in Russian).

[9] *M. U. Nikabadze,* On several issues of tensor calculus with applications to mechanics // Contemporary mathematics. Fundamental directions. 2015, Vol. 55, 3-194 (in Russian). http://istina.msu.ru/media/publications/book/e25/00c/10117043/M.U.Nikabadze.pdf

[10] *M. U. Nikabadze,* Topics on tensor calculus with applications to mechanics// Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 225, No. 1. 194 p

[11] *I. N. Vekua,* Shell theory, general methods of construction. Pitman Advanced Pub. Program, 1985.

[12] *A. E. Alekseev,* Construction of equations of a layer with variable thickness based on expansions over Legendre polynomials // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 1994. **35**, No. 4. 137–147.

[13] *A. E. Alekseev,* Bend of a three-layer orthotropic beam // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 1995. **36**, No. 3. 158–166.

[14] *A. E. Alekseev,* Iterative solution method for laminated structures deformation problems taking into account the slipping of layers // Continuum Dynamics. Vol. 116. Inst. Hydrodynamics. Sib. Branch. RAS, Novosibirsk, 2000, pp. 170–174.

[15] *A. E. Alekseev, V. V. Alekhin, B. D. Annin,* Plane elastic problem for an inhomogeneous layered body // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 2001. **42**, No. 6. 1038-1042.

[16] *A. E. Alekseev and B. D. Annin,* Equations of deformation of an elastic inhomogeneous laminated body of revolution // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 2003. **44**, No. 3. 432-437.

[17] *A. E. Alekseev and A. G. Demeshkin,* Detachment of a beam glued to a rigid plate // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 2003. **44**, No. 4. 151–158.

[18] *I. N. Vekua,* A method of calculation of prismatic shells // Proc. Tbilisi Math. Inst. Vol. XXI. Metsniereba, Tbilisi, 1955, pp. 191–259.

[19] *I. N. Vekua,* The theory of thin and sloping shells of variable thickness. Novosibirsk, 1964 (in Russian).

[20] *I. N. Vekua,* The theory of thin sloping shells of variable thickness. // Proc. Tbilisi Math. Inst. Vol. XXX. Metsniereba, Tbilisi, 1965, pp. 1–104.

[21] *I. N. Vekua,* Variational principles of shell theory construction. Tbilisi State Univ., Tbilisi, 1970 (in Russian).

[22] *I. N. Vekua,* One direction of shell theory construction. // Mechanics of USSR in 50 years. Vol. 3. Nauka, Moscow, 1972, pp. 267–290.

[23] *Yu. M. Volchkov and L. A. Dergileva,* Solution of elastic layer problems by approximate equations and comparison with solutions of the theory of elasticity // Continuum Dynamics. Vol. 28. Inst. Hydrodynamics. Sib. Branch. Acad. Sci. USSR, Novosibirsk, 1977, pp. 43–54.

[24] *Yu. M. Volchkov, L. A. Dergileva, and G. V. Ivanov,* Numerical simulation of stressed states in plane elasticity problems by the method of layers // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 1994. **35**, No. 6. 129–135.

[25] *Yu. M. Volchkov and L. A. Dergileva,* Edge effects in the stress state of a thin elastic interlayer // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 1999. **40**, No. 2. 354-359.

[26] *Yu. M. Volchkov,* Finite elements with adjustment conditions on their faces // Continuum Dynamics. Vol. 116. Inst. Hydrodynamics. Sib. Branch. RAS, Novosibirsk, 2000, pp. 175–180.

[27] *Yu. M. Volchkov and L. A. Dergileva,* Equations of an elastic anisotropic layer // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 2004. **45**, No. 2. 301-309.

[28] *Yu. M. Volchkov and L. A. Dergileva,* Reducing three-dimensional elasticity problems to two-dimensional problems by approximating stresses and displacements by Legendre polynomials // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 2007. **48**, No. 3. 450–459.

[29] *L. A. Dergileva,* Solution method for a plane contact problem for an elastic layer // Continuum Dynamics. Vol. 25. Inst. Hydrodynamics. Sib. Branch. Acad. Sci. USSR, Novosibirsk, 1976, pp. 24–32.

[30] *G. V. Ivanov,* Solution of a plane mixed problems of the theory of elasticity in the form of series over Legendre polynomials // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 1976. No. 6. 126–137.

[31] *G. V. Ivanov,* Solutions of plane mixed problems for the Poisson equation in the form of series over Legendre polynomials // Continuum Dynamics. Vol. 28. Inst. Hydrodynamics. Sib. Branch. Acad. Sci. USSR, Novosibirsk, 1977, pp. 43–54.

[32] *G. V. Ivanov,* Reduction of a three-dimensional problem for an inhomogeneous shell to a two-dimensional problem // Dynamic problems of continuum mechanics. Vol. 39. Novosibirsk, 1979.

[33] *G. V. Ivanov,* Theory of plates and shells. Novosibirsk State Univ., Novosibirsk, 1980 (in Russian).

[34] *Vajeva D.V., Volchkov Yu.M.* The equations for determination of stress-deformed state of multilayer shells // Proc. 9th Russian–Korean Symp. Sci. and Technol., Novosibirsk, June 26 – July 2, 2005. Novosibirsk State Univ., Novosibirsk, 2005, pp. 547–550.

[35] *M. A. Medick,* One-dimensional theories of wave and oscillation propagation in elastic rods of rectangular cross-sections. Applied theory of symmetric oscillations of elastic rods of rectangular and square cross-sections // Appl. Mech. 1966. No. 3. 11–19.

[36] *A. Soler,* Higher-order theories for structural analysis using Legendre polynomial expansions // J. Appl. Mech. 1969. **36**, No. 4. 757–763.

[37] *J. Fellers and A. Soler,* Approximate solution of the finite cylinder problem using Legendre polynomials // AIAA J. 1970. **8**, No. 11.

[38] *P. Hertelendy,* An approximate theory governing symmetric motions of elastic rods of rectangular or square cross section. ASME, 1968.

[39] *R. D. Mindlin and M. A. Medick,* Extensional vibrations of elastic plates // J. Appl. Mech. 1959. **26**, No. 4. 561–569.

[40] *N. K. Galimov,* Application of Legendre polynomials to construction of an improved theory of trilaminar plates and shells // Studies in the theory of plates and shells. Vol. 10. Kazan State Univ., Kazan, 1973, pp. 371–385.

[41] *B. L. Pelekh and M. A. Sukhorolskii,* Construction of the generalized theory of transversal-isotropic shells in application to contact problems // Composites and new structures. Naukova Dumka, Kiev, 1977, pp. 27–39.

[42] *B. L. Pelekh and M. A. Sukhorolskii,* Contact problems of the theory of elastic anisotropic shells. Naukova Dumka, Kiev, 1980 (in Russian).

[43] *B. L. Pelekh, A. V. Maksimuk, and I. M. Korovaichuk,* Contact problems for laminated elements of constructions and bodies with coating Naukova Dumka, Kiev, 1988 (in Russian).

[44] *V. E. Chepiga,* To the improved theory of laminated shells // Appl. Mech. 1976. **12**, No. 11. 45–49.

[45] *V. E. Chepiga,* Construction of the theory of multilayer anisotropic shells with given conditional accuracy of order h^N // Mech. Solids. 1977. No. 4. 111–120.

[46] *V. E. Chepiga,* Application of Legendre polynomials to construction of the theory of multilayer shells // Mech. Solids. 1982. No. 5. 190.

[47] *V. E. Chepiga,* The study of stability of multilayer shells by an improved theory. Available from VINITI No. 289-B (14.01.1986).

[48] *V. E. Chepiga,* Numerical analysis of equations of the improved theory of laminated shells. Available from VINITI No. 290-B (14.01.1986).

[49] *V. E. Chepiga,* Asymptotic error of some hypotheses in the theory of laminated shells // Theory and calculation of elements of thin-walled structures. Moscow, 1986, pp. 118–125.

[50] *M. U. Nikabadze and A. R. Ulukhanyan,* Formulations of problems for a shell domain according to three-dimensional theories. Available from VINITI No. 83–B2005, 21.01.2005, 7 p (in Russian).

[51] *M. U. Nikabadze and A. R. Ulukhanyan,* Statements of problems for a thin deformable three-dimensional body // Vestn. Mosk. Univ., Matem. Mekhan. 2005. No. 5. 43–49.

[52] *M. U. Nikabadze,* A variant of the system of equations of the theory of thin bodies // Vestn. Mosk. Univ., Matem. Mekhan. 2006. No. 1. 30–35.

[53] *M. U. Nikabadze,* Application of classic orthogonal polynomials to the construction of the theory of thin bodies // Elasticity and non-elasticity. LENAND, Moscow, 2006, pp. 218–228.

[54] *M. U. Nikabadze,* Application of a system of Chebyshev polynomials to the theory of thin bodies // Vestn. Mosk. Univ., Matem. Mekhan. 2007. No. 5. 56–63.

[55] *M. U. Nikabadze,* Some issues concerning a version of the theory of thin solids based on expansions in a system of Chebyshev polynomials of the second kind // Mech. Solids. 2007. **42**. No. 3. 391-421.

[56] *M. U. Nikabadze,* Mathematical modeling of elastic thin bodies with two small dimensions with the use of systems of orthogonal polynomials. Available from VINITI No. 722 – B2008, 21.08.2008, 107 p (in Russian).

[57] *M. U. Nikabadze and A. R. Ulukhanyan,* Mathematical modeling of elastic thin bodies with one small dimension with the use of systems of orthogonal polynomials. Available from VINITI No. 723 – B2008, 21.08.2008, 64 p (in Russian).

[58] *M. U. Nikabadze,* Application of systems of orthogonal polynomials in the mathematical modeling of plane elastic thin bodies. Available from VINITI No. 724 – B2008, 21.08.2008, 44 p (in Russian).

[59] *T. V. Meunargiya,* Development of the method of I. N. Vekua for problems of the three-dimensional moment elasticity. Tbilisi State Univ., Tbilisi, 1987 (in Russian).

[60] *I. N. Vekua,* Fundamentals of tensor analysis and covariant theory. Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).

[61] *A. I. Lur'e,* Nonlinear elasticity. Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).

[62] *B. E. Pobedrya,* Lectures in tensor analysis. Moscow State Univ., Moscow, 1986 (in Russian).

[63] *B. E. Pobedrya,* Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity. 2nd ed. Moscow State Univ., Moscow, 1995 (in Russian).

[64] *A. C. Eringen,* Microcontinuum field theories. 1. Foundation and solids. N.Y.: Springer- Verlag, 1999.

[65] *V. A. Pal'mov,* Basic equations of the theory of asymmetric elasticity // Appl. Math. Mech. 1964. **28**, No. 3. 401–408.

[66] *V. D. Kupradze, T. G. Gegelia, M. O. Basheleishvili, and T. V. Burchuladze,* Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity. Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).

[67] *V. Novacky,* Theory of elasticity. Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).

[68] *Nikabadze M.U.* On some Problems of Tensor Calculus. I// Journal of Mathematical sciences. V. 161, No 5, 2009. P. 668-697.

[69] *B. E. Pobedrya,* Theory of thermomechanical processes
Elasticity and non-elasticity. LENAND, Moscow, 2006, pp. 70–85.

[70] *B. E. Pobedrya,* The theory of determining relations in the mechanics of deformable solid body // Problems of mechanics. Collected papers dedicated to 90th anniversary of A. Yu. Ishlinskii / Ed. by D. M. Klimov, Fizmatlit, Moscow, 2003, pp. 635–657.

[71] *P. K. Suetin,* Classic orthogonal polynomials. Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).

[72] *V. V. Bolotin,* Influence of technological factors on mechanical reliability of composite structures // Mechanics of Polymers. 1972. No. 3. 529–540.

[73] *Yu. L. Krasulin and M. Kh. Shorshorov,* Formation mechanism of joining heterogeneous materials in solid state // Phys.-Chem. Material Processing. 1967. No. 1. 89–94.

[74] *A. I. Potapov,* Quality control and reliability prediction for constructions of composites. Leningrad, 1980 (in Russian).

[75] *Ya. S. Podstrigach,* Conditions of heat contact of solid bodies // Doklady Akad. Nauk URSR. 1963. No. 7. 872–874.

[76] *Ya. S. Podstrigach,* Jump conditions for stresses and displacements on a thin-walled elastic inclusion in a continuum // Doklady Akad. Nauk URSR. 1982. No. 12. 30–32.

[77] *E. D. Braun, N. A. Bushe, I. A. Buyanovskii et al.,* Fundamentals of tribology (friction, wear, lubrication) / Ed. by A. V. Chichinadze. Nauka i Tekhnika, Moscow, 1995 (in Russian).

[78] *I. V. Kragelskii and I. E. Vinogradova,* Coefficients of friction. Mashgiz, Moscow, 1962 (in Russian).

[79] *I. V. Kragelskii,* Friction and wear. Mashinostroenie, Moscow, 1968 (in Russian).

[80] *G. A. Vanin,* Theory of fibrous media with imperfections // Appl. Mech. 1977. **XIII**, No. 10. 14–22.

[81] *G. A. Vanin,* Local fractures in fibrous media // Strength and destruction of composites. Riga, 1983, pp. 250–258.

[82] *G. A. Vanin,* Micromechanics of composites. Naukova Dumka, Kiev, 1985 (in Russian).

[83] *G. A. Vanin and N. P. Semenyuk,* Stability of shells of composites with imperfections. Naukova Dumka, Kiev, 1987 (in Russian).

[84] *G. Duvaut, J.-L. Lions,* Inequalities in mechanics and physics. Springer-Verlag, 1976.

[85] *I. M. Korovaichuk and B. L. Pelekh,* A class of nonlinear contact problems of the theory of shells subject to slipping // Elastic behavior of plates and shells. Saratov, 1981, pp. 64–66.

[86] *A. S. Kravchuk,* To the theory of contact problems taking into account friction on the contact surface // J. Appl. Math. Mech. 1980. **44**. 122–129.

[87] *V. A. Laz'ko,* Stressed-deformed state of laminated anisotropic shells under the presence of zones with nonideal contact of layers. 1 // Mech. Composites. 1981. No. 5. 832–836.

[88] *V. A. Laz'ko,* Stressed-deformed state of laminated anisotropic shells under the presence of zones with nonideal contact of layers. 2 // Mech. Composites. 1982. No. 1. 77–84.

[89] *V. A. Laz'ko, O. S. Machuga,* Determination of boundaries of interlayer deficiencies in laminated anisotropic plates // Mech. Composites. 1985. No. 6. 1112–1115.

[90] *B. L. Pelekh and I. M. Korovaichuk,* A class of problems for laminated composites under the presence of slipping zones on the phase interface // Mech. Composites. 1981. No. 2. 342–345.

[91] *B. L. Pelekh and I. M. Korovaichuk,* Mechanics of composite media with imperfect bonds on phase interfaces // Mech. Composites. 1984. No. 4. 606–611.

[92] *B. L. Pelekh and V. V. Tsasyuk,* Friction of anisotropic surfaced of solid bodies // Nonclassic problems of composites and composite structures. Naukova Dumka, Kiev, 1984, pp. 50–51.

[93] *Ya. S. Podstrigach and P. R. Shevchuk,* Temperature fields and stresses in bodies with thin coatings // Heat stresses in elements of turbomachines. 1967. No. 7. 227–233.

[94] *Ya. S. Podstrigach and P. R. Shevchuk,* Influence of surface layers on the diffusion process and on the stressed state caused by it in solid bodies // Phys.-Chem. Mech. Mater. 1967. **3**, No. 5. 575–583.

[95] *Ya. S. Podstrigach and P. R. Shevchuk,* Stressed-deformed state of heated elastic bodies containing inclusions in the form of thin shells // J. Appl. Mech. 1967. **3**, No. 6. 8–16.

[96] *G. C. Sih,* Fracture mechanics of composite materials // Mech. Composites. 1979. No. 3. 434–446.

[97] *M. U. Nikabadze, M. M. Kantor, A. R. Ulukhanian,* To mathematical modeling of elastic thin bodies and numerical realization of several problems on the band. Available from VINITI No. 204 – B2011, 29.04.2011, 207 p (in Russian).

[98] *G. N. Savin,* Foundations of the plane problem of the moment elasticity theory. Kiev State Univ., Kiev, 1965 (in Russian).

[99] *N. F. Morozov,* Selected two-dimensional problems of the elasticity theory, Leningrad State Univ., Leningrad, 1978 (in Russian).

[100] *V. I. Erofeev,* Wave processes in solid bodies with microstructure. Moscow State University, Moscow, 1999 (in Russian).

[101] *M. A. Kulesh, V. P. Matveenko, and I. N. Shardakov,* Construction and analysis of the analytic solution for a surface Rayleigh wave within the Cosserat continuum // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 2005. **46**, No. 4. 116–124.

[102] *R. D. Gauthier and W. E. Jahsman,* A quest for micropolar elastic constants. Pt. 2 // Arch. Mech. 1981. **33**, No. 5. 717–737.

[103] *R. S. Lakes,* Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with micro-structure / Ed. by H. Muehlhaus. Wiley, N.Y., 1995, pp. 1–22.

[104] *E. I. Grigolyuk and I. T. Selezov,* Nonclassic oscillation theories of rods, plates, and shells. VINITI, Moscow, 1973 (in Russian).

[105] *M. U. Nikabadze,* On the eigenvalue and eigentensor problem for a tensor of even rank // Mech. Solids. 2008. **43**, No. 4. 586–599.

[106] *M. U. Nikabadze,* On the construction of linearly independent tensors // Mech. Solids. 2009. **44**, No. 1. 14–30.

[107] *Nikabadze M.U.* On some problems of tensor calculus. II// Journal of mathematical sciences. V. 161, No 5, 2009. P. 698-733.

[108] *M.U. Nikabadze* Eigenvalue problems of a tensor and a tensor-block matrix (TMB) of any even rank with some applications in mechanics. H. Altenbach and S. Forest (eds.), Generalized continua as models for classical and advanced materials, advanced structured materials 42, 2016. 279–317. DOI 10.1007/978-3-319-31721-2_14

[109] *M.U. Nikabadze* An eigenvalue problem for tensors used in mechanics and the number of independent saint-venant strain compatibility conditions// Moscow university mechanics bulletin. May 2017, Volume 72, No. 3. 66–69. DOI: 10.3103/S0027133017030037

[110] *M.U. Nikabadze, A.R. Ulukhanyan* Analytical solutions in the theory of thin bodies. H. Altenbach and S. Forest (eds.), Generalized continua as models for classical and advanced materials, advanced structured materials 42, 2016. 319–361. DOI 10.1007/978-3-319-31721-2_15

[111] *Nikabadze M., Moseshvili T., Ulukhanian A., Tskhakaia K., Mardaleishvili N.* Formulation of the initial boundery velue problems in the theory of multilayer thermoelastic thin bodies in moments. I/ Vibration, Control and Stability of Dynamical Systems, DSTA'2017: Proceedings of 14th International Conference on "Dynamical Systems – Theory and Applications" (Lodz, Poland, December 11–14, 2017), 2017, 345–356.

[112] *Nikabadze M., Moseshvili T., Ulukhanian A., Tskhakaia K., Mardaleishvili N.* Formulation of the initial boundery velue problems in the theory of multilayer thermoelastic thin bodies in moments. II/ Vibration, Control and Stability of Dynamical Systems, DSTA'2017: Proceedings of 14th International Conference on "Dynamical Systems – Theory and Applications" (Lodz, Poland, December 11–14, 2017), 2017, 357–368.

[113] *Nikabadze M., Moseshvili T., Ulukhanian A., Tskhakaia K., Mardaleishvili N.* Formulation of the initial boundery velue problems in the theory of multilayer thermoelastic thin bodies in moments. III/ Vibration, Control and Stability of Dynamical Systems, DSTA'2017: Proceedings of 14th International Conference on "Dynamical Systems – Theory and Applications" (Lodz, Poland, December 11–14, 2017), 2017, 369–380.

To the Modeling of Five-Layer Thin Prismatic Bodies

M. U. Nikabadze[1], A. R. Ulukhanyan[2], T. Moseshvili[3], K. Tskhakaia[4], N. V. Mardaleishvili[5], Z. M. Arkania[6]

[1] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

[1,2] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

[3,4,5,6] Akaki Tsereteli State University, Kutaisi, Georgia

E-mails: nikabadze@mail.ru, armine_msu@mail.ru, tamarmoseshvili@yahoo.com, spectri@gmail.com, nodarmard@mail.ru, zurabi.arkania@mail.ru

Abstract

In the paper the new parametrization of a multilayer thin domain is applied [1–3]. In contrast with classic approaches, several base surfaces and an analytic method with application of orthogonal polynomial systems are used. Geometric characteristics typical for the proposed parametrizations are introduced into consideration. The new parametrization in the case of a one-layered thin body is described in detail in the works [3, 4]. Various representations of the equations of motion and the constitutive relations of physical content are given under the new parametrization of the body domain. Various variants of the equations of motion in moments with respect to orthogonal polynomial systems are obtained. The equations in moments of displacement and rotation vectors with respect to any system of orthogonal polynomials for the micropolar theory of prismatic multilayer elastic bodies of constant thickness are given. The interlayer conditions are written down under various connections of adjacent layers of a multilayer body. The formulations of initial-boundary value problems in the theory of multilayer elastic thin bodies in moments are discussed.

It should be noted that the analytic method with the use of the Legendre polynomial system in constructing the one-layer thin body theory [5–9] and multilayer thin body theory [10, 11] was also applied by other authors. In this direction the authors had published the papers [1–3, 12–16] and others with the application of Legendre and Chebyshev polynomial systems. These expansions can be successfully used in constructing any thin body theory. Despite this, the classical theories constructed by this method are far from perfect, and the micro-polar theories and theories of the other rheology are all the more far from perfect.

1 Parametrization of a Multilayer Thin Domain with Several Base Surfaces

Consider a multilayer thin domain of the Euclidean space consisting of not more than countably many layers. We perform the parametrization of this domain in the same way as in [1]. Let the layers be enumerated in the ascending order, i.e., for example, if $\alpha \geq 2$ is the serial number of a certain layer, then the serial number of the previous layer is $\alpha - 1$ and the serial number of the next layer is $\alpha + 1$. Each layer has two frontal surfaces. The frontal surface of the layer α, which lies to the

side of the previous layer $\alpha-1$, is called the interior base surface and is denoted by $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, whereas the frontal surface of the layer α, which lies to the side of the next layer $\alpha+1$, is called the exterior base surface and is denoted by $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$.

If the multilayer structure consists of K layers, then $\overset{(-)}{\underset{1}{\mathrm{S}}}$ ($\overset{(+)}{\underset{1}{\mathrm{S}}}$) and $\overset{(-)}{\underset{K}{\mathrm{S}}}$ ($\overset{(+)}{\underset{K}{\mathrm{S}}}$) are the interior (exterior) surfaces of the first and last layers, respectively. In this case, $\overset{(-)}{\underset{1}{\mathrm{S}}}$ and $\overset{(+)}{\underset{K}{\mathrm{S}}}$ are also called the interior and exterior surfaces of the multilayer structure.

We assume that the frontal surfaces of each layer are regular surfaces and its lateral surface is a ruled surface in the case where the layer is bounded and unclosed.

1.1 Vector parametric equation of the layer α and the system of vector parametric equations of a multilayer thin domain

The radius-vector of an arbitrary point $\underset{\alpha}{\mathrm{M}}$ of the layer α is represented in the form

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}(x^1,x^2,x^3)=\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+x^3\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2)=(1-x^3)\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+x^3\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2) \qquad (1)$$

for all $\alpha\in\mathbb{N}$ and $\forall x^3\in[0,1]$, where the vector relations

$$\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}=\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2),\quad \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}=\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2),\quad \alpha\in\mathbb{N}, \qquad (2)$$

are the vector equations of the base surfaces $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$ and $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, respectively, x^1, x^2 are curvilinear (Gaussian) coordinates on the interior base surface $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, and $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers. The vector $\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2)=\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)-\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)$, which topologically maps the interior base surface $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$ onto the exterior base surface $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, is, in general, not orthogonal to the base surfaces, and, moreover, the endpoint of each $\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2)$ is the initial point of $\underset{\alpha+1}{\mathbf{h}}(x^1,x^2)$, $\forall\alpha$, i.e., the following relation holds:

$$\overset{(+)}{\underset{\alpha+\delta}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)=\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+\sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+\delta}\underset{\nu}{\mathbf{h}}=\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+\sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+\delta}\left[\overset{(+)}{\underset{\nu}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)-\overset{(-)}{\underset{\nu}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)\right]. \qquad (3)$$

Let a multilayer domain[1] consist of K layers. Then introducing the notation

$$\mathbf{h}=\sum_{\nu=1}^{K}\underset{\nu}{\mathbf{h}}=\sum_{\nu=1}^{K}\left[\overset{(+)}{\underset{\nu}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)-\overset{(-)}{\underset{\nu}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)\right], \qquad (4)$$

[1]We use the usual rules of tensor calculus [4, 17–20]. We mainly preserve the notation and conventions of the previous works. Under symbols, we write indices denoting the serial numbers of layers . The Greek indices under symbols assume their values according to circumstances, and capital and small Latin indices assume the values 1, 2 and 1, 2, 3, respectively

we have

$$\overset{(+)}{\underset{K}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)=\overset{(-)}{\underset{1}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+\mathbf{h}(x^1,x^2)=\overset{(-)}{\underset{1}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)+\sum_{\nu=1}^{K}\left[\overset{(+)}{\underset{\nu}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)-\overset{(-)}{\underset{\nu}{\mathbf{r}}}(x^1,x^2)\right]. \quad (5)$$

It should be noted that (1) for a fixed α is the vector parametric equation of the layer α, and when α varies in the corresponding range and conditions (3) hold, it is the system of vector parametric equations of the multilayer thin domain considered. It is easy to see that (1) for any x^1, x^2, and $x^3=0$ defines the interior base surface $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, and for any x^1, x^2, and $x^3=1$, it defines the exterior lateral surface $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, whereas for any x^1, x^2 and $x^3=\text{const}$,where $x^3\in(0,1)$, it defines the equidistance surface for the base surfaces $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$ and $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, which is denoted by $\underset{\alpha}{\mathrm{S}}$.

1.2 Three-dimensional families of bases and the families of parametrization of the domain of the layer α generated by them

Taking into account the expression of the radius-vector $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}$ (1) and introducing the notation $\underset{\alpha}{\mathbf{h}}_{P}\equiv\partial\mathbf{h}/\partial x^P\equiv\partial_P\underset{\alpha}{\mathbf{h}}$, we obtain

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_P=\underset{\alpha P}{\mathbf{r}}_{-}+x^3\underset{\alpha}{\mathbf{h}}_P=(1-x^3)\underset{\alpha P}{\mathbf{r}}_{-}+x^3\underset{\alpha P}{\mathbf{r}}_{+},\quad \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_P\equiv\frac{\partial_P\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}{\partial x^P},\quad \underset{\alpha P}{\mathbf{r}}_{\star}\equiv\frac{\partial^{(\bullet)}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}{\partial x^P},\ \star\in\{-,+\},\ \forall\alpha. \quad (6)$$

Now, differentiating (1) in x^3, we have

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_3\equiv\partial_3\underset{\alpha}{\mathbf{r}}\equiv\frac{\partial\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}{\partial x^3}=\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2),\quad \forall x^3\in[0,1],\quad \forall\alpha. \quad (7)$$

According to (7), we can assume that

$$\underset{\alpha 3}{\mathbf{r}}_{-}\equiv\underset{\alpha 3}{\mathbf{r}}\equiv\underset{\alpha 3}{\mathbf{r}}_{+}\equiv\partial_3\underset{\alpha}{\mathbf{r}}=\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2),\quad \forall x^3\in[0,1],\quad \forall\alpha. \quad (8)$$

Relation (8) allows us to define the spatial covariant bases $\underset{\alpha P}{\mathbf{r}}_{\star}$, $\star\in\{-,+\}$, $\forall\alpha$ at the points $\overset{(\bullet)}{\underset{\alpha}{M}}\in\overset{(\bullet)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, $\star\in\{-,+\}$, $\forall\alpha$, respectively. Therefore, the third basis vector of the spatial covariant bases at the points $\overset{(\bullet)}{\underset{\alpha}{\mathrm{M}}}\in\overset{(\bullet)}{\underset{\alpha}{\mathrm{S}}}$, $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, for each layer α is the same vector $\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1,x^2)$. In view of (8), we can join relations (6)and (7) and represent them as

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_p=\underset{\alpha p}{\mathbf{r}}_{-}+x^3\underset{\alpha}{\mathbf{h}}_p=(1-x^3)\overset{(-)}{\underset{\alpha\ p}{\mathbf{r}}}_{-}+x^3\overset{(+)}{\underset{\alpha\ p}{\mathbf{r}}}_{+},\quad \forall\alpha. \quad (9)$$

The triples of vectors $\underset{\alpha 1}{\mathbf{r}}_{\star}\ \underset{\alpha 2}{\mathbf{r}}_{\star}\ \underset{\alpha 3}{\mathbf{r}}_{\star}$, $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$ defined at the points $\overset{(\bullet)}{\underset{\alpha}{\mathrm{M}}}\in\overset{(\bullet)}{\underset{\alpha}{S}}$, $\star\in\{-,\emptyset,+\}$, $\forall\alpha$ obviously compose three-dimensional covariant spatial bases.

As it is known [4, 17–19], according to these frames(bases), we can construct the corresponding contravariant bases $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{1}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{2}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{3}}$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall\alpha$. Indeed, by their definition [4, 17–19], we have

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{k}} = \frac{1}{2}\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{C}}{}^{\tilde{k}\tilde{p}\tilde{q}}\underset{\alpha^{\tilde{p}}}{\mathbf{r}} \times \underset{\alpha^{\tilde{q}}}{\mathbf{r}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \ \forall\alpha, \tag{10}$$

where $\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{C}}{}^{\tilde{k}\tilde{p}\tilde{q}} = (\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{k}} \times \underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{p}}) \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{q}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall\alpha$, are contravariant components of the discriminant tensors [17] of the layer α at the points $\overset{(\star)}{\underset{\alpha}{M}} \in \overset{(\star)}{\underset{\alpha}{S}}$, $\star \in \{-, \emptyset, +\}$, $\forall\alpha$. It is easy to see that (9) is shortly represented in the form

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{p} = \underset{\alpha}{g}{}^{\overset{\star}{q}}_{p}\underset{\alpha^{\tilde{q}}}{\mathbf{r}}_{\star} = \underset{\alpha^{p\tilde{q}}}{g}{}_{\star\alpha}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\overset{\star}{q}}, \quad \underset{\alpha^{\tilde{p}\tilde{q}}}{g} = \underset{\alpha^{\tilde{p}}}{\mathbf{r}}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{q}}, \quad \underset{\alpha^{\tilde{p}}}{g}{}^{\tilde{q}} = \underset{\alpha^{\tilde{p}}}{\mathbf{r}}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{q}}, \quad \backsim \in \{-, \emptyset, +\}, \ \sim, \star \in \{-, +\}, \ \forall\alpha. \tag{11}$$

It is easy to express $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{k}$, $\forall\alpha$, through the vectors $\underset{\alpha^{\tilde{m}}}{\mathbf{r}}$ or $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{m}}$, $\sim \in \{-, +\}$, $\forall\alpha$. Indeed, taking into account the first relation in (11) in (10) for $\sim = \emptyset$, we obtain

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{k} = \frac{1}{2}\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}{}^{-1}\epsilon^{kpq}\epsilon_{lmn}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{m}}_{p}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{n}}_{q}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{l}}, \quad \overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\vartheta}} \equiv= \det(\underset{\alpha}{g}{}^{\hat{Q}}_{P}), \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall\alpha, \tag{12}$$

where ϵ^{kpq}, ϵ_{lmn} are the Levi-Civita symbols. By (12),we can introduce the notation

$$\underset{\alpha}{g}{}^{k}_{\tilde{l}} = \frac{1}{2}\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}{}^{-1}\epsilon^{kpq}\epsilon_{lmn}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{m}}_{p}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{n}}_{q}, \quad \underset{\alpha}{g}{}^{k\tilde{l}} = \frac{1}{2}\overset{(\sim)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}{}^{-1}\epsilon^{kpq}\epsilon_{smn}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{m}}_{p}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{n}}_{q}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{s}\tilde{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall\alpha. \tag{13}$$

Using this notation, we represent relation (12) in the desired form

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{p} = \underset{\alpha^{\tilde{q}\alpha}}{g}{}^{p}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{q}} = \underset{\alpha}{g}{}^{p\tilde{q}}\underset{\alpha^{\tilde{q}}}{\mathbf{r}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall\alpha. \tag{14}$$

Let us introduce into consideration the following objects (matrices):

$$\underset{\alpha\beta^{\tilde{p}}\cdot}{g}{}^{\cdot\tilde{q}} = \underset{\alpha^{\tilde{p}}}{\mathbf{r}}\cdot\underset{\beta}{\mathbf{r}}^{\tilde{q}}, \quad \backsim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall\alpha, \beta, \tag{15}$$

and the objects obtained from (15) by alternating the indices. It is easy to calculate that the number of such objects is equal to 36. It is easy to see that for $\alpha = \beta$, (15) contains (11) and (13). Indeed, from (15), we have

$$\underset{\alpha^{\tilde{p}}}{g}{}^{\tilde{q}} = \underset{\alpha\alpha^{\tilde{p}}\cdot}{g}{}^{\cdot\tilde{q}} = \underset{\alpha^{\tilde{p}}}{\mathbf{r}}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{q}}, \quad \backsim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall\alpha, \tag{16}$$

and alternating the indices, we obviously obtain the objects considered above and also $\underset{\alpha}{g}{}^{pq} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{p}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{q}$, $\forall\alpha$, i.e., in this case, the number of the introduced quantities is equal to 36. It is easy to see that by (15) and (16), the connections between the families of bases are represented in the form

$$\underset{\alpha^{\tilde{p}}}{\mathbf{r}} = \underset{\alpha^{\tilde{p}}\alpha^{\tilde{n}}}{g}{}^{\tilde{n}}\underset{\alpha^{\tilde{n}}}{\mathbf{r}} = \underset{\alpha\beta^{\tilde{p}}\cdot}{g}{}^{\cdot\tilde{n}}\underset{\beta^{\tilde{n}}}{\mathbf{r}}, \quad \backsim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall\alpha, \beta, \tag{17}$$

which remains valid under index alternation. By (17), it is easy to show that the following relation holds:

$$g^{\cdot\bar{q}}_{\alpha\beta\bar{p}\cdot} = g^{\cdot\overset{*}{n}}_{\alpha\delta\bar{p}\cdot}\, g^{\cdot\bar{q}}_{\underset{*}{\beta}\beta\overset{*}{n}\cdot}, \quad \backsim, \sim, \star \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \forall\alpha, \beta, \delta. \tag{18}$$

Differentiating (3)–(5) in x^I and taking into account (17), we obtain

$$\begin{aligned}
&\mathop{\mathbf{r}}_{\alpha+\beta I}^{+} = \mathop{\mathbf{r}}_{\alpha I}^{-} + \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+\beta}\left[g^{\bar{k}}_{+\nu I} - g^{\bar{k}}_{-\nu I}\right]\mathop{\mathbf{r}}_{\nu k}^{-} = \mathop{\mathbf{r}}_{\alpha I}^{+} + \sum_{\nu=\alpha+1}^{\alpha+\beta}\left[g^{\bar{k}}_{+\nu I} - g^{\bar{k}}_{-\nu I}\right]\mathop{\mathbf{r}}_{\nu k}^{-},\\
&\partial_I \mathbf{h}(x^1, x^2) = \sum_{\nu=1}^{N}\partial_I \underset{\nu}{\mathbf{h}}(x^1, x^2) = \sum_{\nu=1}^{N}\left[\mathop{\mathbf{r}}_{\nu I}^{+}(x^1, x^2) - \mathop{\mathbf{r}}_{\nu I}^{-}(x^1, x^2)\right] =\\
&\qquad\qquad = \sum_{\nu=1}^{N}\left[g^{\bar{k}}_{+\nu I}(x^1, x^2) - g^{\bar{k}}_{-\nu I}(x^1, x^2)\right]\mathop{\mathbf{r}}_{\nu k}^{-}(x^1, x^2),\\
&\mathop{\mathbf{r}}_{N I}^{+}(x^1, x^2) = \mathop{\mathbf{r}}_{1 I}^{-}(x^1, x^2) + \sum_{\nu=1}^{N}\left[g^{\bar{k}}_{+\nu I}(x^1, x^2) - g^{\bar{k}}_{-\nu I}(x^1, x^2)\right]\mathop{\mathbf{r}}_{\nu k}^{-}(x^1, x^2).
\end{aligned} \tag{19}$$

Next, using (17) and (18), we can obtain the relation [2–4, 18, 19]

$$\underset{\sim}{\mathbf{E}} = \underset{\sim}{\underset{\alpha}{\mathbf{E}}} = g^{\bar{n}}_{\alpha\bar{p}}\mathbf{r}^{\bar{p}}_{\alpha}\mathbf{r}_{\alpha\bar{n}} = \underset{\sim}{\underset{\beta}{\mathbf{E}}} = g^{\bar{n}}_{\beta\bar{p}}\mathbf{r}^{\bar{p}}_{\beta}\mathbf{r}_{\beta\bar{n}} = g^{\cdot\bar{n}}_{\alpha\beta\bar{p}\cdot}\mathbf{r}^{\bar{p}}_{\alpha}\mathbf{r}_{\beta\bar{n}}, \quad \sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}, \ \forall\alpha, \beta, \tag{20}$$

which remains valid under index alternating. As is seen from (20), the quantities (15) and (16) introduced above represent the components of the second rank unit tensor for a multilayer thin domain of the three-dimensional Euclidean space.

It is seen from the material presented above that in the parametrization of a multilayer domain considered, for each layer, all the corresponding relations for a one-layered thin body under a new parametrization in [3, 4], as well as for other parametrizations considered in [3, 5, 17], are hold under the condition that the root letters of quantities entering these relations must be equipped with the bottom index, which denote the number of the layer considered. In this connection, we do not consider the problems on the parametrization of a multilayer domain in detail.

2 Equations of Motion and constitutive relations of Micropolar Theory

In what follows, for brevity, we present certain representations of equations of motion and constitutive relations (CR) in the case of a one-layer thin body, and then we show how one can obtain the desired relations using the rule presented above and write certain relations.

2.1 Motion equations and CR of physical contents of the micropolar theory of one-layer thin bodies with one small size

The new parametrization of a one-layer thin domain [1–4] is performed by the relation, which is obtained from (1) under the absence of index α under the symbols. To obtain the representations of equations of motion and CR, we need the representations of the gradient and the divergence under the parametrization considered. Let us obtain the representations of these operators. Omitting the index α, from (11) and (14), we find that

$$\mathbf{r}_p = g_p^{\bar{m}}\mathbf{r}_{\underset{\bar{m}}{-}} = g_{p\underset{\bar{m}}{+}}\mathbf{r}^{\bar{m}}, \quad \mathbf{r}^p = g^p_{\underset{\bar{m}}{-}}\mathbf{r}^{\bar{m}} = g^p_{\underset{\bar{m}}{+}}\mathbf{r}^{\bar{m}}, \tag{21}$$

and also from (13), we have

$$\begin{gathered} g^P_{\underset{\bar{M}}{-}} = \overset{(-)}{\vartheta}{}^{-1}A^P_{\underset{\bar{M}}{-}}, \quad \overset{(-)}{\vartheta} = \det(g^{\bar{J}}_{\underset{I}{-}}), \quad g^{\bar{3}}_{\underset{\bar{M}}{-}} = -g^{\bar{3}}_P g^P_{\underset{\bar{M}}{-}}, \quad g^{\bar{3}}_P = x^3 g^{\bar{3}}_{\underset{\bar{P}}{+}}, \\ g^{\bar{3}}_{\underset{\bar{P}}{+}} = h^{-1}\partial_P h, \quad h = |\mathbf{h}|, \quad A^P_{\underset{\bar{M}}{-}} \equiv g^{\bar{P}}_{\underset{\bar{M}}{-}} + x^3 a^P_{\underset{\bar{M}}{+}}, \quad a^P_{\underset{\bar{M}}{+}} \equiv (g^{\bar{I}}_{\underset{I}{+}} - 1)g^{\bar{P}}_{\underset{\bar{M}}{-}} - g^{\bar{P}}_{\underset{\bar{M}}{+}}. \end{gathered} \tag{22}$$

Moreover, it is easy to note that the following relations hold [1–4]:

$$g^P_{\underset{\bar{M}}{-}} = \sum_{s=0}^{\infty} A^{\bar{P}}_{\underset{(s)\bar{M}}{+}}(x^3)^s, \quad A^{\bar{P}}_{\underset{(s)\bar{M}}{+}} = (g^{\bar{P}}_{\underset{\bar{N}_1}{-}} - g^{\bar{P}}_{\underset{\bar{N}_1}{+}})\cdot(g^{\bar{N}_1}_{\underset{\bar{N}_2}{-}} - g^{\bar{N}_1}_{\underset{\bar{N}_2}{+}})\cdot\ldots\cdot(g^{\bar{N}_{s-1}}_{\underset{\bar{M}}{-}} - g^{\bar{N}_{s-1}}_{\underset{\bar{M}}{+}}), \quad A^{\bar{P}}_{\underset{(0)\bar{M}}{+}} = g^{\bar{P}}_{\underset{\bar{M}}{-}}. \tag{23}$$

By the first and third relations in (22) and the second relation in (21), we find that

$$\mathbf{r}^P = g^P_{\underset{\bar{M}}{-}}\mathbf{r}^{\bar{M}}, \quad \mathbf{r}^3 = g^{\bar{3}}_{\underset{\bar{M}}{-}}\mathbf{r}^{\bar{M}} + \mathbf{r}^{\bar{3}} = \mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_P\mathbf{r}^P = \mathbf{r}^{\bar{3}} - g^{\bar{3}}_P g^P_{\underset{\bar{M}}{-}}\mathbf{r}^{\bar{M}}. \tag{24}$$

The gradient operator can be applied to any tensor. Therefore, denoting a certain tensor quantity by $\mathbb{F}(x', x^3)$, by the definition of the gradient [17–19] and by (24), we have [3]

$$\mathrm{grad}\mathbb{F} = \nabla\mathbb{F} = \mathbf{r}^p\partial_p\mathbb{F} = \mathbf{r}^P\partial_P\mathbb{F} + \mathbf{r}^3\partial_3\mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{M}}g^P_{\underset{\bar{M}}{-}}(\partial_P - g^{\bar{3}}_P\partial_3)\mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\partial_3\mathbb{F}.$$

Whence, introducing the differential operator

$$N_p = \partial_p - g^{\bar{3}}_p\partial_3, \quad \mathbf{N} = \mathbf{r}^p N_p = \mathbf{r}^P N_P = \mathbf{r}^{\bar{M}}g^P_{\underset{\bar{M}}{-}}N_P, \quad N_3 = 0, \tag{25}$$

we obtain the desired representation of the gradient in the form

$$\mathrm{grad}\mathbb{F} = \nabla\mathbb{F} = \mathbf{N}\mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\partial_3\mathbb{F} = \mathbf{r}^P N_P\mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\partial_3\mathbb{F} = \mathbf{r}^{\bar{M}}g^P_{\underset{\bar{M}}{-}}N_P\mathbb{F} + \mathbf{r}^{\bar{3}}\partial_3\mathbb{F}. \tag{26}$$

The divergence operator is applied to a tensor whose rank is no less than 1. Applying this operator, e.g. to a second-rank tensor $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$, by the definition, the third relation in (22), and (25), we obtain

$$\mathrm{div}\,\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \nabla\cdot\underset{\sim}{\mathbf{P}} = g^P_{\underset{\bar{M}}{-}}N_P\mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3\mathbf{P}^{\bar{3}} \quad (\mathbf{P}^{\bar{m}} = \mathbf{r}^{\bar{m}}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{P}}). \tag{27}$$

Note that (27) can also be easily obtained from (26) if in this relation, we replace the sign of tensor product, which is omitted, with the sign of inner product.

2.1.1 Representations of motion equations

As it is known [21–23], the three-dimensional equations of motion of micropolar deformable rigid bodies are represented in the form

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{F} = \rho\partial_t^2\mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} + \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{m} = \underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2\boldsymbol{\varphi}. \tag{28}$$

Here, $\underset{\sim}{\mathbf{P}}$ and $\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}$ are tensors of stresses and couple stresses, $\underset{\approx}{\mathbf{C}}$ is the discriminant tensor (third-rank tensor) [17], $\mathbf{u}$ is the vector of displacements, $\boldsymbol{\varphi}$ is the vector of (inner) rotation, ρ is the material density, $\mathbf{F}$ is the mass force density, $\mathbf{m}$ is the mass moment density, and $\overset{2}{\otimes}$ is the inner 2-product (for example, $\underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} = \mathbf{r}^i C_{ijk} P^{jk}$). The definition of inner r-product and the problems related to it are considered in [1–3, 17, 24]. It is easy to see that by (27), Eqs. (28) can be rewritten in the form

$$g\underset{M}{\overset{P}{_}} N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho\mathbf{F} = \rho\partial_t^2\mathbf{u}, \quad g\underset{M}{\overset{P}{_}} N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{m} = \underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2\boldsymbol{\varphi}. \tag{29}$$

Note that (29) are called the motion equations of the micropolar deformable rigid thin body under the new parametrization of thin body domain. Taking into account the first relation in (23), we can rewrite Eqs. (29) in the form

$$\begin{gathered} \sum_{s=0}^{\infty} \underset{(s)M}{\overset{P}{\underset{+}{A}}} (x^3)^s N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho\mathbf{F} = \rho\partial_t^2\mathbf{u}, \\ \sum_{s=0}^{\infty} \underset{(s)M}{\overset{P}{\underset{+}{A}}} (x^3)^s N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{m} = \underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2\boldsymbol{\varphi}. \end{gathered} \tag{30}$$

It is seen that Eqs. (30) contain infinitely many summands. Therefore, they cannot be used in practice. Naturally, we need to consider approximate equations with finitely many summands. In this connection, let us introduce the following definition.

Definition. The equations, which are obtained from (29) if in the expansion of $g\underset{M}{\overset{P}{_}}$ (see the first formula in (23)) we preserve the first $s+1$ terms, are called the equations of approximation of order s.

Obviously, the equation of approximation of order s are represented in the form

$$g\underset{(s)M}{\overset{P}{_}} N_P \mathbf{P}^{\bar{M}} + \partial_3 \mathbf{P}^{\bar{3}} + \rho\mathbf{F} = \rho\partial_t^2\mathbf{u}, \quad g\underset{(s)M}{\overset{P}{_}} N_P \boldsymbol{\mu}^{\bar{M}} + \partial_3 \boldsymbol{\mu}^{\bar{3}} + \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{P}} + \rho\mathbf{m} = \underset{\sim}{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2\boldsymbol{\varphi}, \tag{31}$$

where

$$g\underset{(s)M}{\overset{P}{_}} = \sum_{m=0}^{s} \underset{M}{\overset{P}{\underset{+}{A}}} (x^3)^m.$$

From (31), for $s=0$, we obtain the equations of zero approximation, for $s=1$, the equations of first approximation, etc.

2.1.2 Representations of constitutive relations of physical and heat contents

Let us represent the constitutive relations of physical content under non-isothermal processes in the linear micropolar elasticity theory and the corresponding representation for the Fourier heat conduction law under the new parametrization of the thin body domain in the approximation of order s [3]

$$\underset{\sim}{\mathbf{P}}_{(s)} = \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} (\underset{(s)M}{g^{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \mathbf{u}) + \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} (\underset{(s)M}{g^{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \boldsymbol{\varphi}) - \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\approx}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\mathbf{b}}\vartheta,$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}_{(s)} = \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} (\underset{(s)M}{g^{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \mathbf{u} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \mathbf{u}) + \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} (\underset{(s)M}{g^{P}} \mathbf{r}^{\bar{M}} N_P \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{r}^{\bar{3}} \partial_3 \boldsymbol{\varphi}) - \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi} - \underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}}\vartheta$$

$$\mathbf{q}_{(s)} = -\boldsymbol{\Lambda}^{\bar{M}} \underset{(s)M}{g^{P}} N_P T - \boldsymbol{\Lambda}^{\bar{3}} \partial_3 T, \quad \boldsymbol{\Lambda}^{\bar{m}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{m}}, \quad \underset{(s)M}{g^{P}} = \sum_{n=0}^{s} \underset{(n)M}{A^{P}_{+}} (x^3)^n, \tag{32}$$

where $\underset{\approx}{\mathbf{A}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{B}}$, $\underset{\approx}{\mathbf{D}}$ ($\underset{\approx}{\mathbf{C}} = \underset{\approx}{\mathbf{B}}^T$) are material tensors of the fourth rank, and ϑ is the temperature overfall, $\underset{\sim}{\mathbf{b}} = \underset{\approx}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{a}} + \underset{\approx}{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{d}}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\beta}} = \underset{\approx}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{a}} + \underset{\approx}{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\mathbf{d}}$, which are called the tensors of thermomechanical properties. It should be noted that if we consider a body with center of symmetry [22, 23, 25], then $\underset{\approx}{\mathbf{B}} = 0$, $\underset{\approx}{\mathbf{C}} = 0$, and in this case, the constitutive relations presented above are simplified. The Fourier heat conduction law [20, 23] has the form $\mathbf{q} = -\underset{\sim}{\Lambda} \cdot \nabla T$, where the second-rank positive-definite tensor $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Lambda}}$ is called the heat conduction tensor.

The relations obtained from (32) for $s = 0$ are called CR of zero approximation, and for $s = 1$, they are called CR of the first approximation.

3 Equations of Motion in Moments

3.1 Motion equations in moments with respect to Chebyshev polynomial systems for multilayer thin bodies with one small size

We restrict ourselves to obtaining the systems of equations of motion of approximations $(0, N)$ in moments. Using the rule presented above, by analogous systems of equations from [3] we represent the desired systems of equations in the form

$$\begin{gathered}
\left\{ \underset{\alpha}{\nabla_I} \underset{\alpha}{\overset{(k)-}{\mathbf{P}^I}} - \underset{\alpha P}{\overset{-}{g^{3}_{+}}} \left[k \underset{\alpha}{\overset{(k)-}{\mathbf{P}^I}} + 2(k+1) \left(\sum_{p=k}^{N} \underset{\alpha}{\overset{(p)-}{\mathbf{P}^I}} - \underset{\alpha}{\overset{(k)-}{\mathbf{P}^I}} \right) \right] + \right. \\
\left. + 2(k+1) \sum_{p=k}^{N} \left[1 - (-1)^{k+p} \right] \underset{\alpha}{\overset{(p)-}{\mathbf{P}^3}} \right\} + \underset{\alpha}{\rho} \underset{\alpha}{\overset{(k)}{\mathbf{F}}} = \underset{\alpha}{\rho} \partial_t^2 \underset{\alpha}{\overset{(k)}{\mathbf{u}}}, \\
\left\{ \mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \right\} + \underset{\tilde{\alpha}}{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underset{\tilde{\alpha}}{\overset{(k)}{\mathbf{P}}} + \underset{\alpha}{\rho} \underset{\alpha}{\overset{(k)}{\mathbf{m}}} = \underset{\tilde{\alpha}}{\mathbf{J}} \cdot \partial_t^2 \underset{\alpha}{\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}}, \quad k = \overline{0, N}, \quad \alpha = \overline{0, K};
\end{gathered} \tag{33}$$

Here, the notation $\{\mathbf{P} \Rightarrow \boldsymbol{\mu}\}$ means that the expression in brackets is obtained from the expression in brackets of the previous relation if the letter $\mathbf{P}$ is replaced with $\boldsymbol{\mu}$. Similar designations are used in the future.

3.2 Motion equations in moments with respect to Legendre polynomials for multilayer thin bodies with one small size

Let us write systems of equations of motion of approximations $(0,N)$ and $(1,N)$ in moments taking into account only the boundary conditions of physical content on the frontal surfaces, which can be obtained by using the corresponding systems of equations from [3, 26–30]

$$\begin{gathered}\left\{\nabla_{\alpha J}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}-g^{\bar{3}}_{+\alpha I}\left[k\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}-(2k+1)\sum_{p=0}^{k}\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}\right]-(2k+1)\sum_{p=0}^{k}\left[1-(-1)^{k+p}\right]\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{3}}+\right.\\ \left.+(2k+1)\left[\sqrt{g^{++}_{\alpha 33}}\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}+(-1)^k\sqrt{g^{--}_{\alpha 33}}\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}\right]\right\}+\rho_{\alpha}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{F}}}=\rho_{\alpha}\partial_t^2\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}},\\ \left\{\mathbf{P}\Rightarrow\boldsymbol{\mu}\right\}+\underset{\tilde{\alpha}}{\tilde{\mathbf{C}}}\overset{2}{\otimes}\overset{(k)}{\underset{\tilde{\alpha}}{\tilde{\mathbf{P}}}}+\rho_{\alpha}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{m}}}=\underset{\alpha}{\mathbf{J}}\cdot\partial_t^2\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\boldsymbol{\varphi}}},\quad k=\overline{0,N},\quad \alpha=\overline{0,K};\end{gathered}\tag{34}$$

$$\begin{gathered}\left\{\nabla_{\alpha I}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}+\frac{1}{2}\left(g^{\bar{P}}_{-\alpha M}-g^{\bar{P}}_{+\alpha M}\right)\left(\frac{k}{2k-1}\nabla_{\alpha P}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{M}}+\nabla_{\alpha P}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{M}}+\frac{k+1}{2k+3}\nabla_{\alpha P}\overset{(k+1)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{M}}\right)-\right.\\ -(2k+1)\sum_{p=0}^{k}\left[1-(-1)^{k+p}\right]\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{3}}-g^{\bar{3}}_{+\alpha P}\left[g^{\bar{P}}_{-\alpha M}\left[k\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{M}}-(2k+1)\sum_{p=0}^{k}\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{M}}\right]+\right.\\ \left.\left.+(g^{\bar{P}}_{-\alpha I}-g^{\bar{P}}_{+\alpha I})\left[\frac{(k-1)k}{2(2k-1)}\overset{(k-1)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}+k\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}-\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}\overset{(k+1)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}-(2k+1)\sum_{p=0}^{k}\overset{(p)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}{}^{\bar{I}}\right]\right]+\right.\\ \left.+(2k+1)\left[\sqrt{g^{++}_{\alpha 33}}\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}+(-1)^k\sqrt{g^{--}_{\alpha 33}}\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}\right]\right\}+\rho_{\alpha}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{F}}}=\rho_{\alpha}\partial_t^2\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}},\\ \left\{\mathbf{P}\Rightarrow\boldsymbol{\mu}\right\}+\underset{\tilde{\alpha}}{\tilde{\mathbf{C}}}\overset{2}{\otimes}\overset{(k)}{\underset{\tilde{\alpha}}{\tilde{\mathbf{P}}}}+\rho_{\alpha}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{m}}}=\underset{\alpha}{\mathbf{J}}\cdot\partial_t^2\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\boldsymbol{\varphi}}},\quad k=\overline{0,N},\quad \alpha=\overline{0,K}.\end{gathered}\tag{35}$$

Note that Eqs. (34) and (35) are deduced by using the recurrence relations for Legendre polynomials [3]. Note also that $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}$ $(\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\boldsymbol{\mu}}})$ and $\overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{\mathbf{P}}}$ $(\overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{\boldsymbol{\mu}}})$ $(\alpha=\overline{1,K-1})$ are stress vectors (couple stresses) of interaction between the layers α and $\alpha+1$, which act on the surfaces $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{S}}$ and $\overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{S}}$, respectively, and $\overset{(+)}{\underset{1}{\mathbf{P}}}$ $(\overset{(+)}{\underset{1}{\boldsymbol{\mu}}})$ and $\overset{(-)}{\underset{K}{\mathbf{P}}}$ $(\overset{(-)}{\underset{K}{\boldsymbol{\mu}}})$ are given stress vectors (couple stresses) on the frontal surfaces $\overset{(+)}{\underset{1}{S}}$ and $\overset{(-)}{\underset{K}{S}}$, respectively. The equations of heat influx of approximations $(0,N)$ and $(1,N)$, and also constitutive relations of physical and heat contents in moments for multilayer thin bodies are obtained in full analogy with (34) and (35). To help the reader to understand this work, we refer him to [3,16,28–31], where for the theories of one-layer thin body with one small size and two small sizes, and also for theory of multilayer constructions with the use of the Legendre and Chebyshev polynomial systems, many analogous problems are presented in detail.

3.3 Equations in moments of the displacement vector for multilayer thin bodies with one small size

Let us write down the systems of equations of zero approximation in moments of the displacement vector for the classical theory [3]

$$\begin{aligned}&\underset{\alpha}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}^{\bar{I}\cdot\bar{J}\cdot}\cdot\nabla_{\alpha I}\nabla_{\alpha J}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}+\left(\underset{\alpha}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}^{\bar{3}\cdot\bar{I}\cdot}+\underset{\alpha}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}^{\bar{I}\cdot\bar{3}\cdot}\right)\cdot\nabla_{\alpha I}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}{}'+\underset{\alpha}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}^{\bar{3}\cdot\bar{3}\cdot}\cdot\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}{}''-\\&-\left(\underset{\alpha}{\mathbf{b}}^{\bar{I}}\nabla_{\alpha I}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}+\underset{\alpha}{\mathbf{b}}^{\bar{3}}\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\vartheta}}{}'\right)+\rho\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{F}}}=\rho\,\partial_t^2\overset{(k)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}},\quad k\geq 0,\quad \alpha=\overline{0,K},\end{aligned}\tag{36}$$

where $\underset{\alpha}{\underset{\sim}{\mathbf{A}}}^{\bar{I}\cdot\bar{J}\cdot}=\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\bar{I}}\cdot\underset{\alpha}{\underset{\approx}{\mathbf{A}}}\overset{2}{\otimes}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\bar{J}}\underset{\sim}{\mathbf{E}}$, $\underset{\alpha}{\mathbf{b}}^{\bar{m}}=\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\bar{m}}\cdot\underset{\alpha}{\underset{\sim}{\mathbf{b}}}$ and in case of Legendre polynomials we have

$$\begin{aligned}&\overset{(k)}{\mathbf{u}}{}'=(2k+1)\sum_{p=0}^{\infty}\overset{(k+2p+1)}{\mathbf{u}}=\frac{2k+1}{2}\left[\overset{(-)}{\mathbf{u}}-(-1)^k\overset{(-)}{\mathbf{u}}\right]-\frac{2k+1}{2}\sum_{p=0}^{k-1}\left[1-(-1)^{k+p}\right]\overset{(k)}{\mathbf{u}},\\&\overset{(k)}{\mathbf{u}}{}''=4(2k+1)\left[(2k+3)\overset{(k+2)}{\mathbf{u}}+2(2k+5)\overset{(k+4)}{\mathbf{u}}+3(2k+7)\overset{(k+6)}{\mathbf{u}}+\ldots\right]=\\&=(2k+1)\left[\overset{(+)}{\partial_3}\mathbf{u}-(-1)^k\overset{(-)}{\partial_3}\mathbf{u}-k(k+1)\left(\overset{(+)}{\mathbf{u}}+(-1)^k\overset{(-)}{\mathbf{u}}\right)\right]+\underset{\sim}{\overset{(k)}{\mathbf{u}}}{}'',\\&\underset{\sim}{\overset{(k)}{\mathbf{u}}}{}''=4(2k+1)\left[(2k-1)\overset{(k-2)}{\mathbf{u}}+2(2k-3)\overset{(k-4)}{\mathbf{u}}+3(2k-5)\overset{(k-6)}{\mathbf{u}}+\ldots\right].\end{aligned}\tag{37}$$

Here $\overset{(-)}{\partial_3}\mathbf{u}=(\partial_3\mathbf{u})|_{x^3=0}$, $\overset{(+)}{\partial_3}\mathbf{u}=(\partial_3\mathbf{u})|_{x^3=1}$, $\overset{(-)}{\mathbf{u}}=\mathbf{u}|_{x^3=0}$ and $\overset{(+)}{\mathbf{u}}=\mathbf{u}|_{x^3=1}$.

Taking into account the expressions for $\underset{\alpha}{\overset{(k)}{\mathbf{u}}}{}'$ and $\underset{\alpha}{\overset{(k)}{\mathbf{u}}}{}''$, which are obtained from (37) (see also (40)) when $\mathbf{u}$ is replaced by $\underset{\alpha}{\mathbf{u}}$ from (36) we obtain various representations of the equations of different approximations in moments of the displacement vector with respect to Legendre polynomials.

It should be noted that to close systems of equations (34) and (35), we need to add to them the system of equations of heat influx, constitutive relations, boundary and initial conditions of physical and heat contents in moments of the corresponding approximations, and also the inter-layer contact conditions depending on the connections of neighboring surfaces.

Similarly to the above, for the closure of the equations (36), we need to add to them the system of equations of heat influx and boundary and initial conditions of physical and heat contents in moments of the corresponding approximations, and also the inter-layer contact conditions depending on the connections of neighboring surfaces.

3.4 Quasi-static problems of the micropolar theory of multilayer prismatic bodies in displacements and rotations and in moments of displacement and rotation vectors

Using the rule, set out in [3, 29–31], to obtain the desired relation of the multilayer thin body from the corresponding relation of monolayer thin body under the new parametrization, the system of equations of the micropolar theory of multilayer

prismatic bodies with constant thickness (each layer has a constant thickness) in displacements and rotations can be written as [3, 32]

$$\begin{aligned}&[\bar{\Delta}_s^3+A_s\bar{\Delta}_s^2+h_s^{-2}(3\bar{\Delta}_s+2A_s)\bar{\Delta}_s\partial_3^2+h_s^{-4}(3\bar{\Delta}_s+A_s)\partial_3^4+h_s^{-6}\partial_3^6]\mathbf{u}_s+\mathbf{S}_s^{**}=0,\ s=\overline{1,K},\\&[\bar{\Delta}_s^3+(B_s\bar{\Delta}_s+A_s)\bar{\Delta}_s+h_s^{-2}[(3\bar{\Delta}_s+2B_s)\bar{\Delta}_s+C_s]\partial_3^2+h_s^{-4}(3\bar{\Delta}_s+B_s)\partial_3^4+h_s^{-6}\partial_3^6]\boldsymbol{\varphi}_s+\mathbf{H}_s^{**}=0,\end{aligned}\tag{38}$$

where $h_s=const$ is the sth layer thickness, $\bar{\Delta}_s=g_s^{\overline{IJ}}\partial_I\partial_J$. Here we have introduced the notations

$$\mathbf{S}_s^{**}=\frac{\mathbf{S}_s^*}{(\lambda_s+2\mu_s)(\mu_s+\alpha_s)(\delta_s+\beta_s)},\ \mathbf{H}_s^{**}=\frac{\mathbf{H}_s^*}{(\gamma_s+2\delta_s)(\mu_s+\alpha_s)(\delta_s+\beta_s)},\ A_s=-\frac{4\alpha_s\mu_s}{(\mu_s+\alpha_s)(\delta_s+\beta_s)},$$

$$B_s=-\frac{4\alpha_s[\mu_s(\gamma_s+2\delta_s)+(\mu_s+\alpha_s)(\delta_s+\beta_s)]}{(\gamma_s+2\delta_s)(\mu_s+\alpha_s)(\delta_s+\beta_s)},\ C_s=\frac{16\alpha_s^2\mu_s}{(\gamma_s+2\delta_s)(\mu_s+\alpha_s)(\delta_s+\beta_s)},\ s=\overline{1,K}.$$

Applying to the equations (38) the kth moment operator of any system of orthogonal polynomials (Legendre, Tchebyshev) we obtain for the micropolar theory of prismatic bodies of constant thickness the following equations in moments of displacement and rotation vectors:

$$\begin{aligned}&[\bar{\Delta}_s^3+A_s\bar{\Delta}_s^2]\overset{(k)}{\mathbf{u}}_s+h_s^{-2}(3\bar{\Delta}_s+2A_s)\bar{\Delta}_s\overset{(k)}{\mathbf{u}}_s''+h_s^{-4}(3\bar{\Delta}_s+A_s)\overset{(k)}{\mathbf{u}}_s^{IV}+h_s^{-6}\overset{(k)}{\mathbf{u}}_s^{VI}+\overset{(k)}{\mathbf{S}}_s^{**}=0,\\&[\bar{\Delta}_s^3+(B_s\bar{\Delta}_s+A_s)\bar{\Delta}_s]\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}_s+h_s^{-2}[(3\bar{\Delta}_s+2B_s)\bar{\Delta}_s+C_s]\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}_s''+h_s^{-4}(3\bar{\Delta}_s+B_s)\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}_s^{IV}+h_s^{-6}\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}_s^{VI}+\\&+\overset{(k)}{\mathbf{H}}_s^{**}=0,\ \ k\geq 0,\ \ s=\overline{1,K}.\end{aligned}\tag{39}$$

Note that in case of Legendre polynomials expressions for $\overset{(k)}{\mathbf{u}}_\alpha''$, $\overset{(k)}{\mathbf{u}}_\alpha^{IV}$, $\overset{(k)}{\mathbf{u}}_\alpha^{VI}$, $\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha''$, $\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha^{IV}$ and $\overset{(k)}{\boldsymbol{\varphi}}_\alpha^{VI}$ in (39) are found using [3, 30] (see also (37))

$$\begin{aligned}&\overset{(n)(2m)}{\mathbf{u}}(x^1,x^2)=(2n+1)\sum_{k=1}^{\infty}C_{k+2m-2}^{2m-1}\prod_{s=1}^{2m-1}(2n+2k+2s-1)\overset{(n+2k+2m-2)}{\mathbf{u}}=\\&=\frac{2n+1}{2}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k+1}[(\partial_3^{2m-k}\mathbf{u})^+ +(-1)^{n+k}(\partial_3^{2m-k}\mathbf{u})^-]P_n^{k-1}(1)+\overset{(k)}{\underline{\mathbf{u}}}(2m),\\&\overset{(k)}{\underline{\mathbf{u}}}(2m)=(2n+1)\sum_{k=1}^{[n/2-m+1]}C_{k+2m-2}^{2m-1}\prod_{s=1}^{2m-1}(2n-2k-2s+3)\overset{(n-2k-2m+2)}{\mathbf{u}},\ n\geq 0,\ m>0.\end{aligned}\tag{40}$$

In the relations (39) s is an index of layers, K is a number of layers. It should be noted that, as in the case of a single layer prismatic body, so in the case of multilayer prismatic body for each of the equations, obtained after splitting (39), using the method of Vekua [33], we can write an analytic solution. Consequently,

for correct statement of problems the boundary conditions in moments and the interlayer contact conditions must be added to the equations (39) (see in [3, 29–32]). To satisfy the boundary conditions on the frontal surfaces, as well as to describe the interlayer contact conditions, under the simplified method of reducing the three-dimensional problem to the two-dimensional, it is necessary to construct the correcting terms [3, 29]. At the same time the analytical solution of each layer (except the first and last) with the corrective terms can be written so that it satisfies the interlayer contact conditions. For the first (last) layer the analytical solution by means of corrective terms can be represented in such a way that it satisfies the boundary conditions on the inner (outer) surface and the interlayer contact conditions on the outer (inner) surface. Therefore, we suppose that the interlayer contact conditions would be taken into account better if the order of approximation is higher. This is very important in the theory of multilayer structures. We note that the questions considered above are described in some detail in [32] (see also [3, 28–32]).

4 Inter-Layer Contact Conditions

In studying strained-deformed states of multilayer constructions and composite media, as a rule, one assumes that component layers (elements, phases) work jointly, without sliding. Obviously, such a model does not cover the variety of connection methods used in technology and does not take into account the existence of interphase defects, which manifest themselves in non-perfect connection of phases in contact. Defects of such a type often are undoubt because of peculiarities of technological character (see [34]). Therefore, the deformation of multilayer thin bodies can be without violation or with violation of complete layer contact owing to their separation in normal or tangential direction. Between the layers, there can arise contact domain and contact-free domain. Moreover, the boundaries of these domains can vary in the deformation process, the layer can slide with respect to each other, the sliding can be with friction, etc. All these phenomena can essentially influence on the mechanical behavior of a thin body, its strained-deformed state. Of course, the account of these phenomena is necessary in studying strained-deformed state of multilayer bodies. In contrast to other parametrization, the use of frontal surfaces as base surfaces in parametrization of multilayer thin body domain allows one to easily take into account these phenomena. In consideration the phenomena occurring on frontal surfaces, the main problem is the problem of modelling the interface. In this direction, there exist two approaches. The first approach is physical, which take into account thin adhesion layers via generalized weld condition of elements being in contact. For the first time, such an approach was proposed for heat conduction problems in [35]. Later on, it was generalized to mechanical problems [36]. The second approach is phenological; it is based on the assumption that a priori, the exist discontinuity zones of displacements. To study these problems, we assume that a multilayer thin construction consists of K layers. Denote by $\overset{(+)}{S}_{\alpha}$ and $\overset{(-)}{S}_{\alpha}$ $(\alpha = \overline{1,K})$ the exterior and inner surfaces of the layer α $(\alpha = \overline{1,K})$, respectively and consider some cases of mutual relation of neighboring surfaces $\overset{(+)}{S}_{\alpha}$ $\overset{(-)}{S}_{\alpha+1}$ $(\alpha = \overline{1,K-1})$, which

are important in practice.

4.1 Weld conditions (complete ideal contact conditions)

In this case the forces and moments of interaction between the layers α and $\alpha+1$ ($\alpha=\overline{1,K-1}$) are unknown. These forces and moments certainly are equal and have opposite directions. Therefore, there additionally arise six unknown functions. However, in the case considered, we have six additional conditions, which express the continuity of displacement vectors and the rotation of welded surface points. In other words, displacement vectors and rotation vectors of contacted surfaces are equal. Denoting the forces and moments of interaction of the contacted surfaces $\overset{(+)}{S}_{\alpha}$ and $\overset{(-)}{S}_{\alpha+1}$ ($\alpha=\overline{1,K-1}$) by $\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha}$, $\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}$ and $\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1}$, $\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha+1}$ ($\alpha=\overline{1,K-1}$), respectively, and the displacement and rotation vectors of points of these surfaces by $\overset{(+)}{\mathbf{u}}_{\alpha}$, $\overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}$ and $\overset{(-)}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}$, $\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}$ ($\alpha=\overline{1,K-1}$), we can represent the complete contact conditions in micropolar theory of multilayer thin bodies in the form

$$\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha}=-\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1},\quad \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha}=-\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}_{\alpha+1},\quad \overset{(+)}{\mathbf{u}}_{\alpha}=\overset{(-)}{\mathbf{u}}_{\alpha+1},\quad \overset{(+)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha}=\overset{(-)}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1},\quad \alpha=\overline{1,K-1}. \tag{41}$$

Neglecting the characteristics of micropolar theory (the second and fourth relations) in (41), we obtain the ideal contact conditions for the classical theory (the first and third relations).

4.2 Conditions under relative displacement of points of uneven contacted surfaces of layers

In the case considered here, the slipping with the friction of layers with respect to each other can take place in the process of deformation of the multilayer thin body. The relative slipping does not occur until the magnitude of the tangent component of the interaction force $\overset{(+)}{\mathbf{P}}_{\alpha(s)}$ ($\overset{(-)}{\mathbf{P}}_{\alpha+1(s)}$) (force of friction) between the contacted surfaces reaches its limit (maximal possible) value $\left|\overset{(+)}{\mathbf{P}}{}^{*}_{\alpha}\right|$ ($\left|\overset{(-)}{\mathbf{P}}{}^{*}_{\alpha+1}\right|$), therefore,

$$\overset{\mathbf{v}}{\underset{\alpha}{}}(x^1,x^2)=0,\quad \alpha=\overline{1,K-1}. \tag{42}$$

In case of the classic theory of multilayer thin bodies we have [3]

$$\begin{gathered}\overset{(-)}{u}_{\alpha+1}(n)=\overset{(+)}{u}_{\alpha}(n),\quad \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}\cdot\overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{\mathbf{P}}}\left(\overset{\mathbf{u}}{\underset{\alpha+1}{}},\overset{\vartheta}{\underset{\alpha+1}{}}\right)\cdot\overset{(-)}{\mathbf{s}}_{\alpha+1}=\overset{(-)}{P}{}^{*}_{\alpha+1(s)},\quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}(\mathbf{u},\vartheta)\cdot\overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha}=\overset{(+)}{P}{}^{*}_{\alpha(s)},\\ \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{P}}}(\mathbf{u},\vartheta)\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}=\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}\cdot\overset{(-)}{\underset{\alpha+1}{\mathbf{P}}}\left(\overset{\mathbf{u}}{\underset{\alpha+1}{}},\overset{\vartheta}{\underset{\alpha+1}{}}\right)\cdot\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha},\quad \alpha=\overline{1,K-1},\quad x'\in\overset{(+)}{S}{}^{0}_{\alpha}\subset\overset{(+)}{S}_{\alpha},\end{gathered} \tag{43}$$

and in the case of the micropolar theory of multilayer thin bodies whose layers do not have a center of symmetry, we assume the following relations [3]

$$\begin{gathered}
\overset{(-)}{u}_{\alpha+1}(n) = \overset{(+)}{u}_{\alpha}(n), \quad \overset{(-)}{\varphi}_{\alpha+1}(n) = \overset{(+)}{\varphi}_{\alpha}(n), \quad \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1} \cdot \overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}, \overset{}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}, \overset{}{\vartheta}_{\alpha+1}) \cdot \overset{(-)}{\mathbf{s}}_{\alpha+1} = \overset{(-)}{P}{}^{*}_{\alpha+1}(s), \\
\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \vartheta) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha} = \overset{(+)}{P}{}^{*}_{\alpha}(s), \quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \vartheta) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} = \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(-)}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}, \overset{}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}, \overset{}{\vartheta}_{\alpha+1}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}, \\
\overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1} \cdot \overset{(-)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}, \overset{}{\mathbf{u}}_{\alpha+1}, \overset{}{\vartheta}_{\alpha+1}) \cdot \overset{(-)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1} = \overset{(-)}{\mu}{}^{*}_{\alpha+1}(n), \quad \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}, \vartheta) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} = \overset{(+)}{\mu}{}^{*}_{\alpha}(n), \\
\overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}, \vartheta) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha} = \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha} \cdot \overset{(-)}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}}_{\alpha+1}(\overset{}{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha+1}, \overset{}{\mathbf{u}}_{\alpha}, \overset{}{\vartheta}_{\alpha+1}) \cdot \overset{(+)}{\mathbf{s}}_{\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, K-1}, \quad x' \in \overset{(+)}{S}{}^{0}_{\alpha} \subset \overset{(+)}{S}_{\alpha}.
\end{gathered} \tag{44}$$

Here, naturally, $\overset{(+)}{\mu}{}^{*}_{\alpha}(n) = \overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{*}_{\alpha} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha}$, $\overset{(-)}{\mu}{}^{*}_{\alpha+1}(n) = \overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{*}_{\alpha+1} \cdot \overset{(+)}{\mathbf{n}}_{\alpha+1}$, where $\overset{(+)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{*}_{\alpha}$ ($\overset{(-)}{\boldsymbol{\mu}}{}^{*}_{\alpha+1}$) is the intensity of the limit momentum. Therefore, $\overset{(+)}{P}{}^{*}_{\alpha}(s)$, $\overset{(-)}{P}{}^{*}_{\alpha+1}(s)$, $\overset{(+)}{\mu}{}^{*}_{\alpha}(n)$ and $\overset{(-)}{\mu}{}^{*}_{\alpha+1}(n)$ are unknown values in relations (43) and (44) determined from some a priori dependencies, conditions of slipping with friction, which, generally speaking, must depend on geometric and physical-mechanical properties of contacted bodies. In the classic case we may suppose the following relations hold:

$$\mathbf{L}(x^1, x^2, \mathbf{v}_s, \dot{\mathbf{v}}_s, [T], \mathbf{P}^{(l)*}, \dots) = 0, \tag{45}$$

where $\mathbf{v}_s$ and $\dot{\mathbf{v}}_s$ are the tangent components of the vectors of the relative displacement and relative velocity, $[T]$ is the temperature jump, $\mathbf{P}^{(l)*}$ is the limit stress vector on a plane element with the normal $\mathbf{l}$, the ellipsis denotes the dependence on some other parameters. Based on (45), we can accept that the generalized model of Coulomb friction is valid:

$$\mathbf{P}^{*}_{(s)} = \underset{\sim}{\mathbf{f}}(x^1, x^2, [T], \mathbf{P}^{*}_{(n)}) \cdot \dot{\mathbf{v}}_s, \tag{46}$$

which takes into account the anisotropy of the friction. Here $\mathbf{P}^{*}_{(s)}$ and $\mathbf{P}^{*}_{(n)}$ are the limit tangent and normal components of the stress vector $\mathbf{P}^{(l)*}$. The second rank tensor $\underset{\sim}{\mathbf{f}}(x^1, x^2, [T], \mathbf{P}^{*}_{(n)})$ is called the tensor of friction coefficients. Obviously, in the isotropic case we have $\underset{\sim}{\mathbf{f}} = f\underset{\sim}{\mathbf{E}}$, where $\underset{\sim}{\mathbf{E}}$ is the unit second rank tensor. Representing (46) for contacted surfaces of a multilayer thin body, we obtain the missing required relations. Based on similar arguments in the case of the micropolar theory, we can assert that the following a priori relations are valid:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}(x^1, x^2, \mathbf{v}_s, \dot{\mathbf{v}}_s, \boldsymbol{\psi}_n, \dot{\boldsymbol{\psi}}_n, [T], \mathbf{P}^{(l)*}, \dots) = 0, \\
&\mathbf{M}(x^1, x^2, \mathbf{v}_s, \dot{\mathbf{v}}_s, \boldsymbol{\psi}_n, \dot{\boldsymbol{\psi}}_n, [T], \boldsymbol{\mu}^{(l)*}, \dots) = 0,
\end{aligned} \tag{47}$$

where $\boldsymbol{\psi}_n$ and $\dot{\boldsymbol{\psi}}_n$ are the normal components of the vectors of the relative internal rotation and relative internal rotation velocity of adjacent layers, $\boldsymbol{\mu}^{(l)*}$ is the limit vector of the couple stress on a plane element with the normal $\mathbf{l}$, the other parameters are the same as in (45). Based on (47) and similar to (46), for the micropolar theory we can assume that the following relations are valid:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{*}_{(s)} &= \underset{\sim}{\mathbf{f}}(x^1, x^2, [T], \mathbf{P}^{*}_{(n)}) \cdot \dot{\mathbf{v}}_s + \underset{\sim}{\mathbf{h}}(x^1, x^2, [T], \mathbf{P}^{*}_{(n)}) \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}}_n, \\
\boldsymbol{\mu}^{*}_{(n)} &= \underset{\sim}{\mathbf{g}}(x^1, x^2, [T], \boldsymbol{\mu}^{*}_{(s)}) \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}}_n + \underset{\sim}{\mathbf{l}}(x^1, x^2, [T], \boldsymbol{\mu}^{*}_{(s)}) \cdot \dot{\mathbf{v}}_s,
\end{aligned} \tag{48}$$

that take into account the anisotropy of the friction. Here $\underset{\sim}{\mathbf{f}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{h}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{g}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{l}}$ are the second rank tensors called the tensors of friction coefficients. Therefore, in the case of an isotropic friction we have $\underset{\sim}{\mathbf{f}} = f\underset{\sim}{\mathbf{E}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{h}} = h\underset{\sim}{\mathbf{E}}$, $\underset{\sim}{\mathbf{g}} = g\underset{\sim}{\mathbf{E}}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{l}} = l\underset{\sim}{\mathbf{E}}$, where $\underset{\sim}{\mathbf{E}}$ is the unit second rank tensor. It should be noted here that the coefficients of friction are determined by experiments and are given in tables. The authors know little in this direction for the micropolar theory, but for the classic theory these coefficients can be obtained, e.g., from [37–39]. Representing (48) for the contacted surfaces of a multilayer thin body, we get the missing required relations in the case of the micropolar theory.

The very important direction is the study of eigenvalue problems for the tensor and tensor-block matrix of any even rank, since the constitutive relations for most classical and micropolar media of different rheology (here, of course, also include porous and multilayer textile media) are written using a tensor and tensor-block matrix of even rank, respectively. Some questions concerning these problems, as well as tensor calculus, have been studied in some detail in [4, 24, 41–45]. A very important direction is also the investigation of internal structures of differential tensors-operators and tensor-block matrix operators of even rank. This is due to the fact that such operators are operators of systems of equations of motion and static boundary conditions with respect to kinematic characteristics (displacement, rotation, velocity, angular velocity) for most classical and micropolar mediums. The study of these problems promotes the decomposition of initial-boundary value problems in the case of linear theories. Some questions about the decomposition of initial-boundary value problems can be found in [3,32]. We note that the boundary and initial conditions are also given there in the moments which, for the formulation of initial-boundary value problems in moments for multilayer thin bodies, must be added to the equations and CR in moments and interlayer contact conditions. We will not write out them to shorten the letter, but we refer the interested reader to the works mentioned above.

Conclusion

In the paper some questions of the new parametrization of a multilayer thin domain are considered. In contrast with classic approaches, several base surfaces and an analytic method with application of orthogonal polynomial systems are used. Geometric characteristics typical for the new parametrizations are introduced into consideration. Various presentations of the equations of motion and the constitutive relations of physical and heat contents are given under the new parametrization of the body domain. Various variants of the equations of motion in moments with respect to orthogonal polynomial systems are obtained. The equations in moments of (displacement vector) displacement and rotation vectors with respect to any system of orthogonal polynomials (Legendre, Tchebyshev) for the (classical) micropolar theory of prismatic multilayer elastic bodies of constant thickness are given. The complete ideal contact conditions and the conditions under relative displacement of points of uneven contacted surfaces of layers are given. The formulations of initial-boundary value problems in the theory of multilayer elastic thin bodies in moments

are discussed.

Acknowledgments: the work was supported by Shota Rustaveli National Science Foundation (project DI-2016-41).

References

[1] Nikabadze M. U. 2001, A variant of the theory of multilayer structures, *Mech. Solids*, 1, 143–158.

[2] Nikabadze M. U. 2012, Mathematical modeling of multilayer thin body deformation *J. Math. Sci.*, **187**:3, 300–336.

[3] Nikabadze M. U. 2014, *Development of the method of orthogonal polynomials in the classical and micropolar mechanics of elastic thin bodies* (Moscow: Mos. Univer. Press), 515 p (in Russian) http://istina.msu.ru/media/publications/book/707/ea1/6738800/Monographiya.pdf

[4] Nikabadze M. U. 2017, Topics on tensor calculus with applications to mechanics *J. Math. Sci.*, **225**:1, 194 p

[5] Vekua I. N. 1985, *Shell theory, general methods of construction* (Pitman Advanced Pub. Program)

[6] Alekseev A. E. 1994, Construction of equations of a layer with variable thickness based on expansions over Legendre polynomials *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, **35**:4, 137–147.

[7] Ivanov G. V. 1980, *Theory of plates and shells* (Novosibirsk: Novosib. State Univ.) (in Russian)

[8] Medick M. A. 1966, One-dimensional theories of wave and oscillation propagation in elastic rods of rectangular cross-sections. Applied theory of symmetric oscillations of elastic rods of rectangular and square cross-sections *Appl. Mech.*, 3, 11–19.

[9] Mindlin R. D. and Medick M. A., 1959, Extensional vibrations of elastic plates *J. Appl. Mech.*, **26**:4, 561–569.

[10] Pelekh B. L. and Sukhorolskii M. A., 1980, *Contact problems of the theory of elastic anisotropic shells* (Kiev: Naukova Dumka) (in Russian)

[11] Pelekh B. L., Maksimuk A. V. and Korovaichuk I. M., 1988, *Contact problems for laminated elements of constructions and bodies with coating* (Kiev: Naukova Dumka) (in Russian)

[12] Meunargiya T. V., 1987, *Development of the method of I. N. Vekua for problems of the three-dimensional moment elasticity* (Tbilisi: Tbil. State Univ.) (in Russian)

[13] Nikabadze M. U. and Ulukhanyan A. U. 2005, Statements of problems for a thin deformable three-dimensional body *Vestn. Mosk. Univ., Matem. Mekhan.*, 5, 43–49.

[14] Nikabadze M. U., 2006, A variant of the system of equations of the theory of thin bodies *Vestn. Mosk. Univ., Matem. Mekhan.*, 1, 30–35.

[15] Nikabadze M. U., 2007, Application of a system of Chebyshev polynomials to the theory of thin bodies *Vestn. Mosk. Univ., Matem. Mekhan.*, 5, 56–63.

[16] Nikabadze M. U., 2007, Some issues concerning a version of the theory of thin solids based on expansions in a system of Chebyshev polynomials of the second kind *Mech. Solids*, **42**:3, 391-421.

[17] Vekua I. N., 1978, *Fundamentals of tensor analysis and covariant theory* (Moscow: Nauka) (in Russian).

[18] Lur'e A. I., 1980, *Nonlinear elasticity* (Moscow: Nauka) (in Russian).

[19] Pobedrya B. E., 1986, *Lectures in tensor analysis* (Moscow: Moscow State Univ.) (in Russian).

[20] Pobedrya B. E., 1995, *Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity. 2nd ed.* (Moscow: Moscow State Univ.) (in Russian)

[21] *Eringen A. C.* 1999, *Microcontinuum field theories. 1. Foundation and solids* (N.Y.: Springer-Verlag)

[22] Kupradze V. D., Gegelia T. G., Basheleishvili M. O. and Burchuladze T. V., 1976, *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity* (Moscow: Nauka) (in Russian)

[23] Novacky W., 1975, *Theory of elasticity* (Moscow: Mir) (Russian translation).

[24] Nikabadze M. U., 2009, On some Problems of Tensor Calculus. I, *J. Math. Sci*, **161**:5, 668–697.

[25] *M. U. Nikabadze and A. R. Ulukhanyan,* 2008, *Mathematical modeling of elastic thin bodies with one small dimension with the use of systems of orthogonal polynomials* (Manuscript in VINITI Ross. Akad. Nauk), 723 – B2008, 64 p (in Russian).

[26] Nikabadze M. U., Kantor M. M. and Ulukhanian A. R., 2011, *To mathematical modeling of elastic thin bodies and numerical realization of several problems on the band* (Manuscript in VINITI Ross. Akad. Nauk), 204 – B2011, 207 p (in Russian).

[27] *M. U. Nikabadze and A. R. Ulukhanyan*, 2005, *Formulations of problems for a shell domain according to three-dimensional theories* (Manuscript in VINITI Ross. Akad. Nauk), 83–B2005, 7 p (in Russian).

[28] *M. U. Nikabadze*, 2008, *The application of systems of Legendre and Chebyshev polynomials at modeling of elastic thin bodies with a small size* (Manuscript in VINITI Ross. Akad. Nauk), 720-V2008, 287 p (in Russian).

[29] *M. U. Nikabadze*, 2014, *The method of orthogonal polynomials in the classical and micropolar mechanics of elastic thin bodies. II* (Manuscript in VINITI Ross. Akad. Nauk), 136-V2014, 218 p (in Russian).

[30] *M. U. Nikabadze*, 2014, The method of orthogonal polynomials in the classical and micropolar mechanics of elastic thin bodies The dissertation of the doctor of physical and mathematical sciences. M., MAI, 384 p (in Russian). http://istina.msu.ru/media/dissertations/dissertation/659/37c/6738997/dissertatsiya.pdf

[31] *M. U. Nikabadze*, 2014, *The method of orthogonal polynomials in the classical and micropolar mechanics of elastic thin bodies. I* (Manuscript in VINITI Ross. Akad. Nauk), 135-V2014, 278 p (in Russian).

[32] Nikabadze M. U. and Ulukhanyan A. R., 2016, *Analytical solutions in the theory of thin bodies* H. Altenbach and S. Forest (eds.), Generalized continua as models for classical and advanced materials, advanced structured materials 42 319-361 DOI 10.1007/978-3-319-31721-2_15

[33] *Vekua I.N.*, 1948, *New methods for solving elliptic equations* (OGIZ, Moscow), 296 p. (in Russian).

[34] Krasulin Yu. L. and Shorshorov M. Kh., 1967, Formation mechanism of joining heterogeneous materials in solid state *Phys.-Chem. Material Processing*, 1, 89–94.

[35] Podstrigach Ya. S., 1963, Conditions of heat contact of solid bodies *Doklady Akad. Nauk URSR*, 7, 872–874.

[36] Podstrigach Ya. S., 1982, Jump conditions for stresses and displacements on a thin-walled elastic inclusion in a continuum *Dokl. Akad. Nauk URSR*, 12, 30–32.

[37] Braun E. D., Bushe N. A., Buyanovskii I. A. and et al., 1995, *Fundamentals of tribology (friction, wear, lubrication). Ed. by A. V. Chichinadze* (Moscow: Nauka i Tekhnika) (in Russian)

[38] Kragelskii I. V. and Vinogradova I. E., 1962, *Coefficients of friction* (Moscow: Mashgiz) (in Russian).

[39] Kragelskii I. V., 1968, *Friction and wear* (Moscow: Mashinostroenie) (in Russian).

[40] Savin G. N., 1965, *Foundations of the plane problem of the moment elasticity theory* (Kiev: Kiev State Univ. (in Russian).

[41] Nikabadze M. U., 2008, On the eigenvalue and eigentensor problem for a tensor of even rank *Mech. Solids*, **43**:4, 586–599.

[42] Nikabadze M. U., 2009, On the construction of linearly independent tensors *Mech. Solids*, **44**:1, 14–30.

[43] Nikabadze M. U., 2009, On some problems of tensor calculus. II, *Journal of mathematical sciences* **161**:5, 698-733.

[44] Nikabadze M. U., 2016, *Eigenvalue problems of a tensor and a tensor-block matrix (TMB) of any even rank with some applications in mechanics* H. Altenbach and S. Forest (eds.), Generalized continua as models for classical and advanced materials, advanced structured materials 42, 279–317 DOI 10.1007/978-3-319-31721-2_14

[45] Nikabadze M. U., 2017, An eigenvalue problem for tensors used in mechanics and the number of independent saint-venant strain compatibility conditions *Moscow university mechanics bulletin*, **72**:3, 66–69 DOI: 10.3103/S0027133017030037

Oscillations During Spatial Deceleration of a Rigid Body in a Resisting Medium

Maxim V. Shamolin[1]

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University
1 Michurinskii Ave., 119192 Moscow, Russian Federation
shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Abstract

Some qualitative analysis is carried out of the spatial problems concerning the motion of a rigid body in a resisting medium. A nonlinear model is constructed of impact of the medium on the rigid body, which takes into account the dependence of the arm of force on the reduced angular velocity of the body. Moreover, the moment of this force itself is also a function of the angle of attack. As was shown by the processing the experimental data on the motion of homogeneous circular cylinders in water, these circumstances should be taken into account in the simulation. The analysis of the plane and spatial models of the interaction of a rigid body with a medium reveal the sufficient conditions of stability of the key regime of motion, i.e., the translational rectilinear deceleration. It is also shown that, under certain conditions, both stable or unstable auto-oscillating regimes can be presented in the system.

Keywords: rigid body, resisting medium, translational deceleration

1 Introduction

Under study is the problem of motion of a rigid body interacting with a medium only through the flat front portion of its outer surface. In constructing the force action of the medium, we use information on the properties of the jet flow around and assume the quasi-stationary conditions [1]. The motion of the medium is not inspected, but we consider such a problem of the dynamics of a rigid body in which the characteristic time of the body motion with respect to its center of mass is commensurate with the characteristic time of motion of the center itself.

Owing to the complexity of nonlinear analysis, at the initial stage of our study we neglected the dependence of the mediums force moment on the angular velocity of the body and used the only dependence on the angle of attack [2, 3].

From a practical point of view, an important issue is studying the stability of the so-called unperturbed (rectilinear translational) motion for which the velocities of the body points are perpendicular to a flat portion (cavitator).

The whole range of results obtained under this simple assumption allows us to conclude that it is impossible to find the conditions under which the above systems would have solutions corresponding to the bodys angular oscillations of a bounded amplitude.

An experiment on the motion of homogeneous circular cylinders in water [3, 4] confirmed that, in simulating the influence of the medium on a solid, it is indeed

necessary to take it into account that the moment of force of the medium also depends on the angular velocity of the body. In this case, some additional terms appear in the equations of motion, which introduce dissipation into the system.

When studying the motion of a body with finite angles of attack, the fundamental question of nonlinear analysis consists in the finding the conditions under which the oscillations of a bounded amplitude exist near the unperturbed motion, which confirms the need for a complete nonlinear analysis.

Note also that in this paper the author realizes the idea of a phenomenological quasi-stationary approach to the simulation of a body motion in some resisting medium. Surely, simulation of the impact of the medium on a rigid body is not limited to the approach applied in the present article. There are other purely nonstationary hydrodynamic mechanisms of resistance, different from the considered, for example, the damping connected with the effect of added masses [3, 4].

2 Spatial Motion of an Axisymmetric Rigid Body in a Resisting Medium

Let us consider the problem of spatial motion of a homogeneous axisymmetric rigid body of mass m, a part of the surface of which has the shape of a flat circular disk interacting with the medium according to the laws of jet flow around [2,3]. Suppose that the remaining part of the body surface is not affected by the medium and places inside the volume bounded by the jet surface breaking away from the edge of the disk. Similar conditions may arise, for example, after the entry of a homogeneous circular cylinder into water [4, 5].

Suppose that the tangential forces to the disk are absent. Then the force $\mathbf{S}$ applied to the body at the point N from the medium, does not change its orientation relative to the body (directed along the normal to the disk) and is quadratic in the velocity of its center D (Newtonian resistance, Fig. 1). It is also assumed that the force of gravity acting on the body is negligible as compared with the force of the mediums resistance (influence).

If these conditions are satisfied then, among the motions of the body, there is a mode of rectilinear translational deceleration similar to the case of rectilinear (unperturbed) motion: the body is able to perform translational motion in the direction of its axis of symmetry, i.e. perpendicular to the plane of the disk.

We associate with the body a right coordinate system $Dxyz$ (Fig. 1) and direct the Dx axis along the axis of geometric symmetry of the body. The axes Dy and Dz are rigidly connected with the circular disc forming a right coordinate system. The components of the angular velocity vector Ω in the system $Dxyz$ will be denoted by $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$. The inertia tensor of the dynamically symmetric body in the introduced body axes $Dxyz$ has a diagonal form: $\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2\}$.

We use the hypothesis of quasistationarity and assume for simplicity that the quantity $R_1 = DN$ is determined at least by the angle of attack α measured between the velocity vector $\mathbf{v}$ of the center D of the disk and the axis Dx. Thus, $DN = R_1(\alpha, \ldots)$.

We take the value of the resistance force in the form $S = |\mathbf{S}| = s_1(\alpha)v^2$, $v = |\mathbf{v}|$.

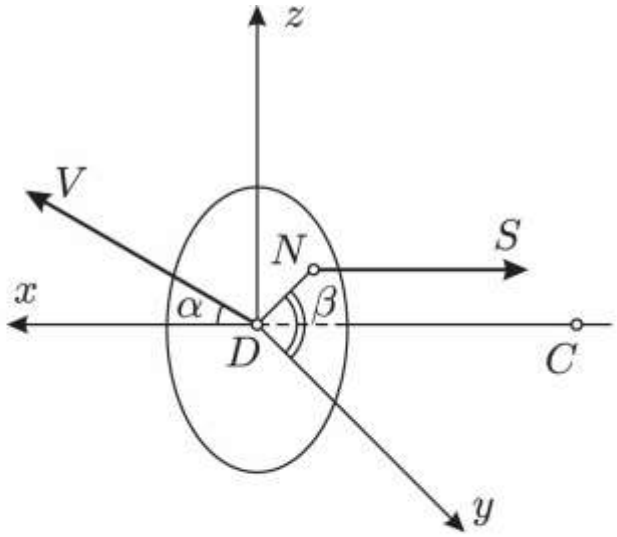


Figure 1: Spatial motion of axisymmetric rigid body in a resisting medium

For convenience of further description (as in the case of rectilinear motion), instead of the coefficient of resistance $s_1(\alpha)$, we introduce an auxiliary alternating-sign function $s(\alpha)$: $s_1 = s_1(\alpha) = s(\alpha)\operatorname{sgn}\cos\alpha > 0$. Thus, the pair of functions $R_1(\alpha,\ldots)$ and $s(\alpha)$ determines the force-moment characteristics of the medium influence on the disk under these model assumptions.

2.1 Dynamic Part of the Equations of Spatial Motion

Consider the spherical coordinates (v,α,β) of the end of the vector $\mathbf{v} = \mathbf{v}_D$ of the velocity of the point D with respect to the flow, in which the angle is measured in the plane of the disk (see Fig. 1). The quantities (v,α,β) are expressed by some nonintegrable relations through cyclic kinematic variables and their derivatives [2,3]. Therefore, we consider the triple (v,α,β) as quasi-velocities, adding to them the components $(\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z)$ of the angular velocity in the axes associated with the body. It is obvious that with respect to these axes $\mathbf{v}_D = \{v\cos\alpha, v\sin\alpha\cos\beta, v\sin\alpha\sin\beta\}$.

By the theorems on the motion of the center of mass (in the projections onto the body axes $Dxyz$) and on the change in the kineticmoment with respect to these axes, we obtain the dynamic part of the differential equations of motion considered in the six-dimensional phase space of quasi-velocities (σ is the distance DC). The first group of equations corresponds to the motion of the center of mass itself, and the second, to the motion around the center of mass:

$$
\begin{aligned}
&\dot v\cos\alpha-\dot\alpha v\sin\alpha+\Omega_y v\sin\alpha\sin\beta-\Omega_z v\sin\alpha\cos\beta+\sigma(\Omega_y^2+\Omega_z^2)=-\frac{s(\alpha)v^2}{m},\\
&\dot v\sin\alpha\cos\beta+\dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta-\dot\beta v\sin\alpha\sin\beta+\Omega_z v\cos\alpha-\Omega_x v\sin\alpha\sin\beta-\\
&-\sigma\Omega_x\Omega_y-\sigma\dot\Omega_z=0,\\
&\dot v\sin\alpha\sin\beta+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta+\dot\beta v\sin\alpha\cos\beta+\Omega_x v\sin\alpha\cos\beta-\Omega_y v\cos\alpha-\\
&-\sigma\Omega_x\Omega_z+\sigma\dot\Omega_y=0,\quad I_1\dot\Omega_x=0,\\
&I_2\dot\Omega_y+(I_1-I_2)\Omega_x\Omega_z=-z_N s(\alpha)v^2,\quad I_2\dot\Omega_z+(I_2-I_1)\Omega_x\Omega_y=y_N s(\alpha)v^2,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

where $(0, y_N, z_N)$ are the coordinates of the point N in the system $Dxyz$.

Now we construct the functional classes $\{y\}$, $\{s\}$. Considering the experimental information on the properties of jet flow around [1, 2], we formally describe these classes consisting of sufficiently smooth, 2π-periodic functions ($y(\alpha)$ is odd, while $s(\alpha)$ is even), satisfying the following conditions: $y(\alpha) > 0$ for $\alpha \in (0, \pi)$, and $y'(0) > 0$, $y'(\pi) < 0$ (class of functions $\{y\} = Y$); $s(\alpha) > 0$ for $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ for $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, and $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (class of functions $\{s\} = \Sigma$). Both y and s change sign under the substitution of α by $\alpha + \pi$. Thus,

$$y \in Y, \ s \in \Sigma. \tag{2}$$

Similar to the choice of the medium impact functions, we take the dynamical functions s, y_N, and z_N in the system (1) in the form (2), and also

$$y_N = R(\alpha)\cos\beta - h_1\frac{\Omega_z}{v}, \ z_N = R(\alpha)\sin\beta + h_1\frac{\Omega_y}{v},$$

(in this case, the function R corresponds to the function y, cf. also with [2, 7]). In the system under consideration still there is an additional damping (and, in some domains of the phase space, accelerating) moment of the nonconservative force.

By (1), at all time there is cyclic invariant relation $\Omega_x \equiv \Omega_{x0} = \text{const}$. In what follows we will investigate the case of zero turning of a rigid body about its longitudinal axis; i.e., when the condition $\Omega_{x0} = 0$ is fulfilled.

Projecting further the angular velocities onto the moving axes not related to the body, so that $z_1 = \Omega_y\cos\beta + \Omega_z\sin\beta$, $z_2 = -\Omega_y\sin\beta + \Omega_z\cos\beta$, and introducing, as before, new dimensionless phase variables and differentiation by the formulas $z_k = n_0 v Z_k$, $k = 1, 2$, $< \cdot >= n_0 v <'>$, we reduce system (1) to the following form:

$$v' = v\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{3}$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0}F(\alpha)\cos\alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_2 s(\alpha)\cos\alpha + \frac{s(\alpha)}{m n_0}\cos\alpha, \tag{4}$$

$$Z_2' = \frac{F(\alpha)}{I_2 n_0^2} - Z_2\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_1^2\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0}Z_2 s(\alpha), \tag{5}$$

$$Z_1' = -Z_1\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_1 Z_2\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0}Z_1 s(\alpha), \tag{6}$$

$$\beta' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_1\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}, \tag{7}$$

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0}F(\alpha)\sin\alpha - \frac{s(\alpha)}{m n_0}\cos\alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_2 s(\alpha)\sin\alpha.$$

In the case of the Chaplygin functions [1, 6]

$$y(\alpha) = A\sin\alpha \in \{y\}, \ A = y'(0) > 0, \ s(\alpha) = B\cos\alpha \in \{s\}, \ B = s(0) > 0, \tag{8}$$

of the mediums influence, the analytic system of equations has the form

$$v' = v\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{9}$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + \mu_2 \sin\alpha\cos^2\alpha - \mu_2\mu_3 Z_2\cos^2\alpha + \frac{\mu_1}{2}\sin\alpha\cos\alpha, \quad (10)$$

$$Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha - Z_2\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - (1+\mu_2\mu_3)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \mu_3 Z_2\cos\alpha, \quad (11)$$

$$Z_1' = -Z_1\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + (1+\mu_2\mu_3)Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \mu_3 Z_1\cos\alpha, \quad (12)$$

$$\beta' = (1+\mu_2\mu_3)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (13)$$

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + \mu_2\sin^2\alpha\cos\alpha - \frac{\mu_1}{2}\cos^2\alpha - \mu_2\mu_3 Z_2\sin\alpha\cos\alpha,$$

where, as above, the dimensionless parameters μ_1, μ_2, and μ_3 are selected as follows:

$$\mu_1 = 2\frac{B}{mn_0},\ \mu_2 = b = \sigma n_0,\ n_0^2 = \frac{AB}{I_2},\ \mu_3 = H_1 = \frac{Bh_1}{I_2 n_0}.$$

Equations (4)–(7) (or (10)–(13)) of the system (3)–(7) (or (9)–(13)) form an independent subsystem of the fourth order, while the equations (4)–(6) (or (10)–(12)) of the third order.

2.2 On the Stability of Rectilinear Translational Deceleration

Let us investigate the stability of the key mode, the unperturbed motion, in relation to perturbations of the angle of attack and angular velocity, i.e., in relation to the variables α, Z_1, and Z_2. In other words, we investigate the stability of the trivial solution of the independent third-order system (4)–(6) (if, of course, we extend the definition of this system by continuity at the origin).

The following important proposition is valid:

Proposition 2.1. *The plane*

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3 :\ Z_1 = 0\} \quad (14)$$

is an integral surface for the system (4)–(6).

Furthermore, after the formal insertion $Z_1 = 0$ in (4)–(6), the remaining two equations for α and Z_2 form a system describing the dynamics of the rectilinear motion of the body [1].

Thus, the phase portrait of flat dynamics "falls" on the plane (14). Moreover, plane (14) separates the three-dimensional phase space into the two parts:

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3 :\ 0 < \alpha < \pi,\ Z_1 > 0\} \quad (15)$$

and $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3 :\ 0 < \alpha < \pi,\ Z_1 < 0\}$, and in each of them the motion occurs independently, but not arbitrarily in relation to each other because the system has the symmetry

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ -Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

with respect to the plane $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3 : \ Z_1 = 0\}$. The latest facts show that it suffices to investigate the system (4)–(6) in the semibounded layer (15), although it cannot be considered a full-fledged phase space.

An important consequence of the latest remarks is the possibility of using the function

$$V_1(\alpha, Z_1) = Z_1 \sin\alpha \tag{16}$$

as a Lyapunov (Chetaev) function in the semibounded layer (15) since this function is positive definite in it.

Theorem 2.1. *The function (16) is a Lyapunov (Chetaev) function for the system (4)–(6), i.e., its derivative according to (4)–(6) is negative definite for $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$ and positive definite for $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$.*

Corollary 2.1. *For $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$ the system (4)–(6) has an attracting singular point at the origin (after the extension of definition of the right-hand sides in it), and when $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$ it has a repulsive point.*

Indeed, the derivative of (16) according to (4)–(6) is represented as

$$(\mu_1 + \mu_2 - \mu_3)Z_1\alpha + \overline{o}(\alpha^2 + Z_1^2 + Z_2^2).$$

In particular, an analogous theorem holds also for the systems of the form (10)–(12) taken for the Chaplygin functions of the mediums influence [1,6].

When we pass to the problem on the motion of homogeneous circular cylinders, we can conclude that this asymptotic stability holds under the fulfillment of the inequality

$$\sigma k + \frac{2I_2}{mD} < hD,$$

where D is the cylinder diameter, σ is the distance DC, whereas, k and h are the dimensionless parameters of the water influence on the cylinder, or

$$\sigma Dk + 2r_1^2 < hD^2,$$

where r_1 is the radius of inertia of the cylinder.

It can be observed that Theorem 2.1 gives the same conditions for asymptotic stability with respect to the variables (α, Z_1, Z_2) as Proposition 2.1, which involves dynamical systems from the dynamics of rectilinear motion.

In the case of spatial motion, the resulting systems have an uncertainty at the origin, which is caused by the degeneracy of the spherical coordinates of the end of the vector $\mathbf{v}$, which is the velocity of the center of the front disk (cavitator). This uncertainty is overcome by the definition of the extension of the right-hand sides of dynamical systems.

3 Conclusion

Instability of the simplest movement of the body, the rectilinear translational deceleration, is used for methodological purposes, namely, for determination of unknown

parameters of the environmental impact on a solid body under the conditions of quasistationarity.

An experiment on the motion of homogeneous circular cylinders in water, carried out at the Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, confirmed the fact that, in the simulation of the influence of the medium on a rigid body, it is necessary to take into account an additional parameter which introduces dissipation into the system.

When studying the class of deceleration of a body with finite angles of attack, the main issue is finding the conditions under which there exist auto-oscillations in a finite neighborhood of rectilinear translational deceleration. There arises, therefore, the need for a comprehensive nonlinear study.

The initial stage of this research is the neglecting the damping influence from the medium to the rigid body. In functional language, this means the assumption that the pair of dynamical functions that determine the effect of the medium depends only on one parameter, the angle of attack. The dynamical systems that arise in such a nonlinear description belong to the type of systems with variable dissipation. Therefore, there is a need to create a methodology of studying such systems (see also [2,3]).

In the qualitative description of the interaction of the body with the medium, because of the use of experimental information on the properties of jet flow around, there arise a certain variation in the simulation of the force-moment characteristics. This makes natural the introduction of the definition of relative coarseness (relative structural stability) and the proof of such coarseness for the systems under study [3]. Moreover, many of the systems under consideration turn out to be just (absolutely) coarse in the sense of Andronov–Pontryagin in the ordinary sense.

In this article, some study is carried out of the motion of a body in a medium taking into account the damping moment from the medium. Such a moment introduces additional dissipation into the system; as a result, rectilinear translational deceleration, in principle, can become stable.

Thus, under certain conditions, taking into account the damping effect from the medium on the rigid body leads to a positive answer to the main question: during the motion of the body in a medium with finite angles of attack, in principle, the occurrence of stable auto-oscillations is possible.

If the parameters of the problem admit the presence of a critical case, then, depending on the top-order derivatives of the medium influence functions R and s, rectilinear translational deceleration of the body can be either stable, or unstable with respect to perturbations of the angle of attack and angular velocity.

In addition, sufficient conditions are found for such stability or instability, including inequalities on the top-order derivatives of the functions of the mediums influence. However, the main difficulty is the impossibility of experimentally measuring these derivatives in explicit form.

The work also provides some reasoning concerning the way one can study the behavior of a body near rectilinear translational deceleration (that is, stable or unstable angular oscillations) using experimental information, thereby implicitly estimating the top-order derivatives of the medium influence functions (see also [8–10]).

References

[1] S. A. Chaplygin, Selected Works (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].

[2] M. V. Shamolin, Some Methods of Analysis of Dynamical Systems with Variable Dissipation in Dynamics of a Rigid Body (Ekzamen, Moscow, 2007) [in Russian].

[3] M. V. Shamolin, Dynamical Systems with Variable Dissipation: Approaches, Methods, and Applications, Fundam. i Prikl. Mat. 14 (3), 3–237 (2008).

[4] V. A. Eroshin, V. A. Samsonov, and M. V. Shamolin, A Model Problem on Braking a Body in a Resisting Medium under Streamline Jet Flow, Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Zhidk. Gasa No. 3, 23–27 (1995).

[5] M. V. Shamolin, A Family of Portraits with Limit Cycles in the Plane Dynamics of a Rigid Body Interacting with the Medium, Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela No. 6, 29–37 (1998).

[6] S. A. Chaplygin, On Motion of Rigid Bodies in an Incompressible Fluid, in Complete Set ofWorks, Vol. 1 (Akad Nauk SSSR, Leningrad, 1933), pp. 133–135.

[7] M. V. Shamolin, The Problem of a Rigid Body Motion in a Resisting Medium under Assumption of Dependence of the Force Moment on the Angular Velocity, Mat. Model. 24 (10), 109–132 (2012).

[8] M. V. Shamolin, New cases integrable according to Jacobi in the dynamics of a solid body placed into fluid flow, Doklady Physics, 44:2 (1999), 110–113.

[9] M. V. Shamolin, A New Case of Integrability in Spatial Dynamics of a Rigid Solid Interacting with a Medium under Assumption of Linear Damping, Doklady Physics, 57:2 (2012), 78–80.

[10] M. V. Shamolin, Spatial topographical systems of Poincaré and comparison systems, Russian Math. Surveys, 52:3 (1997), 621–622.

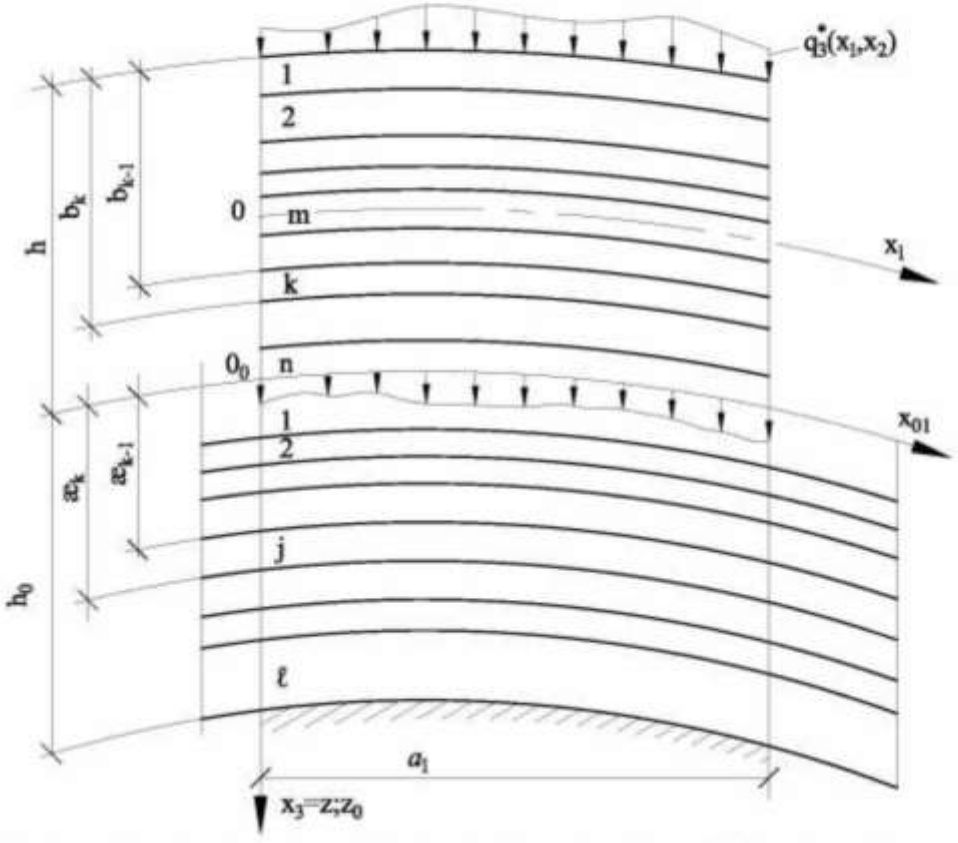
დრეკად ფუძეზე მდებარე ფენოვანი თხელკედლიანი კონსტრუქციების გაანგარიშება

ბადრი ჭურჭელაური, ზვიად ჭურჭელაური, ალექსანდრე ტყეშელაშვილი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე: *განხილულია დრეკად ფუძეზე მდებარე ფენოვანი თხელკედლიანი კონსტრუქციების გაანგარიშება. დრეკად ფუძედ მიჩნეულია ვ. ვლასოვისა და ნ. ლეონტიევის ორპარამეტრიანი მოდელი, რომელიც ითვალისწინებს ფუძის მუშაობას კუმშვასა და ძვრაზე. მიღებულია გადამწყვეტ განტოლებათა სისტემა, რომელიც ითვალისწინებს დრეკადი ფუძის მხრიდან ფენოვან გარსზე ან ფირფიტაზე ზემოქმედებას.*

საკვანძო სიტყვები: *გარსი; ფირფიტა; ფუძე; ფილა; შემავსებელი.*

დრეკად ფუძეზე მდებარე ფენოვანი თხელკედლიანი კონსტრუქციების გაანგარიშებას დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. თანამედროვე გზები, აეროდრომების დასაფრენი ბილიკები შეიძლება განვიხილოთ როგორც მრავალფენიანი კონსტრუქციები დრეკად ფუძეზე. საძირკვლის ფილების გაანგარიშება შეიზლება დავიყვანოთ დრეკად ფუძეზე მდებარე ფენოვანი ან ერთგვაროვანი ფილების გაანგარიშებაზე. საბოლოოდ, მრავალფენოვანი კონსტრუქციების ცალკეული ფენების ადგილობრივი მდგრადობის გამოკვლევა შეიძლება ჩავატაროთ, თუ მათ განვიხილავთ როგორც ფენებს, რომლებიც დადებულია დრეკად ფუძეზე ან მოთავსებულია დრეკად არეში.



ნახ. 1. ფენოვან დრეკად ფუძეზე მდებარე ფენოვანი გარსის განივი ჭრილი

განვიხილოთ დრეკად ფუძის დინამიკური მოდელი და მივიღოთ ფენოვანი გარსის გადამწყვეტი განტოლებების სისტემა დრეკად ფუძეზე. საფუძვლად მივიღოთ ორპარამეტრიანი ფუძე, რომელიც იყო შემოთავაზებული ვ. ვლასოვისა და ნ. ლეონტიევის მიერ [1]. თუ ფენოვანი გარსისა და ფენოვანი ფუძის ჭრილს ისე წარმოვიდგენთ, როგორც ეს ნახ. 1-ზეა ნაჩვენები, დრეკადი ფუძისათვის გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$-2t_0\Delta u_3^n + k_0 u_3^n + m_0 u_{3,u}^n = q_{30}^+ \xi(0)\,, \tag{1}$$

სადაც t_0 და k_0 პარამეტრებია, რომლებიც ახასიათებენ დრეკადი ფუძის მუშაობას ძვრასა და კუმშვაზე; m_0 – დრეკადი ფუძის ერთეული მასა, რომელიც მიერთებულია გარსზე; u_3^n – ფილის ნორმალური გადაადგილება დრეკად ფუძესთან კონტაქტის ზონაში; q_{30}^+ – გარე დატვირთვა, რომელიც მოდებულია დრეკადი ფუძის ზედაპირზე; $\xi(z_0)$ – გადაადგილებათა განაწილების ფუნქცია ფუძეში ნორმალის მიმართულებით.ეს უკანასკნელი ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ $\xi(0) = 1$.

აღვნიშნოთ, რომ (1) გულისხმობს ჰორიზონტალური გადაადგილებების არარსებობას ფუზეში და როდესაც m_0, იძლევა გამოსახულებას, რომელიც შეესაბამება პ. პასტერნაკის მოდელს, ხოლო როდესაც $m_0 = t_0 = 0$ვინკლერის მოდელს.

(1(-ში შეტანით და დატვირთვის წევრების უგულებელყოფით, მივიღებთ:

$$q_{30}^+ = \left[k_0 - 2t_0\Delta + m_0(\quad)_{,u}\right]\left(w + \varphi_1^n\chi + \varphi_{21,3}^n\chi_{,11} + \varphi_{22,3}^n\chi_{,22}\right). \tag{2}$$

ℓ რაოდენობის ფენების მქონე ფუძის დრეკადი მახასიათებლები განისაზღვრება ფორმულებით [1]:

$$t_0 = \sum_{j=1}^{\ell}\int_{æ_{j-1}}^{æ_j}\frac{E_*^j(z_0)}{4\left[1+\nu_*^j(z_0)\right]}\left[\xi^j(z_0)\right]^2 dz_0;$$

$$k_0 = \sum_{j=1}^{\ell}\int_{æ_{j-1}}^{æ_j}\frac{E_*^j(z_0)}{1-\left[\nu_*^j(z_0)\right]^2}\left[\xi_{,3}^j(z_0)\right]^2 dz_0,$$

სადაც

$$E_*^j(z_0) = \frac{E_*^j(z_0)}{1-\left[\nu_*^j(z_0)\right]^2};\quad \nu_*^j = \frac{\nu_*^j(z_0)}{1-\nu_*^j(z_0)}. \tag{3}$$

$E_{0-}^{j-}(z_0)$ და $\nu_0^j(z_0)$ ფუძის ფენების მასალის დრეკადობის მოდულები და პუასონის კოეფიციენტებია.

რადგან ფენოვან გარსზე ფუძის მხრიდან მოქმედებს რეაქცია, ამიტომ

$$q_3^+ = -q_{30}^+. \tag{4}$$

(4)-ის და (1)-ის გათვალისწინებით მივიღებთმრავალფენიანი გარსის გადამწყვეტ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned}
&\Delta_F^2\phi + (\Delta_{1s}^2 - \Delta_k)w - (\Delta_{2s}^2 - \Delta_{13} - \Delta_{k\sigma})\chi = \left(\Delta_\sigma - \Delta_{\gamma c}^2\right)q_3^-;\\
&(\Delta_k - \Delta_{1s}^2)\phi + (\Delta_D^2 - \Delta_{3s}^2)w + \left(\Delta_{23}^2 + \Delta_{45}^2 - \Delta_p^2 + \Delta_{k\sigma}\right)\chi + J_3 - q^* =\\
&= -\left[k_0 - 2t_0\Delta + m_0(\quad)_{,tt}\right]\left(w + \varphi_1^n\chi + \varphi_{21,3}^n\chi_{,22}\right) + (1-\Delta_\sigma)q_3^-;\\
&\Delta_{2s}^2\phi + \left(\Delta_{5s}^2 - \Delta_p^2\right)w - \left(\Delta_{p1}^2 + \Delta_{p2}^2 - \Delta_{33}^2 - \Delta_{k1}^2 + \Delta_{k3c} - \Delta_{p3}\right)\chi +\\
&+J_4 + J_{31,11} + J_{32,22} = \Delta_{\sigma k1}q_3^-,
\end{aligned} \tag{5}$$

სადაც

$$q^* = U_1(N^0, w) - U_2(N^0, w). \tag{6}$$

კერძო შემთხვევაში, როდესაც გარსს აქვს სიმეტრიული სტრუქტურა, მთელი რიგი დიფერენციალური ოპერატორები ნულის ტოლია (ცხრილი 1) და (4) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned}
&\Delta_F^2\phi - \Delta_k w + (\Delta_{1s}^2 + \Delta_{k\sigma})\chi = \Delta_\sigma q_3^-;\\
&\Delta_k\phi + \Delta_3^2 w - \left(\Delta_{23}^2 - \Delta_p^2\right)\chi + J_3 - q^* + \left[k_0 - 2t_0\Delta + m_0(\quad)_{,tt}\right]\times\\
&\times\left(w + \varphi_1^n\chi + \varphi_{21,3}^n\chi_{,11} + \varphi_{22,3}^n\chi_{,22}\right) = q_3^-;\\
&\Delta_p^2 w + \left(\Delta_{p1}^2 + \Delta_{p2}^2 - \Delta_{33}^2 - \Delta_{p3}\right)\chi + J_4 + J_{31.11} + J_{32.22} = \Delta_{\sigma k1}q_3^-.
\end{aligned} \tag{7}$$

J_3, J_4, $J_{3i.li}$ გამოსახულებებში ინერციული წევრებისთვის აიღება ცხრილის გათვალისწინებით.

ფირფიტებისათვის შესაბამისი სისტემები შეიზღება მივიღოთ (5) და (7)-დან, თუ დავუშვებთ, რომ ოპერატორები, რომლებიც დამოკიდებულია სიმრუდეზე, ნულის ტოლია (ცხრილი 1)

$$\Delta_k = \Delta_{k\sigma} = \Delta_k\sigma c = \Delta_{k1}^2 = \Delta_{3ck} = \Delta_{\sigma k1} = 0. \tag{8}$$

გადამწყვეტ განტოლებათა სისტემა შესამჩნევად მარტივდება, თუ უგულებელვყოფთ ფენების დაწნევას, მოკუმშვას და მაღალი რიგის აპრამეტრულ წევრებს და გავითვალისწინებთ მხოლოდ განივი ძვრის, ფენების პაკეტის სტრუქტურის სიმეტრიულობას და გარე ძალების სტატიკურ მოქმედებას [2, 3]. ასეთი სისტემა გარსებისთვის მიიღება (8)-დან ცხრილი 1-ის გამოყენებით

$$\begin{aligned}
&\Delta_F^2\phi - \Delta_k w = 0;\\
&\Delta_k\phi - \Delta_D^2 w - \Delta_p^2\chi - q^* + (k_0 - t_0\Delta)(w + \varphi_1^n\chi) = q_3^-;\\
&\Delta_p^2 w + \left(\Delta_{p1}^2 - \Delta_{p3}\right)\chi = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

სადაც

$$q^* = N\Delta_N w. \tag{10}$$

აქედან ადვილად მიიღება ფენოვანი ფირფიტების განტოლებათა სისტემა, თუ ვივარაუდებთ, რომ $\Delta_k = 0$, მაშინ

$$\Delta_F^2\phi = 0; \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta_D^2\phi - \Delta_p^2\chi - N\Delta_N w + (k_0 - t_0\Delta)(w + \varphi_1^n\chi) = q_3^-;\\
&\Delta_p^2 w + \left(\Delta_{p1}^2 - \Delta_{p3}\right)\chi = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

როგორც ჩანს, სისტემა იშლება (11) ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის განოტელბად და (12) სისტემად, რომელიც აღწერს გრძივ ღუნვას.

(6) ზოგადი სისტემიდან შეიძლება მივიღოთ სხვა კერძო შემთხვევებიც ცხრილი 1-ის გამოყენებით.

მიღებული განტოლებები საშუალებას იძლევა გამობიკვლიოთ დრეკად ფუძეზე მდებარე მრავალფენიანი გარსებისა და ფირფიტების სხვადასხვა ამოცანები.

ცხრილი 1.

განზომილებები და ოპერატორები, რომლებიც ითვალისწინებენ დამახასიათებელ ფაქტორებს

გარსში მყოფი დამახასიათებელი ფაქტორის დასახელება	ამ ფაქტორის გამთვალისწინებელი განზომილებები და ოპერატორები	ოპერატორების კოეფიციენტები
ნორმალის წაგრძელება	ρ_2, ρ_3, ρ_{3i} Δ_{pc}^2, Δ_{p2}^2, $\Delta_{k\sigma}$, $\Delta_{k\sigma c}$, Δ_{k3c}	Y_1^*, P_{16}, H_6, B_{14}, B_{15}
ფენის დაწნევა	Δ_{13}^2, Δ_{23}^2, Δ_{33}^2, Δ_σ, $\Delta_{k\sigma}$, $\Delta_{k\sigma c}$ $\Delta_{\sigma c}$, Δ_{k3c}, $\Delta_{\sigma k1}$	H_1, C_{14}, C_{15}, H_4, H_6, B_{14} A_{14}, B_{15}, A_{15}
გრძივი გადაადგილება	Λ_{p1}^2, Δ_p^2, Δ_{p3}, Δ_u, Δ_β	S_{111}, P_{111}, P_{13}, H_8, H_{10}

სტრუქტურის ასიმეტრია	$\Delta^2_{15}, \Delta^2_{25}, \Delta^2_{35}, \Delta^2_{45}, \Delta^2_{55}$ $\Delta^2_{ac}, \Delta^2_{bc}, \Delta^2_{cc}, \Delta^2_{k1},$ $\Delta_{kmc}, \Delta_{ac}, \Delta_{zc}, \Delta_{dk}$	$R_1, J_1, RK_1, JK_1, J'_1$ Y_1, Y'_1, Y^*_1, Y^*_1 B_{14}, A_{14}, z_1, z_3
სიმრუდე	$\Delta^2_{kl}, \Delta_k, \Delta_{km}, \Delta_{kmc}$ $\Delta_{k3c}, \Delta_{okl}, \Delta_{dk}$	$J^*_1, k_{22}, H_8, B_{14}$ B_{15}, A_{15}, z_3
უმაღლესი რიგის პარამეტრული წევრები	Δ^2_{kl}	–

დასკვნა

მიღებული დამოკიდებულებების საფუძველზე გამოკვლეულია მრავალფენოვანი პანელის ფენოვანი მოკეთების ადგილობრივი მდგრადობა, როგორც კონსტრუქციისა, რომელიც ძევს დრეკად ფუძეზე. დრეკადი ფუძის როლს ასრულებს შემავსებელი. მიღებულია ბრტყელი ფენოვანი მოკეთბის კრიტიკული დატვირთვის ზოგადი ფორმულა. საკედლე პანელებისათვის მისი გამოყენება საშუალებას გვაძლევს გამოვიკვლიოთ მოკეთების ადგილობრივი მდგრადობა როგორც ერთგვაროვანი, ასევე არაერთგვაროვანი შემავსებლების შემთხვევაში, როდესაც დრეკადობის მოდული სისქის მიხედვით იცვლება წრფივი კანონით.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] Власов В.З.Э Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. *Физматгиз, Москва, 1960. -491 с.*

[2] Михайлов Б.К., Кипиани Г.О. Деформированность и устойчивость пространственных пластинчатых систем с разрывными параметрами. *Стройиздат СПб, С.-Петербург, 1996. -442 с.*

[3] Михайлов Б.К., Кипиани Г.О., Москалева В.Г. Основы теории и методы расчета на устойчивость трехслойных пластин с разрезами. *«Мецниереба», Тбилиси, 1991. -189 с.*

ANALYSIS OF LOCATED ON ELASTIC FOUNDATION LAYERED THIN-WALLED STRUCTURES

Badri Churchelauri, Zviad Churchelauri. Aleksandre Tkeshelashvili
Georgian Technical University

Abstract: is considered the analysis of located on elastic foundation layered thin-walled structures. As elastic is accepted the two-parameter model of V. Vlasov and N. Leontev that stipulates the work of foundation on compression and shear. Are obtained simultaneous decisive equations that provides the impact from elastic foundation on layered shell or plate.

მრავალშრიანი კონსტრუქციების მათემატიკური მოდელირება

Mathematical Modeling of Multilayered Structures

New Aspects in Micropolar Fluid Theory

Vilchevskaya, E.N.*
Müller, W.H.**
***Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Bol'shoy pr. 61, V.O., 199178 St. Petersburg Russia and Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Politekhnicheskaja 29, 195251 St.-Petersburg, Russia**
****Institute of Mechanics, Chair of Continuum Mechanics and Constitutive Theory, Technische Universität Berlin, Einsteinufer 5, 10587 Berlin, Germany**

Abstract

This paper presents a review of two micropolar fluid theories, namely those related to the schools of Eringen and Ericksen-Leslie. The corresponding balance equations and constitutive equations are briefly presented and illustrated by solving the problem of Couette flow. In addition to that an extension of micropolar theory will be discussed. It is based on a non-trivially satisfied balance for the tensor of microinertia. In contrast to the two previous theories this balance contains a production term. The tensor of micro-inertia is considered as a fully independent variable and the production term may serve for the description of structural changes in micropolar materials. As an example the case of a nematic crystalline material under the influence of an external electric field will be considered.

Contents

1. Motivation – Why generalized continuum theories (GCTs)?

Most recently Generalized Continuum Theories (GCTs) have gained the attention of the materials science community, the reason being the making of high performance materials with an inner structure for large and small scale applications ranging from light-weight aerospace and automotive panels down to micromechanics and microelectronic gadgets. One of the GCTs is the so-called micropolar theory, which emphasizes the aspect of inner rotational degrees of freedom of a material (see [1] for a modern formulation). Hence this theory seems particularly promising for applications to soils, polycrystalline and composite matter, granular and powder-like materials, porous media and foams and, in particular, to materials that are "somewhere in-between a solid or a fluid," namely liquid crystals.

If we wish to describe the behavior of such materials based on micropolar fluid theory we are confronted with essentially two important schools, the one by Eringen [2,3] and the one by Ericksen-Leslie [4,5]. As it will be initially explained in this paper both have their merits and both are actually acknowledged by the micropolar continuum community, the Ericksen-Leslie theory probably being the most widely used in discussing the nematic state of liquid crystals.

In a nutshell we may say that Eringen's approach relies on a consistent use of the original spin balance, whereas Ericksen-Leslie base their technique on a more or less postulated balance for the so-called "intrinsic director force." Moreover, Eringen introduces the concept of the conservation of general micro-inertia whereas Ericksen-Leslie specialize to the description of rigid rod-like molecules, the motion of which is captured by introducing a single vector quantity, the so-called director, $\boldsymbol{d}$. It is therefore not too surprising that both theories lead to different predictions regarding the flow behavior of nematic crystals, although, as we shall demonstrate in analytical and numerical simulations, there are similarities but also adamant dissent. Moreover, due to newly introduced material parameters, the measurement of which is directly linked to the application of either theory, it is not easy to decide, which of the two theories comes closer to a description of reality.

At this point another remark is in order. Recall that the tensor of the moment of inertia tensor of a continuum particle, $\boldsymbol{J}$, the so-called micro-inertia, plays an important role in context with its rotational degree of freedom, specifically in combination with the angular velocity vector, $\boldsymbol{\omega}$, assigned to the continuum element. In Eringen's as well as in Ericksen-Leslie's theory $\boldsymbol{J}$ is a conserved field quantity, unable of change and production, and not truly an independent variable, such as the mass density, *i.e.*, the inertia of linear momentum, which obeys its own kinetic equation, independently of the momentum balance. Therefore, most recently, it has been emphasized in [6] that the moment of inertia tensor deserves to be treated as a completely independent structural field variable. However, in contrast to the balance of mass, the moment of inertia is not conserved. Rather its governing equation contains a production term, χ_J, which in terms of continuum theory must be considered as a new constitutive quantity. We shall demonstrate in our paper that it allows to model additional features of materials, *e.g.*, processes with considerable structural changes, such as transitions from an anisotropic to an isotropic state, and vice versa (see, for example, [7]). In fact, this feature might be useful in order to unite the two theories, or at least point out and remedy their deficiencies, as we shall attempt to do at the end of our article by giving an outlook into the future.

2. Materials with an inner structure / internal degrees of freedom

2.1 Explaining the need

In the materials considered in today's materials science their internal structure determines increasingly their physical behavior. The question arises as to whether it is possible to use continuum theory in order to describe such features. Surely, such continuum theory must be more advanced and contain internal length scale parameters. On the other hand, a purely phenomenological description would be inadequate, because it would not reveal the physical reason for the internal scales. GCTs are a possible escape from this dilemma. This was clearly seen by the pioneers of such theories, for example:

"Is it possible to construct continuum theories that can predict physical phenomena on the atomic, molecular, or nano scales?" (A.C. Eringen in [8])

and

"However, in contrast to those hard-line continuum theoreticians, we personally believe that any relationship that can be established with a sub-level degree of physical description is an asset that no true physicist can discard." (G.A. Maugin in [9])

We will now briefly discuss a material, where this attitude has led to a fruitful theoretical description: Liquid crystals.

2.2 Example: Liquid crystals

The atomistic particles of a normal liquid possess enough kinetic, *i.e.*, thermal energy to overcome the intermolecular attractive forces and move randomly in all directions of space. On a macroscopic scale this arrangement is known as isotropic. In contrast to that, liquid crystals are anisotropic and their properties depend on the direction. Hence the molecules constituting liquid crystals are not as disordered as the ones of an ordinary liquid, rather they have some degree of alignment. Finally, in a crystal they are in (nearly) perfect order (see first three insets in Fig. 1).

Most substances that exhibit the properties of liquid crystals consist of long, rigid rod- or disk-shaped molecules, which are electrically polarized or easily polarizable. By means of external electromagnetic fields or by mechanical flow they can orient themselves in one of three different ways, as shown in the last three insets of Fig. 1, which are known as the nematic,

smectic, and cholesteric liquid crystal phases. In the nematic phase (Greek νημα=thread), the molecules are not layered but they point in (almost) the same direction. They can rotate about their long axis and to a limited degree also w.r.t. the two other two principal orientations and they can slide past one another. In the smectic (Greek σμηγμα=soap) phase, the molecules maintain the general order of the nematic phase but are also aligned in layers. In the cholesteric (Greek χολη=bile) phase, the molecules are directionally oriented and stacked in a helical pattern, with each layer rotated at a slight angle to the ones above and below it. As the degree of molecular ordering increases from the nematic phase to the cholesteric phase, the liquid becomes more opaque (adapted from [10,11]). As we shall explain now the simulations in this paper are concerned with a transition from the isotropic to an oriented nematic state.

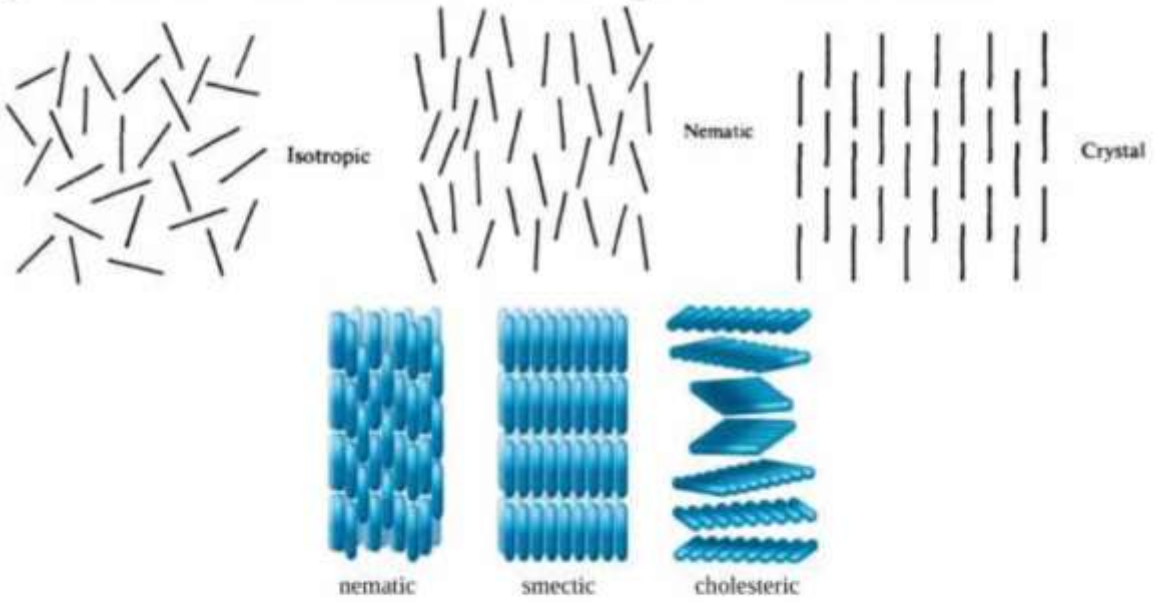


Figure 1: Cartoons of the atomistic structure of liquid crystals after [10, 11].

Polymer Dispersed Liquid Crystal devices (PDLCs) contain liquid crystals dissolved or dispersed in a liquid polymer followed by its solidification or curing. During the change of the polymer from liquid to solid form, the liquid crystals become incompatible with the solid polymer and form droplets within the polymer matrix. The size of the droplets can be affected by the curing process. This in turn affects the final operating properties of the resulting, so-called "smart window" (see Fig. 2). Typically, the liquid mix of polymer and liquid crystals is placed between two layers of glass or plastic, which include a thin layer of a transparent, conductive material followed by curing of the polymer: This way a sandwich structure is formed and the whole smart window is effectively a capacitor. The so-called electrically controlled birefringence mode uses the applied voltage to change the tilt of the liquid crystal molecules. As a result, the birefringence is changed as a function of the tilt angle θ between the substrate normal and the molecule's long axis. In a way it is the electrically induced analogue of the tilt angle we will encounter during the discussion of the flow process in context with the Leslie-Ericksen theory in Section 3.4.

Electrodes from a power supply are attached to the transparent electrodes. With no applied voltage, the liquid crystals are randomly arranged in the droplets, resulting in scattering of light as it passes through the smart window assembly. This results in a translucent, "milky white" appearance. When a voltage is applied to the electrodes, the electric field formed between the two transparent electrodes on the glass causes the liquid crystals to align, allowing light to pass through the droplets with very little light scattering resulting in a transparent view. The degree of transparency can be controlled by the level of the applied voltage: At lower voltages only a

few of the liquid crystals align completely in the electric field, so only a small portion of the light passes through while most of the light is scattered. As the voltage is increased, fewer liquid crystals remain out of alignment, resulting in more light coming through. Most of the electrochromically based smart windows offered today operate for on or off states only (adapted from [13]).



Figure 2: Voltage based smart window [12].

In the next section we will compile the basic formulae for the description of micropolar fluids.

3. Theoretical foundations

3.1 Eringen's theory

Eringen's theory is based on the balances of mass, micro-inertia, linear and angular momentum and internal energy, as follows:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}\,,\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{\omega}\,,$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\boldsymbol{f}\,,\quad \rho\boldsymbol{J}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \nabla\cdot\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\sigma}_{\times} + \rho\boldsymbol{m}\,, \tag{3.1}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q} + \rho r + \boldsymbol{\sigma}:(\nabla\otimes\boldsymbol{v} + \mathbf{I}\times\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\mu}:(\nabla\otimes\boldsymbol{\omega})\,.$$

$\boldsymbol{v}$ denotes the translational velocity, $\boldsymbol{\omega}$ is the angular velocity, $\boldsymbol{J}$ denotes the (second-order) microinertia tensor, $\boldsymbol{\sigma}$ is the (nonsymmetric, second-order) Cauchy stress tensor, $\boldsymbol{\mu}$ is the (second-order) couple stress tensor, $\boldsymbol{f}$ and $\boldsymbol{m}$ are the specific body forces and specific body couples, respectively. Moreover, u is the specific internal energy, $\boldsymbol{q}$ is the heat flux and r the specific heat supply. The symbol ":" denotes the outer double scalar product $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B} = A_{ij}B_{ij}$ and in $\boldsymbol{\sigma}_{\times}$ the Gibbsian cross is defined by $(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})_{\times} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. These balance laws need to be supplemented by constitutive relations. For an isotropic micropolar fluid the following (linear) constitutive relations are proposed,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \lambda\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{D})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{D} + 2\tau\boldsymbol{H}\,,\quad \boldsymbol{\mu} = \alpha\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\Psi})\mathbf{I} + \beta(\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}) - \gamma(\boldsymbol{\Psi}-\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}})\,, \tag{3.2}$$

$$\rho\boldsymbol{m} = \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{E} + \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{H}\,,\quad \boldsymbol{q} = -\kappa\nabla T + \alpha(\nabla\otimes\boldsymbol{\omega})_{\times},$$

with the relative angular velocity $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{w}$, the vorticity $\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{v}$, the relative rotation tensor $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{h}\times\boldsymbol{I}$, the angular velocity gradient $\boldsymbol{\Psi} = (\nabla\otimes\boldsymbol{\omega})^{\mathrm{T}}$ and the symmetric and

antisymmetric velocity gradients $\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}[(\nabla\otimes\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}+\nabla\otimes\boldsymbol{v}]$ and $\boldsymbol{w}\times\mathbf{I}=\frac{1}{2}[(\nabla\otimes\boldsymbol{v})^{\mathrm{T}}-\nabla\otimes\boldsymbol{v}]$, respectively. Moreover, p is the thermodynamic pressure, λ and μ are the volume and shear viscosity known from classical Navier-Stokes theory, and τ, α, β, and γ are non-classical viscosities. In particular τ may be referred to as rotational shear viscosity. Furthermore, κ and λ are two heat conduction coefficients, the first one being positive and well known from classical Fourier theory.

Then for an incompressible micropolar fluid of constant mass density ρ_0 and constant (isotropic) microinertia J_0 the following field equations result:

$$\rho_0\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\nabla p+(\mu+\tau)\Delta\boldsymbol{v}+2\tau(\nabla\otimes\boldsymbol{\omega})_{\times},$$

$$\rho_0 J_0\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=(\alpha+\beta-\gamma)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}+(\beta+\gamma)\Delta\boldsymbol{\omega}-4\tau\boldsymbol{\omega}+2\tau\nabla\times\boldsymbol{v}, \tag{3.3}$$

$$\rho_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\kappa\,\Delta T+2\mu\boldsymbol{D}:\boldsymbol{D}-4\tau\boldsymbol{\omega}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})+2\tau(\boldsymbol{w}\times\mathbf{I}):(\boldsymbol{w}\times\mathbf{I})+4\tau\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}+\alpha(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega})^2+$$
$$\tfrac{1}{2}\beta(\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}):(\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}})+\tfrac{1}{2}\gamma(\boldsymbol{\Psi}-\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}):(\boldsymbol{\Psi}-\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}),$$

where body forces and body couples were neglected. Note that the mass balance reduces to the incompressibility condition $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$ and the pressure p becomes an arbitrary scalar ensuring this condition.

3.2 An example of Eringen's theory

We shall now derive and discuss the solution for a stationary one-dimensional Taylor–Couette flow of an Eringen micropolar fluid between two parallel infinite plates separated by a distance h in $\boldsymbol{e}_y$-direction. There are two possibilities to sustain the motion. The bottom plate is at rest, $\boldsymbol{v}(y=0)=\mathbf{0}$, and the upper plate moves either at a constant velocity, $\boldsymbol{v}(y=h)=v_0\boldsymbol{e}_x$, or it is subjected to a constant shear stress, $\sigma_{yx}(y=h)=t_x$. Moreover, due to their rotational degree of freedom it becomes necessary in case of micropolar fluids to impose boundary conditions for the angular velocity or for the moment tractions as well. More details on the intricate question of boundary conditions can be found in [14].

We now assume stationary conditions and propose the following ansatz for the translational and angular velocity:

$$\boldsymbol{v}=v(y)\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{\omega}=\omega(y)\boldsymbol{e}_z. \tag{3.4}$$

Insertion into the field equations yields the following coupled system of ordinary differential equations:

$$0=(\mu+\tau)\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}y^2}+2\tau\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}y},\ 0=(\beta+\gamma)\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}y^2}-4\tau\left(\omega+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right). \tag{3.5}$$

In the case of a prescribed shear stress at the upper plate we assume that the fluid sticks to the bottom plate and that the fluid has zero spin at both plates. Hence, we impose the following mixed boundary conditions:

$$v(y=0)=0,\ \sigma_{yx}(y=h)=t_x,\ \omega(y=0)=0,\ \omega(y=h)=0. \tag{3.6}$$

The solution to the coupled system (3.5) subjected to the boundary conditions (3.6) is obtained as

$$\frac{v(\bar{y})}{ht_x/\mu} = \bar{y} - \frac{P}{2}\left[1 + \frac{\sinh(NL[2\bar{y}-1])}{\sinh(NL)}\right], \tag{3.7}$$

$$\frac{\omega(\bar{y})}{t_x/\mu} = -\frac{1}{2} + \frac{\cosh(NL[2\bar{y}-1])}{2\cosh(NL)}$$

with the dimensionless height $\bar{y} = y/h$ and the parameters

$$N = \sqrt{\frac{\tau}{\mu+\tau}},\ L = \frac{h}{l},\ l = \sqrt{\frac{\beta+\gamma}{\mu}},\ P = \frac{N}{L}\tanh(NL),\ \frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu} = \frac{1}{1-P}. \tag{3.8}$$

Some graphical representations of the solution are shown in Fig. 3 for a high coupling number, N, and various choices of the length scale parameter, L. The Navier-Stokes case can be identified by the dashed line. As to be expected we obtain the bisectrix of ordinary Navier-Stokes flow velocity if the internal length scale is negligible. Intermediate length scales lead to S-shaped curves and, most interestingly, very small values of L lead again to a straight line but with a much smaller velocity at the top plate which, for the same value of t_x, results because of the effectively higher shear viscosity. The angular velocity also depends on height, at least for values of L in between the upper and lower bounds. It is then most pronounced in the middle of the channel. Furthermore the curves are symmetric. If the length scale of the micropolar fluid is negligibly small compared to the distance of the plates we have ordinary Newtonian Couette flow where no notion of an independent angular velocity is available. Instead it is completely represented by the vorticity, which is constant. For the case when L is very small, *i.e.*, the length of the particles on the mesoscale becomes comparable or greater than the plate distance so that there is no "space for rotation," and the angular velocity vanishes.

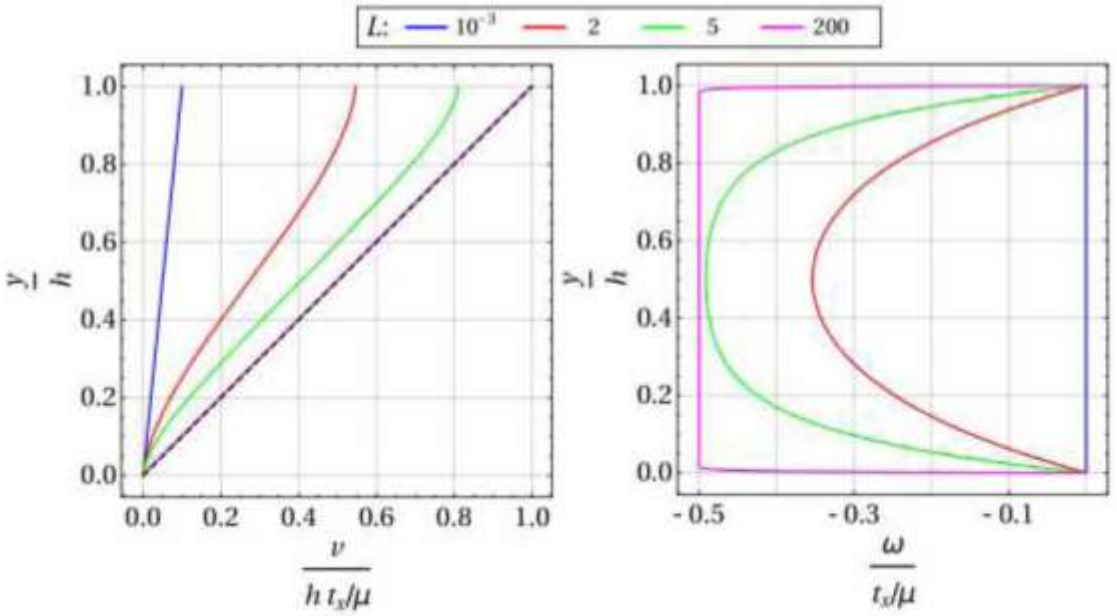


Figure 3: Translational and angular velocity for Couette flow of a micropolar Eringen fluid.

For the temperature the following differential equation arises if $T = T(\bar{y})$ is assumed:

$$0=\kappa\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}y^2}+(\mu+\tau)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)^2+4\tau\omega^2+4\tau\omega\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+(\beta+\gamma)\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}y}\right)^2. \tag{3.9}$$

For simplicity of the presentation we shall continue to investigate only the case of stick boundary conditions for both the linear and the angular velocity. Then the following solution for the temperature subjected to constant reservoir boundary conditions, $T(\mathrm{y}=0)=T(\mathrm{y}=\mathrm{h})=T_{\mathrm{res}}$, is obtained:

$$\frac{T(\bar{y})-T_{\mathrm{res}}}{T_{\mathrm{ref}}}= \tag{3.10}$$

$$\frac{a}{2}\left[\bar{y}(1-\bar{y})-\frac{1}{L^2}\left(1-\frac{\cosh(NL[2\bar{y}-1])}{\cosh(NL)}\right)-\frac{1}{8L^2}\frac{\cosh(2NL[2\bar{y}-1])-\cosh(2NL)}{\cosh^2(NL)}\right]$$

with the "dimensionless temperature" $a=\dfrac{\mu v_0^2}{\kappa T_{\mathrm{ref}}}\left(\dfrac{\mu_{\mathrm{eff}}}{\mu}\right)^2$. Plots of the (parabolic) temperature profiles with the parameters of Fig. 3 are shown in Fig. 4. Note that the additional viscosities lead to an increase of temperature, as to be expected.

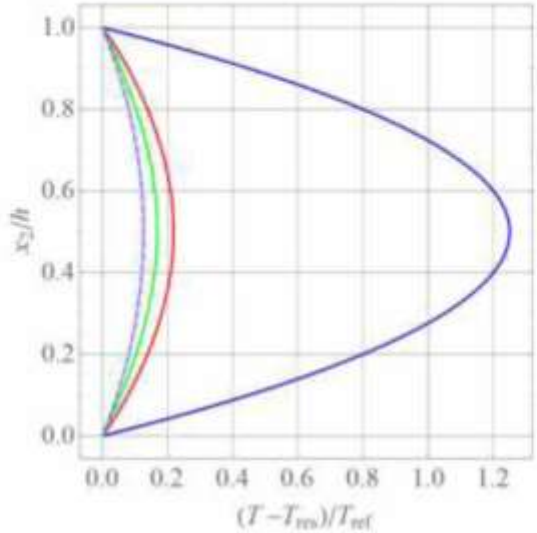


Figure 4: Temperature rise during Couette flow of a micropolar Eringen fluid.

3.3 The Ericksen-Leslie theory

In this approach the balances read as follows:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0\,,\ \rho_0\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho_0\boldsymbol{f}\,,\ \rho'\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{d}}{\mathrm{d}t^2}=\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}+\rho'\boldsymbol{G}+\boldsymbol{g}\,, \tag{3.11}$$

$$\rho_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{q}+\rho_0 r+\boldsymbol{\sigma}:(\nabla\otimes\boldsymbol{v})+\boldsymbol{\pi}:\left(\nabla\otimes\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{d}}{\mathrm{d}t}\right)-\boldsymbol{g}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{d}}{\mathrm{d}t}.$$

Newly introduced quantities include the director density, ρ', the director stress tensor, $\boldsymbol{\pi}$, the director body force, $\boldsymbol{G}$, and the director production density, $\boldsymbol{g}$. In fact, the director balance can be related to the angular momentum balance as follows, see [15]. Starting from the angular momentum balance with influence of director moments,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{v}+\rho'\boldsymbol{d}\times\dot{\boldsymbol{d}}\right)=-\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{d})+\rho\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{f}+\rho'\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{G}, \tag{3.12}$$

the linear momentum balance after multiplication by $\boldsymbol{x}\times$ is subtracted yielding

$$\rho'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{d}\times\dot{\boldsymbol{d}})=-\nabla\cdot(\boldsymbol{\pi}\times\boldsymbol{d})+\boldsymbol{\sigma}_{\times}+\rho'\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{G}\quad\Rightarrow \tag{3.13}$$

$$\boldsymbol{d}\times\left(\rho'\ddot{\boldsymbol{d}}-\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}-\rho'\boldsymbol{G}\right)=\left[\boldsymbol{\sigma}+(\nabla\otimes\boldsymbol{d})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\pi}\right]_{\times}.$$

The term in the parentheses is then defined as the so-called director production density, $\boldsymbol{g}$, such that the director balance results under a constraint:

$$\rho'\ddot{\boldsymbol{d}}=\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}+\rho'\boldsymbol{G}+\boldsymbol{g}\quad\text{with}\quad\left[\boldsymbol{\sigma}+(\nabla\otimes\boldsymbol{d})^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\pi}-\boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{g}\right]_{\times}=\boldsymbol{0}. \tag{3.14}$$

The balances (3.11) need to be supplemented by constitutive relations. In [16] the following set of non-linear relations for a director fluid is presented:

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\mathbf{I}-\frac{\partial(\rho_0 f)}{\partial d_{p,j}}d_{p,j}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{\sigma}',\ \boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{d}+\frac{\partial(\rho_0 f)}{\partial d_{i,j}}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j, \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{g}=\gamma\boldsymbol{d}-\boldsymbol{\beta}\cdot(\nabla\otimes\boldsymbol{d})-\frac{\partial(\rho_0 f)}{\partial d_i}\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{g}',\ \boldsymbol{q}=-\left[\kappa_{\parallel}\boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{d}+\kappa_{\perp}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{d})\right]\cdot(\nabla T),$$

where the comma indicates a partial derivative. f denotes the free energy density and the dashed quantities refer to viscous parts:

$$\begin{aligned}
2\rho_0 f&=k_{22}(\nabla\otimes\boldsymbol{d}):(\nabla\otimes\boldsymbol{d})+(k_{11}-k_{22}-k_{24})(\nabla\cdot\boldsymbol{d})^2+\\
&\quad(k_{33}-k_{22})[(\nabla\otimes\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{d}]^2+k_{24}(\nabla\otimes\boldsymbol{d}):(\nabla\otimes\boldsymbol{d})^{\mathrm{T}},\\
\boldsymbol{\sigma}'&=\mu_1(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{d}+\mu_2\boldsymbol{d}\otimes(\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{d})+\mu_3(\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{d})\otimes\boldsymbol{d}+\mu_4\boldsymbol{D}+\\
&\quad\mu_5\boldsymbol{d}\otimes\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{D}+\mu_6\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{d}+\mu_7(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{d}\times\mathbf{I},\\
\boldsymbol{g}'&=\lambda_1\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{d}+\lambda_2\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{D},\ \lambda_1=\mu_2-\mu_3,\ \lambda_2=\mu_5-\mu_6.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Hence, from a materials science point of view there are seven viscosities μ_i and several stiffness coefficients k_{ij} to be determined experimentally.

3.4 An example of the Ericksen-Leslie theory

As in Section 3.2 we study the case of a stationary one-dimensional Taylor–Couette flow between two parallel plates by using the following semi-inverse *ansatz* for the velocity and for the orientation, θ, of the director:

$$\boldsymbol{v}=v(y)\boldsymbol{e}_x,\ \boldsymbol{d}=\cos\theta(y)\boldsymbol{e}_x+\sin\theta(y)\boldsymbol{e}_y. \tag{3.17}$$

After some algebra the following non-linear differential equations are obtained:

$$0=\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\bar{y}^2}+\frac{1}{2f(\theta)}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\bar{y}}\right)^2+\frac{A}{2f(\theta)g(\theta)}\left(1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cos 2\theta\right),\ g(\theta)\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}\bar{y}}=\frac{1}{2}, \tag{3.18}$$

where the dimensionless driving parameter is given by $A=\frac{\lambda_1 v_{\mathrm{ref}}h}{2k_{11}}$, the velocity is normalized with $v_{\mathrm{ref}}=2t_x h/\mu_4$ and the auxiliary functions read as follows:

$$f(\theta)=\cos^2\theta+\frac{k_{33}}{k_{11}}\sin^2\theta, \tag{3.19}$$

$$g(\theta)=\frac{\mu_1}{\mu_4}\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{\mu_5-\mu_2}{\mu_4}\sin^2\theta+\frac{\mu_3+\mu_6}{2\mu_4}\cos^2\theta+\frac{1}{2}.$$

After the velocity and the director angle are determined, the temperature can be calculated by solving

$$0=\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}\bar{T}}{\mathrm{d}\bar{y}}\left(\sin^2\theta+\frac{\kappa_\perp}{\kappa_\square}\cos^2\theta\right)\right]+g(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}\bar{y}}\right)^2. \tag{3.20}$$

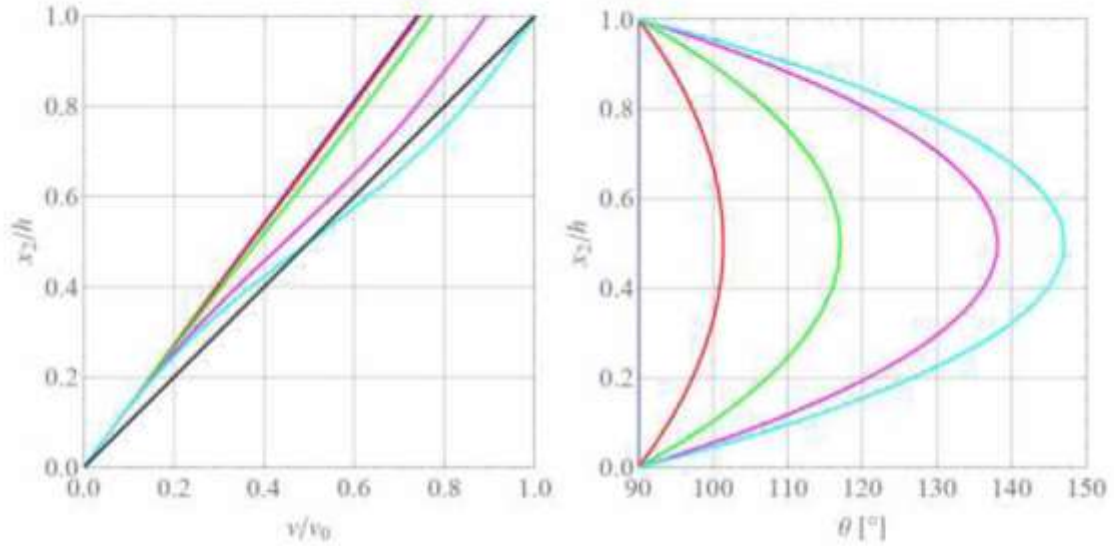


Figure 5: Translational velocity and director orientation for Couette flow of a director fluid.

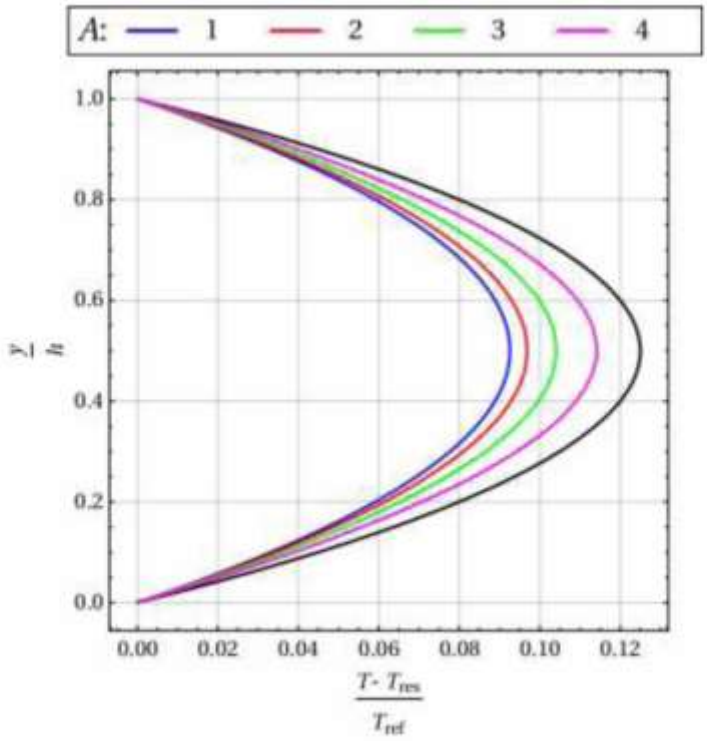


Figure 6: Temperature distribution for Couette flow of a director fluid.

Obviously the Ericksen-Leslie equations of one-dimensional flow have to be integrated numerically. We used a shooting technique to perform this task. As material coefficients we used those for PAA (p,p'-dimethoxy-azoxybenzene) provided in Table I of [17]. The dimensionless coefficient A was varied between the values 1 (blue), 2 (red), 5 (green), 10 (magenta) and 13 (cyan curves), see Fig. 5. It is in fact impossible to compare this variation directly to the classical Navier-Stokes case: Indeed we could say that small values of A correspond to negligible viscosities λ_1, but it could also mean that the stiffness k_{11} is very large, or that the plate distance is very small, in which case we expect length scale effects.

In short, the parameter analysis is not as clear cut or simple as in the case of Eringen's theory. Regarding the boundary conditions we assumed that the director stands perpendicularly to the wall. This is known as homeotropic strong anchoring (after [18]), which happens if nematic crystals attach to a glass surface. This seems reasonable to assume in view of real fluid flow experiments. It should also be pointed out that a numerical analysis of the Ericksen-Leslie equations is difficult to find in the literature. [17] is one of the few exceptions, where a special FE-based integration technique was developed for the solution of Eqns. (3.18).

The temperature profile was simulated by solving Eqn. (3.20) numerically using different material parameters from [17]. The result is shown in Fig. 6. As to be expected the additional viscosities lead to an increase in the temperature values.

3.5 A preliminary comparison of the theories by Eringen and Ericksen-Leslie

A dispute arose between 1970-1990 regarding the differences, advantages, and correctness of the two theories presented in Sections 3.1 and 3.3. For the pro-Ericksen side the paper by Rymarz [19] should be cited. The following conclusions are drawn there:

- The microinertia of a director about its long axis is zero and no such physical body can exist.
- The spin balance has a much clearer physical meaning than the balance of director force.
- Nematic crystals are regarded as materials which assume any state that has a uniform alignment as reference state, in which the couple stress vanishes and only an unknown pressure exists.
- In many boundary value problems there are more equations than unknowns.
- The Ericksen-Leslie theory is only a special case of Eringen's theory.

On the Ericksen-Leslie side there are the articles by Shahinpoor [20], where it is argued that:

- The proposed constitutive laws give rise to inconsistencies between theory and experiment for simple shear flow.
- The use of the notion of a reference configuration is questionable, which in turn lead to displacement gradients appearing explicitly in the constitutive relations.

3.6 Microinertia with a production term

The proposed extension to micropolar fluid theory concerns the balance of microinertia shown in Eqn. $(3.1)_2$. The tensor of microinertia is no longer a "constant" property undergoing rigid

body rotations. Rather it is a new independent field variable capable of "form change" so to speak. The balance is therefore extended by a production term, $\boldsymbol{\chi}_J$, as follows:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\chi}_J . \tag{3.21}$$

In order to illustrate the potential of this new term, consider the situation depicted in Fig. 7 top left inset. Initially spheroidally shaped particles on the mesoscale were aligned along the axis $\boldsymbol{n}$ of their major axes c_0 due to some production process. The tensor of inertia of each particle is then given by:

$$\boldsymbol{J}_0 = \tfrac{1}{5}(a_0^2 + c_0^2)(\mathbf{I} - \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}) + \tfrac{2}{5}a_0^2\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} . \tag{3.22}$$

where a_0 is the minor axis. Note that for $a_0 = c_0$ the particles turn into spheres with an isotropic tensor of inertia. After homogenization we obtain a microinertia tensor which is represented mathematically by the same expression (3.22). This situation, a stout spheroid (or sphere if $a_0 = c_0$), is shown on the inset below. Now an electric field $E(t)$ is applied. If polarized and deformable the spheroids will then deform accordingly as shown in the figure, and on the macroscale their microinertia tensor is given by:

$$\boldsymbol{J}(t) = \tfrac{1}{5}\left[a^2(t) + c^2(t)\right](\mathbf{I} - \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}) + \tfrac{2}{5}a^2(t)\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} . \tag{3.23}$$

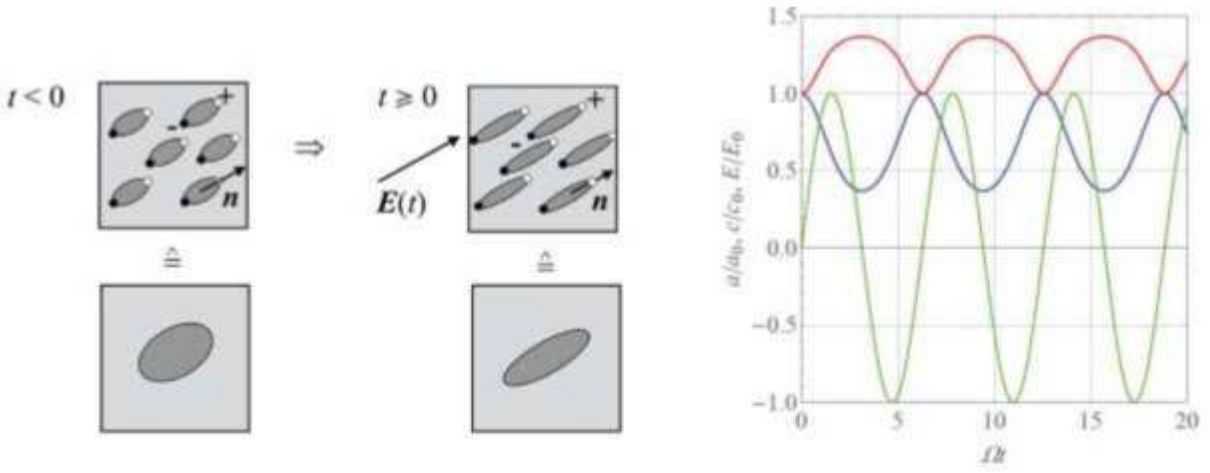


Figure 7: Structural shape change due to a changing electric field, corresponding homogenization, and smart window simulation.

In order to determine the temporal change of the equivalent minor and major axes, $a(t)$ and $c(t)$, respectively, we have to solve Eqn. (3.21) in combination with a suitable constitutive equation for the production of microinertia. Note that this is not an example describing the liquid crystal behavior as it was presenter earlier. Here the inertia changes due to elongation or shrinkage and not because of reorientation. We follow [21], Section 30.3.3, where based on representation theorems and in consistence with the entropy principle it is argued that:

$$\boldsymbol{\chi}_J = -\alpha \det\boldsymbol{J}\ \boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{E} = E(t)\boldsymbol{n}, \tag{3.24}$$

where α is a positive constant. Let us assume that an alternating electric field $E(t) = E_0\sin(\Omega t)$ with an AC frequency Ω is applied. Then the resulting ODEs can be decoupled and solved to yield:

$$a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\left[1 - \frac{\alpha E_0^2}{25\Omega}\left(a_0^2 + c_0^2\right)^2 \cos(\Omega t) \right] \right), \tag{3.25}$$

$$c(t) = \sqrt{a_0^2 + c_0^2 - a_0^2 \exp\left(-\left[1 - \frac{\alpha E_0^2}{25\Omega}\left(a_0^2 + c_0^2\right)^2 \cos(\Omega t) \right] \right)}.$$

This result is depicted in dimensionless form ($\alpha E_0^2 / 25\,\Omega\left(a_0^2 + c_0^2\right) = 1$) for the initially isotropic situation $a_0 = c_0$ in Fig. 7 on the very right. Note that there is a phase shift between the time it takes for the radii $a(t)$ (blue curve) and $c(t)$ (red curve) to return to their isotropic values when compared to the oscillating electric field $E(t)$ (green curve). This may suffice as a first illustration of how the production of microinertia may serve to describe structural or phase changes (*i.e.*, charges of translucency) associated with changes of order (here isotropic to transversally isotropic).

5. Conclusions and outlook

The results of this paper can be summarized as follows:

- The need for generalized continuum theories was explained, in particular by using the example of liquid crystals.
- The basics of the generalized fluid models according to Eringen and Ericksen-Leslie were presented and compared.
- An extended generalized continuum theory for micropolar fluids was presented. To this end a kinetic equation for the moment of inertia including a production term was motivated and analyzed.
- Couette flow problems were solved within the framework of both the Eringen as well as the Ericksen-Leslie theory. In particular, the corresponding increase in temperature was analyzed and linked to the newly introduced viscosity coefficients.
- A problem for the kinetic equation of microinertia was studied analytically to model the structural changes observed in smart glass.
- In the future even more complex problems shall be analyzed (numerically). The spin equation shall be included and fully coupled problems shall be examined.

Acknowledgment

ENV wants to thank for Grant 17-51-12055 from the Russian Foundation for Basic Research. Both authors want to thank W. Rickert for extensive help during the preparation of the manuscript.

References

[1] Eremeyev, V.A., Lebedev, L.P., Altenbach, H. (2012). Foundations of micropolar mechanics. Springer Science & Business Media.

[2] Cowin, S.C. (1974). The theory of polar fluids. In: Advances in Applied Mechanics, vol. 14. Ed. by C.-S. Yih. New York: Academic Press, Inc., pp. 279-347.
[3] Eringen, A.C. (2001). Microcontinuum Field Theories- II Fluent Media. New York: Springer Verlag.
[4] Leslie, F.M. (1979). Theory of flow phenomena in liquid crystals. In: Advances in liquid crystals, vol. 4, ed. Glenn H. Brown. New York: Academic Press, Inc., pp. 1-81.
[5] Stewart, I.W. (2004). The static and dynamic continuum theory of liquid crystals: A mathematical introduction. London: Taylor & Francis.
[6] Ivanova, E.A. Vilchevskaya, E.N. (2016). Micropolar continuum in spatial description. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 28(6), pp. 1759-1780.
[7] Müller, W.H., Vilchevskaya, E.N. (2018). Micropolar Theory with Production of Rotational Inertia: A Rational Mechanics Approach. In: Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials 1. Ed. by H. Altenbach, J. Pouget, M. Rousseau, B. Collet, and T. Michelitsch. Cham: Springer, pp. 195-229.
[8] Maugin, G.A., Metrikine, A.V. (2010). Mechanics of generalized continua - One Hundred Years After the Cosserats. Springer New York.
[9] Altenbach, H., Maugin, G.A., Erofeev, V. (Eds.). (2011). Mechanics of generalized continua (Vol. 7). Springer Science & Business Media.
[10] General Chemistry: Principles, Patterns, and Applications, 11.8 Liquid Crystals (2018). https://saylordotorg.github.io/text_general-chemistry-principles-patterns-and-applications-v1.0/s15-08-liquid-crystals.html. Accessed: 2018-03-07.
[11] Chandrasekhar, S. (1992). Liquid Crystals, second edition. Cambridge: Cambridge University Press.
[12] Dornob: Company fact sheet (2018). http://dornob.com/magic- glass- flip- a- switch- to- turn- clear-sheetstranslucent. Accessed: 2018-03-07.
[13] Wikipedia: Smart windows, electrochromic devices 2018.
[14] Rickert, W., Vilchevskaya, E.N., Müller, W.H. (2018). A note on Couette flow of micropolar fluids according to Eringen's theory. Mathematics and Mechanics of Complex Systems. In print.
[15] Müller, I. (1985). Thermodynamics. Pitman.
[16] Leslie, F.M. (1968). Some constitutive equations for liquid crystals. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 28(4), pp. 265-283.
[17] Finlayson, B. (1974). Numerical computations for the flow of liquid crystals. In: Liquid Crystals and Ordered Fluids Volume 1. Ed. by J. F. Johnson and R. S. Porter. Plenum Press, New York, pp. 211-223.
[18] de Gennes, P.G., Prost, J. (1995). The physics of liquid crystals, second edition. Oxford: Oxford University Press.
[19] Rymarz, C.Z. (1990). More about the relations between the Ericksen-Leslie-Parodi and Eringen-Lee theories of nematic liquid crystals. *International journal of engineering science* 28.1, pp. 11–22.
[20] Shahinpoor, M. (1975). Comments on the paper "Alignment of nematic liquid crystals." *The Journal of Chemical Physics* 63(3), pp. 1319-1320.
[21] Müller, W.H. and Vilchevskaya, E.N. (2018). Micropolar Theory with Production of Rotational Inertia: A Rational Mechanics Approach. In: Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials 1. Ed. by H. Altenbach, J. Pouget, M. Rousseau, B. Collet, and T. Michelitsch. Cham: Springer, pp. 195-229.

Lebesgue type generalized measures on Hilbert spaces and Weyl secondary quantization

N. N. Shamarov, O. G. Smolyanov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
nshamarov@yandex.ru

Abstract

In the rigid body theory the quantum field theory is useful. Here we construct the Weyl version of the second Hamiltonian quantizing using the non-σ-additive Lebesgue type measure on a separable infinite dimensional Hilbert space.

Introduction.

For the rigid body theory one can use the quantum field theory. The operation of the quantizing being applied to fields is the quantization of the Lagrangian or Hamiltonian system, having infinitely many degrees of freedom. Such quantization is called the second quantization.

Below we adopt the part of the mathematical scheme of the quantization from [1] and [2] which can be called a symplectic one, because it starts from one Hamiltonian system (the system to be be quantized called usually a classical one) and results in another Hamiltonian system obtained after the quantization.

It is worth noting that while in textbooks the mathematical scheme of quantization starts from finite dimensional classical Hamiltonian systems, historically first quantization was performed by Max Planck over the electromagnetic field radiation, so one can say that the historically first quantization was the secondary one.

The following two results are mathematically new in the present text. The first one is a such mathematical scheme of the Hamiltonian quantization which can be applied to Hamiltonian systems with the separable real Hilbert phase space E in the unique form in the case when $\dim E = \infty$ as well as in the case when $\dim E < \infty$. And the second one is a constructive Hilbert space in which the quantum observables are self-adjoint linear operators. The method also contain the Fourier type direct and inverse operators acting as automorphisms of the locally convex Hausdorff topological vector space (LCS) of Schwartz type smooth (fast decreasing together with their derivatives) functions defined on infinite dimensional Hilbert spaces.

1. Construction.

1.1. Sets of functions. In the following the Gaussian exponential functions defined on Hilbert spaces will play a key role. If H is a real or complex Hilbert

space and $(x,y) \in H \times H$ the $(x,y)_H$ denotes the H-scalar product of x and y which is linear in x ; if H is fixed, we can write $x \cdot y$ or xy instead of $(x,y)_H$, and x^2 instead of $x \cdot x$. If $\alpha \in \mathbb{R}$ and $\alpha > 0$ we define the function $\gamma_H^\alpha : H \to \mathbb{R}$ such that $\gamma_H^\alpha(h) = e^{-\frac{\alpha}{2}h^2} \quad (h \in H)$.

In the following such Gaussian functions will be regarded as defined on the configuration and on the momentum parts of the standard real Hilbert symplectic spaces, which are to be defined below.

Besides the Gaussian type functions on the Hilbert H we need also the notion of the cylindric ones based on the projectors. If $P = P^* = P^2$ is a linear operator of the orthogonal projection $H \to P(H)$ (along the the orthogonal complement $H \ominus P(H)$) and $P(H) = K$, we write $P = P_K^H$ and $P_H^H = \mathrm{id}_H$; so $P_K^H + P_{H \ominus P(H)}^H = \mathrm{id}_H$. A complex-valued cylindric function f on H is a composition of the kind $f = g \circ P$ where $P = P_K^H$ for a finite dimensional linear subspace $K = P(H) \subset H$ and where the complex-valued function g is defined on the finite dimensional space K . Such a complex-valued cylindric function f on a real Hilbert space H is called polynomial if the real and imaginary parts of g are real polynomial functions $P(H) \to \mathbb{R}$. The space of all the polynomial complex-valued cylindric function on H we denote as $\mathcal{P}(H;\mathbb{C})$.

Further we need some combinations of the cylindric and of the Gaussian functions on H . Namely if K is again a finite dimensional linear subspace in H we define

$$S_K^\alpha(H) = \{(g \circ P_K^H) \cdot (\gamma_H^\alpha \circ P_{H \ominus K}^H) : g \in S(K,\mathbb{C})\}$$

where $S(K,\mathbb{C})$ is the standard Schwartz space of smooth and fast decreasing, together with their derivatives, complex valued functions defined on K . Now

$$S^\alpha(H) = \cup\{S_K^\alpha(H) : K \subset H,\ \dim K < \infty\} .$$

Note that for any $g : K \to \mathbb{C}$ if

$$f = (g \circ P_K^H) \cdot (\gamma_H^\alpha \circ P_{H \ominus K}^H) \ : H \to \mathbb{C} \qquad (1.\alpha)$$

then g is a restriction of f on K and g defines the function f uniquely; so in this case we can write $f = f_{g,\alpha}$.

Now we shortly recall the notion of differentiability and multiple and infinite differentiability of mappings between Hausdorff LCSs [3] in order to say that elements of $S^\alpha(H)$ are smooth enough. Let X and Y be Hausdorff real LCSs, let β be such a family of some bounded subsets in X that $\cup\{B : B \in \beta\} = X$, and let $L(X,Y)$ be the space of all continuous linear operator $A : X \to Y$ (instead of $L(X,X)$ we

write $L(X)$; when we equip the space $L(X,Y)$ with the topology of the uniform convergence on each set $B \in \beta$ we denote it $L(X,Y)_\beta$; we write Ah instead of $A(h)$ for any $h \in X$. A function $f : X \to Y$ is called β-differentiable at the point $x_0 \in X$ if there exists a (unique, automatically) linear operator $f'(x_0) \in L(X,Y)$ such that

$$\forall B \in \beta \qquad t^{-1} r_{f,x_0}(t \cdot h) \to 0 \qquad (\mathbb{R} \ni t \to 0) \qquad \text{uniformly in } h \in B$$

where the function $r_{f,x_0} : X \to Y$ is defined by

$$r_{f,x_0}(h) = f(x_0 + h) - f(x) - f'(x_0)h \qquad (h \in X).$$

The function $f : X \to Y$ is called β-differentiable if it is β-differentiable at each point of X . In this case there exists the function

$$f' : X \ni x_0 \mapsto f'(x_0) \in L(X,Y) \ .$$

So we define $f^{(0)} = f$ and $L_0(X^0,Y) = Y$, $f^{(1)} = f'$ and $L_1(X^1,Y) = L(X,Y)_\beta$, and recurrently $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ and $L_{n+1}(X^{n+1},Y) = L(X, L_n(X^n,Y))_\beta$. So the function $f^{(n)}$ is called the n-th derivative of f .

Let $\mathcal{E}_\beta(X,Y)$ be the space of all such continuous functions $f : X \to \mathbb{C}$ that, for any natural n, the function $f^{(n)} : X \to L_n(X^n,Y)$ exists and is continuous. We equip the space $\mathcal{E}_\beta(X,Y)$ with the topology of uniform convergence of each derivatives on each set $B \in \beta$. From these definitions one immediately obtains the following fact.

1.2. Lemmas. *1. Let H be again a real Hilbert space and let β consist of all finite dimensional compacts in H . Then, for any real number $\alpha > 0$, the space $S^\alpha(H)$ is a dense subset in $\mathcal{E}_\beta(H,\mathbb{C})$.*

2. For any finite dimensional linear subspace K of the real Hilbert space H and for any $f = f_{g,2\pi} \in S^{2\pi}_K(H)$ we define $I_K(f) = \int_K g(x)dx$ (integral with respect to the standard Lebesque measure of the Euclidean space K) and $N_K(f) = \int_K |g(x)|dx$. Then the following conclusions a)–c) are immediately true:

a) the union of all graphs of functions N_K is a graph of a function $N_H : S^{2\pi}(H) \mapsto \mathbb{R}$ which value at f being denoted by $\|f\|_{L_1(H)}$ defines a norm on the space $S^{2\pi}(H)$;

b) the completion of the subspace $S^{2\pi}_K(H) \subset S^{2\pi}(H)$ under this norm has the functional representation by such (classes of) functions $f = f_{g,2\pi}$ that $g = f|_K \in L_1(K;\mathbb{C})$;

c) the union of all graphs of functions I_K is a graph of a function $I_H : S^{2\pi}(H) \to \mathbb{C}$ which value at f being denoted by $\int_H f(x)dx$ defines a linear functional on the space $S^{2\pi}(H)$ which is continuous in the norm $S^{2\pi}(H) \ni f \mapsto \|f\|_{L_1(H)}$.

Due to this Lemma we can denote by $L_1(H;\mathbb{C})$ the completion of the normed space $(S^{2\pi}(H), N_{H,1})$ and by $I_{H,1}$ the functional whose graph is a closure of I_H in the product $L_1(H;\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$.

So values of the functional I_H can be denoted as $I(f) = \int_H f(x)dx$ and values of the functional N_H can be denoted as $N(f) = \int_H |f(x)|dx$, so $|I_H(f)| \leq N_H(f)$ for any $f \in S^{2\pi}(H)$. Hence the functional I_H can be extended by continuity onto all the space $L_1(H;\mathbb{C})$, and we denote this extension as $I_{H,1}$ and call it *the generalized Lebesgue measure on* H ; we continue to denote values $I_{H,1}(f)$ of this functional at elements f of $L_1(H;\mathbb{C})$ by $\int_H f(x)dx$ even if f cannot be represented by a function.

1.3. Hilbert Fourier transforms in $S^{2\pi}(H)$

We can define the direct and inverse Hilbert Fourier transforms $F^{\pm} : S^{2\pi}(H) \to S^{2\pi}(H)$ by the formulae

$$(F^{\pm} f_{g,2\pi})(h) = f_{\widetilde{g},2\pi}(\pm h), \quad \text{where } \widetilde{g}(h) = \int_K e^{2\pi i h x} g(x)dx$$

if as above $f_{g,2\pi}|_K = g$ and $f = (g \circ P_K^H) \cdot (\gamma_H^{2\pi} \circ P_{H\ominus K}^H)$. One can easily check that this definition is correct and that F^+ and $F^- = (F^+)^{-1}$ are mutually inverse linear automorphisms of the space $S^{2\pi}(H)$. Instead of $F^+ f$ we will write again $\widetilde{f}$.

Having the integral I_H we can write also that $\int_H f(x)dx = \widetilde{f}(0)$. One can also easily check the following

1.4. Lemma and notation.

If $f = (g \circ P_K^H) \cdot (\gamma_H^{2\pi} \circ P_{H\ominus K}^H)$ for a real finite dimensional subspace $K \subset H$ and if $\mu_f = \mu_g \otimes \mu_{\gamma_{H\ominus K}^{2\pi}}$ is a cylindric product[4] of the Borel measure $\mu_g(dx) = g(x)dx$ on K and of the cylindric Gaussian measure on $H \ominus K$ having its Kolmogorov's Hilbert Fourier transform (FT) $\widetilde{\mu_{\gamma_{H\ominus K}^{2\pi}}}(y) = \int e^{ixy} \mu_{\gamma_{H\ominus K}^{2\pi}}(dx)$ in the form $\widetilde{\mu_{\gamma_{H\ominus K}^{2\pi}}} = \gamma_{H\ominus K}^{(2\pi)^{-1}}$ then the 2π-FT $F^{2\pi}\mu_f$ of μ_f defined as $H \ni y \mapsto \int_H e^{2\pi i x y} \mu_f(dx)$ satisfy the equality

$$F^{2\pi}\mu_f = \widetilde{f} \ .$$

In particular (with $K = 0$, $g(0) = 1$),

$$F^{2\pi}\mu_{\gamma_H^{2\pi}} = \gamma_H^{2\pi} \ .$$

This lemma shows that we can write formally

$$\mu_f(dx) = f(x)dx, \ (F^+ f)(y) = \widetilde{f}(y) =$$
$$= \int_H e^{2\pi i x y} f(x)dx = (F^{2\pi}\mu_f)(y) \ (x, y \in H, \ dx \subset H)$$

and $(F^{\pm} f)(y) = \widetilde{f}(\pm y) = \int_H e^{\pm 2\pi i x y} f(x)dx$. The left and right hand sides of the last formula show that if we want to remember on what variable f did depend before its Fourier tranformation, we can write a bit shorter $F^{\pm}_{x\to y}(f(x))$ instead of

$\int_H e^{\pm 2\pi i xy} f(x)dx$. Such notation is very useful when we use integrals with parameters below.

1.5. Symplectic phase spaces. Let Q be a real Hilbert space and $P = L(Q,\mathbb{R}) \equiv Q^*$ be its Hilbert dual space, so $Q \cong P$ and due to the isomorphism we will regularly identify the functionals with vectors and write pq instead of $p(q)$ for $q \in Q$ and $p \in P$. Under the standard real symplectic Hilbert phase space over Q we understand the Hilbert space $E = E_Q = Q \times P \cong Q \oplus P$ (the orthogonal Hilbert sum of Q and P) and we call Q the Hilbert configuration subspace of E and call P the Hilbert momenta subspace of E . The standard symplectic operator $I_Q : E^* \to E$ (here $E^* = Q^* \times P^* \cong P \times Q$), acts by the rule $(p,q) \mapsto (q,-p)$ $(p \in P,\, q \in Q)$.

1.6. τ-PDO in $S^{2\pi}(Q)$ with polynomial cylindric symbols.

Let $\tau \in \mathbb{R}$ and $E = E_Q = Q \times P$ is the standard real Hilbert symplectic space over its configuration Hilbert space Q.

If $f \in \mathcal{P}(E)$ we denote the linear operator $(\hat{f})_\tau$ in $S^{2\pi}(Q)$ such that for each $\psi \in S^{2\pi}(Q)$ and each $q \in Q$

$$((\hat{f})_\tau \varphi)(q) = F^+_{p\to q}(F^-_{x\to p}(f(\tau x + (1-\tau)q, p)\psi(x))) \equiv$$
$$\equiv \int_P e^{2\pi i pq}(\int_Q e^{-2\pi i px} f(\tau x + (1-\tau)q, p)\psi(x)dx)dp$$

These formulas are correct; the constructed operator $(\hat{f})_\tau$ is called τ-PDO with the symbol f; these operators are continuous in the topology of $\mathcal{E}_\beta(Q;\mathbb{C})$ (β consists of all finite dimansional compacts of Q) and give ordinary τ-PDO if $\dim Q < \infty$.

We refer to the linear operator $\mathcal{E}(E) \ni f \mapsto (\hat{f})_\tau \in L(S^{2\pi}(Q))$ as to the τ-quantization on E. If $\dim Q = \infty$ we refer to the τ-quantization as to the secondary one. If $\tau = \frac{1}{2}$ we omit τ and refer to the linear operator $\mathcal{E}(E) \ni f \mapsto \hat{f} \in L(S^{2\pi}(Q))$ as to the Weyl quantization on E.

1.7. Versions of the τ-PDO in $S^\pi(Q)$ and $L_2(Q)$.

Since the space $S^{2\pi}(Q)$ is dense in $\mathcal{E}_\beta(Q;\mathbb{C})$ and since the operators $(\hat{f})_\tau$ are continuous we can extend the operators by continuity onto all the space $\mathcal{E}_\beta(Q;\mathbb{C})$ and then restrict the operator to $S^\pi(Q)$. The restriction is called a version of the operator $(\hat{f})_\tau$ in $S^\pi(Q)$.

It is evident that if $(f,g) \in S^\pi(Q) \times S^\pi(Q)$ then the product $f\bar{g}$ is in $S^{2\pi}(Q)$ and hence there defined the integral $\int_Q f(x)\overline{g(x)}dx$ giving the Hermitian scalar product on $S^\pi(Q)$. By $L_2(Q)$ we denote the completion of the space $S^\pi(Q)$ w.r.t. the scalar product.

1.9. Theorem. If $f(q,p) = f_1(q)$ then $((\hat{f})_\tau\psi)(q) = f_1(q)\psi(q)$ $(q \in Q,$ $\psi \in \mathcal{E}_\beta(Q))$. If $v \in Q$ and $f(q,p) = pv$ then $((\hat{f})_\tau\psi)(q) = \frac{1}{2\pi i}\psi'(q)v$. If $\tau = \frac{1}{2}$ and

all values of f are real then $\hat{f}$ is an essentially self-adjoint operator in $L_2(Q)$.

Proofs are straightforward.

References

[1] Kozlov V V and Smolyanov O G 2012 *Dokl. Math.* **85** No 3 416

[2] Ratiu T S and Smolyanov O G 2015 *Dokl. Math.* **91** No 1 68

[3] Bogachev V I and Smolyanov O G 2017 *Topological vector spaces and their applications (Springer Heidelberg)*

[4] Shamarov N N 2011 Doctor of science dissertation (Rus.) Moscow

დისპერსიულ გარემოში არაწრფივი სითბური მიმოცვლის ოპტიმალური მართვა

მოდებაძე თ. გოგოლაძე ნ.

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნაშრომში შესწავლილია კონვეიერული მანქანის მუშაობის სტაციონარული რეჟიმი. დამტკიცებულია იმ სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობა, რომელიც წარმოადგენს მის მათემატიკურ მოდელს და ნაჩვენებია ფუნქციათა რომელ კლასს მიეკუთვნება ამონახსენი სასაზღვრო პირობების არჩევის მიხედვით. სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის დასამტკიცებლად გამოყენებულია სასაზღვრო ამოცანების ფუნქციონალურ - ანალიტიკური ფორმულირება, ე.ი. სასაზღვრო ამოცანის წარმოდგენა ოპერატორული განტოლებების სახით ბანახის სივრცეში. განხილული სახის სასაზღვრო ამოცანების ოპერატორულ განტოლებებზე გადასვლა საზოგადოდ მიღებულია, რადგან იგი გაცილებით ამარტივებს ამოცანის შესწავლასა და მის ამოხსნას.

სტაციონალური რეჟიმი, ოპერატორული განტოლება, დირიხლეს ამოცანა, ნეიმანის ამოცანა.

ჩემს მიერ მიღებულია დისკრეტული გარემოსათვის სითბური მიმოცვლის მათემატიკური მოდელი, როგორც სინათლის გამოსხივების ეფექტის გათვალისწინებით, ასევე მის გარეშე. მოდელი განხილულია როგორც სტაციონალური ასევე ასევე დინამიური რეჟიმისათვის. აქ ჩვენ განვიხილავთ ორგანზომილებიან დისკრეტულ გარემოს სტაციონალური პროცესებისათვის. გამოვიკვლევთ მიღებული კერძოწარმოებულებიანი განტოლებათა სისტემის დირიხლესა და ნემიმანის სასაზღვრო ამოცანებს. ვაჩვენებთ მისი ამონახსნის არსებობას და ვნახავთ თუ ფუნქციათა რა კლასს მიეკუთვნება ამონახსნი.

განვიხილოთ **დირიხლეს ამოცანა.**

განვიხილოთ მუშაობის სტაციონარული რეჟიმი, რომელიც გამოშრობის ზონაში აღიწერება განტოლებათა შემდეგი სისტემით:

$$\begin{cases} V_y \dfrac{\partial \theta}{\partial y} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,y)\dfrac{\partial \theta}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(a_2(x,y)\dfrac{\partial \theta}{\partial y}\right) = l_1 |T|^{2/3}(T-\theta) + \alpha(T^4-\theta^4) \\ W_x \dfrac{\partial T}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(b_1(x,y)\dfrac{\partial T}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(b_2(x,y)\dfrac{\partial T}{\partial y}\right) = l_1 |T|^{2/3}(\theta-T) + \alpha(\theta^4-T^4) \end{cases} \quad (1)$$

სადაც $V_y \geq 0$, W_x, $l_1 > 0$, $\alpha > 0$ – მოცემული მუდმივებია, ხოლო კოეფიციენტები კი აკმაყოფილებენ პირობებს $a_i(x,y) \geq \lambda_1 > 0$; $b_i(x,y) \geq \lambda_2 > 0$; a_i, $b_i \in L_\infty(\Omega)$.

არის $\partial\Omega$ საზღვარზე გაზისათვის და მყარი ნივთიერებებისათვის მოცემულია შემდეგი სასაზღვრო პირობები

$$\begin{cases} T(0,y)=\varphi_1(y); & \theta(0y)=\eta_1(y); \\ T(h,y)=\varphi_2(y); & \theta(h,y)=\eta_2(y); \\ T(x,0)=\varphi_3(x); & \theta(x,0)=\eta_3(x); \\ T(x,l)=\varphi_4(x); & \theta(x,l)=\eta_4(x) \end{cases} \quad (2)$$

ასევე უნდა დაკმაყოფილდეს შეზღუდვები მდგომარეობაზე:

$$\left|grad\theta(x,y)\right| \le K \qquad \forall\,(x,y)\in\Omega,$$

სადაც K – ცნობილი მუდმივია.

დავამტკიცოთ (1) + (2) არაწრფივი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობა და ვაჩვენოთ ფუნქციათა რომელ კლასებში არსებობს ამონახსენი.

ვთქვათ $\hat{T}(x,y)$ და $\hat{\theta}(x,y)$ საკმარისად რეგულარული ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს: $\hat{T}(x,y)|_{\partial\Omega}=T|_{\partial\Omega}$, $\hat{\theta}(x,y)|_{\partial\Omega}=\theta|_{\partial\Omega}$, მაშინ $\overline{T}=T-\hat{T}$, $\overline{\theta}=\theta-\hat{\theta}$ ფუნქციებისათვის (1) + (2) სასაზღვრო ამოცანას ექნება სახე:

$$\begin{cases} V_y\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(a_1\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(a_2\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}\right)=l_1\left|\overline{T}+\hat{T}\right|^{2/3}((\overline{T}+\hat{T})-(\overline{\theta}+\hat{\theta}))+\alpha((\overline{T}+\hat{T})^4-(\overline{\theta}+\hat{\theta})^4)- \\ -\left(V_y\dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial y}-\dfrac{\partial}{\partial x}(a_1\dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial x})-\dfrac{\partial}{\partial y}(a_2\dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial y})\right); \\ W_x\dfrac{\partial\overline{T}}{\partial y}-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(b_1\dfrac{\partial\overline{T}}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(b_2\dfrac{\partial\overline{T}}{\partial y}\right)=l_1\left|\overline{T}+\hat{T}\right|^{2/3}((\overline{\theta}+\hat{\theta})-(\overline{T}-\hat{T}))+\alpha((\overline{\theta}+\hat{\theta})^4-(\overline{T}+\hat{T})^4)- \\ -\left(W_x\dfrac{\partial\hat{T}}{\partial y}-\dfrac{\partial}{\partial x}(b_1\dfrac{\partial\hat{T}}{\partial x})-\dfrac{\partial}{\partial y}(b_2\dfrac{\partial\hat{T}}{\partial y})\right); \end{cases} \quad (3)$$

სასაზღვრო პირობებით:

$$\overline{T}|_{\partial\Omega}=0\ ; \quad \overline{\theta}|_{\partial\Omega}=0; \qquad (4)$$

და შეზღუდვებით მდგომარეობაზე:

$$\left|grad(\overline{\theta}(x,y)+\hat{\theta}(x,y))\right| \le K \quad \forall(x,y)\in\Omega.$$

(3)+ (4) ამოცანის განზოგადოებული ამონახსენი ვუწოდოთ ფუნქციას

$$\overline{Y}\in\left\{\overline{\theta}(x,y),\overline{T}(x,y)\right\},$$

რომელიც მიეკუთვნება

$$X=\left[W_2^1(\Omega)\overset{0}{\cap}L_p(\Omega)\right]^2,\ p\ge 5$$

სივრცეს და

$$\forall \mu \in X, \quad \mu = (\mu_1, \mu_2)$$

- სათვის აკმაყოფილებს ინტეგრალურ იგივეობას

$$\int_\Omega (V_y \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \mu_1 + W_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \mu_2) dxdy + \int_\Omega (a_1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + b_1 \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial \mu_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \frac{\partial \mu_2}{\partial y}) dxdy =$$
$$= \int_\Omega (V_y \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \mu_1 + W_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \mu_2) dxdy - l_1 \int_\Omega \left| \bar{T} + \hat{T} \right|^{2/3} \left((\bar{T} + \hat{T}) - (\bar{\theta} + \hat{\theta})(\mu_2 - \mu_1) \right) dxdy - \qquad (5)$$
$$- \alpha \int_\Omega \left((\bar{T} - \hat{T})^4 - (\bar{\theta} + \hat{\theta})^4 \right) (\mu_2 - \mu_1) dxdy + \int_\Omega (a_1 \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + b_1 \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \frac{\partial \mu_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \frac{\partial \mu_2}{\partial y}) dxdy$$

მე (5) თანაფარდობას აზრი აქვს როცა

$$\forall \bar{\theta}(x,y), \bar{T}(x,y), \ \mu_1(x,y), \ \mu_2(x,y) \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega), p \geq 5,$$

რადგანაც ასეთი ფუნქციები Ω არის $\partial\Omega$ საზღვარზე ღებულობენ შესაბამისად $\bar{\theta}(\partial\Omega), \bar{T}(\partial\Omega), \mu_1(\partial\Omega), \mu_2(\partial\Omega)$ მნიშვნელობებს, ამასთან ეს მნიშვნელობები $\partial\Omega$ საზღვარზე წარმოადგენენ $L_2(\partial\Omega)$ სივრცის ელემენტებს

მე-(5) გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\left\langle A(\bar{Y}), \mu \right\rangle = \left\langle \bar{F}(\bar{Y}), \mu \right\rangle - \left\langle A(\hat{Y}), \mu \right\rangle \quad \forall \mu \in X,$$

სადაც A ოპერატორი განისაზღვრება თავისი შემდეგი ორადწრფივი ფორმით

$$\left\langle A(\bar{Y}), \mu \right\rangle = \int_\Omega \left(V_y \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \mu_1 + W_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \mu_2 \right) dxdy + \int_\Omega (a_1 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} +$$
$$+ b_1 \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial \mu_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \frac{\partial \mu_2}{\partial y}) dxdy, \qquad (6)$$

ხოლო

$$\bar{F}(\bar{Y}) \equiv F(\bar{Y} + \hat{Y})$$

ოპერატორი განისაზღვრება ფორმით:

$$\left\langle \bar{F}(\bar{Y}), \mu \right\rangle = -l_1 \int_\Omega \left| \bar{T} + \hat{T} \right|^{2/3} ((\bar{T} + \hat{T}) - (\bar{\theta} + \hat{\theta}))(\mu_2 - \mu_1) dxdy -$$
$$- \alpha \int_\Omega ((\bar{T} + \hat{T})^4 - (\bar{\theta} + \hat{\theta})^4)(\mu_2 - \mu_1) dxdy \qquad (7)$$

$$\bar{F}(\bar{Y}) = \begin{Bmatrix} \bar{f}_1(\bar{\theta}, \bar{T}) \\ -\bar{f}_1(\bar{\theta}, \bar{T}) \end{Bmatrix}$$

სადაც

$$\bar{f}_1(\bar{\theta},\bar{T}) = l_1\left|\bar{T}+\hat{T}\right|^{2/3}((\bar{T}+\hat{T})-(\bar{\theta}+\hat{\theta}))+\alpha((\bar{T}+\hat{T})^4-(\bar{\theta}+\hat{\theta})^4).$$

შევისწავლოთ A და $\bar{F}$ ოპერატორების თვისებები. სამართლიანია ლემა:

ლემა 1. მე (6) ფორმით განსაზღვრული ოპერატორი არის წრფივი, შემოსაზღვრული, მონოტონური, კოერციტიული ოპერატორი, რომელიც მოქმედებს $X_1 = \left[\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)\right]^2$ სივრციდან $X^* = \left[W_2^{-1}(\Omega)\right]$ სივრცეში, ხოლო მე (7) ფორმით განსაზღვრული ოპერატორი $\bar{F}$ წარმოადგენს ნახევრადუწყვეტ ოპერატორს, რომელიც მოქმედებს $X_2 = \left[L_p(\Omega)\right]^2$, $p \geq 5$ სივრციდან $X_2^* = \left[L_q(\Omega)\right]^2$, $1/q+1/p=1$. სივრცეში.

შევისწავლით რა (3) – (4) სასაზღვრო ამოცანებით განსაზღვრულ A და $\bar{F}$ ოპერატორის თვისებებს შევნიშნავთ, რომ რამდენადაც (5) თანაფარდობა სამართლიანია ნებისმიერ $\mu \in X = \left[\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)\right]^2$, $p \geq 5$, (3)+(4) ამოცანა ექვივალენტურია შემდეგი ოპერატორული განტოლებისა

$$\bar{\mathrm{A}}(\bar{Y}) = f, \quad f \in X^*, \quad (8)$$

სადაც

$$\bar{\mathrm{A}}(\bar{Y}) = A(\bar{Y}) - \bar{F}(\bar{Y}), \ f = -A(\hat{Y}), \ X = \left[\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)\right]^2, \ p \geq 5.$$

ვაჩვენოთ თუ რა თვისებები გააჩნია $\bar{A}$ ოპერატორის

სამართლიანია შემდეგი ლემა:

ლემა2. ოპერატორი $\bar{A}: X \to X^*$, რომელიც განისაზღვრება (3)+(4) ამოცანით, სადაც

$$X = \left[\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)\right]^2, \ p \geq 5, \quad X^* = \left[W_2^1(\Omega) + L_q(\Omega)\right]^2, \ 1/p+1/q = 1,$$

ა) შემოსაზღვრულია

ბ) კოერციტიულია, ე.ი. აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{\|\bar{Y}\|_X \to \infty} \frac{\left\langle \bar{\mathrm{A}}(\bar{Y}), \bar{Y} \right\rangle}{\left\|\bar{Y}\right\|_X} = +\infty;$$

გ) წარმოადგენს ოპერატორს ნახევრად შემოსაზღვრული ვარიაციით, ე.ი. ნებისმიერ

$$\bar{Y}_1, \bar{Y}_2 \in X, \quad \left\|\bar{Y}_1\right\| \leq R, \left\|\bar{Y}_2\right\| \leq R$$

რომლისათვისაც სამართლიანია უტოლობა:

$\left\langle \bar{A}(\bar{Y}_1) - \bar{A}(\bar{Y}_2), \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 \right\rangle \geq -c(R; \left\| \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 \right\|_X')$, სადაც $\|\bullet\|_X'$ ნორმა კომპაქტურია $\|\bullet\|_X$ - სთან მიმართებით, ხოლო ფუნქცია c - უწყვეტია და ისეთია, რომ $c(\rho; t\tau)/t \to 0$ როცა $t \to 0$

დ) გააჩნია თვისება M : იქედან, რომ $\bar{Y}_n \to \bar{Y}$ $(\bar{Y}_n, \bar{Y} \in D(\bar{A}) \subset X$ სუსტად X - ში, $\bar{A}(\bar{Y}_n) \to \chi$ სუსტად X^* - ში და სრულდება $\limsup_{n\to\infty} \left\langle \bar{A}(\bar{Y}_n), \bar{Y}_n \right\rangle_X \leq \left\langle \chi, \bar{Y} \right\rangle_X$ გამომდინარეობს $\chi = \bar{A}(\bar{Y})$.

მოყვანილი ლემების საფუძველზე შეიძლება დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობა.

თეორემა 1: ვთქვათ (3)–(4) სასაზღვრო ამოცანების კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$a_i(x,y) \geq \lambda_1 > 0; \quad b_i(x,y) \geq \lambda_2 > 0; \quad a_i, \ b_i \in L_\infty(\Omega)(i = 1,2)$$

თითქმის ყველგან Ω არეში; მაშინ (8) განტოლება ამოხსნადია $\forall f \in X^*$ - თვის, ამონახსენთა

სიმრავლე ყოველი f - სათვის კომპაქტურად სუსტია და (3)+(4) ამოცანას აქვს $\bar{Y}$ ამონახსენი

რომელიც ეკუთვნის $X = \left[\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega) \right]^2$, $p \geq 5$. სივრცეს.

ნეიმანის ამოცანა.

ზემოთ განხილულ ამოცანაში ვთვლიდით, რომ Ω არეს საზღვარზე ცნობილი იყო $\theta(x,y)$ და $T(x,y)$ ფუნქციათა მნიშვნელობები (დირიხლეს ამოცანა). მეორეს მხრივ პრაქტიკაში, ტექნიკური მოსაზრებების გამო ყოველთვის არ არის შესაძლებელი ამის მიღწევა. სინამდვილეში ჩვენთვის ცნობილია გაზის ტემპერატურა მხოლოდ საზღვარზე $\Gamma_1 = \{0\} \times (0,l) : T_{\Gamma_1} \equiv T(0,y) = \varphi_1(y)$, სადაც ცხელი ჰაერი შედის დისპერსიულ შრეში და დისპერსიულ გარემოს $\Gamma_2 = (0,h) \times \{0\} : \theta|_{\Gamma_2} \equiv \theta(x,0) = \eta_3(x)$ საზღვარზე ტემპერატურის განაწილება. ყოველივე ამის გამო მიზანშეწონილია განვიხილოთ შერეული სასაზღვრო ამოცანა:

$$V_y \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(a_1 \frac{\partial \theta}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(a_2 \frac{\partial \theta}{\partial y}) = l_1 |T|^{2/3}(T - \theta) + \alpha(T^4 - \theta^4) \qquad (1)$$

$$W_x \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(b_1 \frac{\partial T}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(b_2 \frac{\partial T}{\partial y}) = l_1 |T|^{2/3}(\theta - T) + \alpha(\theta^4 - T^4)$$

$\Omega=(0,h)\times(0,l)$ არეში, სადაც $V_y, W_x, l_1, \alpha, a_i, b_i$ $(i=1,2)$ ისეთივე პარამეტრებია, როგორც დირიხლეს ამოცანაში გვქონდა. სასაზღვრო პირობებს $\partial\Omega$ საზღვარზე $\theta(x,y)$ და $T(x,y)$ ფუნქციებისათვის აქვს სახე:

$$T_{\Gamma_1}=T(0,y)=\varphi_1(y);\quad (k_1\frac{\partial T}{\partial n}+\alpha_1(T-T_c))|_{\gamma_1}=0;\quad \gamma_1=\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4; \tag{2}$$

$$\theta_{\Gamma_2}=\theta(x,0)=\eta_3(x);\quad (k_2\frac{\partial \theta}{\partial n}+\alpha_2(\theta-T_c))|_{\gamma_2}=0;\quad \gamma_2=\Gamma_1\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4; \tag{3}$$

სადაც Γ_i ისეთია, რომ $\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4;\ \Gamma_i\cap\Gamma_2=\varnothing,\ i\neq j;\ i,j=1,2,3,4.$

მდგომარეობაზე ისეთივე შეზღუდვებია, როგორც დირიხლეს ამოცანის განხილვისას. ვაჩვენოთ დასმული (1)–(3) ამოცანის ამოხსნადობა და ვაჩვენოთ ფუნქციათა რომელ კლასს ეკუთვნის $\overline{Y}=\{\overline{\theta}(x,y),\overline{T}(x,y)\}$ ამონახსნი. ვთქვათ საკმარისად რეგულარული $\overline{\theta}(x,y)$ და $\overline{T}(x,y)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობებს: $\hat{T}|_{\Gamma_1}=T|_{\Gamma};\ \hat{\theta}|_{\Gamma_2}=\theta|_{\Gamma_2}$. მაშინ $\overline{T}=T-\hat{T};\ \overline{\theta}=\theta-\hat{\theta}$ ფუნქციათათვის (1)–(3) სასაზღვრო ამოცანა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$V_y\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}(a_1\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(a_2\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial y})=l_1\left|\overline{T}+\hat{T}\right|^{2/3}((\overline{T}+\hat{T})-(\overline{\theta}+\hat{\theta}))+\alpha((\overline{T}+\hat{T})^4-(\overline{\theta}+\hat{\theta})^4)-$$
$$-(V_y\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}(a_1\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(a_2\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial y}));$$
$$W_x\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(b_1\frac{\partial\overline{T}}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(b_2\frac{\partial\overline{T}}{\partial y})=l_1\left|\overline{T}+\hat{T}\right|^{2/3}((\overline{\theta}+\hat{\theta})-(\overline{T}+\hat{T}))+\alpha((\overline{\theta}+\hat{\theta})^4-(\overline{T}+\hat{T})^4)-$$
$$-(W_x\frac{\partial\hat{T}}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(b_1\frac{\partial\hat{T}}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(b_2\frac{\partial\hat{T}}{\partial y}));$$

შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით

$$\overline{T}_{\Gamma_1}=0;\quad (k_1\frac{\partial(\overline{T}+\hat{T})}{\partial n}+\alpha_1(\overline{T}+\hat{T}-T_c))|_{\gamma_1}=0; \tag{5}$$

$$\overline{\theta}|_{\Gamma_2}=0;\quad (k_2\frac{\partial(\overline{\theta}+\hat{\theta})}{\partial n}+\alpha_2(\overline{\theta}+\theta-T_c))|_{\gamma_2}=0; \tag{6}$$

და შეზღუდვებით მდგომარეობაზე $\left|grad(\overline{\theta}(x,y)+\hat{\theta}(x,y))\right|\le k_3$.

(4)–(6) ამოცანის განზოგადოებული ამონახსნი ვუწოდოთ $\overline{Y}=\{\overline{\theta}(x,y),\overline{T}(x,y)\}$ ფუნქციას $X=\overset{0}{W}{}_2^{1\,\Gamma_2}(\Omega)\cap L_p(\Omega)\times\overset{0}{W}{}_2^{1\,\Gamma_1}(\Omega)\cap L_p(\Omega),\ p\ge 5$ სივრციდან ,რომელიც $\forall\mu\in X$ – თვის აკმაყოფილებს ინტეგრალურ იგივეობას

$$\int_\Omega (V_y \frac{\partial \theta}{\partial y}\mu_1 + W_x \frac{\partial T}{\partial x}\mu_2)dxdy + \int_\Omega (a_1 \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial \mu_1}{\partial y} + b_1 \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial \mu_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial \mu_2}{\partial y})dxdy +$$

$$+ \int_0^l \alpha_1 \overline{T}(x,y)\mu_2(x,y)|_{x=h}\, dy + \int_0^h \alpha_2 \overline{\theta}(x,y)\mu_1(x,y)|_{y=l}\, dx =$$

$$= -l_1 \int_\Omega \left|\overline{T} + \hat{T}\right|^{2/3}((\overline{T} + \hat{T}) - (\overline{\theta} + \hat{\theta}))(\mu_2 - \mu_1)dxdy - \quad (7)$$

$$- \alpha \int_\Omega ((\overline{T} + \hat{T})^4 - (\overline{\theta} + \hat{\theta})^4)(\mu_2 - \mu_1)dxdy + \int_\Omega f^* \mu dxdy - \int_0^h (\alpha_2(\hat{\theta} - T_c) + a_2 \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y})\mu_1|_{y=l}\, dx -$$

$$- \int_0^l (\alpha_1(\hat{T} - T_c) + b_1 \frac{\partial \hat{T}}{\partial x})\mu_2|_{x=h}\, dy$$

სადაც f^* –ით აღნიშნულია ელემენტი X^* დან, რომელიც განსაზღვრულია იგივეობით:

$$\int_\Omega f^* \mu dxdy = \int_\Omega (V_y \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y}\mu_1 + W_x \frac{\partial \hat{T}}{\partial x}\mu_2)dxdy + \int_\Omega (a_1 \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x}\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y}\frac{\partial \mu_1}{\partial y} + b_1 \frac{\partial \hat{T}}{\partial x}\frac{\partial \mu_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \hat{T}}{\partial y}\frac{\partial \mu_2}{\partial y})dxdy.$$

(7) თანაფარდობას აზრი აქვს, როცა $\forall \overline{\theta}(x,y), \overline{T}(x,y), \ \mu_1(x,y), \ \mu_2(x,y) \in X$, სადაც $\overset{0}{W}{}_2^{1\,\Gamma_i}(\Omega)$ ჩაკეტვაა $W_2^1(\Omega)$ გლუვ ფუნქციათა კლასში, რომლებიც ნულია $\Gamma_i \ (i = 1,2)$ საზღვარზე. გარდავქმნათ (7) გამოსახულება შემდეგ სახემდე:

$$\langle A(\overline{Y}), \mu \rangle = \langle F(\overline{Y} + \hat{Y}), \mu \rangle - \langle A(\overline{Y}), \mu \rangle + \int_0^h (\alpha_2 T_c - a_2 \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial n})\mu_1|_{y=l}\, dx + \int_0^l (\alpha_1 T_c - b_1 \frac{\partial \hat{T}}{\partial n})\mu_2|_{x=h}\, dy,$$

სადაც A ოპერატორი განისაზღვრება შემდეგი ფორმით

$$\langle A(\overline{Y}), \mu \rangle = \int_\Omega \left(V_y \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}\mu_1 + W_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\mu_2 \right) dxdy +$$

$$+ \int_\Omega \left(a_1 \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x}\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \overline{T}}{\partial y}\frac{\partial \mu_1}{\partial y} + b_1 \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x}\frac{\partial \mu_2}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \overline{T}}{\partial y}\frac{\partial \mu_2}{\partial y} \right) dxdy + \quad (8)$$

$$+ \int_0^h \alpha_2 \theta(x,y)\mu_1(x,y)|_{y=l}\, dx + \int_0^l \alpha_1 \overline{T}(x,y)\mu_2(x,y)|_{x=h}\, dy$$

ხოლო $F(\overline{Y} + \hat{Y}) = \overline{F}(\overline{Y})$ ოპერატორი კი ფორმით:

$$\langle \overline{F}(\overline{Y}), \mu \rangle = -l_1 \int_\Omega \left|\overline{T} + \hat{T}\right|^{2/3}((\overline{T} + \hat{T}) - (\overline{\theta} + \hat{\theta}))(\mu_2 - \mu_1)dxdy - \quad (9)$$

$$- \alpha \int_\Omega ((\overline{T} + \hat{T})^4 - (\overline{\theta} + \hat{\theta})^4)(\mu_2 - \mu_1)dxdy$$

სამართლიანია შემდეგი ლემა.

ლემა 1. A ოპერატორი განსაზღვრული (8) ფორმით , წრფივ შემოზღვრულ კოერციტიულ ოპერატორს წარმოადგენს $X_1 = \left[W_2^1(\Omega)\right]^2$ –დან X_1^*–ში. ხოლო (9) ფორმით განსაზღვრული $\overline{F}: X_2 \to X_2^*$ ოპერატორი $X_2 = \left[L_p(\Omega)\right]^2$, $X_2^* = \left[L_q(\Omega)\right]^2$ არის შემოსაზღვრული და დემიუწყვეტი, $1/p + 1/q = 1$.

დამტკიცება წარმოებს იგივე წესით, როგორც დირიხლეს ამოცანის შემთხვევაში. მხოლოდ ვაჩვენოთ, რომ A კოერციტიული ოპერატორია:

$$\langle A(\overline{Y}), \overline{Y}\rangle = \int_\Omega (V_y \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}\overline{\theta} + W_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\overline{T})dxdy + \int_\Omega (a_1\left(\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x}\right)^2 + a_2\left(\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}\right)^2 + b_1\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\right)^2 + b_2\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial y}\right)^2)dxdy +$$
$$\int_0^h \alpha_2 \overline{\theta}^2(x,y)|_{y=l}\, dx + \int_0^l \alpha_1 \overline{T}^2(x,y)|_{x=h}\, dy.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს პირველი შესაკრების ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ: $\int_\Omega V_y \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial y}\overline{\theta}dxdy = \frac{V_y}{2}\int_0^h \overline{\theta}^2(x,y)|_{y=l}dx$; $\int_\Omega W_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial x}\overline{T}dxdy = \frac{W_x}{2}\int_0^l \overline{T}^2(x,y)|_{x=h}dy$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $m_1 = \min\left\{\inf_\Omega a_i(x,y),\ \inf_\Omega b_i(x,y)\right\},\ i = 1,\ 2;\ \ m_2 = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

მაშინ

$$\langle A(\overline{Y}), \overline{Y}\rangle \ge \frac{V_y}{2}\int_0^h \overline{\theta}^2(x,y)|_{y=l}dx + \frac{W_x}{2}\int_0^l \overline{T}^2(x,y)|_{x=h}dy + m_1\int_\Omega (\left(\frac{\partial \overline{Y}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{Y}}{\partial y}\right)^2)dxdy +$$
$$m_2(\int_0^h \overline{\theta}^2(x,y)|_{y=l}dx + \int_0^l \overline{T}^2(x,y)|_{x=h}dy) \ge (\frac{V_y}{2} + m_2)\left\|\overline{\theta}\right\|_1^2 + (\frac{W_x}{2} + m_2)\left\|\overline{T}\right\|_1^2 + m_1\left\|\overline{Y}\right\|^2,$$

სადაც $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{X_1}$; $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_{L_2(\partial\Omega)}$ და რადგან პარამეტრები V_y, W_x, m_1, m_2 დადებითებია, მივიღებთ $\langle A(\overline{Y}), \overline{Y}\rangle \ge m_1\left\|\overline{Y}\right\|^2$. შესაბამისად A კოერციტიული ოპერატორია. ლემა 1 დამტკიცებულია.

მე- (7)ტოლობა გადავწეროთ ოპერატორული განტოლების სახით:

$$A^*(\overline{Y}) = f,\ \ f \in X^* \qquad (10)$$

X სივრცეში, სადაც $A^*(\overline{Y}) = A(\overline{Y}) - \overline{F}(\overline{Y})$;

$$\langle f, \mu\rangle = -\langle A(\hat{Y}), \mu\rangle + \int_0^h (\alpha_2 T_c - a_2\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial n})\mu_1|_{y=l}\, dx + \int_0^l (\alpha_1 T_c - b_1\frac{\partial \hat{T}}{\partial n})\mu_2|_{x=h}\, dy.$$

ლემა 2. ოპერატორი $A^*: X \to X^*$ $X = {}_{0}\overset{\circ}{W}{}_{2}^{1,\Gamma_2}(\Omega) \cap L_p(\Omega) \times {}_{0}\overset{\circ}{W}{}_{2}^{1,\Gamma_1}(\Omega) \cap L_p(\Omega)$, $p \geq 5$ რომელიც წარმოქმნილია (4)–(6) ამოცანისაგან არის: ა)შემოსაზღვრული; ბ) კოერციტიული; გ)ოპერატორი ნახევრად შემოსაზღვრული ვარიაციით; დ) აქვს (M) თვისება.

დამტკიცება ა), ბ), დ) პუნქტებისა ხდება იგივე წესით, როგორც დირიხლეს ამოცანის შემთხვევაში. ვაჩვენოთ, რომ A^* არის ოპერატორი ნახევრადშემოსაზღვრული ვარიაციით.

A^* ოპერატორის განმარტებიდან გამოდის, რომ

$$\langle A^*(\overline{Y}_1) - A^*(\overline{Y}_2), \overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 \rangle = \langle A(\overline{Y}_1) - A(\overline{Y}_2), \overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 \rangle - \langle \overline{F}(\overline{Y}_1) - \overline{F}(\overline{Y}_2), \overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 \rangle \quad (11)$$

თუ ოპერატორის თვისებას გამოვიყენებთ მივიღებთ:

$$\langle A(\overline{Y}_1) - A(\overline{Y}_2),\ \overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 \rangle = \langle A(\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2),\ \overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 \rangle \geq \frac{V_y}{2} \int_0^h (\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2)^2 \,|_{y=l}\, dx + \frac{W_x}{2} \int_0^l (\overline{T}_1 - \overline{T}_2)\,|_{x=h} dy +$$

$$m_1 \iint_\Omega \left(\left(\frac{\partial(\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\overline{T}_1 - \overline{T}_2)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\overline{T}_1 - \overline{T}_2)}{\partial y} \right)^2 \right) dxdy +$$

$$m_2 \left(\int_0^h (\overline{\theta}_1 - \overline{\theta}_2)^2 \,|_{y=l} dx + \int_0^l (\overline{T}_1 - \overline{T}_2)^2 \,|_{x=h} dy \right) \geq 0.$$

(11) –ის მარჯვენა მხარეს მეორე შესაკრებისათვის სამართლიანია შეფასება, რომელიც ანალოგიურია დირიხლეს ამოცანის შემთხვევისა:

$$-\langle \overline{F}(\overline{Y}_1) - \overline{F}(\overline{Y}_2), \overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 \rangle \geq -c(R; \|\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2\|_X)',$$

სადაც $\|\cdot\|_X' = \|\cdot\|_{[L_p(\Omega)]^5}$, $p \geq 5$ კომპაქტურია $\|\cdot\|_X$ ნორმასთან. ლემა2 დამტკიცებულია.

სამართლიანია თეორემა.

თეორემა 1. ვთქვათ (4)–(6) სასაზღვრო ამოცანის კოეფიციენტები $a_i(x,y) \geq \lambda_1 >; b_i(x,y) \geq \lambda_2 > 0$ თითქმის ყველგან Ω–ში; $a_i, b_i \in L_\infty(\Omega)$; $i = 1, 2$. მაშინ (10) განტოლება ამოხსნადია $\forall f \in X^*$–თვის, მისი ამონახსნთა სიმრავლე ყოველი f–თვის სუსტად კომპაქტურია, ხოლო (4)–(6) ამოცანას აქვს ამონახსნი $\overline{Y}$, რომელიც ეკუთვნის სივრცეს $X = {}_{0}\overset{\circ}{W}{}_{2}^{1,\Gamma_2}(\Omega) \cap L_p(\Omega) \times {}_{0}\overset{\circ}{W}{}_{2}^{1,\Gamma_1}(\Omega) \cap L_p(\Omega)$, $p \geq 5$.

თეორემა მტკიცდება დირიხლეს ამოცანაში განხილული თეორემის ანალოგიურად.

ლიტერატურა

1.**Temuri A. Modebadze,Valeriy S.Melnik, Grigol A.Sokhadze**-Optimal Control of Nonlinear Dynamic Heat Exchange Processes in Disperse Layer with Heat Radiation. 10.1615/JAutomatInfScien.v39.i9.40 2007.40-55 pages.

2.Иваненко В.И., Мельник В.С., Вариационные методы в задачах управления для систем распределенными параметрами . Киев. Наукова думка , 1988.-287ст.

Optimal Control of Non-Linear Heat Exchange in a Dispersion Medium

Modebadze Temuri,Gogoladze Nino

Akaki Tsereteli State University, Georgia

In work the operational method of solving the systemsof differential equations corresponding to the heat exchange for Neiman's problem is considered. Influence of light radiation on drying process is provided.Respectively the discretion oflight radiation changes the right side of system of the equations that causes change of a class ofdecision functions.Existence of the solution is proved and is shown to which class of function this solution is belongs.Givenproblem and the decision method can be used also in case of the liquid heat-carrier which will be considered in the following works.

ერთგვაროვანი თხელი ფირფიტის ოპტიმალური დაჭრის მათემატიკური მოდელი

კუთხაშვილი ქ.ვ.

საქართველოს უნივერსიტეტი

kkutkhashvili@yahoo.com

წარმოების პროცესის რენტაბელობა უმნიშვნელოვანესი საკითხია. ამ მიზნით რესურსების ეკონომიის საკითხს განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა. ხშირად ასეთ რესურსს წარმოადგენს ძვირფასი ლითონი, ქაღალდი, მინა, ქსოვილი და სხვა. რესურსის ეკონომია კი დამოკიდებულია მათ ოპტიმალურ დაჭრაზე და ნარჩენების მინიმიზაციაზე. ასეთი ამოცანების მათემატიკური მოდელები მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანებს განეკუთვნება და NP სირთულისაა. ნაშრომში განხილულია მართკუთხოვანი თხელი ფირფიტის დაჭრის ერთერთი მათემატიკური მოდელი და შემოთავაზებულია მისი გადაჭრის ალგორითმი.

საკვანძო სიტყვები: ოპტიმალური დაჭრა, NP სირთულის ამოცანები, ოპტიმალური ჩალაგება.

შესავალი

საწარმოთა ეფექტურობის ამაღლებისათვის დროის, ენერგეტიკის, სათბობის, ლითონისა და სხვა რესურსების ეკონომიას ერთერთი უმნიშვნელოვანესი საკითხია. ამ მიზნის მიღწევა როგორც წესი წარმოების სწორი ორგანიზაციითა და მატერიალური რესურსების ეკონომიით არის შესაძლებელი. მატერიალური რესურსების ეკონომია ხშირად მათ ოპტიმალურ დაჭრას უკავშირდება. ნარჩენების ოპტიმიზაცია ორი გზით მიიღწევა: დაჭრის ტექნოლოგიის დახვეწით და დაჭრის ორგანიზებით. დაჭრის ორგანიზება გულისხმობს დაჭრის ოპერაციების სწორ თანმიმდევრობას. ამისათვის საჭიროა აიგოს მათემატიკური მოდელი და ეფექტური ალგორითმი, რომელიც მოგვცემდა დაჭრის რუქას. ყველა მათემატიკური მოდელი, რომელიც ითვალისწინებს როგორც დაჭრის ტექნოლოგიას, ასევე მიზნებს, განეკუთვნება მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანებს და შესაბამისი ალგორითმები ეფექტურობის თვალსაზრისით NP სირთულისაა. სირთულე ძირითადად გამოწვეულია სამუშაოთა დიდი მასშტაბებით, დიდი განზომილებებით ან დაჭრის ვარიანტების მრავალრიცხოვნობით. დაჭრის მიზანი შეიძლება იყოს რაც შეიძლება მინიმალური ნარჩენი ან ისეთი ნაჭენების მიღება, რომელიც შეიძლება შედარებით პატარა ზომის დეტალებისათვის იყოს გამოყენებული. ტექნოლოგიურად დაჭრის სხვადასხვა მეთოდი არსებობს, როგორიცაა დაშტამბვის, გილიოტინისებური კვეთის ანუ მთელ სიგრძეზე კვეთის მეთოდი და სხვა. მათემატიკური მოდელების საშუალებით იქმნება მათემატიკური მეთოდები საუკეთესო გადაწყვეტილებისა და პრაქტიკული რეკომენდაციების მისაღებად.

მათემატიკური მოდელი და ალგორითმი

განვიხილოთ მართკუთხოვანი დაჭრის, ე.წ. გილიოტინისებური დაჭრის, ამოცანა დაბალსერიული წარმოების პირობებში. მისი სახელწოდება დაჭრის ტექნოლოგიიდან გამომდინარეობს, რომელსაც ხშირად საავიაციო, სატრანსპორტო, სოფლის მეურნეობისა და სატოფაცხოვრებო ტექნიკის წარმოებებში იყენებენ.

ამოცანა მდომარეობს შემდეგში: მოცემული გვაქვს მართკუთხედი, რომლის ზომებია

L და W. ამასთან, L ≥ W. საჭიროა ამ მართკუთხედის დაჭრა ერთი სახის უფრო პატარა მართკუთხედებად, რომელთა ზომებია a, b და $a \geq b$. დაჭრა ისე უნდა განხორციელდეს, რომ დაჩენილი ფართობი იყოს მინიმალური. საჭრისი ისეთია, რომ გაჭრა შეუძლია მოცემული მართკუთხედის რომელიმე გვერდის პარალელურად მთელ სიგრძეზე.

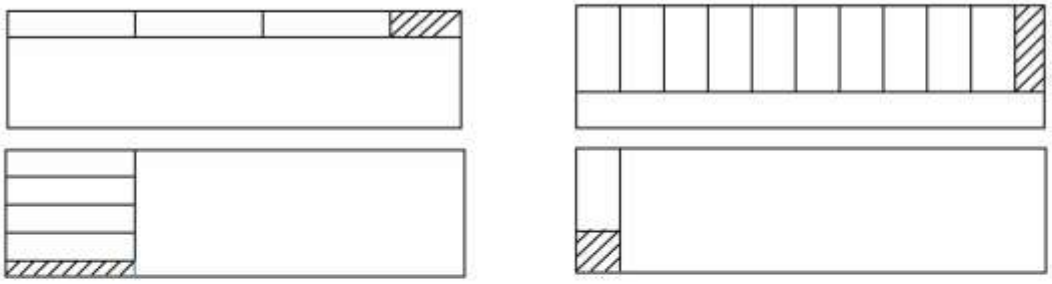
ნაშრომში შემოთავაზებული იქნება შტოებისა და საზღვრების ტიპის ალგორითმი. ვინაიდან ალგორითმი იტერაციულ მეთოდს წარმოადგენს, ამიტომ შემოვიღოთ იტერაციების მთვლელი k. დასაწყისში k=1 და მიზნის ფუნქციის საწყისი მნიშვნელობაა $\rho = 0$. ვიგულისხმოთ, რომ დასაჭრელი მართკუთხედის ზომები დასასწყისში $L^{(k)} = L$ და $W^{(k)} = W$. ამასთან, $L^{(k)} \geq \min(a,b)$ და $W^{(k)} \geq \min(a,b)$. ამოვარჩიოთ დასაჭრელი მართკუთხედის ზედა მარცხენა კუთხე და დავიწყოთ ვარიანტების ხის აგება: გვაქვს გაჭრის 4 ვარიანტი:

1. ჩამოვჭრათ b სიგანის და $L^{(k)}$ სიგრძის ზოლი ჰორიზონტალური გაჭრით, მოვახდინოთ მიღებული ზოლის ფრაგმენტაცია a სიგრძეებად. ამ შემთხვევაში მიიღება $\left[\frac{L^{(k)}}{a}\right]$ რაოდენობის დეტალი, ხოლო დასაჭრელი დარჩება $S_1^{(k)} = L^{(k)} \times (W^{(k)} - b)$ ფართობი. ნარჩენი ფართობი ტოლი იქნება $\Delta_1^{(k)} = b \times (L^{(k)} - \left[\frac{L^{(k)}}{a}\right] \times a)$. ნახ.1 (1)

2. ჩამოვჭრათ a სიგანის და $L^{(k)}$ სიგრძის ზოლი ჰორიზონტალური გაჭრით, მოვახდინოთ მიღებული ზოლის ფრაგმენტაცია b სიგრძეებად. ამ შემთხვევაში მიიღება $\left[\frac{L^{(k)}}{b}\right]$ რაოდენობის დეტალი, ხოლო დასაჭრელი დარჩება $S_2^{(k)} = L^{(k)} \times (W^{(k)} - a)$ ფართობი. ნარჩენი ფართობი ტოლი იქნება $\Delta_2^{(k)} = a \times (L^{(k)} - \left[\frac{L^{(k)}}{b}\right] \times b)$. ნახ.2 (2)

3. ჩამოვჭრათ a სიგანის და $W^{(k)}$ სიგრძის ზოლი ვერტიკალური გაჭრით, მოვახდინოთ მიღებული ზოლის ფრაგმენტაცია b სიგრძეებად. ამ შემთხვევაში მიიღება $\left[\frac{W^{(k)}}{b}\right]$ რაოდენობის დეტალი, ხოლო დასაჭრელი დარჩება $S_3^{(k)} = W^{(k)} \times (L^{(k)} - a)$ ფართობი. ნარჩენი ფართობი ტოლი იქნება $\Delta_3^{(k)} = a \times (W^{(k)} - \left[\frac{W^{(k)}}{b}\right] \times b)$. ნახ.3 (3)

4. ჩამოვჭრათ b სიგანის და $W^{(k)}$ სიგრძის ზოლი ვერტიკალური გაჭრით, მოვახდინოთ მიღებული ზოლის ფრაგმენტაცია a სიგრძეებად. ამ შემთხვევაში მიიღება $\left[\frac{W^{(k)}}{a}\right]$ რაოდენობის დეტალი, ხოლო დასაჭრელი დარჩება $S_4^{(k)} = W^{(k)} \times (L^{(k)} - b)$ ფართობი. ნარჩენი ფართობი ტოლი იქნება $\Delta_4^{(k)} = b \times (W^{(k)} - \left[\frac{W^{(k)}}{a}\right] \times a)$. ნახ.4 (4)



ამოვარჩიოთ სვლა შემდეგი წესის მიხედვით: ვიპოვოთ და მოვახდინოთ გაჭრა ისეთი i -ს მიხედვით, რომლისთვისაც $\lambda^{(k)} = \min_{1 \leq i \leq 4} \Delta_i^{(k)}$. დავიმახსოვროთ ეს ნომერი $i^{(k)} = i$. $\rho = \rho + \Delta_{i^{(k)}}^{(k)}$. შემოვიღოთ სიმრავლე $I^{(k)}$, რომლის ელემენტები არიან j ინდექსები დალაგებული შემდეგი წესის მიხედვით $j \in I^{(k)} \supset \{1,2,3,4\}$, $j \neq i^{(k)}$ $\Delta_{j_1}^{(k)} \leq \Delta_{j_2}^{(k)} \leq \ldots$. შევამციროთ მოცემული მართკუთხედის ზომა:

$W^{(k)} = W^{(k-1)} - b$, *თუ* $i^{(k)} = 1$; $W^{(k)} = W^{(k-1)} - a$, *თუ* $i^{(k)} = 2$;

$L^{(k)} = L^{(k-1)} - a$, *თუ* $i^{(k)} = 3$; $L^{(k)} = L^{(k-1)} - b$, *თუ* $i^{(k)} = 4$. (5)

შევამოწმოთ პირობები: $L^{(k)} \geq \min(a,b) \wedge W^{(k)} \geq \min(a,b)$. თუ ორივე უტოლობაერთდროულად სრულდება, მაშინ გავზარდოთ k=k+1 და გადავიდეთ მართკუთხედისგაჭრის ზემოთ მოყვანილი 4 ვარიანტის განხილვაზე.

თუ $L^{(k)} < \min(a,b)$ ან $W^{(k)} < \min(a,b)$, (6)

მაშინ $\rho = \rho + L^{(k)} \times W^{(k)}$, ხოლო თუ $\rho < a \times b$, მაშინ იტერაციული პროცესი დამთავრებულია. იტერაციების რაოდენობა იქნება k, ხოლო ოპტიმალური დასაჭრელი გეგმა განისაზღვრება ვექტორით $\omega = \{i^{(1)}, i^{(2)}, \ldots, i^{(k)}\}$.

თუ (6) უტოლობებიდან ერთერთი მაინც სრულდება, $\rho > a \times b$ და $I^{(k)}$ სიმრავლეებიდან ერთი მაინც არ არის ცარიელი, მაშინ დავიმახსოვროთ $\rho 1 = \rho$ და გადავიდეთ უკუსვლის პროცედურებზე: ბოლო $I^{(k)}$ სიმრავლიდან ამოვშალოთ პირველი ელემენტი j_1, შევცვალოთ ინდექსი $i^{(k)} = j_1$ და გაჭრა მოვახდინოთ j_1 ვარიანტის მიხედვით. ამ შემთხვევაში გადავდივართ (5) ფორმულებზე და ვაგრძელებთ ρ მნიშვნელობის გამოთვლას ისევე, როგორც პირდაპირი პროცესის დროს. თუ აღმოჩნდა, რომ $\rho 1 > \rho$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში, როცა $\rho 1 \leq \rho$, მაშინ ρ მნიშვნელობას არ ვცვლით და $I^{(k)}$ სიმრავლიდან ამოვშლით მომდევნო j_2 ელემენტს), მაშინ შევცვლით მნიშვნელობას $\rho 1 = \rho$, ω ვექტორის $i^{(k)}$ ელემენტი შეიცვლება j_1 ელემენტით. ამის შემდეგ $I^{(k)}$ სიმრავლიდან ამოვშალოთ მომდევნო j_2 ელემენტი, მოვახდინოთ გაჭრა j_2 ვარიანტის მიხედვით და კვლავ გადავიდეთ (5) ფორმულებზე. ეს პროცესი უნდა გაგრძელდეს მანამ, სანამ $I^{(k)}$ სიმრავლე ცარიელი არ გახდება. თუ (6) პირობები არ შესრულდა და იტერაციული პროცესი არ დასრულდა, მაშინ შევცვალოთ $k = k - 2$, ანუ გადავიდეთ ვარიანტების ხის კიდევ ერთი საფეხურით ზევით და გავიმეოროთ იგივე პროცესი.

აღწერილი ალგორითმი სირთულე $O(k^3)$ რიგისაა.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. 3. Btaiewicz, M. Drozdowski, B. Soniewicki, R. Walkowiak "Two-Dimensional Cutting Problem", International Institute for Applied Systems Analysis A-2361 Laxenburg Austria. 1991.
2. Dilek Tuzun Aksu, Bahadır Durak "A Dynamic Programming Algorithm for the Online Cutting Problem with Defects and Quality Grades". IFAC-PapersOnLine 49-12 (2016) 017–022.
3. Стрелец Е.С. "Экономия материальных затрат предприятия сиспользованием метода оптимального раскроя материала". Экономика и экономические науки. 2016

Mathematical model of optimal cutting of a homogeneous thin plate

Kutkhashvili K.V
The University of Georgia
kutkhashvili@yahoo.com

The profitability of the production process is of paramount importance. For this purpose, special attention is paid to the problem of saving resources. Often such resources are precious metals, paper, glass, fabric and much more. Savings of resources depend on the optimal reduction and minimization of waste. Mathematical models of such problems are related to integer programming problems and NP-complicated. The paper deals with the problem of cutting a rectangular thin plate into rectangular pieces and proposing an algorithm for solving it.

დრეკად–ბლანტი სხეულების თვისებების აღმწერი ოთხ ელემენტიანი განზოგადებული მოდელების შედარებითი ანალიზი

ბ. აბესაძე
საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტი
ქეთევან დედოფლის გამზირი №16, თბილისი, 0103

გადმოცემულია, დრეკად-ბლანტი სხეულების თვისებების აღმწერი, ოთხ ელემენტიანი განზოგადებული, ორი განსხვავებული ტიპის მოდელის შედარებითი ანალიზი. შეგუნილია ძაბვის, დეფორმაციის და დროის მაკავშირებელი რეოლოგიური დამოკიდებულებები. შესწავლილია დეფორმაციის და ძაბვის დროში განვითარება, შესაბამისად, მუდმივი ძაბვისა და მუდმივი დეფორმაციის პირობებში. თითოეული მოდელისათვის მიღებული შედეგები შედარებულია ერთმანეთთან და დრეკად- ბლანტი სხეულების ექსპერიმენტული გამოცდის შედეგად მიღებულ თვისობრივ მონაცემებთან. გამოტანილია დასკვნები თითოეული ტიპის მოდელის უპირატესობისა და ნაკლოვანებების შესახებ.

საკვანძო სიტყვები: *განზოგადებული მოდელები, კომპოზიტი, დეფორმაცია, თვისება, ანალიზი.*

1. შესავალი

სამანქანათმშენებლო მიმართულებით, განსაკუთრებით საავიაციო ტექნიკაში, ფართო გამოყენება აქვს კომპოზიციურ მასალებს (მაგ. მინაბოჭკოვანი მატრიცა და ებონიტის შემავსებელი). ასეთი სხეულების თვისებები განსხვავდება ჩვეულებრივი მეტალების თვისებებისგან. მათ ახასიათებს დეფორმაციები, რომლებიც გარდა დატვირთვებისა, დროზეც არის დამოკიდებული. ასეთ მასალებს ერთდროულად ახასიათებს, როგორც დრეკადი ასევე ბლანტი სხეულების თვისებები და შესაბამისად მარტივი მათემატიკური დამოკიდებულებებიც, რომლებიც აღწერს ამ დეფორმაციებს $\sigma = E\varepsilon$ (ჰუკის კანონი) და $\sigma = \eta\frac{d\varepsilon}{dt}$ (ნიუტონის კანონი) აღარ არის სამართლიანი. ასეთ სხეულებს ზოგადად დრეკად–ბლანტი სხეულები შეიძლება ვუწოდოთ. მათი თვისებების აღსაწერად შეიძლება გამოვიყენოთ ე.წ. მოდელები, რომლებიც წარმოადგენს წმინდად დრეკადი და პლასტიკური თვისებების სხეულების გარკვეულ კომბინაციებს. [1, 2, 3] ლიტერატურაში აღწერილია შედარებით მარტივი ორ ელემენტიანი მაქსველის და კელვინ–ფოიხტის მოდელები, ასევე განზოგადებული სამ ელემენტიანი მოდელების ყველა შესაძლო ვარიანტები.

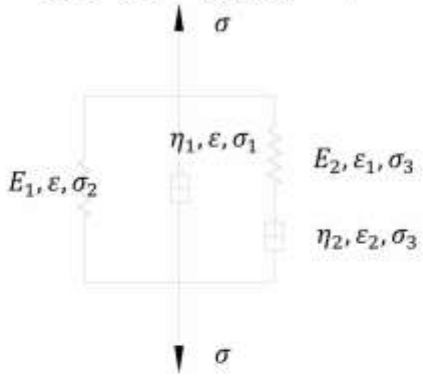
მოდელების თეორიის შემდგომი განვითარება დაკავშირებულია მათში ელემენტების რაოდენობის ზრდაში. ოთხ ელემენტიანი მოდელის მრავალი კომბინაციის შედგენა არის შესაძლებელი. გამოვყოთ მხოლოდ ორი დრეკადი და ორი ბლანტი ელემენტის შემცველი სახეობები. მათი კლასიფიკაცია შესაძლებელია მოხდეს ორი ძირითადი ხაზის მიხედვით: 1) მოდელი, რომელიც შეიცავს უწყვეტად მიმდევრობით შეერთებულ ან შემკვრელ დრეკად ელემენტებს და 2) მოდელი შეიცავს ერთ მაინც თავისუფალ ბლანტ ელემენტს. მეორე ხაზის მოდელების თვისებები გადმოცემულია [2, 3]-ში. მოცემული თემის ფარგლებში დაწვრილებით განვიხილავთ.

2. ძირითადი ნაწილი

აღნიშნული სახის ოთხ ელემენტიანი მოდელების მრავალი კომბინაციიდან შევარჩიოთ კლასიფიკაციის 1) და 2) ხაზის მოდელების ერთი კომბინაცია და მოვახდინოთ მათი თვისებების შედარებითი ანალიზი. ასეთ შემთხვევებად

სიმბოლურად ავირჩიოთ პარალელურად და მიმდევრობით შეერთებული მაქსველისა და კელვინ-ფოიხტის ორ ელემენტიანი მოდელები.

1. ოთხ ელემენტიანი მოდელი კლასიფიკაციის 1) ხაზის მიხედვით (ნახ. 1):



ნახ. 1 ოთხ ელემენტიანი მოდელი შემკვრელი დრეკადი ელემენტით

თითოეული ელემენტისათვის უნდა დაიწეროს ძაბვისა და დეფორმაციის მაკავშირებელი დამოკიდებულება (ჰუკის კანონი ან ნიუტონის კანონი), ასევე საერთო ძაბვისა და დეფორმაციის გამომსახველი განტოლებები. ინდექსიანი პარამეტრების გამორიცხვის შემდეგ მიიღება ძაბვისა და დეფორმაციის მაკავშირებელი დიფერენციალური დამოკიდებულება (რეოლოგიური განტოლება), რომელსაც მოცემულ შემთხვევაში აქვს სახე:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{1}{\eta_1}\frac{d\sigma}{dt} - \frac{(E_1+E_2)\eta_2+E_2\eta_1}{\eta_1\eta_2}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_2}{\eta_1\eta_2}\sigma - \frac{E_1E_2}{\eta_1\eta_2}\varepsilon. \quad (1)$$

ნელი და სწრაფი დეფორმაციის განხილვისას შესაძლებელია შესაბამისად წარმოებულების და თავისუფალი წევრების უკუგდება. ასეთ შემთხვევაში მიიღება მარტივი დამოკიდებულებები: $\sigma = E\varepsilon$ ნელი დეფორმაციისას და $\dot{\sigma} = H\dot{\varepsilon}$ სწრაფი დეფორმაციისას. (1)-ის გათვალისწინებით დრეკადობის ხანგრძლივი და მყისი მოდულებისთვის მივიღებთ:

$$E = E_1 \text{ და } H = \frac{(E_1+E_2)\eta_2+E_2\eta_1}{\eta_2}. \text{ დამატებითი აღნიშვნები: } n = \frac{\eta_2}{E_1} \text{ და } \eta = \eta_1. \quad (2)$$

(2)-ის გათვალისწინებით (1) მიიღებს სახეს:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \frac{1}{\eta}\frac{d\sigma}{dt} - \frac{H}{\eta}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{\eta n}\sigma - \frac{E}{\eta n}\varepsilon. \quad (3)$$

(3) განტოლების ზოგადი ამოხსნა ვერ ხერხდება. კერძო შემთხვევებში, როგორიცაა მუდმივი დატვირთვის (ცოცვადობა) და მუდმივი დეფორმაციის (რელაქსაცია) დროს შესაძლებელია ზუსტი ამონახსნების მიღება. განვიხილოთ ეს შემთხვევები:

ა) $\sigma = \sigma_c = const$ (ცოცვადობა). (3) მიიღებს სახეს:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{H}{\eta}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E}{\eta n}\varepsilon = \frac{\sigma_c}{\eta n}, \quad (4)$$

რომლის ამონახსნი, როცა $t = 0$, მაშინ $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_c}{H}$ და $\dot{\varepsilon}(0) = \nu_0$ (დეფორმაციის საწყისი სიჩქარე), საწყისი პირობების გათვალისწინებით მოიცემა სახით:

$$\varepsilon(t) = \frac{\nu_0 - k_2\sigma_c\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{E}\right)}{k_1-k_2}e^{k_1 t} - \frac{\nu_0 - k_1\sigma_c\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{E}\right)}{k_1-k_2}e^{k_2 t} + \frac{\sigma_c}{E}, \quad (5)$$

სადაც $k_1 = \frac{-H+\sqrt{H^2-4E\eta/n}}{2\eta} < 0$ და $k_2 = \frac{-H-\sqrt{H^2-4E\eta/n}}{2\eta} < 0$ არის (4) გამოსახულების შესაბამისი მახასიათებელი განტოლების ამონახსნები.

თუ გარკვეული დროის შემდეგ მოვხსნით დატვირთვას, მაშინ სისტემა მყისიერად ახლებურად ფორმირდება, დეფორმაციის დროში განვითარება გაგრძელდება სხვაგვარად ახალი საწყისი პირობებით: როცა $t = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0'$ და $\dot{\varepsilon}(0) = \nu_0'$ (უნდა აღინიშნოს, რომ საწყისი დეფორმაციის სიჩქარე იცვლის თავის მიმართულებას). ასეთ შემთხვევაში (4) განტოლების ამონახსნი განტვირთვის დროს ($\sigma_c = 0$) მიიღებს სახეს:

$$\varepsilon(t) = \frac{\nu_0' - k_2\varepsilon_0'}{k_1-k_2}e^{k_1 t} - \frac{\nu_0' - k_1\varepsilon_0'}{k_1-k_2}e^{k_2 t}. \quad (6)$$

(5) და (6) გამოსახულებებით მოცემული ცოცვადობის და განტვირთვის შესაბამისი სქემატური გრაფიკული გამოსახულებები მოცემულია ნახ. 2-ზე.



ნახ. 2 ცოცვადობის და განტვირთვის მრუდები

ბ) $\varepsilon = \varepsilon_c = const$ (რელაქსაცია), (3) მიიღებს სახეს:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{n}\sigma = \frac{E\varepsilon_c}{n}, \quad (7)$$

რომლის ამონახსნი საწყისი პირობებით, როცა $t = 0$, მაშინ $\sigma = \sigma_0 = H\varepsilon_c$, მოიცემა სახით:

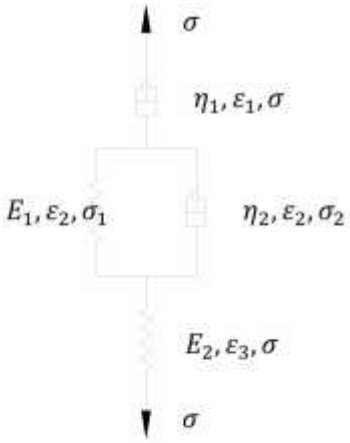
$$\sigma(t) = \varepsilon_c(H-E)e^{-\frac{t}{n}} + E\varepsilon_c. \quad (8)$$

(8) განტოლების სქემატური გრაფიკული გამოსახულება მოცემულია ნახ. 3-ზე:



ნახ. 3 რელაქსაციის მრუდი

2. ოთხ ელემენტიანი მოდელი კლასიფიკაციის 2) ხაზის მიხედვით (ნახ. 4):



ნახ. 4 ოთხ ელემენტიანი მოდელი თავისუფალი ბლანტი ელემენტით

განხილულის ანალოგიურად, აქაც შევადგინოთ საერთო ძაბვისა და დეფორმაციის მაკავშირებელი რეოლოგიური განტოლება, რომელსაც ექნება სახე:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} - \frac{1}{E_2}\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{(\eta_1+\eta_2)E_2+\eta_1E_1}{\eta_1\eta_2E_2}\frac{d\sigma}{dt} - \frac{E_1}{\eta_2}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_1}{\eta_1\eta_2}\sigma. \quad (9)$$

დრეკადობის ხანგრძლივი მოდული ამ შემთხვევაში ვერ განისაზღვრება [2, 3], ხოლო მყისიერ მოდულს და დამატებით აღნიშვნებს აქვს სახე:

$$H = \frac{\eta_1E_1E_2}{(\eta_1+\eta_2)E_2+\eta_1E_1}; n = \frac{\eta_2}{E_1}; \eta = \eta_1; E = E_2, \quad (10)$$

რის შემდეგაც (9)-ს ექნება ფორმა:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} - \frac{1}{E}\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{1}{nH}\frac{d\sigma}{dt} - \frac{1}{n}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{n\eta}\sigma. \quad (11)$$

ამ შემთხვევაშიც (11) განტოლების ზოგადი ამოხსნა ვერ ხერხდება. განვიხილოთ კერძო შემთხვევები:

ა) ცოცვადობა და განტვირთვის პროცესი ($\sigma = \sigma_c = const$). (11) მიიღებს სახეს:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{1}{n}\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_c}{n\eta}. \quad (12)$$

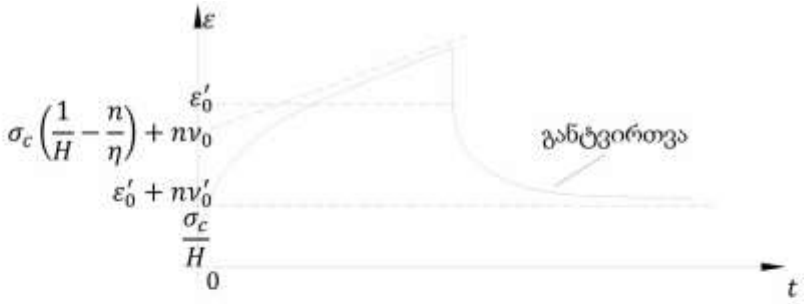
მისი ამონახსნი საწყისი პირობებით, როცა $t = 0$, მაშინ $\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_c}{H}$ და $\dot{\varepsilon}(0) = \nu_0$, მოიცემა სახით:

$$\varepsilon(t) = \left[\sigma_c\left(\frac{1}{H} - \frac{n}{\eta}\right) + n\nu_0\right] + \left[\frac{n\sigma_c}{\eta} - n\nu_0\right]e^{-\frac{t}{n}} + \frac{\sigma_c}{\eta}t, \quad (13)$$

ხოლო დატვირთვის მოხსნის შემდეგ სისტემის საწყისი პარამეტრები გახდება ε_0' და ν_0', რის შემდეგაც (12) განტოლების ამონახსნს ($\sigma_c = 0$) განტვირთვის შემთხვევაში ექნება სახე:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0' + n\nu_0'\left(1 - e^{-\frac{t}{n}}\right). \quad (14)$$

ამ შემთხვევის შესაბამისი ცოცვადობის და განტვირთვის სქემატური მრუდები გამოსახულია ნახ. 5-ზე:



ნახ.3 ცოცვადობის და განტვირთვის მრუდები

ბ) რელაქსაცია ($\varepsilon = \varepsilon_c = const$). (11) მიიღებს სახეს:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \frac{E}{nH}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{n\eta}\sigma = 0. \qquad (15)$$

(15)-ის ამონახსნი საწყისი პირობებით, როცა $t = 0$, $\sigma(0) = \sigma_0 = H\varepsilon_c$ და $\dot{\sigma}(0) = \mu_0$ (ძაბვის საწყისი სიჩქარე), მოიცემა სახით:

$$\sigma(t) = \frac{\mu_0 - H\varepsilon_c p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{\mu_0 - H\varepsilon_c p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}, \qquad (16)$$

სადაც $p_1 = \frac{-E + \sqrt{E^2 - \frac{4nEH^2}{\eta}}}{2nH} < 0$ და $p_2 = \frac{-E - \sqrt{E^2 - \frac{4nEH^2}{\eta}}}{2nH} < 0$ არის (15) გამოსახულების შესაბამისი მახასიათებელი განტოლების ამონახსნები.

(16)-ის გრაფიკული გამოსახულება მოცემულია ნახ. 6-ზე:



ნახ.8 რელაქსაციის მრუდი

3. დასკვნები

ორივე ტიპის მოდელისთვის მიიღება დროის მიხედვით მეორე რიგის დიფერენციალური დამოკიდებულება (რეოლოგიური განტოლება), მაგრამ მათში ძაბვები და დეფორმაციები, წარმოებულების რიგის მიხედვით, არასიმეტრიულია. 2) შემთხვევაში განსხვავება მხოლოდ დეფორმაციის შემცველი თავისუფალი წევრის არარსებობითაა გამოწვეული.

ცოცვადობის და რელაქსაციის პროცესების აღწერისას ორივე ტიპის მოდელი იძლევა განსხვავებულ შედეგებს, კერძოდ, 1) მოდელით ცოცვადობის პროცესი აღიწერება ისე, რომ ხანგრძლივი დროის შემდეგ დეფორმაცია აღწევს რაღაც მაქსიმალურ მნიშვნელობას. პრაქტიკა აჩვენებს, რომ ასეთი შემთხვევა იშვიათია, რეალურად, დროის მიხედვით დეფორმაციის პროცესი არ ჩერდება. თუმცა გარკვეული სიზუსტით შედეგები შეიძლება დამაკმაყოფილებლად ჩაითვალოს. კლასიფიკაციის ამ ხაზის მოდელების სამ ელემენტიანი ვარიანტისგან განსხვავებით [1] ცოცვადობის მრუდი წარმოადგენს ორი ექსპონენციალური შესაკრების კომბინაციას,

დამოუკიდებელი პარამეტრების რიცხვი უფრო მეტია და ექსპერიმენტთან ეფექტურად შეთავსების მეტი შესაძლებლობაა. განტვირთვის დროს სისტემა სრულად აღიდგენს საწყის მდგომარეობას, ნარჩენი დეფორმაცია არ გვექნება. რაც შეეხება რელაქსაციის პროცესს, ამონახსნი წარმოადგენს მარტივ ექსპონენტას რაც ექსპერიმენტთან მიმართებით მეტ უზუსტობას იძლევა. ამ შემთხვევაში, ხანგრძლივი დროის შემდეგ ძაბვა ჩერდება რაღაც არანულოვან მნიშვნელობაზე.

კლასიფიკაციის 2) ხაზის მოდელის შემთხვევაში ცოცვადობისა და რელაქსაციის მრუდები არ წარმოადგენს მარტივ ექსპონენტებს, დამოუკიდებელი პარამეტრების რიცხვიც მეტია მათ სამ ელემენტიან [2, 3] ვარიანტებთან შედარებით და ექსპერიმენტთან შედარების მეტი ეფექტური შესაძლებლობაა. ცოცვადობის პროცესის აღწერისას დეფორმაცია ხანგრძლივი დროის მანძილზე ყოველთვის მიმდინარეობს, რისი გამოვლინებაც პრაქტიკაშიც ხშირად გვხდება. η_1 სიბლანტის კოეფიციენტის ვარირებით ეს პროცესი შესაძლოა ვმართოთ ექსპერიმენტულ მონაცემებთან შეთავსების თვალსაზრისით, ხოლო თუ მას მივასწრაფებთ უსასრულობისკენ მაშინ ნახ. 4-ზე გამოსახული მოდელი გადაიქცევა კლასიფიკაციის 1) ხაზის განზოგადებული მოდელის სამ ელემენტიან ვარიანტად [1]. განტვირთვის შემდეგ სისტემაში რჩება ნარჩენი დეფორმაციები, რაც პრაქტიკული თვალსაზრისით რეალობასთან უფრო ახლოს დგას. რელაქსაციის პროცესი ამ შემთხვევაში იძლევა შედეგს, რომ ხანგრძლივი დროის შემდეგ ძაბვა 0-მდე ეცემა, რაც პრაქტიკულად ზოგ შემთხვევაში არ ვლინდება. ეს ფაქტი ამ მოდელის უარყოფით მხარედ შეიძლება შეფასდეს, თუმცა პრაქტიკული სიზუსტის თვალსაზრისით დასაშვებია.

გამოყენებული ლიტერატურა:

[1] ა. დუმბაძე, „კომპოზიციური ტანის მექანიკა“, თბილისი 2015 წ;

[2] B. Abesadze. Elastic-viscous bodies deformation picture accordingly of generalized models // International Scientific Journal of IFToMM, PROBLEMS OF MECHANICS, ISSN 1512-0740 №4(69)/2017, pp 51-59. Tbilisi 2017;

[3] B. Abesadze. Generalized models for describing of elastic-viscous bodies properties // Air Transport. Tbilisi. ISSN 1512-4916 №1(12). 2017. p.p. 101-111;

[4] Dumbadze A., Kanchaveli J. About reformation Ischlinski's three-elements rheological model// "Problems of Mechanics". Tbilisi, 2006, № 3(24), pp. 31-37. (in Russian);

[5] Kipiani G., Tsikarishvili M., Bliadze S., Dzodzuashvili. Calculation of plutes and shells with ribs Rigidity by the Finite Element metod // Air Transport. Tbilisi. № 1(12). 2017. p.p. 20-26;

[6] Mikhailov B.K., Kipiani G.O., Moskaleva E.K. Fundamentals of theory and methods of analysis on stability of sandwich panels with cuts. Tbilisi, Metsniereba, 1991, -189 p. (In Russian);

[7] Kvaratskhelia A., Kipiani G. Dynamical stability of layered plates//Mshenebloba, Tbilisi, № 2(45), 2017, pp. 23-28. (In Georgian);

[8] Koltunov M.A. On issue of selection of cores at solution of tasks with consideration of creeping and relaxation//Mechanics of Polymers. is. 4, 1966, p. 483-497. (In Russian);

[9] ნ. კაჭკაჭიშვილი, გ. ყიფიანი, თ. მაღრაძე. კომპოზიციური მასალების დაპროექტება რღვევის მექანიკის საფუძველზე რთული კონსტრუქციების შესაქმნელად // მშენებლობა №2. თბილისი. სტუ. 2006. გვ. 30-35;

[10] სეით ბლიაძე, გელა ყიფიანი, აკაკი გოგოლაძე, რუსუდან გოშაძე. კონსტრუქციის დაღლილობაზე ანალიზი კომპლექსური პროგრამა ANSYS-ის მეშვეობით. პროფესორ გელა ყიფიანის საერთო რედაქციით. „საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტი“. თბილისი 2017.- 232 გვ.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE FOUR-ELEMENT GENERALIZED MODELS DESCRIBING OF ELASTIC-VISCOUS BODIES PROPERTIES

B. Abesadze
Georgian Aviation University

Are stated the generalized models for describing of elastic-viscous bodies, for describing of properties are applied the models that represents certain combination of pure elastic and plastic property bodies. Are compiled combinations of generalized four element models with two elastic and two viscous elements (two general types). Are described the relations between deformation and strain for each combination. Are obtained creeping, hardening, relaxation curves and their comparative analysis.

For both types of models, we obtain a rheological equations where the stress and deformation are not symmetrically introduced (not containing the first and second order derivatives of both values).

When describing the creeping and relaxation process, the two types of models give different results, which can be used to describe the character of deformation for different types of elastic-viscous bodies.

In addition, the considered models in terms to describe the creeping gives a second order differential equations, their solutions well coincides with the qualitative results of the experiment and the existence of two indefinite coefficients gives us the possibility to well coincide also the experimental quantitively results. However, at describing the process of relaxation, we obtain a simple expression for 1) type model, with one indefinite coefficient and accordingly the possibility of coincide with the results of experiment is more decreased.

Although the increase of elements in the model complicates its solution, it gives a much better possibility to coincide less errors with experimental data. The considered four-element models are a good opportunity to describe the properties of composite materials.

საჰაერო ხომალდის ფრთის შემონაკერის კომპოზიციური მასალის მათემატიკური მოდელი მდგრადობასა და თერმო იზოლაციაზე

ოქროპირიძე გიორგი

საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტი

ნაშრომში აგებულია მრავალფენიანი არაერთგვაროვანი ორთოტროპული ფირფიტოვანი თეორია, რომელიც გარკვეულწილად წყვეტს აღნიშნულ პრობლემას ჰიპოთეზების სისტემის შემოტანის გზით. ისინი ითვალისწინებენ მაღალი რიგის ფაქტორებს ერთი დამატებითი საძიებელი ფუნქციის საშუალებით. მდგრადობის განტოლებებში გათვალისწინებულია მაღალი რიგის პარამეტრული წევრები გადამწყვეტი განტოლებების სისტემას აქვს შედარებით დაბალი რიგი, რომელიც უდრის 12-ს, მიღწეულია თეორიის უნივერსალობის მაღალი ხარისხი. სხვადასხვა თბელკედლიანი კონსტრუქციის გაანგარიშებისას ნაჩვენებია ამ თეორიის ეფექტურობა.

საკვანძო სიტყვები: ფირფიტა; ფრთა; კომპოზიტი; მდგრადობა, იზოლაცია.

შინაარსი

ფირფიტოვანი მრავალფენიანი თხელკედლიანი კონსტრუქციები, სულ უფრო ფართოდ გამოიყენება ავიამშენებლობაში, რაკეტების მშენებლობაში და სხვა დარგებში. ყოველივე ეს კონსტრუქციების მაღალი სიმტკიცისა და მათი წონის საგრძნობი შემცირების აუცილებლობითაა გამოწვეული, რიგ შემთხვევებში ეს ბგერით, თბო და ვიბრო საიზოლაციო მოთხოვნების უზრუნველყოფითაა განპირობებული.

ამ აუცილებელი თავისებურებების ერთობლიობა უზრუნველყოფილია მრავალფენიანი კონსტრუქციების ცალკეული ფენებისთვის სხვადასხვა სახის შემავსებლების გამოყენებით. მზიდი ფენებისათვის გამოიყენება არა მხოლოდ ლითონები არამედ კომპოზიციური მასალები.

როგორც წესი შემავსებლები და კომპოზიციური მასალები ხასიათდებიან ძვრის დაბალი სიხისტით, რაც მათი უარყოფითი თვისებაა. ეს გარემოება უნდა იყოს გათვალისწინებული მრავალფენიანი გარსებისა და ფირფიტების გაანგარიშების თეორიაში. ისეთი დამახასიათებელი ფაქტორები როგორიცაა ნორმალური, განივი ძაბვებისა და განივი დეფორმაციების გავლენა, მრავალ თეორიაში უგულებელყოფილია, მაგრამ ცნობილია, რომ ამ უკანასკნელთა გავლენა, იზრდება ფირფიტის სისქის ზრდასთან ერთად და შეიძლება მნიშვნელოვანი იყოს ისეთი შემავსებლების გამოყენებისას, რომლებიც დამყოლნი არიან განივი ძვრისა და განივი დაწნევის მიმართ.

ამიტომ უკანასკნელ პერიოდში შეიქმნა მთელი რიგი თეორიებისა, რომლებიც ითვალისწინებენ აღნიშნულ ფაქტორებს. ეს კი დაკავშირებულია ახალი საძიებელი ფუნქციების შემოტანასთან, რაც ზრდის განტოლებათა სისტემის რიგს. გარდა ამისა, განტოლებებში უნდა იყოს გათვალისწინებული სიზუსტის უფრო მაღალი რიგის წევრები, ვიდრე ეს კლასიკურ თეორიაშია მოცემული. ამასთან დაკავშირებით განივ ძვრას, ფენების დაწნევას და ნორმალის დაგრძელებას შემდგომში ვუწოდებთ მაღალი რიგის ფაქტორებს. თეორიები, რომლებიც მათ ითვალისწინებენ სრულად, გამოირჩევიან სირთულით განტოლებათა სისტემის მაღალი (16-20) საერთო რიგით, რაც ართულებს ამოცანის გადაწყვეტას, ამ თეორიების მდგრადობის თეორიებში გათვალისწინებულია მხოლოდ 3

პარამეტრული წევრი, რომლებიც ახასიათებენ კლასიკურ თეორიას. ეს კი პარამეტრული წევრებისა და ძირითადი განტოლების წევრების სიზუსტით შეუთავსებლობას იწვევს.

ამასთან დაკავშირებით მრავალფენიანი ფირფიტოვანი (მათ შორის ს.ხ. ფრთის) თეორიის შექმნა, რომელიც სრულად ითვალისწინებს მაღალი რიგის ფაქტორებს და ამასთანავე შედარებით მარტივი იქნება, მეტად აქტუალური პრობლემაა.

მრავალკომპოზიციური ფირფიტოვანი თეორიის განვითარება მჭიდროდ უკავშირდება დრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანის ფირფიტების თეორიის ორგანზომილებიან ამოცანაზე დაყვანას. ამასთან დაკავშირებით მოკლედაა განხილული დაყვანის ძირითადი მეთოდები რომელთაგანაც გამოვყოფთ ჰიპოთეზების მეთოდის განვითარების თვალსაზრისით, აღსანიშნავია 2 მიმართულება. პირველ მიმართულებაში განტოლებების სისტემის რიგი დამოკიდებულია მრავალფენიან ფირფიტების ფენების რიცხვზე, ხოლო მეორეში არ არის დამოკიდებული. როგორც ცნობილია, პრაქტიკული მიზნებისთვის მოსახერხებელია განტოლებების სისტემის უფრო დაბალი რიგი. ამიტომ, რის გამოც მას მეტი ყურადღება ეთმობა.

შრომების ანალიზის საფუძველზე დადგენილია ზოგიერთი თავისებურებანი, რომლებიც ახასიათებს თანამედროვე თეორიას: უფრო სრულად ასახოს მრავალფენიანი ფირფიტების რეალური მუშაობა, გაფართოვდეს შემოთავაზებული ვარიანტების გამოყენების საზღვრები, მოხდეს გაანგარიშების სრული პროცესის ავტომატიზაცია თანამედროვე კომპიუტერებზე. აქედან გამომდინარეობს, ზოგიერთი მოთხოვნები თანამედროვე თეორიის მიმართ: იმ ფაქტორების სისრულე, რომლებიც გავლენას ახდენენ მრავალფენიან ფირფიტების დაძაბულ-დეფორმირებულ მდგომარეობაზე, განტოლებათა სისტემის სიმარტივე და მისი რიგის დაწევა,

მატრიცული ალგორითმიზაციის შესაძლებლობა, მისი უნივერსალობის ხარისხის გაფართოება.

2. ნაწილი

როგორც შესავალში აღვნიშნეთ მრავალფენიანი ფირფიტოვანი კოსტრუქციები ფართოდ გამოიყენება ტექნიკის სხვადასხვა დარგებსა და ავიაციაში. ეს გამოწვეულია მთელი რიგი მნიშვნელოვანი თვისებებით: დიდი სიხისტით, შედარებით მცირე წონით, კარგი ბგერითი და თბური იზოლაციით, აგრეთვე ვიბრო-რადიოსაიზოლაციო თვისებებით. მაგრამ, თანამედროვე ფირფიტები, კომპოზიტური მასალები და სხვადასხვა შემავსებლები გამოირჩევიან მცირე სიხისტით ძვრაზე და ტრანსვერსალური სისუსტით (დიდი დეფორმირებით განივი მიმართულებით). აქედან გამომდინარე, მრავალფენიან ფირფიტებსა და გარსებში აუცილებელია განივი ძვრის , ცალკეული ფენების დაახლოების და მნიშვნელოვანი ანიზოტროპიის გათვალისწინება. ახალი მასალების სპეციფიკური თავისებურებანი და მათი გათვალისწინების აუცილებლობა გაანგარიშებათა თეორიაში აღნიშნული იყო ს. ამბარცუმიანის მიერ 1968 წელს.

მრავალფენიანი გარსების თეორია ჩამოყალიბდა XIX საუკუნის მეორე ნახევარში არონისა და ლიავის ძალისხმევით. 1930-1945 წლებში ამ თეორიის მნიშვნელოვან განვითარება დიდად შეუწყო ხელი იმ გამოჩენილი მეცნიერების შრომებმა , რომელთა შორის უნდა აღინიშნოს: ს ტიმოშენკო ვ. ვლასოვი ა. გოლდენვეიზერი, ა. ლურიე, ხ. მუშტარი და სხვანი[3;4]. მიღწეული შედეგები მთელ რიგ მონოგრაფიებში . ომისშემდგომ ერთგვაროვანი გარსების თეორია უფერო მეტად განვითარდა. ასპარეზზე გამოვიდნენ ახალი თვალსაჩინო მეცნიერები: ს. ამბარცუმიანი, ს. ალექსეევი მ. მიქელაძე გ. ჯანელიძე ლ.მუხაძე გ. ყიფიანი და სხვ. ზოგადი თეორიის უახლესი მიღწევები ასახულია მონოგრაფიებში ზოგიერთი

სპეციალური საკითხები ხოლო საცნობარო ლიტერატურა შრომებში ვითარდება და ზოგადდება არაერთგვაროვანი, გარსების თეორია. ისეთი გარსებისა, რომელთა დრეკადი მახასიათებლები სისქის მიხედვით მდორედ (ერთფენიანები), ან ნახტომისებურად (მრაფენიანი გარსები) იცვლება. შეიძლება იყოს უფრო ზოგადი შემთხვევა როდესაც მრაფენიანი გარსის ზოგიერთი ფენა ან ყველა ფენა არაეთგვაროვანია.
მრავალფენიანი გარსები პირველად გამოიყენეს ავიაციაში ისინი წარმოადგენენ სამფენიან კოსტრუქციებს 2 კიდურა მზიდი და შუაშემავსებელი ფენებით.

სამფენიანი ფირფიტების თეორიის საფუძვლები დამუშავდა ჯერ კიდევ მეორე მსოფლიო ომის წინა წლებში. სამეცნიერო ლიტერატურა, რომელიც ეხება სამფენიან ფირფიტებს და გარსებს, რამდენიმე ათას ნაშრომს შეადგენს. ფრიად მნიშვნელოვანი წვლილი შეიტანეს ამ საქმეში ს. ამბარცუმიანმა, ა. კაკუშაძემ. ხ. მუშტარიმ. ბ. მიხაილოვმა, ა. დუმბაძემ [2] გ . ყიფიანმა, ს. ბლიაძემ,[1;5;6;7] თ. გარდაფხაძემ და სხვ. თეორიის მიღწევებზე შეიძლება ვიმსჯელოთ მიმოხილვებით, მონოგრაფიებით აგრეთვე საცნობარე ლიტერატურით.

ბ. მიხაილოვის და გ. ყიფიანი[8;10;11;] ნაშრომებში გადმოცემულია კონტურის მიმართ ნებისმიერად განლაგებული ჭრილებით ან ხვრეტებით შესუსტებული სამ ფენიანი ფირფიტისა და გარსის მდგრადობის გაანგარიშების მიახლოებითი და დაზუსტებული მეთოდები. მათ საფუძველზე შეიძლება შემუშავდეს პრაქტიკული რეკომენდაციები ავიაციაში ფართოდ გამოყენებული სამფენიანი ანაკრები პანელების გაანგარიშებასა და დაპროექტების საქმეში.

სწორედ ეს არის მრავალფენიანი ფენოვანი კონსტრუქციების თეორიის მრავალგვარი ვარიანტების შექმნის მიზეზი. ამ დარგში გამოქვეყნებული ნაშრომების რიცხვი ყოველწლიურად იზრდება. შემოთავაზებულია ახალი თეორიები, რომლებიც მათი შექმნის სხვადასხვა მიდგომას.

ბოინგ 737 ტიპის თვითმფრინავის ფრთის შემონაკერი დამზადებულია ალუმინ 2024-ისაგან, რომელიც დღეს მეტალებიდან ყველაზე ფართოდ გამოყენებადი მასალაა ავიაციაში. მისი სიმსუბუქისა, სიმტკიცისა და სიიაფის გამო. მაგრამ ტექნოლოგიების განვითარებამ შესაძლებელი გახადა ტრადიციული მეტალების, მათი შენადნობების ჩანაცვლება კომპოზიციური მასალებით. როგორებიცაა. ნახშირბადის სენდვიჩები, ნახშირბადის ლამინატი, არამიდის ბოჭკო და სხვა.



ფოტო 1

ვფიქრობ, რომ ბოინგ 737-ის ფრთის შემონაკერის კომპოზიციური მასალის გაანგარიშება თერმო იზოლაციასა და მდგრადობაზე შესაძლებელი და საჭიროა, რადგან, მოგეხსენებათ თვითმფრინავის საწვავი განთავსებულია ფრთებში და ფიუზელაჟში. ალუმინი კარგი სითბო გამტარია და როდესაც სრულდება შორ მანძილზე ფრენები (მაღალ ეშელონებზე სადაც ძირითადად ხდება საერთაშორისო ფრენები ტემპერატურა მერყეობს -52დან -70მდე) გარემო პირობებიდან გამომდინარე საწვავის ტემპერატურა კლებულობს მინიმუმის ნიშნულამდე, ეს იწვევს იმ ფაქტს რომ ს.ხ.-ის ფრენის სიმაღლის


ფოტო 2

ცვლილება ხდება უფრო დაბალ ეშელონებამდე სადაც ტემპერატურა შედარებით მაღალია, რაც ზრდის საწვავის ხარჯს (რაც უფრო დაბლა ხდება ფრენები მით მეტია ჰაერის სიმკვრივე და მეტია შუბლური წინაღობა, აქედან გამომდინარე იზრდება საწვავის ხარჯი.) თუ ვცდით ფრთის შემონაკერის შეცვლას კომპოზიციური მასალით, შესაძლებელია რამოდენიმე სახის სარგებელიც კი მივიღოთ; ნაკლები წონა, მეტი სიმტკიცე, ნაკლები თბოგამტარობა (რაც საკმაოდ მაღალი აქვს ალუმინის შენადნობებს) და რაც ერთ-ერთი მნიშვნელოვანია კონდესატის წარმოქმნის ნაკლები ალბათობა ფრთის ზედაპირზე. ამ უკანასკნელს რაც შეეხება, ზამთრის პერიოდში ძალიან მნიშვნელოვანია, რადგან როდესაც საწვავის ჩასხმა ხდება თვითმფრინავის ფრთებში, ფრთის ზედა ნაწილში ფიუზელაჟთან ხდება კონდენსატის წარმოქმნა რომელიც იყინება, ეს საჭიროებს სპეციალურ შემოყინვის საწინააღმდეგო პროცედურას, რაც დამატებით ხარჯს და დროს მოითხოვს, წინააღმდეგ შემთხვევაში აფრენისას შესაძლოა ინციდენტი ან კატასტროფაც კი მოხდეს, რადგან ყინული ფრთის ზედაპირზე აეროდინამიკულ ხარისხზე უარყოფითად მოქმედებს.

ჩვენ შევეცდებით სხვა და სხვა მეთოდით გავიანგარიშოთ რამოდენიმე კომპოზიციური მასალის შესაბამისობა ჩვენ მოთხოვნებთან და ასევე იმ ძირითად მოთხოვნებთან მიმართებაში რომლებიცაა წაყენებული საჰაერო ხომალდის ფრთისადმი.



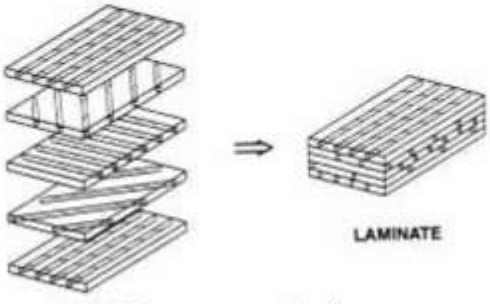
ფოტო 3

სავარაუდო კომპოზიტებია: ნახშირბადის ლამინატი, ნახშირბადის სენდვიჩ კომპოზიტი.

ნახშირბადის ლამინატი. უპირატესობები სხვა თანაბარი სიმტკიცის მეტალთან შედარებით: ნაკლები წონა, მაღალი გამძლეობა კოროზიისა და დაღლილობისადმი, სხვა და სხვა ფორმების მარტივი მიღება, მაღალი აეროდინამიკული ხარისხის მქონე ზედაპირი, ხოლო მეტალის უპირატესობებია: სიიაფე, მეტალის დეტალები ყოველი მხრიდან თანაბარი სიმტკიცისაა.

იზოტროპული მახასიათებლების გაუმჯობესების მიზნით ლამინატებს ამზადებენ ბოჭკებისგან ორი სხვა და სხვა მიმართულებით. ლამინატის გამძლეობის შეზღუდვის დასაძლევად გამოიყენება მეორე ტიპის კომპოზიური მშენებლობა ესააა სენდვიჩ სტრუქტურა.

სენდვიჩ სტრუქტურა წარმოადგენს ძირითად მასალებს ორ ლამინატს შორის ან სხვა ორ საბაზო მასალას შორის. სენდვიჩ სტრუქტურის დატვირთვის მექანიკა მოქმედებს ანალოგიურად როგორც ფერმული კონსტრუქცია. შემავსებელი ანაწილებს და გადასცემს მოქმედ დატვირთვებს მხიდ ფენებს, პენპერდიკულარულად ისევე როგორც სტრინგერები და გამრჯენები ფერმულ კონსტრუქციაში. ზოგადად შემავსებლის მასალა მოიცავს მაღალი სიმკვრივის პოლიმერულ ქაფს, ფიჭისებრ მასალას (ჰექსაზონური უჯრედების მასალა) ხშირად ხდება ნახშირბადის ლამინატის და ნახშირბად სენდვიჩის ერთობლივად გამოყენება.



ფოტო 4

როდესაც შემავსებელი მოთავსებულია ორ სხვა და სხვა მზიდ ზედაპირებს შორის შრეში, დეტალი შეიძლება გახდეს 40-ჯერ ძლიერიც კი ვიდრე ამ მასალის ბაზების კომბინირებული სიძლიერეა. შემავსებლის სისქეა რაც განსაზღვრავს მის საბოლოო სიძლიერეს. თხელი მზიდი ზედაპირის ფურცლების გამოყენების გამო სენდვიჩ სტრუქტურები ხშირად ნაკლებად დარტყმა გამძლეა.

მეტალის დეტალების დამაგრება საჰაერო ხომალდზე ხდება მექანიკურად (ძირითადად მოქლონებით) ხოლო კომპოზიტების წებოთი და ზოგიერთ შემთხვევაში სპეციალური ჩამკეტებით. წებოთი დამაგრებისას მასალებს შორის კავშირი ისეთივე ძლიერია როგორიც თვითონ კომპოზიტი.

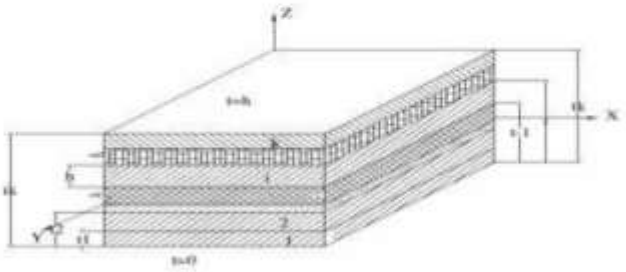
განვიხილოთ ლამინატის ტიპის კომპოზიტის სტრუქტურა.

ზოგადად კომპოზიციური მასალის სტრუქტურა შედგება მრავალი ფენისგან, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია. ფენები მზადდებაგანსხვავებული იზოტროპული ან არაიზოტროპული მატერიალებისგან. გააჩნიათ განსხვავებული სტრუქტურა, დაძაბულობა და მექანიკური მახასიათებლები. ხშირად ლამინატის მახასიათებლების გამოთვლა ხდება მისი ფენათა რაოდენობით, თანმიმდევრობით გეომეტრიული და მექანიკური თვისებებით. ფენების ფენომენი შეიძლება გაერთიანდეს რათა შექმნან რამდენიმე ლამინატის ტიპი. ლამინატები ხასიათდებიან 21 კოეფიციენტით და იძლევიან სხვადასხვაგვარ ეფექტებს. ერთადერთი შეზღუდვა რომელიც გააჩნიათ ლამინაებს არის მისი სისქე, მაგრამ უფრო ნაკლებია ვიდრე იმავე დაძაბულობის ცალკეულად აღებული რომელიმე შემადგენელი მასალის სისქე.
ლამინატის დაძაბულობის კოეფიციენტი რომელიც შედგება სხვადასხვა განსხვავებული სისქის და სიმტკიცის ფენებისაგან A I mni= 1,2,3,.....k. მიგვაჩნია, რომ მატერიალის დაძაბულობის კოეფიციენტი არ იცვლება ფენის სისქესთან მიმართებაში. შესაძლებელია ჩაიწეროს პარამეტრები I mn როგორც:

სადაც r=0.1.2. to=0, th ამ თხელი ფენისთის

$$I^{i}_{mn} = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{k} A^{i}_{mn}\left(t_{i}^{i+1} - t_{i-1}^{i+1}\right)$$

ფორმულა 1



$$B_{mn} = \int A_{mn}\, dz$$

$$D_{mn} = \int A_{mn} z^2 dz$$

$$C_{mn} = \int A_{mn} z dz$$

ფორმულა 1;2;3;

Bmn= დაძაბულობის წევრი
Dmn= მოჭიდების დაძაბულობა
Cmn= ღუნვითი დაძაბულობა
სიბრტყეში დეფორმირებისას ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ εx,εy და γx

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x^0 + zk_x,$$

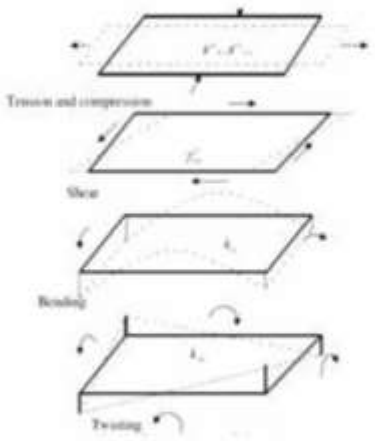
$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_y^0 + zk_y,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$k_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \quad k_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, k_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}$$

ფორმულა 4;5;6;7;8;



- სიბრტყეში გაწელვა ან შეკუმშვა
- სიბრტყეში გადანაცვლება
- ღუნვა XZ და YZსიბრტყეებში
- ბრუნვა

დასკვნა

თვითმფრინავის ფრთის მოდელი გეგმის მიხედვით დამზადებულია და მოდებულია სხვა და სხვა დატვირთვები. დატვირთვებია ისეა მოდებული, რომ მაქსიმალურად მიახლოვებული იყოს რეალობასთან. მაგ. დატვირთვა მოდებულია ცალკე X ღერძის მიმართ და ასახავს გადაადგილებას Z და Y ღერძების მიმართ. დაანგარიშებულია როგორც მაქსიმალურ ასევე მინიმალურ დატვირთვებზე.

ზემოაღნიშნული შედეგები მრავალნაირი დატვირთვისას არის ნაპოვნი. მათი განსხვავებები ნათლად ჩანს კონტურულ განსაზღვრებებში, დატვირთვის დონეებზე.

გამოყენებული ლიტერატურა

1) ს. ბლიაძე, გ. ყიფიანი. ახალი მათემატიკური მოდელების დამუშავების საკითხები განსაკუთრებით რთული კონსტრუქციების შეფასების თვალსაზრისით. //მეცნიერება და ტექნოლოგიები. თბილისი. 2002 #10-12. 24-27 გვ.
2) ა. დუმბაძე. კომპოზიტური ტანის მექანიკა. თბილისი. 2015წ.
3) З. Муштари Х. М.б Галимов К. З. Нелинеиная теория упругих оболочек.- Казань Тфткнигоиздат. 1957.-432с.
4) Муштари Х.М. Об области применения приближенных теории трехслоеных плит несимметричного строения с заполнителем Извю АН СССР. ОТН Механика и машинастроение 1963 №5
5) .Блиадзе С.Н. и др. Четыреугольныии конечныи элемент (кэ) с учетом понеречного сдвига. Проблемы прикладнои механики Тбилиси 2002. №3(8) с. 82-87.
6) Блиадзе С.Н.кипиани Г. О. Цикаришвили М.А. Деформания треугольном и чериреугольном цилиндрическом элементе Проблемы прикладнои механики. Тбилиси 2002. №4(9). С 92-95.
7) Блиадзе С. Н. и др. Теорическое и экспериментальное исследование переходных происходящих в конституси. Проблемы прикладнои механики. Тбилиси. 2003. № 1(10) с. 70-76
8) Михаилов Б.К. Кипиани Г.О. Деформированность и устоичивость пространственных пластических систем с разрывным параметрами. Санкт-петербург. Строиздат СПБ 1996-442 с. Ил.
9) Москаленко В.Н. Основные уровнения теории оболочек из слоистых материлов. Сборник досладов научно- техническои конференсии по итогам научно- исследовательских работ за 1964- 1965 гг. МЭИ. М 1965.С. 43-63
10) Кипиани Г.О. Влияние прямоугольных отверстий на устройчивость трехслойных пластин / / Статические задачи расчёта строительных конструкций. Л. ЛИСИ, 1988–С.45-49.
11) Кипиани Г.О. Устойчивость прямоугольной анизотропной пластины с прямоугольным разрезом/ / Статические и динамические расчеты конструкций с учетом нелинейных свойств материалов. Л. ЛИСИ 1991-с. 38-42.

The mathematical modeling of the structural strength and thermal isolation of the wing skin of airplane

Giorgi Okropiridze
Georgian Aviation University

A multilayered non-consistent orthotropic plate theory is used in the work which, to a certain extent, solves the problem through the introduction of a hypothesis system. They take into consideration higher-order factors through one additional search function. Sustainability equations include upper range parametric parts. The decisive system of the equations has a relatively low range, which is equal to 12. High degree of universality of the theory is achieved. The effectiveness of this theory is determined by calculating the various thin-walled structures.

დამრეცი გარსების ერთმალიანი მრავალტალღიანი საფარის მათემატიკური მოდელი

ნინო ჩორხაული*, ნატრული ხარჭავანიძე**, ბელა წიქარაძე***,
ირინა ფარადაშვილი***
*საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი,
**საქართველოს ბიზნეს მეცნიერებათა აკადემია,
***ა(ა)იპ განათლებისა და მეცნიერების პროგრესი

გადმოცემულია დამრეცი გარსების ერთმალიანი მრავალტალღიანი საფარის გაანგარიშება, როგორც კონტინუალურ არეში, ასევე კიდეების და წვეროების მიახლოებაში. გადმოცემული მეთოდიკა დამყარებულია საწყის განტოლებების გაწრფივებაზე მიმდევრობითი დატვირთვების მეთოდით და საძიებელ ამოხსნებში უცნობი კოეფიციენტების მქონე წყვეტილი ფუნქციების შემოყვანაზე, რასაც მივყევართ მწკრივების სწრაფ კრებადობაზე და გამოთვლების მეტად კომპაქტურ ალგორითმზე.

საკვანძო სიტყვები: *გარს; მოდელი; მრავალტალღოვანი; დეფორმაცია; ძაბვა.*

შესავალი

კონტინუალური ამოცანების დისკრეტიზაციის ერთ-ერთი ყველაზე ეფექტური და ზოგადი მეთოდი [1] დამუშავებულია ბოლო წლებში და ფართო გამოყენების მქონე გამოთვლითი ტექნიკის სრულყოფის გამო, არის სასრული ელემენტების მეთოდი (სემ). განვიხილოთ მექანიკის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისადმი მიდგომები, ამონაჭრიანი ფირფიტის ღუნვისა და მდგრადობის ტიპის ამოცანებისათვის [2].

ძირითადი ნაწილი

ერთი მიმართულებით შეპირაპირებული დამრეცი გარსებისგან შედგენილი მრავალტალღიანი საფარი განვიხილოთ როგორც ერთი მიმართულებით გაწიმული ერთი გარსი, რომელსაც აქვს წიბოები და ტეხილები ცალკეული გარსების გადაბმის წრფეზე. „y" ღერძი განვალაგოთ გადაბმის წრფეების პარალელურად, ხოლო „x" გარსების შეუღლების მიმართულებით. მაშინ წონასწორობის და ერთობლიობის განტოლებაში დამრეცი გარსების დეფორმაციები შევიყვანოთ ერთი მიმართულების ტეხილები

$$\nabla^4 F + Eh\Delta_k w - Eh\sum_{i=1}^{n}\theta_i \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}\delta(y-b_i)=0;$$

$$D\nabla^4 w - h\Delta_k F - \sum_{i=1}^{n}\theta_i \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}\delta(y-b_i)=P, \qquad (1)$$

განზოგადებული ძალვის და მომენტების მნიშვნელობები შემდეგი ფორმულებით:

$$T_1^* = T_1 + \sum_{j=1}^{n}\left(E_j F_j \varepsilon_1 + E_j S_j m_1\right)\delta(x-a_j);$$

$$M_1^* = M_1 + \sum_{j=1}^{n}\left(E_j F_j m_1 + E_j S_j \varepsilon_1\right)\delta(x-a_j); \qquad (2)$$

სადაც F_1 წიბოს განივი კვეთის ფართობია;

J_i − წიბოს კვეთის ინერციის მომენტი ჰორიზონტალური ღერძის მიმართ, სიმძიმის ცენტრზე გამავალი შუალედური ზედაპირის მხები:

S_i −წიბოს კვეთის სტატისტიკური მომენტი გარსის შუალედური ზედაპირის მხები ღერძის მიმართ.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ გარსის შიგა ძალები დაკავშირებულია ძალის ფუნქციასთან, შემდეგი ფორმულებით:

$$T_1 = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad T_2 = h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad T_1 = h\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \tag{3}$$

მივიღებთ დამრეცი გარსების მრავალტალღიანი საფარის დეფორმაციის წონასწორობისა და შეთავსების განტოლებებს შემდეგი სახით:

$$D\nabla^4 w - hD_4 F - \sum_{j=1}^{n}\left[E_j J_j \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{E_j S_j}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - m\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) - q_j \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - t\frac{E_j F_j}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - m\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) - tE_j S_j \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] d(x - a_j) = P;$$

$$\nabla^4 F + E\Delta_4 w + \sum_{j=1}^{n}\left\{\left[\frac{12}{h^3}(r-\mu t)E_j J_j \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{12}{h^3}(r-\mu t)\frac{E_j S_j}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + E\theta_j \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{E_j F_j}{Eh}\mu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{h}E_j S_j \mu\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]\delta(x - a_j) + \left[\frac{E_j F_j}{E}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) - E_j S_j \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\delta'(x - a_j)\right\} = 0. \tag{4}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$L_{11j} = E_j J_j \frac{\partial^4}{\partial y^4} - tE_j S_j \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_{12j} = \frac{E_j S_j}{E}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \mu\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right) + \theta_j \frac{\partial^2}{\partial y^2} - t\frac{E_j F_j}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right);$$

$$L_{21j} = \frac{12}{h^3}(r-\mu t)E_j J_j \frac{\partial^2}{\partial y^2} + E\theta_j \frac{\partial^2}{\partial y^2} - E_j F_j \mu\frac{\partial^4}{\partial y^4};$$

$$L_{22j} = \frac{12}{h^3}(r-\mu t)\frac{E_j S_j}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - \frac{E_j F_j}{Eh}\mu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - \mu\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right);$$

$$L'_{21j} = \frac{1}{h}E_j S_j \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L'_{22j} = \frac{E_j F_j}{Eh}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^4}{\partial y^4}\right). \tag{5}$$

მაშინ (4) სისტემა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\nabla^4 w - \frac{h}{D}\Delta_4 F = \frac{P}{D} - \sum_{j=1}^{n}\left(L_{11j} w + L_{12j} F\right)\delta(x - a_j);$$

$$\nabla^4 F + E\Delta_4 w = \sum_{j=1}^{n}\left(L_{21j} w - L_{22j} f\right)\delta(x - a_j) - \sum_{j=1}^{n}\left(L'_{21j} w - L'_{22j} f\right)\delta'(x - a_j); \tag{6}$$

გავამრავლოთ მეორე განტოლება $i\frac{n}{E}$, სადაც $n = \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{h}$ და შევკრიბოთ პირველთან, მივიღებთ:

$$\nabla^4 \varphi + in\Delta_4 \varphi = \frac{P}{D} - \sum_{j=1}^{n} D_j \varphi\delta(x - a_j) - \sum_{j=1}^{n} D'_j \varphi\delta'(x - a_j), \tag{7}$$

სადაც

$$\varphi = w + i\frac{n}{E}F;$$

$$D_j\varphi = \frac{1}{D}\left[L_{11j}\,\mathrm{Re}\,\varphi + \frac{E}{n}L_{12j}I_m\varphi + \frac{E}{n}\left(L_{21j}\,\mathrm{Re}\,\varphi + \frac{E}{n}L_{22j}I_m\varphi\right)\right];$$

$$D_j^*\varphi = \frac{1}{D}\left(L_{21j}^*\,\mathrm{Re}\,\varphi + \frac{E}{n}L_{22j}^*I_m\varphi\right)L\frac{n}{E}. \qquad (8)$$

როგორც მოყვანილი გამოსახულებებიდან ჩანს, კომპლექსური გარდაქმნა დასრულებული სახით ვრცელდება მხოლოდ (7) განტოლების მარცხენა ნაწილზე.

ამოხსნისას მიზანშეწონილია მივყვეთ კომპლექსურ გარდაქმნას, რადგან იგი ორჯერ ამცირებს მახასიათებელი განტოლების ხარისხს და მნიშვნელოვნად ამარტივებს გაგლეჯის ψ_j და ψ_j^* ფუნქციების პოვნას.

მწკვრივებად დავშალოთ გარე დატვირთვის ფუნქცია:

$$P = \sum_{k=1}^{n} P_k \sin\beta_k y;$$

სადაც

$$\beta_k = \frac{k\pi}{b},$$

საძიებელი φ ფუნქცია ასევე მწკრივის სახით წარმოვადგინოთ:

$$\varphi = \sum \varphi_k \sin\beta_k y.$$

რადგან D_j და D_j^* ოპერატორებს მუდმივი კოეფიციენტები აქვს, (7) განტოლება დაიშლება ჩვეულებრივი წარმოებულების განტოლებად:

$$L_k\varphi_k = \frac{P_k}{D} - \sum_{j=1}^{n} L_{jk}\varphi_k\delta(x-a_j) - \sum_{j=1}^{n} L_{jk}^*\varphi_k^*\delta'(x-a_j), \qquad (9)$$

სადაც

$$L_k = \frac{d^4}{dx^4} - 2\beta_k^2\frac{d^2}{dx^2} + \beta_k^4 + in\left(t\frac{d^2}{dx^2} - r\beta_k\right);$$

$$L_{jk} = \frac{1}{D}\left(E_jJ_j\beta_k^2 + TE_jS_j\right)\beta_k^2\,\mathrm{Re}(\ldots) + \frac{1}{D}\left[-\frac{E_jS_j}{E}\beta_k^2\left(\frac{d^2}{dx^2} + \mu\beta_k^2\right) - \right.$$

$$\left. - \theta_j\beta_k^2 - t - \frac{E_jF_j}{E}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \mu\beta_k^2\right)\right]\frac{E}{n}I_m(\ldots) + i\frac{n}{DE}\left\{-\beta_k^2\left[\frac{12}{h^3}(r-\mu t)E_jJ_j + \right.\right.$$

$$\left.\left. + E\theta_j - E_jS_j\mu\beta_k^2\right]\mathrm{Re}(\ldots) + \frac{E}{n}\left[\frac{E_jF_j}{E}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \mu\beta_k^2\right) + \frac{E_jF_j}{E}\mu\beta_k^2\left(\frac{d^2}{dx^2} + \mu\beta_k^2\right)I_m(\ldots)\right\}.\right.$$

$$L_{jk}^* = i\frac{1}{DE}\left[-\frac{1}{n}E_jS_j\beta_k^2\,\mathrm{Re}(\ldots) + \frac{E_jF_j}{E}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \mu\beta_k^2\right)I_m(\ldots)\right].$$

შემდგომში აღნიშვნების სიმრავლის თავიდან ასაცილებლად "k" ინდექსი არ იწერება, მაგრამ იგულისხმება.

პრაქტიკაში, როგორც წესი, სისტემა შედგენილია ერთნაირი გარსებისაგან, რომლებიც ერთნაირ კონტურულ ელემენტებს ეყრდნობა, მაშინ $L_{jk} = L_k$, $L_{jk}^* = L_k$, ანუ L_j და L_j^* ოპერატორების "j" ინდექსზეა დამოკიდებული.

ოპერატორის გარდაქმნის შემდეგ

$$L_j\varphi\delta''(x-a_j)=\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}L_j\varphi\delta(x-a_j)-L_j\frac{d\varphi}{dx}\delta(x-a_j)\right]\frac{d}{dx}L_j\frac{d\varphi}{dx}\delta(x-a_j)+$$

$$+L_j\frac{d^2\varphi}{dx^2}\delta(x-a_j)=L_j\varphi(a_j)\delta''(x-a_j)-2L_j\varphi'(a_j)\delta'(x-a_j)+L_j\varphi_*''(a_j)\delta''(x-a_j).$$

ეს განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$L\varphi=\frac{P}{D}-\sum_{j=1}^{m}L_{1j}\varphi(a_j)\delta(x-a_j)-\sum_{j=1}^{m}L_{2j}\varphi(a_j)\delta'(x-a_j)-\sum_{j=1}^{m}L_{3j}\varphi(a_j)\delta''(x-a_j), \tag{10}$$

სადაც

$$L_{1j}\varphi(a_j)=L_j\varphi_*'(a_j)+L_j\varphi(a_j),$$

$$L_{2j}\varphi(a_j)=-2L_j\varphi_*'(a_j), \qquad L_{3j}=L_j\varphi(a_j).$$

(9) ფორმულის თანახმად, (10) განტოლების ამოხსნა ასე წარმოვადგინოთ:

$$\varphi=\sum_{k=1}^{4}C_k\Delta_k+\Delta^*.$$

რადგან (9) განტოლება შეიცავს δ ფუნქციის პირველ და მეორე წარმოებულებს, Δ_k განმსაზღვრელები შემდეგი გამოსახულებებით ჩაიწერება:

$$\Delta_k=\begin{vmatrix}
L_{11}\varphi_k(a_1) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
L_{21}\varphi_k(a_1) & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
L_{31}\varphi_k(a_1) & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\
L_{12}\varphi_k(a_1) & L_{12}\psi_1^*(a_2) & L_{12}\psi_1^{**}(a_2) & L_{12}\psi_1^{***}(a_2) & \dots & 0 & 0 & 0\\
L_{22}\varphi_k(a_1) & L_{22}\psi_1^*(a_2) & L_{22}\psi_1^{**}(a_2) & L_{32}\psi_1^{***}(a_2) & \dots & 0 & 0 & 0\\
L_{32}\varphi_k(a_1) & L_{32}\psi_1^*(a_2) & L_{32}\psi_1^{**}(a_2) & L_{32}\psi_1^{***}(a_2) & \dots & 0 & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
L_{1m}\varphi_k(a_1) & L_{1m}\psi_1^*(a_m) & L_{1m}\psi_1^{**}(a_m) & L_{1m}\psi_1^{***}(a_m) & \dots & 1 & 0 & 0\\
L_{2m}\varphi_k(a_1) & L_{2m}\psi_1^*(a_m) & L_{2m}\psi_1^{**}(a_m) & L_{2m}\psi_1^{***}(a_m) & \dots & 0 & 1 & 0\\
L_{3m}\varphi_k(a_1) & L_{3m}\psi_1^*(a_m) & L_{3m}\psi_1^{**}(a_m) & L_{3m}\psi_1^{***}(a_m) & \dots & 0 & 0 & 1\\
\varphi_k & -\psi_1^* & -\psi_1^* & -\psi_1^* & \dots & -\psi_1^* & -\psi_1^* & -\psi_1^*
\end{vmatrix} \tag{12}$$

k=1, 2, 3, 4.

გამოსახულება Δ^* განმსაზღვრელისათვის წარმოიქმნება Δ_k შემდეგი შეცვლით

$$\varphi_k(a_j)\to\varphi_*'(a_j), \qquad j=1,2,\dots,m,$$

სადაც φ_0^* არის $L_\varphi=\frac{P}{D}$ განტოლების კერძო ამონახსნი.

φ_k ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს ერთგვაროვანი განტოლების $L_\varphi=0$ კერძო ამონახსნს, შეიძლება ავირჩიოთ შემდეგი სახით:

$$\varphi_1=chz_1x; \qquad \varphi_2=shz_1x; \qquad \varphi_3=chz_2x; \qquad \varphi_4=chz_2x, \tag{13}$$

აქ $z_1=c+id$ და $z_3=c+if$ მახასიათებელი განტოლების კომპლექსური ფესვებია.

$$\psi_j^*=\frac{1}{z_3^2-z_1^2}\left\{\frac{1}{z_1}\left[c_*(x-a_j)+iS_*(x-a_j)\right]-\frac{1}{z_3}\left[\bar{c}_*(x-a_j)+i\bar{S}_*(x-a_j)\right]\right\}+H(x-a_j),$$

$$\psi_j^{**}=\frac{1}{z_3^2-z_1^2}\left[c_*(x-a_j)+iS_*(x-a_j)-\bar{c}_*(x-a_j)+i\bar{S}_*(x-a_j)\right]+H(x-a_j),$$

$$\psi_j^{***}=\frac{1}{z_3^2-z_1^2}\left\{z_1\left[c_*(x-a_j)+iS_*(x-a_j)\right]-z_3\left[\bar{c}_*(x-a_j)+i\bar{S}_*(x-a_j)\right]\right\}+H(x-a_j), \tag{14}$$

სადაც

(15)

$$C_s(x-a_j)=\cos d(x-a_j)\operatorname{sh}c(x-a_j);\qquad \overline{C}_s(x-a_j)=\cos f(x-a_j)\operatorname{sh}e(x-a_j);$$
$$S_s(x-a_j)=\sin d(x-a_j)\operatorname{ch}c(x-a_j);\qquad \overline{S}_s(x-a_j)=\sin f(x-a_j)\operatorname{sh}e(x-a_j);$$
$$C_s(x-a_j)=\cos d(x-a_j)\operatorname{ch}(x-a_j);\qquad \overline{C}_s(x-a_j)=\cos f(x-a_j)\operatorname{ch}e(x-a_j);$$
$$S_s(x-a_j)=\sin d(x-a_j)\operatorname{sh}c(x-a_j);\qquad \overline{S}_s(x-a_j)=\sin f(x-a_j)\operatorname{sh}e(x-a_j);$$

C_k მუდმივები კომპლექსური სიდიდეებია და განისაზღვრება სასაზღვრო პირობებიდან. ψ_f^*, ψ_f^{**}, ψ_f^{***} ფუნქციების ალგებრული დანამატები (12) განმსაზღვრელში აგრეთვე კომპლექსური სიდიდეებია; თუ მათ წარმოვადგენთ შესაბამისად $\overline{L}_f = i\overline{M}_f$, $\overline{L}'_f = i\overline{M}'_f$, $\overline{L}^*_f = i\overline{M}^*_f$ სახით (11) გამოსახულება ასე გადაიწერება:

$$\varphi=\sum_{k=1}^{4}C_k\varphi_k+\sum_{k=1}^{4}C_k\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\overline{L}_j=i\overline{M}_j\right)\psi_j^{*}+\left(\overline{L}'_j=i\overline{M}'_j\right)\psi_j^{**}+\left(\overline{L}^*_j=i\overline{M}^*_j\right)\psi_j^{***}\right] \tag{16}$$

(14) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\varphi=\sum_{k=1}^{4}(X_{2k}+iX_{2k})\varphi_k+\sum_{k=1}^{4}(X_{2k-1}+iX_{2k})\varphi_k\sum\{M_jC_s(x-a_j)+$$
$$+L_jS_s(x-a_j)+M'_jC_s(x-a_j)+L'_jS_s(x-a_j)+\overline{M}_j\overline{C}_s(x-a_j)+$$
$$+\overline{L}_j\overline{S}_s(x-a_j)+\overline{M}'_j\overline{C}_s(x-a_j)+\overline{L}'_j\overline{S}_s(x-a_j)+[M'_jC_s(x-a_j)-$$
$$+L'_jC_s(x-a_j)+M'_jS_s(x-a_j)-L'_jC_s(x-a_j)+\overline{M}'_j\overline{S}_s(x-a_j)-$$
$$-\overline{L}'_j\overline{C}_s(x-a_j)+\overline{M}'_j\overline{S}_s(x-a_j)-L'_j\overline{C}_s(x-a_j)]\}H(x-a_j).$$

აქ მიღებულია აღნიშვნების შემდეგი სისტემა:

$$M_j=\frac{\overline{L}_j\alpha'_s+\overline{M}_j\gamma'_s}{(\overline{\alpha}_s)^2+(\overline{\gamma}_s)^2}+\frac{\overline{L}'_j\alpha'_s+\overline{M}'_j\gamma'_s}{\alpha'^2_s+\gamma'^2_s};\qquad L_j=\frac{\overline{L}_j\gamma'_s+\overline{M}_j\alpha'_s}{(\overline{\alpha}_s)^2+(\overline{\gamma}_s)^2}+\frac{\overline{L}'_j\gamma'_s+\overline{M}'_j\alpha'_s}{\alpha'^2_s+\gamma'^2_s};$$
$$\overline{M}_j=\frac{\overline{L}_j\overline{\alpha}'_s+\overline{M}_j\overline{\gamma}'_s}{(\overline{\alpha}_s)^2+(\overline{\gamma}_s)^2}+\frac{\overline{L}'_j\overline{\alpha}'_s+\overline{M}'_j\overline{\gamma}'_s}{\alpha'^2_s+\gamma'^2_s};\qquad \overline{L}_j=\frac{\overline{L}_j\overline{\gamma}'_s+\overline{M}_j\overline{\alpha}'_s}{(\overline{\alpha}_s)^2+(\overline{\gamma}_s)^2}+\frac{\overline{L}'_j\overline{\gamma}'_s+\overline{M}'_j\overline{\alpha}'_s}{\alpha'^2_s+\gamma'^2_s};$$
$$M'_j=\frac{\overline{L}'_j\alpha'_s+\overline{M}'_j\gamma'_s}{\alpha'^2_s+\gamma'^2_s};\qquad L'_j=\frac{\overline{L}'_j\gamma'_s+\overline{M}'_j\alpha'_s}{\alpha'^2_s+\gamma'^2_s};$$

$$\alpha'_s=c\alpha_s-d\gamma_s;\qquad \gamma'_s=d\alpha_s-c\gamma_s;\qquad \overline{\alpha}'_s=e\alpha_s-f\gamma_s;\qquad \overline{\gamma}'_s=f\alpha_s-e\gamma_s;$$
$$\alpha'_s=c\alpha_s-d\gamma_s;\qquad \gamma'_s=d\alpha_s-c\gamma_s;\qquad \overline{\alpha}'_s=e\alpha_s-f\gamma_s;\qquad \overline{\gamma}'_s=f\alpha_s-e\gamma_s;$$
$$\alpha_s=\gamma_3-\alpha_3;\quad \gamma_s=\gamma_4-\alpha_4;\quad \alpha_3=c^2-d^2;\quad \alpha_4=2cd;\quad \gamma_3=e^2-f^2;\quad \gamma_4=2ef.$$

(17) ფორმულაში თუ გავყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, φ_k ფუნქციის გათვალისწინებით

$$\varphi_1=chz_1x=C_s(x)+iS_s(x);\qquad \varphi_2=shz_1x=C_s(x)+iS_s(x);$$
$$\varphi_3=chz_2x=\overline{C}_s(x)+i\overline{S}_s(x);\qquad \varphi_4=chz_2x=\overline{C}_s(x)+i\overline{S}_s(x).$$

და დამრეცი გარსების დრეკადობის თეორიის თანაფარდობების და (3) თანაფარდობის გამოყენებით მივიღებთ გამოსათვლელ ფორმულას გადაადგილების, ძალისა და მომენტებისათვის.

შესაძლებელია სხვადასხვა გამარტივება. მაგალითად, თუ შეიძლება უგულებელვყოთ წიბოს ექსცენტრისიტეტი, მაშინ (9) განტოლების L_{jk} და L^*_{jk} ოპერატორებში უნდა ჩაითვალოს $S_j = 0$.

თუ ამის გარდა წიბოები არ აღიქვამს გრძივ ძალვას, ამას ზოგჯერ ადგილი აქვს შუალედურ წამწეებზე თავისუფალი დაყრდნობისას, მაშინ $L^*_{jk} = 0$, ხოლო L_{jk} ოპერატორები უბრალო კოეფიციენტებად გადაიქცევა:

$$L_{\beta} = \frac{1}{D} E_j J_j \beta^4 \operatorname{Re}(...) - in \frac{12\beta_x^2}{DEh^3} (r - \mu t) E_j J_j \operatorname{Re}(...) \tag{18}$$

გარსის დაძაბული მდგომარეობის უფრო დაშორებულ ელემენტებზე მოქმედების გამოკვლევის საჭიროების შემთხვევაში შეიძლება განვიხილოთ ოთხი ან ხუთტალღიანი საფარი. ამ დროს როგორც (11) და (13) ფორმულებიდან ჩანს, გაანგარიშებისას მნიშვნელოვანი სირთულეები არ იქმნება. მაშ, ასე, (10) განტოლებაში ჩავთვალოთ, რომ $m = 2$.

თუ oy ღერძს შევათავსებთ საფარის პლანის სიმეტრიის ღერძთან, (10) განტოლების ამოხსნა, მესამე თავის (7) ფორმულის თანახმად, ასე ჩაიწერება:

$$\varphi = \varphi_0 + L_{11}\varphi\left(-\frac{a}{2}\right)\psi'\left(x+\frac{a}{2}\right) + L_{21}\varphi\left(-\frac{a}{2}\right)\psi''\left(x+\frac{a}{2}\right) + L_{31}\varphi\left(-\frac{a}{2}\right)\psi'''\left(x+\frac{a}{2}\right) +$$

$$+ L_{12}\varphi\left(\frac{a}{2}\right)\psi'\left(x-\frac{a}{2}\right) + L_{22}\varphi\left(\frac{a}{2}\right)\psi''\left(x-\frac{a}{2}\right) + L_{32}\varphi\left(\frac{a}{2}\right)\psi'''\left(x-\frac{a}{2}\right). \tag{19}$$

გავყოთ გარე დატვირთვა სიმეტრიულ და უკუსიმეტრიულ ნაწილებად და გავითვალისწინებთ, რომ

$$L_{11}\varphi^{s}\left(-\frac{a}{2}\right) = L_{12}\varphi^{s}\left(-\frac{a}{2}\right); \quad L_{21}\varphi^{s}\left(-\frac{a}{2}\right) = L_{22}\varphi^{s}\left(-\frac{a}{2}\right); \quad L_{31}\varphi^{s}\left(-\frac{a}{2}\right) = L_{32}\varphi^{s}\left(-\frac{a}{2}\right).$$

გვექნება

$$\varphi^{s} = \varphi_0^{s} + L_{12}\varphi^{s}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\psi_{1s}^{-} + \psi_{1s}^{-}\right) + L_{22}\varphi^{s}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\psi_{1s}^{-} + \psi_{2s}^{-}\right) + L_{32}\varphi^{s}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\psi_{1s}^{-} + \psi_{2s}^{-}\right).$$

სადაც

$$\psi_{1s}^{*} = \frac{1}{2}\left[\psi^{*}\left(x+\frac{a}{2}\right) + \psi^{*}\left(-x+\frac{a}{2}\right)\right]; \quad \psi_{2s}^{*} = \frac{1}{2}\left[\psi^{*}\left(x-\frac{a}{2}\right) + \psi^{*}\left(-x+\frac{a}{2}\right)\right].$$

უკუსიმეტრიული დეფორმაციისათვის, იმის გათვალისწინებით, რომ

$$L_{11}\varphi^{n}\left(-\frac{a}{2}\right) = -L_{12}\varphi^{n}\left(\frac{a}{2}\right); \quad L_{21}\varphi^{n}\left(-\frac{a}{2}\right) = -L_{22}\varphi^{n}\left(+\frac{a}{2}\right);$$

$$L_{21}\varphi^{n}\left(-\frac{a}{2}\right) = -L_{32}\varphi^{n}\left(\frac{a}{2}\right),$$

გვექნება

$$\varphi^{n} = \varphi_0^{n} + L_{12}\varphi_0^{n}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\psi_{2n}^{*} - \psi_{1n}^{*}\right) + L_{22}\varphi_0^{n}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\psi_{2n}^{*} - \psi_{1n}^{*}\right) +$$

$$+ L_{32}\varphi_0^{n}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\psi_{2n}^{*} - \psi_{1n}^{*}\right). \tag{21}$$

სადაც

$$\psi_{1n}^{*} = \frac{1}{2}\left[\psi^{*}\left(x+\frac{a}{2}\right) + \psi^{*}\left(-x+\frac{a}{2}\right)\right]; \quad \psi_{2n}^{*} = \frac{1}{2}\left[\psi^{*}\left(x-\frac{a}{2}\right) + \psi^{*}\left(-x+\frac{a}{2}\right)\right].$$

$$\psi^{*}\left(x+\frac{a}{2}\right); \ \psi^{*}\left(-x+\frac{a}{2}\right); \ \psi^{*}\left(x-\frac{a}{2}\right); \ \psi^{*}\left(-x+\frac{a}{2}\right)$$

ფუნქციები და მათი წარმოებულები განისაზღვრება (13) ფორმულებით, თუ მათში დავუშვებთ, რომ

$$x = \pm x, \ aj = \pm\frac{a}{2},$$

ω_0^C ფუნქცია არის $L\varphi_0 = \frac{P}{D}$ განტოლების ამოხსნა სიმეტრიული დატვირთვისას, ხოლო ω_0^H უკუსიმეტრიული დატვირთვისას.

თუ (20) ფორმულაში გავყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს და გამოვიყენებთ დამრეცი გარსების სიხისტის თეორიის თანაფარდობებს, მივიღებთ გადაადგილებების, ძალვისა და მომენტების განმსაზღვრელ ფორმულებს მწკრივების სახით:

$$U_1 = \sum_{k=1}^{N} U_{1k} \sin \beta_k y; \qquad U_{11} = \sum_{k=1}^{N} U_{11k} \cos \beta_k y$$

აქ U_{ik} კოეფიციენტები განისაზღვრება შემდეგი სახის ფორმულაბით:

$$U_{1k} = AS_1(X_2D' - X_1C') + C_1(X_1D' - X_2C') + \overline{S}_1(X_4F' - X_3E') + \overline{C}_1(X_3F' - X_4E') +$$
$$+ A' - \frac{1}{2}\left[S_1(LD' - MC') + C_1(MD' - LC') + \overline{S}_1(\overline{L}F' - \overline{M}E') + \overline{C}_1(\overline{M}F' - \overline{L}E') + \right.$$
$$+ S_1(L'D' - M'C') + C_1(M'D' - L'C') + \overline{S}_1(L'F' - M'E') +$$
$$\left. + \overline{C}_1(M'F' - L'E')\right]_{\left(x \pm \frac{a}{2}\right)} \cdot H\left(\pm x \pm \frac{a}{2}\right)\Bigg\}$$

$U_{\ell k}$ კოეფიციენტები განისაზღვრება ფორმულებით:

$$U_{2k} = A\left\{S_2(X_2D' - X_1C') + C_2(X_1D' - X_2C') + \overline{S}_2(X_4F' - X_3E') + \overline{C}_2(X_3F' - X_4E') + \right.$$
$$+ A' - \frac{1}{2}\left[S_2(LD' - MC') + C_2(MD' - LC') + \overline{S}_2(\overline{L}F' - \overline{M}E') + \overline{C}_2(\overline{M}F' - \overline{L}E') + \right.$$
$$+ S_2(L'D' - M'C') + C_2(M'D' - L'C') + \overline{S}_2(L'F' - M'E') +$$
$$\left. + \overline{C}_2(M'F' - L'E')\right]_{\left(x \pm \frac{a}{2}\right)} \cdot H\left(\pm x \pm \frac{a}{2}\right)\Bigg\}.$$

კვადრატულ ფრჩხილებში მყოფი ფუნქციები, ერთეულოვან ფუნქციებთან ერთად $H\left(\pm x \pm \frac{a}{2}\right)$ მიიღება ნიშნების ყველანაირი შესაძლო კომბინაციით x და $a/2$-თვის.

(23) და (24) ფორმულებში შეტანილია შემდეგი აღნიშვნები:

$$M = \frac{\widetilde{L}\alpha_1' + \widetilde{M}\gamma_1'}{(\alpha_1')^2 + (\gamma_1')^2} + \frac{\widetilde{L}\alpha_2' - \widetilde{M}'\gamma_2'}{\alpha_2'^2 + \gamma_2'^2}; \qquad L = \frac{\widetilde{L}\gamma_1' + \widetilde{M}\alpha_1'}{(\alpha_1')^2 + (\gamma_1')^2} + \frac{\widetilde{L}\gamma_2' - \widetilde{M}'\alpha_2'}{\alpha_2'^2 + \gamma_2'^2};$$

$$\overline{M} = \frac{\widetilde{L}\overline{\alpha}_1' + \widetilde{M}\overline{\gamma}_1'}{(\overline{\alpha}_1')^2 + (\overline{\gamma}_1')^2} + \frac{\widetilde{L}\overline{\alpha}_2' - \widetilde{M}'\overline{\gamma}_2'}{\alpha_2'^2 + \gamma_2'^2}; \qquad L = \frac{\widetilde{L}\overline{\gamma}_1' + \widetilde{M}\overline{\alpha}_1'}{(\overline{\alpha}_1')^2 + (\overline{\gamma}_1')^2} + \frac{\widetilde{L}\overline{\gamma}_2' - \widetilde{M}'\overline{\alpha}_2'}{\alpha_2'^2 + \gamma_2'^2};$$

$$M' = \frac{\widetilde{L}\alpha_2' + \widetilde{M}'\gamma_2'}{\alpha_2'^2 + \gamma_2'^2}; \qquad L' = \frac{\widetilde{L}\gamma_2' + \widetilde{M}\alpha_2'}{\alpha_2'^2 + \gamma_2'^2};$$

სადაც

$$\widetilde{L} = \operatorname{Re} L_{12}\varphi_0'\left(\frac{a}{2}\right); \qquad \widetilde{M} = \operatorname{Im} L_{12}\varphi_0'\left(\frac{a}{2}\right);$$

$$\widetilde{L}' = \operatorname{Re} L_{22}\varphi_0'\left(\frac{a}{2}\right); \qquad \widetilde{M}' = \operatorname{Im} L_{22}\varphi_0'\left(\frac{a}{2}\right);$$

$$\widetilde{L}'' = \operatorname{Re} L_{32}\varphi_0'\left(\frac{a}{2}\right); \qquad \widetilde{M}'' = \operatorname{Im} L_{32}\varphi_0'\left(\frac{a}{2}\right);$$

დასკვნა

- დასამუშავებელია მრავალტალღიანი საფარის გაანგარიშების მეთოდი წრფივი და არაწრფივი დეფორმაციის პირობებში, რომელიც საშუალებას იძლევა ერთნაირი სიზუსტით განისაზღვროს ძაბვები და მომენტები;
- გადმოცემულია დამრეცი გარსების ერთმალიანი მრავალკონტურიანი საფარის გაანგარიშება როგორც კონტინუალურ არეში, ასევე კიდეების და წვეროების მახლობლობაში.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] Постнов В.А., Розин Л.А. Метод конечных элементов в теории пластин и оболочек. *В кн.: Теория оболочек и пластин: Тр. IX Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Судостроение, Ленинград, 1975, с. 292-296.*

[2] Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. *Наука, Москва, 1967. -984 с.*

[3] Grosskurth J.F. Shear buckling of square perforated plates. *M.S.: Thesis. – Depart. Struc. Eng., Cornell. Univ., New York, 1973, August, p. 131-14 .*

[4] Grosskurth J.F., White R.N., Gallagher R.H. Shear buckling of square perforated plates. *J. Eng., Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1976, 102, N 6, p. 1025-1040.*

[5] Налоев В.Г. Устойчивость пластин с вырезами. *В кн.: Теория оболочек и пластин: Тр. IX Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ленинград, 1973, Судостроение, Ленинград, 1975, с. 138-140.*

[6] Михайлов Б.К., Кипиани Г.О. Деформированность и устойчивость пространственных пластинчатых систем с разрывными параметрами. *Стройиздат СПб, С.-Петербург, 1996. -442 с.*

[7] Kipiani Gela. Definition of critical loading on three-layered plate with cuts by transition from static problem to stability problem. *Contemporary Problems in Architecture and Construction. Selected, peer reviewed papers the 6th International Conference on Contemporary Problems of Architecture and Construction, June 24-27, 2014, Ostrava, Czech Republic. Edited by Darja Kubeckov. Trans Tech. publications LTD, Switzerland, 2014, pp. 143-150.*

MATHEMATICAL METHOD OF SINGLE-SPAN DEPRESSED SHELLS MULTI-WACE COVERING

Nino Chorkhauli*, Natruli Kharchavanidze**, Bela Tsikaradze***,
Irina Paradashvili***
*Georgian Technical University,
**Georgian Academy of business Science,
***N(N)LP Progress in Education and Science

Abstract: Is stated the analysis of single-span depressed shells multi-wave covering in continual are, as well as in adjacent of edges and vertexes. The stated method is based on linearization of initial equations by successive loading method and introduction of unknown coefficients in desired solutions that leads to rapid convergence of series and rather compact algorithm of computation.

უწყვეტ გარემოთა მექანიკის გამოყენებითი ამოცანები

Applied Problems of Continuum Mechanics

Some Biharmonic Problems and their Applications

Hovik Matevossian[1,2], **Mikhail Nikabadze**[3,4], **Armine Ulukhanyan**[4]

[1] Federal Research Center "Computer Science and Control", Russian Academy of Sciences, Vavilov str., 40, Moscow 119333, Russia
[2] Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolomskoe Shosse, 4, Moscow 125993, Russia
[3] Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory, 1, Moscow 119991 Russia
[4] Bauman Moscow State Technical University, Baumanskaya 2-ya, str., 5, Moscow 105005, Russia

E-mail: hmatevossian@graduate.org, nikabadze@mail.ru, armine_msu@mail.ru

Abstract. In the present paper we study the some properties of solutions of biharmonic problems. Namely, we study the boundary value problems Navier and Farwig for the biharmonic equation. For solving these biharmonic problems with application, in particular, to radar imaging, we need to solve boundary value problems Dirichlet and Neumann for the Poisson equation using the scattering model. In order to select suitable solutions, we solve the Poisson equation with the corresponding boundary conditions Dirichlet and Neumann, that is, some criterion function is minimized in the Sobolev norms. Under appropriate smoothness assumptions, these problems may be reformulated as boundary value problems for the biharmonic equation.

1. Introduction

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, be a bounded Lipschitz domain with connected boundary $\partial\Omega$, and $\Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega}$ is the closure of Ω. We consider the following boundary value problems for the biharmonic equation in Lipschitz domains:

$$\Delta^2 u = f, \qquad x \in \Omega \tag{1}$$

with the Navier boundary conditions

$$\begin{cases} u = g_1 & \text{on} \quad \partial\Omega, \\ \sigma\Delta u + (1-\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = g_2 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

or with the R. Farwig [5] boundary conditions

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \nu} = h_1 & \text{on} \quad \partial\Omega, \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = h_2 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

where ν is the outer unit normal vector to the domain with the Lipschitz boundary $\partial\Omega$. The coefficient σ is a constant known as the Poisson ratio, $\frac{1}{n-1} < \sigma < 1$.

For $n = 2$, these problems and also the Neumann problem are related to the study of the transverse vibrations of a thin plate with a free edge and which occupies at rest a planar region of shape $\partial\Omega$. The coefficient σ represents the Poisson's ratio of the material that the plate is made of. For more details on the physical interpretation of the Neumann problem and on the Poisson's ratio σ, we refer, for example, to [3]. Note the paper [4], where the author studies the dependence of the vibrational modes of a plate subject to homogeneous boundary conditions upon the Poisson's ratio $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, providing also a perturbation formula for the frequencies as functions of the Poisson's coefficient.

Note that standard elliptic regularity results are available in [7]. This monograph covers higher order linear and nonlinear elliptic boundary value problems, mainly with the biharmonic (polyharmonic) operator as leading principal part. Underlying models and, in particular, the role of different boundary conditions are explained in detail. As for linear problems, after a brief summary of the existence theory and L^p and Schauder estimates, the focus is on positivity. The required kernel estimates are also presented in detail.

In [6] and [7], the spectral and positivity preserving properties for the inverse of the biharmonic operator under Steklov and Steklov–type boundary conditions are studied. These are connected with the first Steklov eigenvalue. It is shown that the positivity preserving property is quite sensitive to the parameter involved in the boundary condition.

Elliptic problems with parameters in the boundary conditions are called Steklov problems from their first appearance in [29]. In the case of the biharmonic operator, these conditions were first considered in [2], [11], who studied the isoperimetric properties of the first eigenvalue.

In [5], the boundary value problems for the biharmonic equation and the Stokes system are studied in a half space, and, using the Schwartz reflection principle in weighted L^q -space the uniqueness of solutions of the Stokes system or the biharmonic equation is proved.

Boundary value problems for a biharmonic (polyharmonic) equation and for the elasticity system in unbounded domains are studied in [12]– [21], in which the condition of the boundedness of the following weighted Dirichlet integral of solution is finite, namely

$$\int_{\Omega} |x|^a |\partial^\alpha u|^2 \, dx < \infty, \quad a \in \mathbb{R},$$

where $a \in \mathbb{R}$ is a fixed number and $|\partial^\alpha u|^2$ denotes the Frobenius norm of the Hessian matrix of u. In particular, in [12]– [21] has been studied the dimension of the space of the solutions to the boundary value problems for a biharmonic (polyharmonic) equation and for the elasticity system, providing explicit formulas which depends on n and a.

In [8]– [10], generalizations of the Hardy inequality were established for bounded and for a wide class of unbounded domains, and applied these to investigate boundary value problems for elliptic equations and systems. In particular, the problems of the existence, the uniqueness, the stability and the asymptotic expansions of solutions of boundary value problems were studied.

Notation: $C_0^\infty(\Omega)$ is the space of infinitely differentiable functions in Ω with compact support in Ω; $H^m(\Omega)$ is the Sobolev space obtained by the completion of $C^\infty(\overline{\Omega})$ with respect to the norm

$$\|u(x); H^m(\Omega)\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \le m} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \; m = 1, 2,$$

where $\partial^\alpha \equiv \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ is a multi-index, $\alpha_i \ge 0$ are integers, and $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ is the space obtained by the completion of $C_0^\infty(\Omega)$ with respect to the norm $||u(x); H^m(\Omega)||$; $\overset{\circ}{H}{}^m_{loc}(\Omega)$ is the space obtained by the completion of $C_0^\infty(\Omega)$ with

respect to the family of semi-norms

$$\|u(x); H^m(\Omega \cap B_0(R))\| = \left(\int\limits_{\Omega \cap B_0(R)} \sum_{|\alpha| \le m} |\partial^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

for all open balls $B_0(R) := \{x : |x| < R\}$ in $\mathbb{R}^n$ for which $\Omega \cap B_0(R) \neq \emptyset$. Finally $H^{1/2}(\partial\Omega)$ is the usual trace space on the boundary and $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ is its dual (see, for ex., [1]).

If we set $\sigma = 1$, for the biharmonic equation the problems reads, with the Navier boundary conditions

$$\begin{cases} u = g_1 & \text{on} \quad \partial\Omega, \\ \Delta u = g_2 & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

or the Farwig boundary conditions

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \nu} = h_1 & \text{on} \quad \partial\Omega, \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} = h_2 & \text{on} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Definition 1. *A solution of the biharmonic equation* (1) *in* Ω *is a function* $u \in H^2(\Omega)$ *such that, for every function* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*, the following integral identity holds:*

$$\int_\Omega \Delta u \, \Delta\varphi \, dx = \int_\Omega f \, \varphi \, dx. \tag{6}$$

Definition 2. *A function* u *is a solution of the Navier problem* (1),(4) *with* $g_1 = g_2 = 0$ *, if* $u \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ *such that the integral identity* (6) *holds for every function* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definition 3. *A function* u *is a solution of the Farwig problem* (1),(5) *with* $h_1 = h_2 = 0$*, if* $u \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$*,* $\partial u/\partial\nu = 0$ *on* $\partial\Omega$*, and the integral identity* (6) *holds for every function* $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2(\mathbb{R}^n)$ *such that* $\partial\varphi/\partial\nu = 0$ *on* $\partial\Omega$.

2. Scattering model

In the section we derive the mathematical model used for describing the radar process. In our parametrization the unknown is the height function H. As will be shown the height function is determined in two steps. In the first step $\mathfrak{L}(H)$, with $\mathfrak{L}$ a certain second-order differential operator, is determined. After retrieving H the equation $\mathfrak{L}(H) = f$ must be solved. To a good approximation the operator $\mathfrak{L}$ can be replaced by the Laplacian. So the second step simply consists of solving the Poisson equation over some smooth bounded domain, usually a rectangular region in the plane. The problem here is that no natural boundary conditions are available.

Here we will briefly discuss the mathematical inverse problem to be resolved in order to recover the ground topography height function from radar data. First cylindrical coordinates (r, φ, z) are introduced according to Fig. 1, where it is understood that the aircraft is flying at a constant speed along the z-axis. Further r denotes the distance from a point on the ground surface to the z-axis and φ is the angle between radius vector and a horizontal plane through the z-axis. Then the ground surface may be described by a function $H(r, z)$ through the equation

$$\frac{H(r, z)}{r} - \varphi = 0. \tag{7}$$

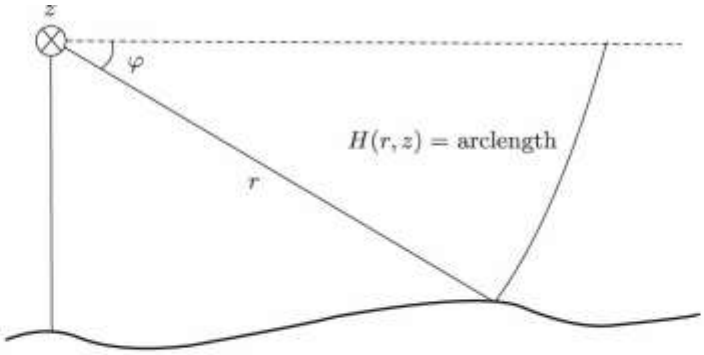


Figure 1. The ground surface measured at a fixed aircraft position.

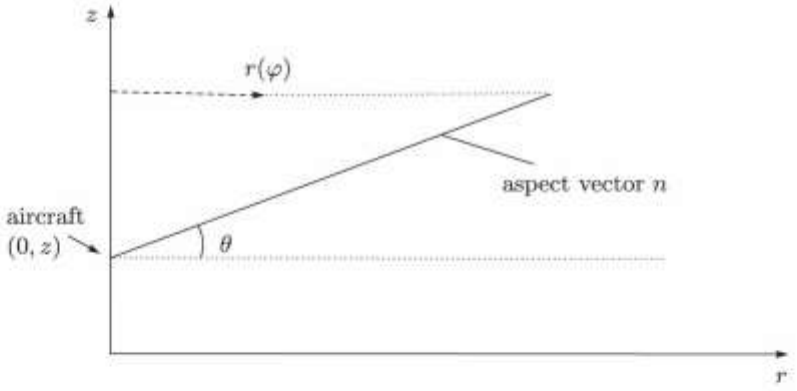


Figure 2. The measuring geometry as seen from above.

When r is large, $-H(r,z)$ is approximately a Cartesian height function. Fig. 2 shows a top view of the same scene. We have also indicated an aspect vector from the aircraft to some point on the ground, forming an angle θ with a vertical plane through the aircraft. Normalized to unit length, the aspect vector is denoted by $\hat{n}$. Accordingly

$$\hat{n} = \cos\theta\,\hat{r}(\varphi) + \sin\theta\,\hat{z}. \tag{8}$$

Here $\hat{r}(\varphi)$ denotes the cylindrical unit basis vector corresponding to the r-coordinate for the ground point as shown in the Fig. 2. For a point on the ground surface with coordinates (r,φ,z) we obtain, from Eq. (7), the following expression for the ground surface normal $\bar{m}$,

$$\bar{m} = grad\left(\frac{H(r,z)}{r} - \varphi\right) = \frac{\partial(H/r)}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial z}\hat{z} - \frac{1}{r}\hat{\varphi}. \tag{9}$$

Let $\hat{m}$ denote the normalized normal. Then

$$\hat{m}\circ\hat{n} = \left(r\cos\theta\frac{\partial(H/r)}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial H}{\partial z}\right) : \sqrt{1 + \left(\frac{\partial(H/r)}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2}. \tag{10}$$

Note that (r,φ,z) in Eq. (10) are related to the ground surface point and not to the position of the aircraft.

Let $(z_0, 0)$ be a position of the aircraft and R the distance to some point on the surface. According to Fig. 3 the coordinates (r,z) are then equal to $(z_0 + R\sin\theta, R\cos\theta)$. Next, to

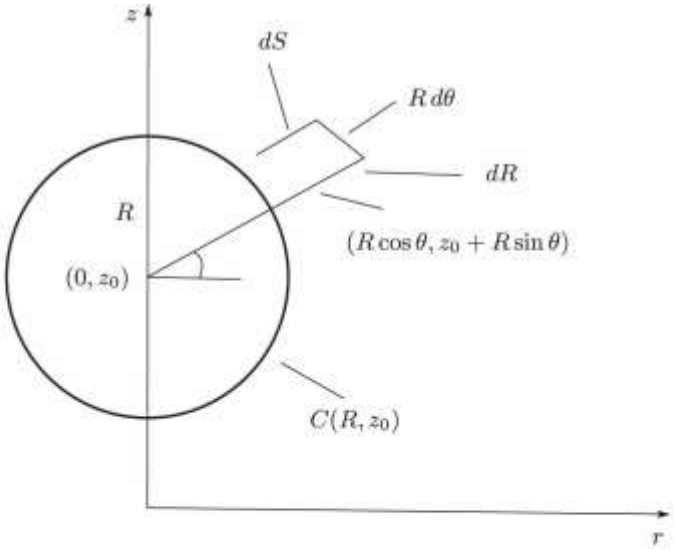


Figure 3. The coordinate system used to describe an infinitesimal surface element, dS.

obtain a scattering model we will assume that the reflectivity from a ground surface element (see Fig. 4) is

$$\approx \frac{\hat{m} \circ \hat{n}}{R} dR\, d\theta. \tag{11}$$

From Fig. 4, where a vertical plane through $(z_0, 0)$ (the aircraft) and the ground point $(z_0 + R\sin\theta, R\cos\theta)$ is displayed, we conclude that the solid angle $d\Omega$ under which the surface element dS is seen from the antenna is approximately

$$\frac{dR\, \cos\alpha\, R d\, d\theta}{R^2} = -\frac{\hat{m} \circ \hat{n}}{R} dR\, d\theta.$$

In expression (11) we are consequently assuming that the local reflectivity is proportional to the solid angle occupied by the infinitesimal surface element dS. The total reflected signal $G(R, z_0)$ from all points at a distance R from the antenna may now be obtained by integration over the circle $C(R, z_0) = \{(r, z) : (z - z_0)^2 + r^2 = R^2\}$ in Fig. 3.

$$G(R, z_0)dR = c \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\hat{m} \circ \hat{n}(z_0 + R\cos\theta, R\sin\theta)}{R} d\theta dR$$

i.e.

$$RG(R, z_0) = c \int_{-\pi}^{\pi} \hat{m} \circ \hat{n}(z_0 + R\cos\theta, R\sin\theta) d\theta. \tag{12}$$

Assuming that $\hat{m} \circ \hat{n}$ is small Eq. (10) may be replaced by

$$\hat{m} \circ \hat{n} = r\cos\theta \frac{\partial(H/r)}{\partial r} + \sin\theta \frac{\partial H}{\partial z}.$$

By inserting this into Eq. (12) we get, after multiplying by R,

$$R^2 G(R, z_0) = c \int_{-\pi}^{\pi} \left(rR\cos\theta \frac{\partial(H/r)}{\partial r} + R\sin\theta \frac{\partial H}{\partial z}\right) d\theta.$$

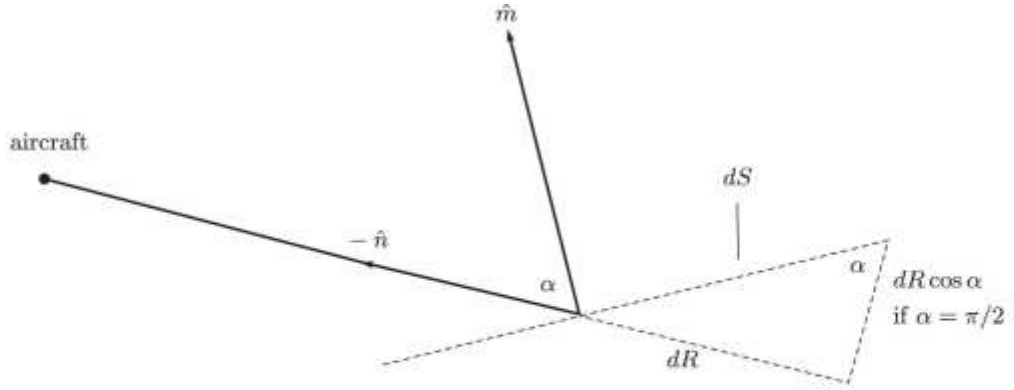


Figure 4. The infinitesimal surface element, dS, as it is seen from the aircraft.

Using the parametrization

$$z = z_0 + Rsin\theta, \quad r = Rcos\theta,$$

this may be rewritten as a curve integral over $C(R, z_0)$, with $dz = R\cos\theta d\theta$ and $dr = -R\sin\theta d\theta$,

$$R^2 G(R, z_0) = c \int_{C(R,z_0)} \left(r\frac{\partial(H/r)}{\partial r}dz - \frac{\partial H}{\partial z}dr\right). \tag{13}$$

By applying Green's formula we get

$$R^2 G(R, z_0) = c \iint_{D(R,z_0)} \mathfrak{L}(H)(r, z)dzdr, \tag{14}$$

where D is the disc,

$$D(R, z_0) = \{(r, z) : (z - z_0)^2 + r^2 \leq R^2\}$$

and

$$\mathfrak{L}(H) = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}(H/r)\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(H). \tag{15}$$

The problem of finding the height function H from radar data $G(r, z)$ may now be divided into two parts:

(a) First solve the integral equation (14) for $\mathfrak{L}(H)(r, z) = f(r, z)$.

(b) Next solve the partial differential equation

$$\mathfrak{L}(H) = f \tag{16}$$

for H. We note that if r is large and if $\hat{m} \circ \hat{n}$ is small it is reasonable to make the approximation

$$\mathfrak{L}(H) \approx \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \Delta H$$

so that Eq. (16) becomes Poisson's equation. To consider the first problem (a), both members in Eq. (14) are differentiated with respect to R. Then we get

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}(R^2 G(R, z_0)) = c \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{L}(H)(z_0 + R\cos\nu, R\sin\nu)d\nu,$$

where the right-hand side is proportional to the average of $\mathfrak{L}(H)$ over the circle $C(R, z_0)$. In [2] an explicit solution is given for this problem of recovering the function $\mathfrak{L}(H)(r, z)$ when the average of $\mathfrak{L}(H)$ is known for all circles $C(R, z_0)$ with center on the z-axis and with arbitrary radius R. The solution formula is

$$\mathfrak{L}(H)^{(F,F)}(\sigma,\omega) \sim |\omega|\big[\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\{R^2 G(r,z)\}\big]^{(F,H_0)}(\sigma,\sqrt{\omega^2+\sigma^2}). \tag{17}$$

Here the notation (F, F) means that we have taken the Fourier transform with respect to both the variables and (F, H_0) means that we have taken Fourier transform with respect to the first variable and the Hankel-zero transform with respect to the second. After some calculations Eq. (17) may be rewritten

$$\mathfrak{L}(H)^{(F,F)}(\sigma,\omega) \sim |\omega|\sqrt{\omega^2+\sigma^2}[RG(r,z)]^{(F,H_1)}(\sigma,\sqrt{\omega^2+\sigma^2}). \tag{18}$$

Formula (18) may now be used in order to recover the function $\mathfrak{L}(H)$ in spatial coordinates. Of course, approximating $\mathfrak{L}(H)$ by ΔH we could rewrite Eq. (18) as

$$H^{(F,F)}(\sigma,\omega) \sim |\omega|\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\sigma^2}}[RG(r,z)]^{(F,H_1)}(\sigma,\sqrt{\omega^2+\sigma^2}), \tag{19}$$

where H_1 denotes that we have taken the Hankel-one transform with respect to the second variable. Then we could obtain H directly by a two timensional Fourier transform. However, our solution might be expected to have errors caused by, e.g. noisy radar data and errors caused by the particular numerical implementation of the inversion formula (17) (or Eq. (18)) and therefore we would rather prefer to divide the solution procedure into the two steps described above and to use the second step, the solution of Poisson's equation, so that we perform some kind of regularization of the final solution. Note also that by using Eq.(19) as our solution formula we have tacitly assumed periodic boundary conditions for the Poisson equation.

3. Solution concepts for the Poisson equation

In this section we discuss different possibilities of defining a unique height function. Essentially our approach consists in minimizing some norm of the solution provided that it also satisfies the Poisson equation. In particular we consider the L^2- and H^1-norms. We also show how these two optimization problems may be reformulated as boundary value problems for the biharmonic equation. Note that the corresponding Poisson problem is well-posed unless $\sigma = 1$.

In the domain Ω for the Poisson equation we consider the following boundary value problems

$$\Delta u = f, \quad x \in \Omega \tag{20}$$

with the Dirichlet boundary condition

$$u = g \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \tag{21}$$

or the Neumann boundary conditions

$$\nabla u \cdot \nu = h \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \tag{22}$$

where ν is the outer unit normal vector to $\partial\Omega$.

The boundary operators are independent of any particular choice of orientation for the rectangular coordinate systems. Finally, for Ω a rectangular region in, e.g., the plane

$$\Omega = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}, \tag{23}$$

there may be the following boundary conditions

$$u(a,y) = u(b,y), \quad u(x,c) = u(x,d), \tag{24}$$

or the periodic boundary conditions

$$u_x(a,y) = u_x(b,y), \quad u_y(x,c) = u_y(x,d). \tag{25}$$

Provided g is smooth enough boundary conditions (21) define a unique solution of Eq. (20). For (22) and (25) the solution is determined up to a constant. It is also possible to use different mixtures of these three types of boundary conditions. Note that for cases (22) and (25) the following consistency conditions must hold, respectively:

$$\int_\Omega f\,dx = \int_{\partial\Omega} h\,ds \quad \text{and} \quad \int_\Omega f\,dx = 0.$$

We now consider a different way to select a solution to Eq. (20). Here we use a criterion function and optimize this criterion over the set of solutions to the Poisson equation. Scattering model of Section 2 shows the physical interpretation of function $u(x,y)$ is a surface function. We need to pick out the smoothest surface (in some sense) that fulfills Eq. (20), using the Sobolev space norms as criterion functions. Denote by $V_{f,i}$ the following set:

$$V_{f,i} = \{u \in H^i(\Omega) : \Delta u = f,\ f \in L^2(\Omega)\},\ i = 0,1,2, \tag{26}$$

where $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. The equality $\Delta u = f$ is to be interpreted in the sense of distributions, i.e.,

Definition 4. *A solution of the Poisson equation* (20) *in* Ω *is a function* $u \in H^1(\Omega)$ *such that the following integral identity holds:*

$$\int_\Omega u\,\Delta\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Lemma 1. *$V_{f,i}$ is a closed, convex and nonempty set of $H^i(\Omega)$.*

Let α be a multi-index and $\beta_1 > 0$ a given parameter. We consider the following optimization problems:

$$I_0(u) \equiv \min_{u\in V_{f,0}} \int_\Omega |u|^2\,dx, \tag{27}$$

and

$$I_1(u) \equiv \min_{u\in V_{f,1}} \int_\Omega |u|^2\,dx + \beta_1 \int_\Omega \sum_{|\alpha|=1} |\partial^\alpha u|^2\,dx. \tag{28}$$

Theorem 1. *Problems* (27) *and* (28) *have unique solutions u_0 and u_1, respectively.*

From problems (27) and (28) we have the following results characterizing the solutions.

Theorem 2. *Let $u_o = \Delta v$. For the solution u_0 of the problems* (27)*, where $v \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ is the unique solution of the following biharmonic problem*

$$\begin{cases} \Delta^2 v = f & on \quad \Omega, \\ v = \Delta v = 0 & on \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{29}$$

Theorem 3. *Let $u_1 = \Delta v$. For the solution u_1 of the problems (28), where $v \in H^2(\Omega)$ is the unique solution in the class $\{\psi \in H^1(\Omega) : \Delta\psi \in H^1(\Omega)\}$ of the following biharmonic problem*

$$\begin{cases} \Delta^2 v = f & in \quad \Omega, \\ v = \beta_1 \Delta v,\ \nabla v \cdot \nu = 0 & on \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{30}$$

We conclude this section by a theorem relating the solution of problems (27) and (28). First we recall the following definition.

Definition 5. *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is called star-shaped if there exists $x_0 \in \Omega$ such that for all $x \in \Omega$ the set $\{t \in \mathbb{R} : \quad x_0 + t(x - x_0) \in \Omega\}$ is an interval.*

Theorem 4. *Assume that $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is open, bounded and star-shaped. If $u_{1,\beta_1} \in H^1(\Omega)$ denotes the solution of problem (28) with the parameter $\beta_1 > 0$, and if $u_0 \in L^2(\Omega)$ denotes the solution of problem (27), then*

$$u_{1,\beta_1} \to u_0 \quad in \quad L^2(\Omega) \quad as \quad \beta_1 \to 0+ .$$

The proof of Theorems 1-4 is carried out in the same way as it was done for other boundary value problems in the article of the authors [22].

4. Applications

As applications, in [24], the eigenvalue problems of the symmetric tensor-block matrix of any even rank and sizes 2×2 is studied. Some definitions and theorems are formulated concerning the tensor-block matrix. Formulas expressing the classical invariants of the tensor-block matrix of any even rank and sizes 2×2 through the first invariants of the powers of this tensor-block matrix and the canonical representation of the tensor-block matrix are given. Besides, a classification of the micro-polar linear elastic anisotropic bodies that do not have a center of symmetry is given. In [25], some questions about the parametrization of three-dimensional thin body with one small size under an arbitrary base surface and the changing of transverse coordinate from -1 to 1 are considered. The vector parametric equation of the thin body domain is given. Note the paper [26], where the author considers questions on the decomposition of the initial boundary value problems of elasticity theory and thin bodies for some anisotropic media, and from three-dimensional decomposed initial boundary value problems the corresponding decomposed initial boundary value problems for the theory of thin bodies are obtained. In [23] the expression is presented for the propagation velocities of waves of a certain medium through the eigenvalues of the material tensors, as well as expressions for the propagation velocities of waves for a micro-polar medium with anisotropy and isotropic micro-polar material are obtained.

The results of this article were presented on the International Scientific Conference "Related Problems of Continuum Mechanics" (October 11–13, 2018, Kutaisi, Georgia).

5. Acknowledgments

This work is supported by Shota Rustaveli National Science Foundation (Pr. No. DI-2016-41).

References

[1] Adams R A 1975, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
[2] Brock F 2001, "An isoperimetric inequality for eigenvalues of the Stekloff problem", *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*, **81**(1), 69–71.
[3] Courant R and Hilbert H 1953, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I. Interscience Publishers, Inc.: New York.
[4] Duffin R J 1969, "The influence of Poisson's ratio on the vibrational spectrum", *SIAM J. Appl. Math.*, **17**, 179–191.

[5] Farwig R 1994, "A note on the reflection principle for the biharmonic equation and the Stokes system", *Acta Appl. Math.*, **34** 41–51.
[6] Gazzola F and Sweers G 2008, "On positivity for the biharmonic operator under Steklov boundary conditions", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **188**(3), 399–427.
[7] Gazzola F, Grunau H.-Ch and Sweers G 2010, *Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains.* Lecture Notes Math. **1991**, Springer-Verlag.
[8] Kondrat'ev V A and Oleinik O A 1988, "Boundary value problems for the system of elasticity theory in unbounded domains. Korn's inequalities", *Russian Math. Surveys*, **43**(5), 65–119.
[9] Kondratiev V A and Oleinik O A 1990, "Hardy's and Korn's Inequality and their Application", *Rend. Mat. Appl.*, Serie VII. **10**(3), 641–666.
[10] Kon'kov A A 1995, "On the dimension of the solution space of elliptic systems in unbounded domains", *Russian Acad. Sci. Sbornik Math.*, **80**(2), 411–434.
[11] Kuttler J R and Sigillito V G 1968, "Inequalities for membrane and Stekloff eigenvalues", *J. Math. Anal. Appl.*, **23**(1), 148–160.
[12] Matevosyan O A 1998, "On solutions of boundary value problems for a system in the theory of elasticity and for the biharmonic equation in a half–space", *Diff. Equations.*, **34**(6), 803–808.
[13] Matevosyan O A 2001, "The Exterior Dirichlet Problem for the Biharmonic Equation: Solutions with Bounded Dirichlet Integral", *Math. Notes*, **70**(3), 363–377.
[14] Matevossian H A 2003, "On solutions of mixed boundary-value problems for the elasticity system in unbounded domains", *Izvestiya Math.*, **67**(5), 895–929.
[15] Matevossian H A 2015, "On solutions of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in unbounded domains", *P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Appl.*, **7**(1), 74–78.
[16] Matevossian O A 2015, "On solutions of the Neumann problem for the biharmonic equation in unbounded domains", *Math. Notes*, **98**, 990–994.
[17] Matevosyan O A 2016, "On solutions of the mixed Dirichlet–Navier problem for the polyharmonic equation in exterior domains", *Russian J. Math. Phys.*, **23**(1), 135–138.
[18] Matevosyan O A 2016, "On solutions of one boundary value problem for the biharmonic equation", *Diff. Equations*, *52*(10), 1379–1383.
[19] Matevossian H A 2017, "On the biharmonic Steklov problem in weighted spaces", *Russian J. Math. Phys.*, **24**(1), 134–138.
[20] Matevossian H A 2017, "On solutions of the mixed Dirichlet–Steklov problem for the biharmonic equation in exterior domains", *P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Appl.*, **9**(2), 151–157.
[21] Matevossian H A 2018, "On the Steklov–type biharmonic problem in unbounded domains", *Russian J. Math. Phys.*, **25**:2, 271–276.
[22] Matevossian H A, Nikabadze M U and Ulukhanian A R 2018, "On solutions of some biharmonic problems and their applications", *IJNSNS Int. J. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, 10 p. (to appear).
[23] Matevossian H A, Nikabadze M U and Ulukhanyan A R 2018, "Determination of velocities of wave propagation in some media through the eigenvalues of the material tensors", *J. Phys., IOP Conf. Series*, 14 p. (in press).
[24] Nikabadze M U 2016, "Eigenvalue problems of a tensor and a tensor-block matrix (TMB) of any even rank with some applications in mechanics", H. Altenbach and S. Forest (eds.), *Generalized continua as models for classical and advanced materials, advanced structured materials.* 42, 279–317.
[25] Nikabadze M U and Ulukhanyan A R 2016, "Analytical solutions in the theory of thin bodies". H. Altenbach and S. Forest (eds.), *Generalized continua as models for classical and advanced materials, advanced structured materials.* 42, 319–361.
[26] Nikabadze M U 2017, "To the problem of decomposition of the initial boundary value problems in mechanics", *J. Phys.: Conf. Series*, **739**:1, 11 p.
[27] Payne L E 1970, "Some isoperimetric inequalities for harmonic functions", *SIAM J. Math. Anal.*, **1**(3), 354–359.
[28] Sobolev S L 1988, *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, 3th ed., Nauka, Moscow; *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics.* Amer. Math. Soc., Providence 1991.
[29] Stekloff W 1902, "Sur les problemes fondamentaux de la physique mathematique", *Ann. Sci. de l'E.N.S.*, 3^e serie, **19**, 191-259 et 455-490.

An Embedding Lemma in Soft Topological Spaces

Giorgio Nordo
MIFT - Department of Mathematics and Computer Science, Physical Sciences and Earth Sciences
E-mail: giorgio.nordo@unime.it

Abstract

In 1999, Molodtsov initiated the concept of Soft Sets Theory as a new mathematical tool and a completely different approach for dealing with uncertainties in many fields of applied sciences. In 2011, Shabir and Naz introduced and studied the theory of soft topological spaces, also defining and investigating many new soft properties as generalization of the classical ones. In this paper, we introduce the notions of soft separation between soft points and soft closed sets in order to obtain a generalization of the well-known Embedding Lemma for soft topological spaces.

1 Introduction

Many practical problems in economics, engineering, environment, social science, medical science etc. cannot be studied by classical methods, because they have inherent difficulties due to the inadequacy of the theories of parameterization tools in dealing with uncertainties. In 1999, Molodtsov [14] initiated the novel concept of Soft Sets Theory as a new mathematical tool and a completely different approach for dealing with uncertainties while modelling problems in computer science, engineering physics, economics, social sciences and medical sciences. Molodtsov defines a soft set as a parameterized family of subsets of universe set where each element is considered as a set of approximate elements of the soft set.

In 2011, Shabir and Naz [16] introduced the concept of soft topological spaces, also defining and investigating the notions of soft closed sets, soft closure, soft neighborhood, soft subspace and some separation axioms. Some other properties related to soft topology were studied by Çağman, Karataş and Enginoglu in [3]. In the same year Hussain and Ahmad [8] continued the study investigating the properties of soft closed sets, soft neighbourhoods, sof interior, soft exterior and soft boundary.

In the present paper we will present the notions of family of soft mappings soft separating soft points and soft points from soft closed sets in order to give a generalization of the well-known Embedding Lemma for soft topological spaces.

2 Preliminaries

In this section we present some basic definitions and results of the theories of soft sets and soft topological spaces, simplifying them in a suitable way whenever possible. Terms and undefined concepts are used as in [6].

Definition 2.1. [14] *Let $\mathbb{U}$ be an initial universe set and $\mathbb{E}$ be a nonempty set of parameters (or abstract attributes) under consideration with respect to $\mathbb{U}$ and $A \subseteq \mathbb{E}$, we say that a pair (F, A) is a **soft set** over $\mathbb{U}$ if F is a set-valued mapping $F : A \to \mathbb{P}(\mathbb{U})$ which maps every parameter $e \in A$ to a subset $F(e)$ of $\mathbb{U}$.*

In other words, a soft set is not a real (crisp) set but a parameterized family $\{F(e)\}_{e \in A}$ of subsets of the universe $\mathbb{U}$. For every parameter $e \in A$, $F(e)$ may be considered as the set of *e-approximate elements* of the soft set (F, A).

Remark 2.1. *In 2010, Ma, Yang and Hu [11] proved that every soft set (F, A) is equivalent to the soft set $(F, \mathbb{E})$ related to the whole set of parameters $\mathbb{E}$, simply considering empty every approximations of parameters which are missing in A, that is extending in a trivial way its set-valued mapping, i.e. setting $F(e) = \emptyset$, for every $e \in \mathbb{E} \setminus A$.*
For such a reason, in this paper we can consider all the soft sets over the same parameter set $\mathbb{E}$ as in [4] and we will redefine all the basic operations and relations between soft sets originally introduced in [14, 12, 13] as in [15], that is by considering the same parameter set.

Definition 2.2. [18] *The set of all the soft sets over a universe* $\mathbb{U}$ *with respect to a set of parameters* $\mathbb{E}$ *will be denoted by* $\mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$.

Definition 2.3. [15] *Let* $(F,\mathbb{E}),(G,\mathbb{E}) \in \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *be two soft sets over a common universe* $\mathbb{U}$ *and a common set of parameters* $\mathbb{E}$, *we say that* $(F,\mathbb{E})$ *is a* ***soft subset*** *of* $(G,\mathbb{E})$ *and we write* $(F,\mathbb{E})\tilde{\subseteq}(G,\mathbb{E})$ *if* $F(e) \subseteq G(e)$ *for every* $e \in \mathbb{E}$.

Definition 2.4. [15] *Let* $(F,\mathbb{E}),(G,\mathbb{E}) \in \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *be two soft sets over a common universe* $\mathbb{U}$, *we say that* $(F,\mathbb{E})$ *and* $(G,\mathbb{E})$ *are* ***soft equal*** *and we write* $(F,\mathbb{E})\tilde{=}(G,\mathbb{E})$ *if* $(F,\mathbb{E})\tilde{\subseteq}(G,\mathbb{E})$ *and* $(G,\mathbb{E})\tilde{\subseteq}(F,\mathbb{E})$.

Definition 2.5. [15] *A soft set* $(F,\mathbb{E})$ *over a universe* $\mathbb{U}$ *is said to be* ***null soft set*** *and it is denoted by* $(\tilde{\emptyset},\mathbb{E})$ *if* $F(e)=\emptyset$ *for every* $e \in \mathbb{E}$.

Definition 2.6. [15] *A soft set* $(F,\mathbb{E}) \in \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *over a universe* $\mathbb{U}$ *is said to be a* ***absolute soft set*** *and it is denoted by* $(\tilde{\mathbb{U}},\mathbb{E})$ *if* $F(e)=\mathbb{U}$ *for every* $e \in \mathbb{E}$.

Definition 2.7. [15] *Let* $(F,\mathbb{E}) \in \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *be a soft set over a universe* $\mathbb{U}$, *the* ***soft complement*** *(or more exactly the soft relative complement) of* $(F,\mathbb{E})$, *denoted by* $(F,\mathbb{E})^{\complement}$, *is the soft set* $\left(F^{\complement},E\right)$ *where* $F^{\complement}:\mathbb{E}\to\mathbb{P}(\mathbb{U})$ *is the set-valued mapping defined by* $F^{\complement}(e)=F(e)^{\complement}=\mathbb{U}\setminus F(e)$, *for every* $e \in \mathbb{E}$.

Definition 2.8. [15] *Let* $(F,\mathbb{E}),(G,\mathbb{E}) \in \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *be two soft sets over a common universe* $\mathbb{U}$, *the* ***soft difference*** *of* $(F,\mathbb{E})$ *and* $(G,\mathbb{E})$, *denoted by* $(F,\mathbb{E})\tilde{\setminus}(G,\mathbb{E})$, *is the soft set* $(F\setminus G,E)$ *where* $F\setminus G:\mathbb{E}\to\mathbb{P}(\mathbb{U})$ *is the set-valued mapping defined by* $(F\setminus G)(e)=F(e)\setminus G(e)$, *for every* $e \in \mathbb{E}$.

Clearly, for every soft set $(F,\mathbb{E}) \in \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$, it results $(F,\mathbb{E})^{\complement}\tilde{=}(\tilde{\mathbb{U}},\mathbb{E})\tilde{\setminus}(F,\mathbb{E})$.

Definition 2.9. [15] *Let* $\{(F_i,\mathbb{E})\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *be a nonempty subfamily of soft sets over a universe* $\mathbb{U}$, *the (generalized)* ***soft union*** *of* $\{(F_i,\mathbb{E})\}_{i\in I}$, *denoted by* $\tilde{\bigcup}_{i\in I}(F_i,\mathbb{E})$, *is defined by* $\left(\bigcup_{i\in I}F_i,\mathbb{E}\right)$ *where* $\bigcup_{i\in I}F_i:\mathbb{E}\to\mathbb{P}(\mathbb{U})$ *is the set-valued mapping defined by* $\left(\bigcup_{i\in I}F_i\right)(e)=\bigcup_{i\in I}F_i(e)$, *for every* $e \in \mathbb{E}$.

Definition 2.10. [15] *Let* $\{(F_i,\mathbb{E})\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *be a nonempty subfamily of soft sets over a universe* $\mathbb{U}$, *the (generalized)* ***soft intersection*** *of* $\{(F_i,\mathbb{E})\}_{i\in I}$, *denoted by* $\tilde{\bigcap}_{i\in I}(F_i,\mathbb{E})$, *is defined by* $\left(\bigcap_{i\in I}F_i,E\right)$ *where* $\bigcap_{i\in I}F_i:\mathbb{E}\to\mathbb{P}(\mathbb{U})$ *is the set-valued mapping defined by* $\left(\bigcap_{i\in I}F_i\right)(e)=\bigcap_{i\in I}F_i(e)$, *for every* $e \in \mathbb{E}$.

Definition 2.11. [9] *Two soft sets* $(F,\mathbb{E})$ *and* $(G,\mathbb{E})$ *over a common universe* $\mathbb{U}$ *are said to be* ***soft disjoint*** *if their soft intersection is the soft null set, i.e. if* $(F,\mathbb{E})\tilde{\cap}(G,\mathbb{E})\tilde{=}(\tilde{\emptyset},\mathbb{E})$.

Definition 2.12. [17] *A soft set* $(F,\mathbb{E}) \in \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *over a universe* $\mathbb{U}$ *is said to be a* ***soft point*** *over* U *if it has only one non-empty approximation and it is a singleton, i.e. if there exists some parameter* $\alpha \in E$ *and an element* $p \in \mathbb{U}$ *such that* $F(\alpha)=\{p\}$ *and* $F(e)=\emptyset$ *for every* $e \in E\setminus\{\alpha\}$. *Such a soft point is usually denoted by*$(p_\alpha,\mathbb{E})$. *The singleton* $\{p\}$ *is called the support set of the soft point and* α *is called the expressive parameter of* $(p_\alpha,\mathbb{E})$.

Definition 2.13. [17] *The set of all the soft points over a universe* $\mathbb{U}$ *with respect to a set of parameters* $\mathbb{E}$ *will be denoted by* $\mathcal{SP}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$.

Since any soft point is a particular soft set, it is evident that $\mathcal{SP}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}} \subseteq \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$.

Definition 2.14. [17] *Let* $(p_\alpha,\mathbb{E}) \in \mathcal{SP}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *and* $(F,\mathbb{E}) \in \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *respectively be a soft point and a softset over a common universe* $\mathbb{U}$. *We say that* ***the soft point*** $(p_\alpha,\mathbb{E})$ ***soft belongs to the soft set*** $(F,\mathbb{E})$ *and we write* $(p_\alpha,\mathbb{E})\tilde{\in}(F,\mathbb{E})$, *if the soft point is a soft subset of the soft set, i.e. if* $(p_\alpha,\mathbb{E})\tilde{\subseteq}(F,\mathbb{E})$ *and hence if* $p \in F(\alpha)$.

Definition 2.15. [5] *Let* $(p_\alpha,\mathbb{E}),(q_\beta,\mathbb{E}) \in \mathcal{SP}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *be two soft points over a common universe* $\mathbb{U}$, *we say that* $(p_\alpha,\mathbb{E})$ *and* $(q_\beta,\mathbb{E})$ *are* ***soft equal***, *and we write* $(p_\alpha,\mathbb{E})\tilde{=}(q_\beta,\mathbb{E})$, *if they are equals as soft sets and hence if* $p=q$ *and* $\alpha=\beta$.

Definition 2.16. [5] *We say that two soft points* $(p_\alpha, \mathbb{E})$ *and* $(q_\beta, \mathbb{E})$ *are* ***soft distincts****, and we write* $(p_\alpha, \mathbb{E})\tilde{\neq}(q_\beta, \mathbb{E})$*, if and only if* $p \neq q$ *or* $\alpha \neq \beta$*.*

According to Remark 2.1 the following definitions by Kharal and Ahmad have been simplified and slightly modified for soft sets on a common parameter set.

Definition 2.17. [10] *Let* $\mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *and* $\mathcal{SS}(\mathbb{U}')_{\mathbb{E}'}$ *be two sets of soft open sets over the universe sets* $\mathbb{U}$ *and* $\mathbb{U}'$ *with respect to the sets of parameters* $\mathbb{E}$ *and* $\mathbb{E}'$*, respectively. and consider a mapping* $\varphi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}'$ *between the two universe sets and a mapping* $\psi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *between the two set of parameters. The mapping* $\varphi_\psi : \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(\mathbb{U}')_{\mathbb{E}'}$ *which maps every soft set* $(F, \mathbb{E})$ *of* $\mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *to a soft set* $\varphi_\psi((F, \mathbb{E}))$ *of* $\mathcal{SS}(\mathbb{U}')_{\mathbb{E}'}$ *denoted by* $(\varphi_\psi(F), \mathbb{E}')$ *where* $\varphi_\psi(F) : \mathbb{E}' \to \mathbb{P}(\mathbb{U}')$ *is the set-valued mapping defined by* $\varphi_\psi(F)(e') = \bigcup_{e \in \psi^{-1}(\{e'\})} \varphi(F(e))$ *for every* $e' \in \mathbb{E}'$*, is called a* ***soft mapping*** *from* $\mathbb{U}$ *to* $\mathbb{U}'$ *induced by the mappings* φ *and* ψ*, while the soft set* $\varphi_\psi(F, \mathbb{E})\tilde{=}(\varphi_\psi(F), \mathbb{E}')$ *is said to be the* ***soft image*** *of the soft set* $(F, \mathbb{E})$ *under the soft mapping* $\varphi_\psi : \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(\mathbb{U}')_{\mathbb{E}'}$*. The soft mapping* $\varphi_\psi : \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(\mathbb{U}')_{\mathbb{E}'}$ *is said* ***injective*** *(respectively* ***surjective****,* ***bijective****) if the mappings* $\varphi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}'$ *and* $\psi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *are both injective (resp. surjective, bijective).*

Definition 2.18. [10] *Let* $\varphi_\psi : \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(\mathbb{U}')_{\mathbb{E}'}$ *be a soft mapping induced by the mappings* $\varphi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}'$ *and* $\psi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *between the two sets* $\mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}, \mathcal{SS}(\mathbb{U}')_{\mathbb{E}'}$ *of soft sets and consider a soft set* $(G, \mathbb{E}')$ *of* $\mathcal{SS}(\mathbb{U}')_{\mathbb{E}'}$*. The* ***soft inverse image*** *of* $(G, \mathbb{E}')$ *under the soft mapping* $\varphi_\psi : \mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(\mathbb{U}')_{\mathbb{E}'}$*, denoted by* $\varphi_\psi^{-1}((G, \mathbb{E}'))$ *is the soft set* $(\varphi_\psi^{-1}(G), \mathbb{E}')$ *of* $\mathcal{SS}(\mathbb{U})_{\mathbb{E}}$ *where* $\varphi_\psi^{-1}(G) : \mathbb{E} \to \mathbb{P}(\mathbb{U})$ *is the set-valued mapping defined by* $\varphi_\psi^{-1}(G)(e) = \varphi^{-1}(G(\psi(e)))$ *for every* $e \in \mathbb{E}$*.*

The concept of soft topological space as topological space defined by a family of soft sets over a initial universe with a fixed set of parameters was introduced in 2011 by Shabir and Naz [16].

Definition 2.19. [16] *Let* X *be an initial universe set,* $\mathbb{E}$ *be a nonempty set of parameters with respect to* X *and* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}}$ *be a family of soft sets over* X*, we say that* $\mathcal{T}$ *is a* ***soft topology*** *on* X *with respect to* $\mathbb{E}$ *if the following four conditions are satisfied:*

1. *the null soft set belongs to* $\mathcal{T}$*, i.e.* $(\tilde{\emptyset}, \mathbb{E}) \in \mathcal{T}$
2. *the absolute soft set belongs to* $\mathcal{T}$*, i.e.* $(\tilde{X}, \mathbb{E}) \in \mathcal{T}$
3. *the soft intersection of any two soft sets of* $\mathcal{T}$ *belongs to* $\mathcal{T}$*, i.e. for every* $(F, \mathbb{E}), (G, \mathbb{E}) \in \mathcal{T}$ *then* $(F, \mathbb{E})\tilde{\cap}(G, \mathbb{E}) \in \mathcal{T}$*.*
4. *the soft union of any subfamily of soft sets in* $\mathcal{T}$ *belongs to* $\mathcal{T}$*, i.e. for every* $\{(F_i, \mathbb{E})\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ *then* $\tilde{\bigcup}_{i \in I}(F_i, \mathbb{E}) \in \mathcal{T}$

The triplet $(X, \mathcal{T}, \mathbb{E})$ *is called a* ***soft topological space*** *over* X *with respect to* $\mathbb{E}$*.*
In some case, when it is necessary to better specify the universal set and the set of parameters, the topology will be denoted by $\mathcal{T}(X, \mathbb{E})$*.*

Definition 2.20. [16] *Let* $(X, \mathcal{T}, \mathbb{E})$ *be a soft topological space over* X *with respect to* $\mathbb{E}$*, then the members of* $\mathcal{T}$ *are said to be* ***soft open set*** *in* X*.*

Definition 2.21. [7] *Let* $\mathcal{T}_1$ *and* $\mathcal{T}_2$ *be two soft topologies over a common universe set* X *with respect to a set of paramters* $\mathbb{E}$*. We say that* $\mathcal{T}_2$ *is* ***finer*** *(or stronger) than* $\mathcal{T}_1$ *if* $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ *where* $\subseteq$ *is the usual set-theoretic relation of inclusion between crisp sets. In the same situation, we also say that* $\mathcal{T}_1$ *is* ***coarser*** *(or weaker) than* $\mathcal{T}_2$*.*

Definition 2.22. [16] *Let* $(X, \mathcal{T}, \mathbb{E})$ *be a soft topological space over* X *and be* $(F, \mathbb{E})$ *be a soft set over* X*. We say that* $(F, \mathbb{E})$ *is* ***soft closed set*** *in* X *if its complement* $(F, \mathbb{E})^{\complement}$ *is a soft open set, i.e. if* $(F^{\complement}, \mathbb{E}) \in \mathcal{T}$*.*

Notation 2.1. *The family of all soft closed sets of a soft topological space* $(X, \mathcal{T}, \mathbb{E})$ *over* X *with respect to* $\mathbb{E}$ *will be denoted by* σ*, or more precisely with* $\sigma(X, \mathbb{E})$ *when it is necessary to specify the universal set* X *and the set of parameters* $\mathbb{E}$*.*

Definition 2.23. [2] *Let $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ be a soft topological space over X and $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}$ be a non-empty subset of soft open sets. We say that $\mathcal{B}$ is a* ***soft open base*** *for $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ if every soft open set of $\mathcal{T}$ can be expressed as soft union of a subfamily of $\mathcal{B}$, i.e. if for every $(F,\mathbb{E})\in\mathcal{T}$ there exists some $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ such that $(F,\mathbb{E})=\widetilde{\bigcap}\{(A,\mathbb{E}):(A,\mathbb{E})\in\mathcal{A}\}$.*

Definition 2.24. [18] *Let $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ be a soft topological space, $(N,\mathbb{E})\in\mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}}$ be a soft set and $(x_\alpha,\mathbb{E})\in\mathcal{SP}(X)_{\mathbb{E}}$ be a soft point over a common universe X. We say that $(N,\mathbb{E})$ is a* ***soft neighbourhood*** *of the soft point $(x_\alpha,\mathbb{E})$ if there is some soft open set soft containing the soft point and soft contained in the soft set, that is if there exists some soft open set $(A,\mathbb{E})\in\mathcal{T}$ such that $(x_\alpha,\mathbb{E})\tilde{\in}(A,\mathbb{E})\tilde{\subseteq}(N,\mathbb{E})$.*

Definition 2.25. [16] *Let $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ be a soft topological space over X and $(F,\mathbb{E})$ be a soft set over X. Then the* ***soft closure*** *of the soft set $(F,\mathbb{E})$, denoted by $s\text{-}cl_X((F,\mathbb{E}))$, is the soft intersection of all soft closed set over X soft containing $(F,\mathbb{E})$, that is*

$$s\text{-}cl_X((F,\mathbb{E}))=\widetilde{\bigcap}\{(C,\mathbb{E})\in\sigma(X,\mathbb{E}):(F,\mathbb{E})\tilde{\subseteq}(C,\mathbb{E})\}$$

Definition 2.26. [18] *Let $\varphi_\psi:\mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}}\to\mathcal{SS}(X')_{\mathbb{E}'}$ be a soft mapping between two soft topological spaces $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ and $(X',\mathcal{T}',\mathbb{E}')$ induced by the mappings $\varphi:X\to X'$ and $\psi:\mathbb{E}\to\mathbb{E}'$ and $(x_\alpha,\mathbb{E})\in\mathcal{SP}(X)_{\mathbb{E}}$ be a soft point over X. We say that the soft mapping φ_ψ is* ***soft continuous at the soft point*** *$(x_\alpha,\mathbb{E})$ if for each soft neighbourhood $(G,\mathbb{E}')$ of $\varphi_\psi((x_\alpha,\mathbb{E}))$ in $(X',\mathcal{T}',\mathbb{E}')$ there exists some soft neighbourhood $(F,\mathbb{E})$ of $(x_\alpha,\mathbb{E})$ in $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ such that $\varphi_\psi((F,\mathbb{E}))\tilde{\subseteq}(G,\mathbb{E}')$. If φ_ψ is soft continuous at every soft point $(x_\alpha,\mathbb{E})\in\mathcal{SP}(X)_{\mathbb{E}}$, then $\varphi_\psi:\mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}}\to\mathcal{SS}(X')_{\mathbb{E}'}$ is called* ***soft continuous*** *on X.*

Definition 2.27. [2] *Let $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ be a soft topological space over X and $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}$ be a non-empty subset of soft open sets. We say that $\mathcal{S}$ is a* ***soft open subbase*** *for $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ if the family of all finite soft intersections of members of $\mathcal{S}$ forms a soft open base for $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$.*

Proposition 2.1. [2] *Let $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}}$ be a a family of soft sets over X and containing both the null soft set $(\tilde{\emptyset},\mathbb{E})$ and the absolute soft set $(\tilde{X},\mathbb{E})$. Then the family $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ of all soft union of finite soft intersections of soft sets in $\mathcal{S}$ is a soft topology having $\mathcal{S}$ as subbase.*

Definition 2.28. [2] *Let $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}}$ be a a family of soft sets over X respect to a set of parameters $\mathbb{E}$ and such that $(\tilde{\emptyset},\mathbb{E}),(\tilde{X},\mathbb{E})\in\mathcal{S}$, then the soft topology $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ of the above Proposition 2.1 is called the* ***soft topology generated*** *by the soft subbase $\mathcal{S}$ over X and $(X,\mathcal{T}(\mathcal{S}),\mathbb{E})$ is said to be the* ***soft topological space generated by*** *$\mathcal{S}$.*

3 An Embedding Lemma for soft topological spaces

Definition 3.1. [2] *Let $\mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}}$ be the set of soft sets over a universe set X with respect to a set of parameter $\mathbb{E}$ and consider a family of soft topological spaces $\{(Y_i,\mathcal{T}_i,\mathbb{E}_i)\}_{i\in I}$ and a corresponding family $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i\in I}$ of soft mappings $(\varphi_\psi)_i:\mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}}\to\mathcal{SS}(Y_i)_{\mathbb{E}_i}$. Then the soft topology $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ generated by the soft subbase $\mathcal{S}=\left\{(\varphi_\psi)_i^{-1}((G,\mathbb{E}_i)):(G,\mathbb{E}_i)\tilde{\in}\mathcal{T}_i,\,i\in I\right\}$ of all soft inverse images of the soft mappings $(\varphi_\psi)_i$ is called the* ***initial soft topology*** *induced on X by the family of soft mappings $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i\in I}$ and it is denoted by $\mathcal{T}_{ini}(X,\mathbb{E},Y_i,\mathbb{E}_i,(\varphi_\psi)_i;i\in I)$.*

Definition 3.2. *Let $\{(X_i,\mathcal{T}_i,\mathbb{E}_i)\}_{i\in I}$ be a family of soft topological spaces over the universe sets X_i with respect to the sets of parameters $\mathbb{E}_i$, respectively. For every $i\in I$, the soft mapping $(\pi_i)_{\rho_i}:\mathcal{SS}(\prod_{i\in I}X_i)_{\prod_{i\in I}\mathbb{E}_i}\to\mathcal{SS}(X_i)_{\mathbb{E}_i}$ induced by the classical projections $\pi_i:\prod_{i\in I}X_i\to X_i$ and $\rho_i:\prod_{i\in I}\mathbb{E}_i\to\mathbb{E}_i$ is said the* ***i-th soft projection mapping*** *and, by setting $(\pi_\rho)_i=(\pi_i)_{\rho_i}$, it will be denoted by $(\pi_\rho)_i:\mathcal{SS}(\prod_{i\in I}X_i)_{\prod_{i\in I}\mathbb{E}_i}\to\mathcal{SS}(X_i)_{\mathbb{E}_i}$.*

Definition 3.3. [2] *Let $\{(X_i,\mathcal{T}_i,\mathbb{E}_i)\}_{i\in I}$ be a family of soft topological spaces and consider the corresponding family $\{(\pi_\rho)_i\}_{i\in I}$ of soft projection mappings $(\pi_\rho)_i:\mathcal{SS}(\prod_{i\in I}X_i)_{\prod_{i\in I}\mathbb{E}_i}\to\mathcal{SS}(X_i)_{\mathbb{E}_i}$ (with $i\in I$). Then, the initial soft topology $\mathcal{T}_{ini}\left(\prod_{i\in I}X_i,\mathbb{E},X_i,\mathbb{E}_i,(\pi_\rho)_i;i\in I\right)$ induced on $\prod_{i\in I}X_i$ by the family of soft projection mappings $\{(\pi_\rho)_i\}_{i\in I}$ is called the* ***soft topological product*** *of the soft topological space $(X_i,\mathcal{T}_i,\mathbb{E}_i)$ (with $i\in I$) and denoted by $\mathcal{T}\left(\prod_{i\in I}X_i\right)$.*

Definition 3.4. [1] *Let $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ and $(X',\mathcal{T}',\mathbb{E}')$ be two soft topological spaces over the universe sets X and X' with respect to the sets of parameters $\mathbb{E}$ and $\mathbb{E}'$, respectively. We say that a soft mapping $\varphi_\psi : \mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(X')_{\mathbb{E}'}$ is a **soft homeomorphism** if it is soft continuous, bijective and its inverse $\varphi_\psi^{-1} : \mathcal{SS}(X')_{\mathbb{E}'} :\to \mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}}$ is a soft continuous mapping too. In such a case, the soft topological spaces $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ and $(X',\mathcal{T}',\mathbb{E}')$ are said **soft homeomorphic** and we write that $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})\tilde{\approx}(X',\mathcal{T}',\mathbb{E}')$.*

Definition 3.5. *Let $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ and $(X',\mathcal{T}',\mathbb{E}')$ be two soft topological spaces. We say that a soft mapping $\varphi_\psi : \mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(X')_{\mathbb{E}'}$ is a **soft embedding** if its corestriction $\varphi_\psi : \mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}} \to \varphi_\psi(\mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}})$ is a soft homeomorphism.*

Definition 3.6. *Let $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ be a soft topological space over a universe set X with respect to a set of parameter $\mathbb{E}$, let $\{(X_i,\mathcal{T}_i,\mathbb{E}_i)\}_{i\in I}$ be a family of soft topological spaces over a universe set X_i with respect to a set of parameters $\mathbb{E}_i$, respectively and consider a family $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i\in I}$ of soft mappings $(\varphi_\psi)_i = (\varphi_i)_{\psi_i} : \mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(X_i)_{\mathbb{E}_i}$ induced by the mappings $\varphi_i : X \to X_i$ and $\psi_i : \mathbb{E} \to \mathbb{E}_i$ (with $i \in I$). Then the soft mapping $\Delta = \varphi_\psi : \mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(\prod_{i\in I} X_i)_{\prod_{i\in I}\mathbb{E}_i}$ induced by the diagonal mappings (in the classical meaning) $\varphi = \Delta_{i\in I}\varphi_i : X \to \prod_{i\in I} X_i$ and $\psi = \Delta_{i\in I}\psi_i : \mathbb{E} \to \prod_{i\in I}\mathbb{E}_i$ (respectively defined by $\varphi(x) = \langle\varphi_i(x)\rangle_{i\in I}$ for every $x \in X$ and by $\psi(e) = \langle\psi_i(e)\rangle_{i\in I}$ for every $x \in X$) is called the **soft diagonal mapping** of the soft mappings $(\varphi_\psi)_i$ (with $i \in I$) and denoted by $\Delta = \Delta_{i\in I}(\varphi_\psi)_i : \mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(\prod_{i\in I} X_i)_{\prod_{i\in I}\mathbb{E}_i}$.*

Definition 3.7. *Let $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i\in I}$ be a family of of soft mappings $(\varphi_\psi)_i : \mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(X_i)_{\mathbb{E}_i}$ between a soft topological space $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ and a family of soft topological spaces $\{(X_i,\mathcal{T}_i,\mathbb{E}_i)\}_{i\in I}$. We say that the family $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i\in I}$ **soft separates soft points** of $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ if for every $(x_\alpha,\mathbb{E})$, $(y_\beta,\mathbb{E})(\in \mathcal{SP}(X)_{\mathbb{E}}$ such that $(x_\alpha,\mathbb{E})\tilde{\neq}(y_\alpha,\mathbb{E})$ there exists some $i \in I$ such that $(\varphi_\psi)_i(x_\alpha,\mathbb{E})\tilde{\neq}(\varphi_\psi)_i(y_\beta,\mathbb{E})$.*

Definition 3.8. *Let $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i\in I}$ be a family of of soft mappings $(\varphi_\psi)_i : \mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(X_i)_{\mathbb{E}_i}$ between a soft topological space $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ and a family of soft topological spaces $\{(X_i,\mathcal{T}_i,\mathbb{E}_i)\}_{i\in I}$. We say that the family $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i\in I}$ **soft separates soft points from soft closed sets** of $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ if for every $(C,\mathbb{E}) \in \sigma(X,\mathbb{E})$ and every $(x_\alpha,\mathbb{E})(\in \mathcal{SP}(X)_{\mathbb{E}}$ such that $(x_\alpha,\mathbb{E})\tilde{\in}(\tilde{X},\mathbb{E})\tilde{\setminus}(C,\mathbb{E})$ there exists some $i \in I$ such that $(\varphi_\psi)_i(x_\alpha,\mathbb{E})\tilde{\notin}s\text{-}cl_{X_i}((\varphi_\psi)_i(C,\mathbb{E}))$.*

Proposition 3.1 (Soft Embedding Lemma). *Let $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$ be a soft topological space, $\{(X_i,\mathcal{T}_i,\mathbb{E}_i)\}_{i\in I}$ be a family of soft topological spaces and $\{(\varphi_\psi)_i\}_{i\in I}$ be a family of of soft continuous mappings $(\varphi_\psi)_i : \mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(X_i)_{\mathbb{E}_i}$ that separates both the soft points and the soft points from the soft closed sets of $(X,\mathcal{T},\mathbb{E})$. Then the diagonal mapping $\Delta = \Delta_{i\in I}(\varphi_\psi)_i : \mathcal{SS}(X)_{\mathbb{E}} \to \mathcal{SS}(\prod_{i\in I} X_i)_{\prod_{i\in I}\mathbb{E}_i}$ of the soft mappings $(\varphi_\psi)_i$ is a soft embedding.*

4 Conclusion

In this short announcement paper we have introduced the notions of family of soft mappings separating points and points from closed sets and that of soft diagonal mapping in order to define the necessary framework for proving a generalization to soft topological spaces of the well-known Embedding Lemma for classical (crisp) topological spaces. Such a result could be the start point for investigating other important topics in soft topology such as extension and compactifications theorems, metrization theorems etc. Details and proofs will be given in a next extended paper.

References

[1] Aras C.G., Sonmez A., Çakalli H. 2013, On soft mappings, *Proceedings of CMMSE 2013 - 13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, arXiv:1305.4545, 11 pages.

[2] Aygünoğlu A., Aygün H. 2012, Some notes on soft topology spaces, *Neural Computing and Applications* **21**, pp. 113-119.

[3] Çağman N., Karataş S., Enginoglu S. 2011, Soft topology, *Computers & Mathematics with Applications* **62**, pp. 351-358.

[4] Chiney M., Samanta S.K. 2017, Soft topology redefined, arXiv:1701.00466, 18 pages.

[5] Das S., Samanta S.K. 2013, Soft metric, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics* **6** (1), pp. 77-94.

[6] Engelking R. 1989, *General Topology* (Berlin: Heldermann Verlag).

[7] Hazra H., Majumdar P., Samanta S.K. 2012, Soft topology, *Fuzzy information and Engineering* **4** (1), pp. 105-115.

[8] Hussain S., Ahmad B. 2011, Some properties of soft topological spaces, *Computers & Mathematics with Applications* **62** (11), pp. 4058-4067.

[9] Al-Khafaj M.A.K., Mahmood M.H. 2014, Some Properties of Soft Connected Spaces and Soft Locally Connected Spaces, *IOSR Journal of Mathematics* **10** (5), pp. 102-107.

[10] Kharal A., Ahmad B., 2011, Mappings on soft classes, *New Mathematics and Natural Computation* **7** (3), pp. 471-481.

[11] Ma Z., Yang B., Hu B. 2010, Soft set theory based on its extension, *Fuzzy Information and Engineering* **2** (4), pp. 423-432.

[12] Maji, P.K., Roy A.R. 2002, An application of soft sets in a decision making problem, *Computers & Mathematics with Applications* **44**, pp. 1077-1083.

[13] Maji P.K., Biswas R., Roy A.R. 2003, Soft set theory, *Computers & Mathematics with Applications* **45**, pp. 555-562.

[14] Molodtsov D. 1999, Soft set theory – first result, *Computers & Mathematics with Applications* **37**, pp. 19-31.

[15] Nazmul S., Samanta S.K. 2013, Neighbourhood properties of soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics* **6** (1), pp. 1-15.

[16] Shabir M., Naz M. 2011, On soft topological spaces, *Computers & Mathematics with Applications* **61**, pp. 1786-1799.

[17] Xie N. 2015, Soft points and the structure of soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics* **10** (2), pp. 309-322.

[18] Zorlutuna İ, Akdag M., Min W.K., Atmaca S. 2012, Remarks on soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics* **3** (2), pp. 171-185.

Active optics in astronomy – Freeform mirror for the MESSIER telescope proposal

Gerard R. Lemaitre, Pascal Vola, Eduard Muslimov

Laboratoire d'Astrophysique Marseille – LAM, Aix Marseille Université – AMU and CNRS

38 rue Frédéric Joliot-Curie, 13388 Marseille CX 13, France, EU

E-mail: gerard.lemaitre@lam.fr

Abstract : Active optics techniques in astronomy provide high imaging quality. This paper is dedicated to highly deformable active optics that can generate non-axisymmetric aspheric surfaces - or freeform surfaces - by use of a minimum number of actuators. The aspheric mirror is obtained from a single uniform load that acts over the surface of a closed-form substrate whilst under axial reaction to its elliptical perimeter ring during spherical polishing. MESSIER space proposal is a wide-field low-central-obstruction three-mirror-anastigmat (TMA) telescope. The optical design is a folded reflective Schmidt. Basic telescope features are 36cm aperture, *f*/2.5, with 1.6°x2.6° field of view and a curved field detector allowing null distortion aberration for drift-scan observations. The freeform mirror is generated by spherical stress polishing that provides super-polished freeform surfaces after elastic relaxation. Preliminary analysis required use of the optics theory of 3rd-order aberrations and elasticity theory of thin elliptical plates. Final cross-optimizations were carried out with Zemax raytracing code and Nastran FEA elasticity code in order to determine the complete geometry of a glass ceramic Zerodur deformable substrate.

1 Introduction

Technological advances in astronomical instrumentation during the second part of the twentieth century gave rise to 4m, 8m and 10m class telescopes that were completed with close loop *active optics* control in monolithic mirrors (R. Wilson, 1996 [1]), segmented primary mirrors (J. Nelson et al., 1980 [2]), and segmented in-situ stressed active optics mirrors (D.-q. Su et al., 2004 [3]). Further advances on ground-based telescopes allowed developments of *adaptive optics* for blurring the image degradation due to atmosphere. Both *active and adaptive optics* provided milestone progress in the detection of super-massive black holes, exoplanets, and large-scale structure of galaxies.

This paper is dedicated to *highly deformable active optics* that can generate non-axisymmetric aspheric surfaces - or *freeform surfaces* - by use of a minimum number of actuators: a single uniform load acts over the monolithic surface of a *closed-form* substrate whilst under reaction to its elliptical perimeter ring. These freeform surfaces are the basic aspheric components of dispersive/reflective Schmidt systems. Both reflective diffraction freeform gratings and freeform mirrors have been investigated by Lemaitre [4].

MESSIER proposal is a wide-field low-central-obstruction three-mirror-anastigmat (TMA) telescope based on a folded reflective Schmidt optical design. It is dedicated to the survey of extended astronomical objects with extremely low surface brightness. The proposal name is in homage to French astronomer Charles Messier (1730-1817)(Fig. 1) who published

the first astronomical catalogue of nebulea and star clusters. The catalogue was known as *Messier objects* – for instance, M1 for the Crab nebulae, M31 for the Andromeda galaxy, etc – and distinguished between permanent and transient diffuse objects, then helped in sensing or discovering comets.



Fig. 1. Charles Messier (1730-1817)(Wikipedia)

MESSIER optical design would provides a high imaging quality without any diffractive spider pattern in the beams. A preliminarily ground-based prototype is planed to serve as a fast-track pathfinder for a future space-based MESSIER mission. The elliptical freeform mirror is generated by stress polishing and elastic relaxation technique (Lemaitre [4], Muslimov et al.[5]).

Super-polishing of freeform surfaces are obtained from spherical polishing after elastic relaxation. Preliminary analysis required use of the optics theory of 3rd-order aberrations and elasticity theory of thin elliptical plates. The final cross-optimizations were carried out with Zemax ray-tracing code and Nastran FEA elasticity code that provides accurate determination of the substrate geometry of a glass ceramic Zerodur material.

2 Optical design with a reflective Schmidt concept

A reflective Schmidt design is a wide-field system and basically a two-mirror anastigmat. With one freeform surface correcting all three primary aberrations, such a system has been widely investigated as well as for telescope or spectrograph designs. The corrector mirror or reflective diffraction grating is always located at the center of curvature of a spherical concave mirror.

Compared to a Schmidt with a refractor-correcting element, which is a centered-system, a reflective Schmidt necessarily requires a tilt of the optics. The inclination of the mirrors then forms a *non-centered-system*. For an *f*/2.5 focal-ratio, the tilt angle of the aspheric primary mirror is typically of about 10° and somewhat depending on the FoV size.

For a reflective Schmidt optical design, as MESSIER telescope proposal at *f*/2.5, a supplementary folding-flat mirror was found necessary. This third mirror provide i) an easy access to the detector for minimal central obstruction and, ii) avoid any spider inside the beams that would cause diffractive artifact cross-like images at the focal image of bright stars. This led us to a three-mirror design or TMA telescope.

Investigations of the plane-aspheric mirror have been discussed to define the best shape freeform surface of this non-centered system. The freeform surface is with elliptical symmetry and provides balance of the quadratic terms with respect to the bi-quadratic terms.

Temporarily avoiding the folding-flat mirror, let assume a two-mirror non-centered system where the primary mirror M1 is a freeform and the secondary mirror M2 is a concave spherical surface of radius of curvature *R*. The input beams are circular collimated beams

merging at various field angles of a telescope and define along the M1 freeform mirror an elliptical pupil due to inclination angle *i*. A convenient value of the inclination angle allow the M2 mirror to avoid any obstruction and provide focusing very closely to mid-distance between M1 and M2, then very near the distance *R*/2 from M1 (Fig. 2).

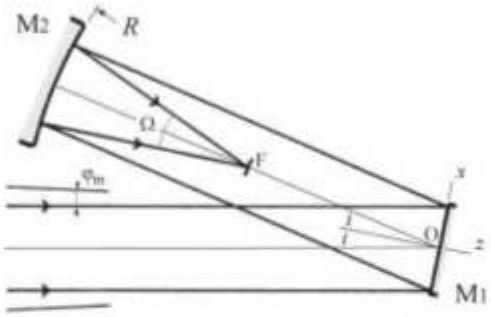


Fig. 2. Schematic of a reflective two-mirror Schmidt telescope. The center of curvature of the spherical mirror M2 is located at the vertex of the plane-aspheric freeform mirror M1. The circular incident beams have circular cross-sections with input pupil located at mirror M1. Deviation 2*i* occurs at the principal rays. The semi-field maximum angle – here assumed circular – is denoted φ_m

Let us denote x_m and y_m the semi-axes of the elliptic clear-aperture on M1 primary mirror. If the *y*-axis is perpendicular to the symmetry plane *x, z* of the two-mirror telescope, one defines

$$\Omega = R/4y_m \qquad (1)$$

a dimensionless ratio Ω, where y_m is the semi-clear-aperture of the beams in *y*-direction, i.e. half-pupil size in
y-direction. The *focal-ratio* of the two-mirror telescope is denoted *f*/Ω.

It is the interesting to investigate the performance in the field of view of a 100% obstructed two-mirror telescope which then is a centered system. Comparing the blur images, the free parameter is the ratio that characterize the meridian profile section of the primary mirror M1. This ratio, or aspect ratio, can be expressed by $k = r_O^2/r_m^2$ where r_O is the radius of null-power zone and r_m that of clear aperture. The blur residual sizes as a function of parameter *k* are displayed by Fig. 3 [6] [4].

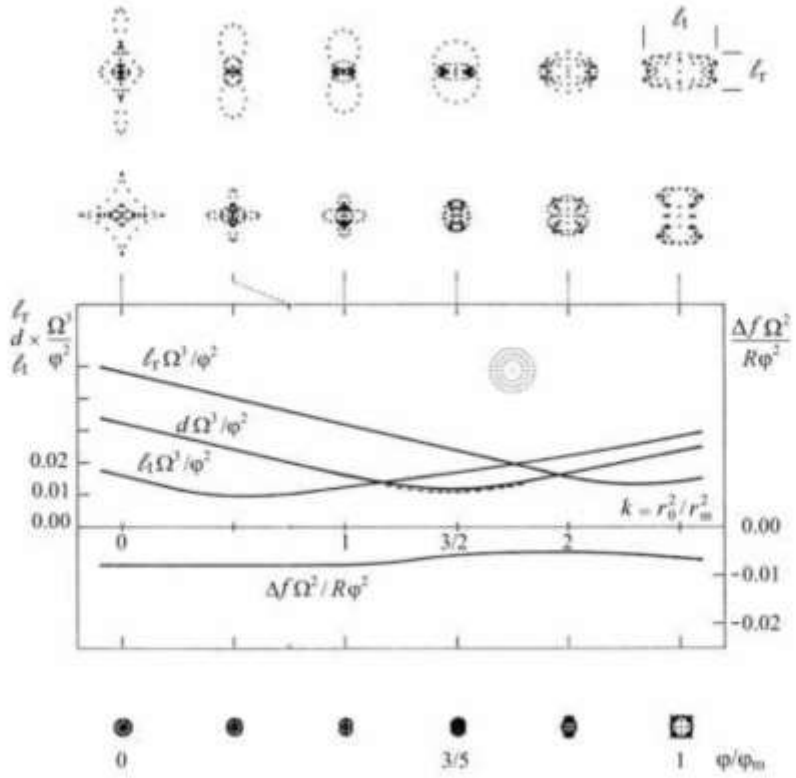


Fig. 3. Off-axis 5th-order aberration residuals of a two-mirror centered-system reflective Schmidt – 100% obstruction – as a function of the *k*-ratio, $k = r_O^2/r_m^2$, that defines location of the null-power optical zone. Plotted parameters are: radius of curvature *R* of M2 spherical concave mirror, Ω of the aperture-ratio *f*/Ω, angle of semi-field of view φ, radial and tangential blur sizes ℓ_r, ℓ_t, and diameter of best blur size *d*. [*1st line*] Spot diagram of blur images on a sphere centered at the center of curvature of M1 mirror that provides stigmatism on-axis. [*2nd line*] Spot diagram of blur images on a sphere centered at the center of curvature of M1 mirror that provides the best images. [*Bottom line*] Spots with *k*=3/2 for field angles φ/φm varying from 0 to 1, obtained by using a slight under-correction factor of M1 mirror $s = \cos\varphi m$ and defocus *Δf*. Lemaitre showed that [6] the final diameter of residual blurs – or *angular resolution of reflective Schmidt* – is then $d_{Resol} = 3\,\varphi m^2/256\Omega^3$

In order to avoid 100% beam obstruction the primary mirror M1 must be tilted at a convenient inclination angle *i*. It can be shown that the shape *Z*Opt of the M1 freeform mirror is an anamorphic shape and expressed in first approximation by [4]

$$Z_{Opt} \simeq \frac{s}{\cos i}\left[\frac{3}{2^7\Omega^2 R}(h^2x^2+y^2) - \frac{1}{8R^3}(h^2x^2+y^2)^2\right],\ with\ h^2 = \cos^2 i, \quad (2)$$

where dimensionless coefficient *s* could be considered as an under-correction parameter slightly smaller than unity ($0.990 < s < 1$). In fact, for a tilt angle of M1 – i.e. a non-centered system – coefficient s does not operates and must just be set to $s = 1$. A preliminary analysis of the two-mirror system shows that for four direction points of a circular field of view, the largest blur image occurs at the largest deviation angle of the field along the *x*-axis. In *y*-direction sideways blur images have an average size.

The length from the vertex O of the M1 mirror to the focus F can be derived as [4]

$$OF = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2^6\Omega^2}\right)R \qquad (3)$$

showing that this distance is slightly larger than the Gaussian distance $R/2$. The optimal size of blur images for an $f/4$ two-mirror anastigmat telescope over the field of view are displayed by Fig. 4.

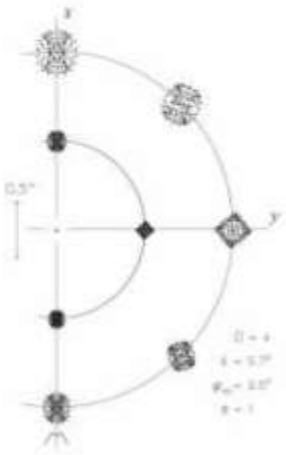


Fig. 4. Best residual aberrations of an $f/4$ two-mirror reflective Schmidt ($\Omega = 4$) in the *non-centered system* form. Inclination angle $i = 5.7^{\circ}$. Semi-field of view $\varphi m = 2.5^{\circ}$. The under-correction parameter is just set to $s = 1$. The radius of curvature of the spherical focal surface is also given by $R\mathrm{FoV} = \mathrm{OF}$ in Eq. (3). The largest blur image corresponds to that with highest deviation of the FoV.

Preliminarily analyses also show that the M1 mirror shape has opposite signs between quadratic and bi- quadratic terms. The shape is given by Eq. (2) and represented by Fig. 5 in either directions x or y in dimensionless coordinates of ρ.

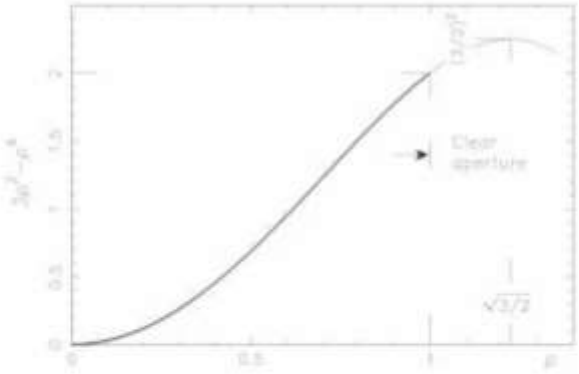


Fig. 5. The freeform primary mirror, of biaxial symmetry, is generated by homothetic ellipses having principal lengths in a cos*i* ratio. One shows that whatever *x* or *y* directions the null-power zone is outside the M1 clear-aperture, and in a geometrical ratio $\rho_0 = \sqrt{3/2}\,\rho_{max} \simeq 1.224\rho_{max}$ since $k = 3/2$

Dimensionless coordinates *z*, ρ have been normalized for a clear semi-aperture $\rho = 1$, presently in the *y*-direction, with a maximum sag

$$z(1) = 3\rho^2 - \rho^4 = 2, \qquad (4)$$

which leads to algebraically opposite curvatures $d^2z/d\rho^2$ for $\rho = 0$ and $\rho = 1$.

The conclusions from the best optical design of an all-reflective two-mirror Schmidt telescope with *optimal angular resolution* are the followings (Lemaitre, 1979, 2009)[6][4] :

1. *For a circular incident beam, the elliptical clear-aperture of the primary mirror is* $\sqrt{3/2}$ *times smaller to that of the null-power zone ellipse.*

2. *The angular resolution d*NC *of a reflective non-centered two-mirror telescope is*

$$d_{NC} = \frac{3}{256\Omega^3}\left(\frac{3}{2}i + \varphi_m\right)\varphi_m. \qquad (5)$$

3. *The primary mirror of a non-centered two-mirror system provides the algebraic balance of second derivative extremals. Therefore, its central curvature is opposite to the local curvatures at edge.*

3 Elasticity design and deformable primary-mirror substrate

Active optics preliminarily analysis of a Schmidt-type primary mirror M1 leads to investigate deformable substrates and use of stress mirror polishing (SMP). We consider hereafter the thin plate theory of plates with development to elliptical plates.

Let consider the system coordinates of an elliptical plate and denote *n* the normal to the contour *C* of the surface. Equation of *C* is represented by (Fig. 6)

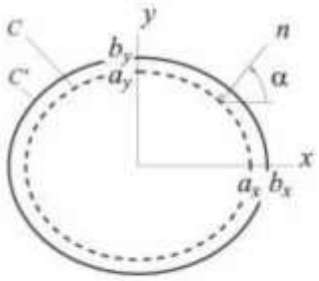


Fig. 6. Top view of an *elliptical vase form*. The clear aperture of M1 mirror is included into a smaller surface to that of a constant thickness plate delimited by elliptical contour *C* (*dotted line*) and defined by semi axe radii (*ax, ay*). An outer ring is built-in to the plate at contour *C* where *n*-directions are normal to *C*. The outer ring is delimited by an homothetic elliptic contour C ' defined by semi-axes radii (b_x, b_y)

The bi-laplacian equation of the flexure where a uniform load q is applied to the inner plate is

$$\nabla^4 z \equiv \partial^4 z/\partial x^4 + 2\partial^4 z/\partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 z/\partial y^4 = q/D, \quad (6)$$

where the rigidity D is

$$D = Et^3/[12(1-\nu^2), \quad (7)$$

and E the Young's modulus, ν the Poisson ratio, and t the constant thickness of the plate over C.

The equation of homothetic ellipses $C(a_x, a_y)$ or $C'(b_x, b_y)$ can be expressed by quadratic forms. Ellipse curve C writes

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} - 1 = 0. \quad (8)$$

Remaining within the optics theory of third-order aberrations, such optical freeform surfaces can be obtained from elastic bending by mean of the following conditions:

- a flat and constant-thickness plate, $t = constant$,
- a uniform load q applied to inner surface of substrate,
- and a link at the edge to an elliptic contour expressed by a *built-in edge,* or a *clamped edge*, i.e. where the slope is null all along the contour C of the plate.

Assuming that the three conditions below are satisfied, the analytic theory of thin plates allows deriving a biquadratic flexure $ZElas(x, y)$ in the form (Timoshenko & Woinovsky-Krieger)[7], (Lemaitre, 2009)[4],

$$Z_{Elas} = z_0\left(1 - \frac{x^2}{a_x^2} - \frac{y^2}{a_y^2}\right)^2, \quad (9)$$

where $z0$ is the sag at origin and where ax and ay are semi-axes corresponding to the elliptic null-power zone of the principal directions of contour. The flexural sag $z0$ is obtained from substitution of Eq.(9) into biharmonic Equation (6). This leads to

$$z_0 = \frac{q}{8D}\frac{a_x^4 a_y^4}{3a_x^4 + 2a_x^2 a_y^2 + 3a_y^4}. \quad (10)$$

The null-power zone contour C is larger by a factor $\sqrt{3/2}$ to that of the clear-aperture (cf. Fig. 3).

The dimensions of semi-axes a_S and a_Y at C of the built-in ellipse – or null-power zone –relatively to that of clear-semi-apertures x_m and y_m are

$$a_x^2 = 3x_m^2/2 = 3y_m^2/2\cos^2 i \quad and \quad a_y^2 = 3y_m^2/2. \qquad (11)$$

From Eqs. (2) and (1), in setting $s = 1$ and $x = 0$, and for the built-in radius $y = \sqrt{3/2}y_m$ of the vase form, we obtain the amplitude of the flexure z_0 in Eq.(9), as

$$z_0 = \frac{9y_m}{2^{11}\Omega^3\cos i}. \qquad (12)$$

From Eqs.(10),(11) and (12) we obtain, after simplification, the thickness t of the inner plate

$$t = 8\Omega\left[\frac{2(1-\upsilon^2\cos i}{3(3+2\cos^2 i+3\cos^4 i)}\frac{q}{E}\right]^{1/3} y_m. \qquad (13)$$

This defines the execution conditions and elasticity parameters of an elliptical plate where the clear aperture of primary mirror M1 uses a somewhat smaller area than the total built-in surface as delimited by ellipse C.

The conclusions from a best optical design of the primary mirror M1 of a two-mirror Schmidt telescope, as corresponding to the profile displayed by Fig. 3, are as follow (Lemaitre, 2009)[4] :

1. *A built-in elliptic vase-form is useful to obtain easily the primary mirror of a two-mirror anastigmat.*

2. *The elliptic null-power zone at the plate built-in contour is* $\sqrt{3/2}$ *times larger than that of the elliptic clear-aperture of the primary mirror.*

3. *The total sag of the built-in contour is 9/8 times larger than that of its optical clear-aperture.*

The optimization of a built-in substrate, of course, requires losing some of the outer surface which then is not usable by an amount of 33% outside the clear-aperture area. It is clear that a flat deformable M1 substrate, conjugated with an elliptic inner contour, provides most interesting advantages in practice with a *built-in condition* (Fig. 7).

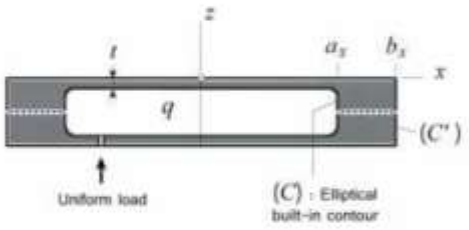


Fig. 7. Section of an *elliptical closed vase form*. This form is made two vase-forms oppositely jointed together in a *built-in* link. The uniform load q is applied inside the deformable substrate over the elliptical contour C of semi-axe radii (ax, ay). Outer contour C ' can be made circular if (bx, by)are sufficiently larger than semi-axe radii of C

An extremely rigid outer ring designed for a *closed vase form*, while polished flat at rest, allows the primary mirror to generate by uniform loading a bi-symmetric optical surface made of *homothetic ellipses* (Fig. 8).

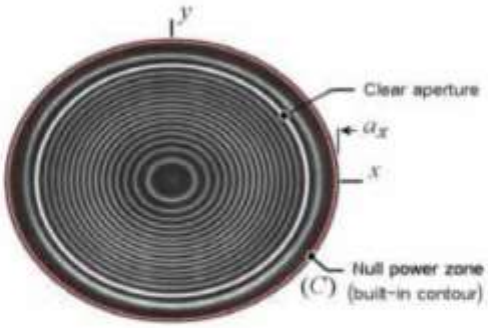


Fig. 8. Iso-level lines of a primary mirror M1 generating homothetical ellipses from perfect built-in condition at contour C. Elliptic dimensions of the null-power zone over those of clear-aperture must be set in a ratio $\sqrt{3/2}$. The algebraic balance of meridian curvatures are then achieved at center and at clear-aperture

The case of a perfect *built-in condition* was applied to the design and construction of several aspherized grating spectrographs (4) such as UVPF of CFHT, MARLYs of OHP and PMO, CARELEC of OHP, OSIRIS of ODIN space mission. It was recently applied to the design and construction of aspherized gratings for the FIREBall balloon experiment (Lemaitre et al., 2014)(8) using a 1-meter telescope and multi-object spectrograph. The processing was as follows, (i) A plane reflective diffraction grating was first deposited on a deformable stainless steel matrix without stressing, (ii) the freeform bi-quadratic surface of this deformable matrix was bent by inner air pressure loading, (iii) the freeform gratings were obtained from resin replication during controlled stressing onto Zerodur vitro ceramic rigid substrate, and, (iv) final aspheric shape of the gratings was obtained by elastic relaxation [4] (Fig. 9).

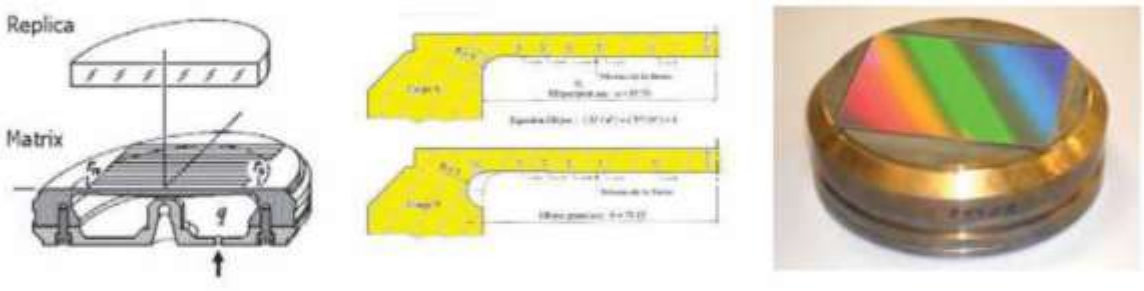


Fig. 9. [*Left*] Active optics asphérization of gratings achieved by double replication technique of a metal deformable matrix. A *quasi-constant thickness* active zone is *clamped* – or *built-in* – to a rigid outer ring and is closed backside for air pressure load control. [*Center*]. For FIREBall, the whole deformable matrix is an axisymmetric piece expect for

its inner built-in contour which is *elliptical*. [*Right*] Deformable matrix with the grating before replication (LAM)

Compared to the case of or a deformable M1 mirror – or a deformable matrix – where a perfect *built-in* condition leads to some outside loosen optical area of the freeform (a clear aperture somewhat smaller to that of the built-in zero power zone), we investigate hereafter a *closed-form substrate* with a *radially thinned outer elliptic cylinder*. The optimized freeform surface for MESSIER proposal will then provides almost the telescope theoretical angular resolution by use of a *semi-built-in edge condition* of the mirror substrate.

4 A TMA telescope proposal for MESSIER

Our proposal of MESSIER experiment is named in honor to French astronomer Charles Messier who started compiling in 1774 his famous Messier Catalogue of diffuse non-cometary objects. For instance the Crab Nebulae, named object "M1", is a bright supernova remain recorded by Chinese astronomer in 1054. The present MESSIER proposal is dedicated to the detection of extremely low surface brightness objects. A detailed description of the science objectives and instrument design for this space mission can be found in Valls-Gabaud et al. (2016) [9].

A three mirror anastigmat (TMA) telescope proposal should provide detection of extremely low surface brightness, a detection as low as 32 magnitude/arcsec^2 in the optical range. A space-based telescope option should provides 37 magnitude/arcsec^2 in UV at 200 nm. The preliminary ground-based telescope here investigated as a prototype should be useful for spectral ranges in blue, red and infrared regions. The main features require a particular optical design as follow :

1- a wide field three mirror anastigmat telescope with fast f-ratio,
2- a distortion-free field of view at least in one direction,
3- a curved-field detector for a natural curved reflective Schmidt,
4- an time delay integration by use of drift-scan techniques,
5- no spider in the beams can be placed in the optical train.

The final space-based proposal, restrained to extremely low brightness objects in ultraviolet imaging, would be a 50-cm aperture telescope. For the optical range, our preliminary plan for Messier is to develop and build a 30-cm aperture ground-based telescope fulfilling all above features of the optical design. Preliminary proposed designs can be found in Lemaitre et al. (2014) [10] and Muslimov et al. (2017) [5].

4.1 Optical design and ray tracing modeling

Before studying a space model, we propose development of a ground-based prototype telescope is a three-mirror anastigmat (TMA) with a f-ratio at *f*/2.5.

→ One may notice a classical design as a two-element anastigmat design where the first optical element is a refractive aspherical plate. Minimization of field aberrations is achieved by a *balance of the slopes – i.e. balance of 1st-order derivative* – where sphero-chromatism variations are dominating aberration residuals.

→ Now using a mirror as a first element M1 of a two-mirror anastigmat, the best angular resolution over the field of view is achieved by a *balance of meridian curvatures - i.e. balance of the 2nd-order derivative* - of the aspherical mirror or diffraction grating (Lemaitre (2009)) [4].

The proposed design is made of freeform primary mirror M1, followed by holed flat secondary mirror M2, and then a spherical concave tertiary mirror M3. The center of curvature of M3 is located at the vertex of M1which is a basic configuration for a reflective Schmidt

concept. The unfolded version, with only two mirrors, do not alter anastigmatic image quality (Fig. 13). The optics parameters are optimized for a convex field of view (Table 2). The three-mirror system gives unobstructed access to detector and avoid any spider in the field of view (Fig. 10 and 11).

Table 2. MESSIER optical design parameters.

Telescope angular resolution	2 arcsec
On-axis circular beam entrance	356 mm
Focal length f'	890 mm
Focal-ratio f/Ω	f/2.5
Deviation angle 2 i	22°
M1 Elliptic clear aperture $2x_m \times 2y_m$	356 × 362.7
Angular FOV $2\varphi_{mx} \times 2\varphi_{my}$	1.6°×2.6°
Linear FOV	25×40 mm²
M3 mirror curvature radius R_3	−1769 mm
UBK7 filters & SiO_2 cryostat - Th.	2 & 5 mm
Detector field curvature radius R_{FOV}	−890 mm

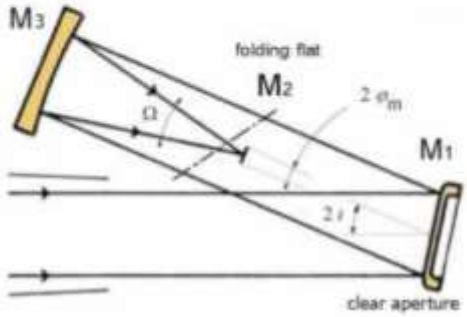


Fig. 10. Schematic of Messier reflective Schmidt (M2 holed flat not shown)

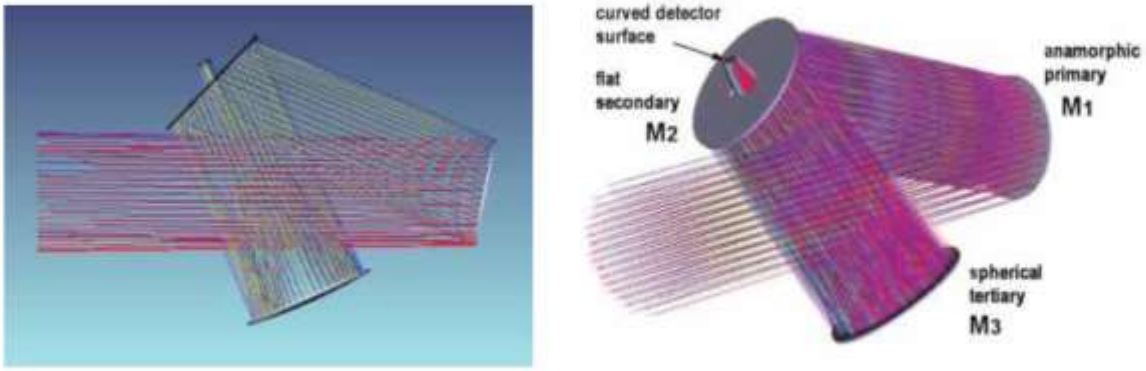


Fig. 11. [*Left*] MESSIER layout reflective TMA in the symmetry plane. [*Right*] 3-D view with detector (LAM)

The primary mirror surface M1 can be defined by the aspheric anamorphic equation as derived from Zemax optics ray-tracing code – which is somewhat similar to Eq.(2) – and denoted

$$Z_{Opt} = \frac{C_x x^2 + C_y y^2}{1+\sqrt{1-(1+K_x)C_x^2 x^2-(1+K_y)C_y^2 y^2}} + AR[(1-AP)x^2 + (1+AP)y^2]^2, \quad (14)$$

where now (y, z) is the symmetry plane of the telescope.

Restraining to the case of a simply bi-curvature surface for the first quadratic term, – then setting $K_x = K_y = -1$, denominator reduces to unity. The result from Zemax modeling optimization provides the four coefficients,

$C_x = -3.598 \times 10^{-6}\,\mathrm{mm}^{-1}$, $C_y = -3.467 \times 10^{-6}\,\mathrm{mm}^{-1}$, $AR = 2.203 \times 10^{-11}\,\mathrm{mm}^{-3}$, and $AP = -0.01854$.

The *total sag of clear aperture* in *x*-direction (i.e. off-symmetry plane) for *x*max = 178 mm is then *Z*Opt−max = −35.70 μm. Zemax iterations lead to RMS residual blur images in agreement with predicted angular resolution (Fig. 12).

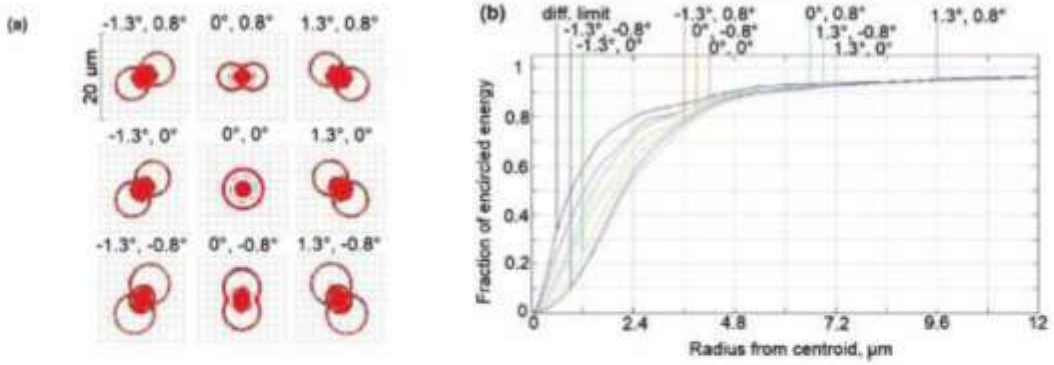


Fig. 12. Telescope image quality – curved FOV. **(a)** Spot diagram. **(b)** Diffraction encircled energy

Results from Zemax modeling and spot diagram one shows that the maximum RMS blur residuals is ϕZemax = 5.5 μm or dNC = 1.27 arcsec. From Eq. (5) and a same diagonal semi-FOV (1.52°), and same parameters in Table 2, one also obtains for MESIER proposal the theoretical angular resolution (Lemaitre [4] [6]),

$$d_{NC} = \frac{3}{256\Omega^3}\left(\frac{3}{2}i + \varphi_m\right) \quad \varphi_m = 1.29 \text{ arcsec}, \qquad (15)$$

showing that results from modeled and theoretical angular resolutions are similar.

One of a key requirement was to provide a free distortion design. Over a diagonal field of view of maximum radius $\varphi_m = 1.5^{\circ}$ it was shown that for a curved FoV distortion $\Delta\varphi/\varphi_m$ remains smaller than 2 x 10^{-4}, and thus is negligible.

The telescope image quality is estimated through its spot sizes in the diagram. Diagram indicates an image quality convenient for seeing limited conditions and close to the diffraction limit. Contribution of residual aberrations is 1.3 arcsec RMS over the field of view.

Residual spot radius values take into account a UBK7 color filter 2mm thick where a spectral band can be selected in a filter wheel with 5 wavebands. An optional 5mm thickness SiO_2 cryostat window is planned for optical design of the ground-based prototype telescope (Table 2).

Table 2. Image quality of the telescope with use of filters

Waveband [nm]	Spot RMS radius in the FoV center [µm]	Spot RMS radius at the FoV edge [µm]
350-410	1.8	3.7
400-560	2.3	3.8
550-700	1.7	3.4
680-860	1.7	3.3
860-980	1.7	3.3

4.2 Elasticity modeling of a freeform primary mirror

The requested aspheric surface with non-rotational symmetry of the primary mirror surface refers to an optical surface also called a *freeform surface*. The present freeform surface for our MESSIER primary mirror is made of *homothetic-ellipse iso-level lines*. This surface is to be designed through active optics methods where the deformable substrate is aspherized by a plane surfacing under stress – an active optics method also called stress mirror polishing (SFP). The principle uses a uniform load applied and controlled inside a *closed vase form* whilst a plane polishing is operated with a full-size tool. The final process delivers the required shape after elastic relaxation of the load (Lemaitre [6] [11]) (Lemaite et al. [10]) (Muslimov et al. [5]).

The *closed vase form* – or *closed biplate* – is made of facing twin elliptical vase form blanks in Zerodur assembled together at the end of their outer rings through a layer of 100-150 μm thickness 3M DP490 Epoxy, where elasticity constants are Poisson's ratio $v = 0.38$ and Young's modulus $E = 659$ MPa (Nhamoisenu [12]). Elasticity constants of the blanks in Zerodur are Poisson's ratio $v = 0.243$ and Young's modulus $E = 90.2$ GPa (Fig. 13).

Modeling with Nastran code led us to make cross optimizations with Zemax code. The intensity of uniform loading q and final geometry of the *closed vase form* mirror substrate are displayed by Table 3. The final finite element modeling's by Pascal Vola display the displacements (Fig. 14) and stresses (Fig. 15).

Table 3. Uniform load and geometry of *closed vase form* deformable substrate as MESSIER primary mirror. The asphérization is achieved after elastic relaxation from SMP method and full-size tool plane polishing

- Uniform load of constant pressure	$q = 0.687 \times 10^5$ Pa
- Axial thickness of parallel plates	$t = 18$ mm each
- Inner axial separation of closed plates	20 mm
- Outer thickness of closed form	56 mm
- Inner radii of elliptic cylinder	$2ax \times 2ay = 356 \times 362.7$ mm
- Cylinder radial thicknesses	$tx \times ty = 18 \times 18.33$ mm
- Distance between middle surface of plates	$\ell = 38$ mm
- Inner and outer round-corner radii	$RC = 8$ mm and 16 mm

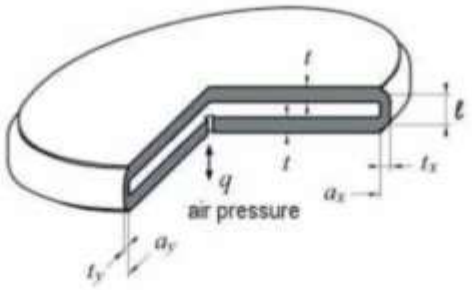


Fig. 13. Elasticity design of primary mirror substrate as a *closed vase form* or *closed biplate* made of two identical vase vitro-ceramic material linked together with epoxy. The radial thicknesses (t_x, t_y) and height ℓ of the outer cylinder provides a semi-built-in boundary which somewhat reduces the size of inner ring radii (a_x, a_y) with respect to that of clear aperture (x_m, y_m). NB.: From anamorphose $x_m/y_m = a_x/a_y = t_x/t_y = \cos i$

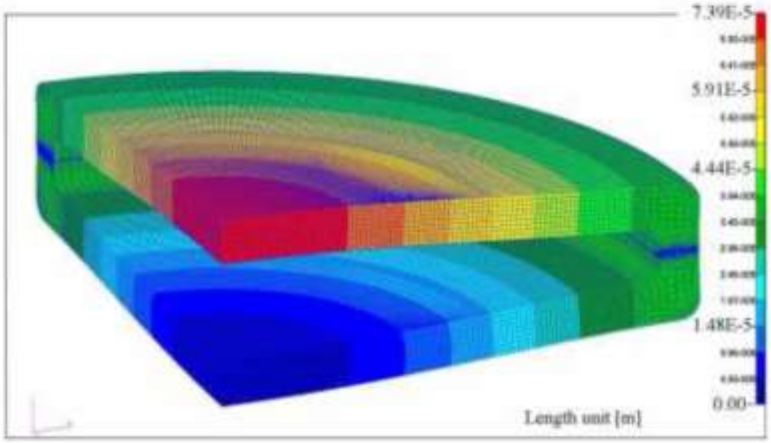


Fig. 14. Displacements of M1 primary mirror substrate as a *closed vase form* with FEA Nastran code. All elements are hexahedra. Boundaries are expressed at the origin of displacements $x = y = z = 0$ and freedom along three radial directions in plane xy both at back surface of the figure. Total axial displacement 69.2 μm (LAM)

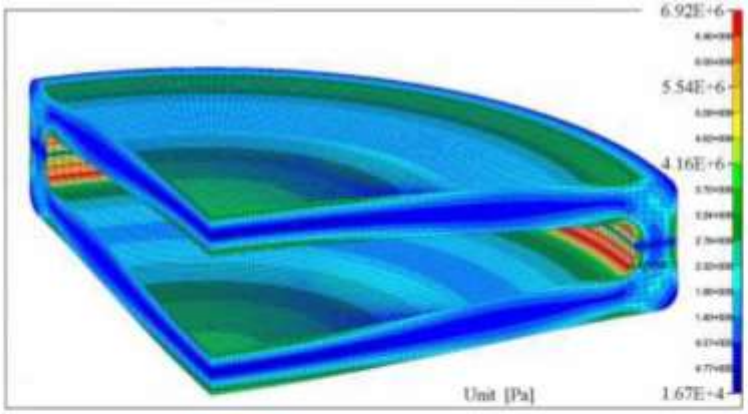


Fig. 15. Stress distribution of the *closed vase form* during stress polishing. The maximum tensile stress arises along the internal round corners of the elliptical rings with $\sigma\max = 6.92$ MPa. For Schott-Zerodur this value is much smaller than the ultimate strength $\sigma = 51$ MPa for a 1-month loading time duration [4]. One may notice that at the symmetry plane epoxy link reduces to $\sigma \simeq 1$ MPa (LAM)

The general law of algebraically *balancing the second-order* derivatives applies on principal directions of a *pupil mirror* – as stated by Eq. (4) – for a circular or elliptical clear aperture. In dimensionless coordinates and any x or y orthogonal directions, if the clear aperture radii is denoted ρm, then we must obtain algebraically opposite local curvature values for $\rho = 0$ and $\rho = \rho$m.

One have shown [4] that with a perfect built-in condition – i.e. for a closed vase form with moderate ellipticity and a ring of large radial thickness, say, at least five times larger than the plate axial thickness – the flexure provides an elliptic *null-power zone* radius $\rho 0$ where the size of the *clear aperture* radius ρm is in the ratio $\rho 0/\rho\text{m} = \sqrt{3/2} \simeq 1.224$. This means that the useful optical area is convenient for $\rho \in [0, \rho\text{m}]$ but unacceptable for $\rho \in [\rho\text{m}, \rho 0]$.

From our cross optimizations with Zemax and Nastran codes the ring of the closed vase form provides a noticeable decrease in flexural rigidity, which is equivalent to a *semi-built-in condition*. Then, compared to a perfect built-in assembly and from our results described in latter subsection, the radii ratio between null-power zone $\rho 0$ and clear aperture ρm has become after optimized modeling

$$\rho 0/\rho\text{m} = 1.118 . \qquad (16)$$

This ratio is *significantly* smaller than 1.224. Then from Zemax ray tracing optimizations, we now take benefit of an important result: the angular resolution is not substantially modified in using the optical surface also up to the inner zone of the ring. The flat deformable surface of the closed vase form requires use of stress polishing by plane superpolishing, which then avoids any ripple errors of the freeform surface.

Closed vase form Messier *primary mirror can be aspherized up to its inner part of the semi-built-in elliptic ring without any lost in optical area and angular resolution.*

4.3 Optical testing of MESSIER freeform primary mirror

Optical testing of the freeform primary mirror must be a precise measurement because of its anamorphic shape. From Eq.(14) the clear aperture shape presents a total sag of $Z\text{Opt}-\max = -35.70\ \mu$m for $x\max = 178$ mm in x-direction, i.e. in the off-symmetry telescope plane. Several optical tests could be considered mainly based on a null-test system [6]. For

instance this involves lens compensators (Malacara, 2007)[13] and computed- generated holograms (Larionov and Lukin, 2010)[14] and their combinations.

We adopted a singlet lens compensator as component already existing at the lab and providing exactly the correct compensation level of the rotational symmetry mode, that is, 3rd-order spherical aberration compensation of M1 primary mirror. This lens, also called Fizeau or Marioge lens, is plano-convex made in Zerodur-Schott with following parameters, axial thickness t_L =62 mm, R_{1L} =∞, R_{2L} =1180 mm, D_L =380 mm, used on elliptical clear aperture 356 x 362.7 mm. The axial separation to primary mirror is 10 mm. Remaining aberration is then a balanced anamorphose term to be accurately calibrated by He-Ne interferometry (Fig. 16).

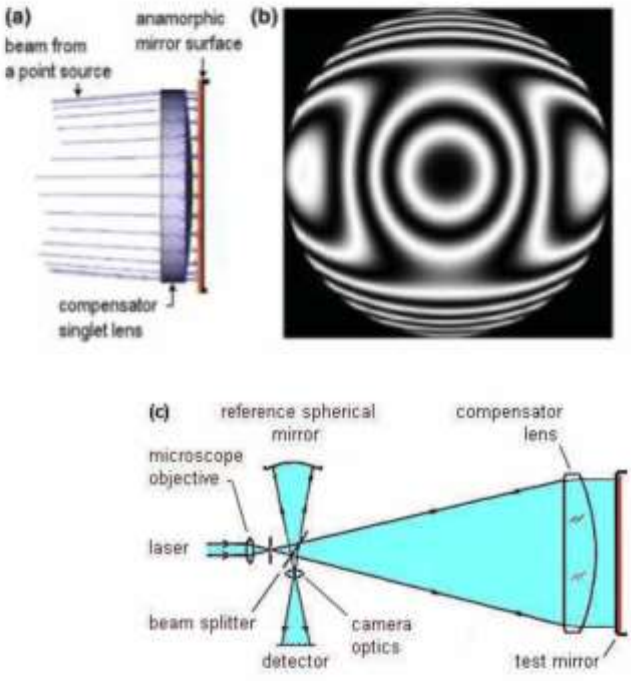


Fig. 16. Null-test singlet-lens aberration compensator for MESSIER freeform primary mirror. (a) Scheme mounting of the plano-convex lens that compensate for spherical aberration of the primary mirror surface. (b) Simulated He-Ne interferogram of remaining non-axisymmetric fringes to be calibrated. (c) Interferences can be obtained from a two-arm interferometer (LAM)

Another important feature of MESSIER telescope proposal is the selection of a *curved detector*, $R_{FOV} \simeq -f = -R_3/2$ (cf. Table 1), which allows a *distortion free* design over an active area of 40x25 mm^2. This technology is presently under development by use of either *variable curvature mirrors* (VCMs) or *toroid deformed mirrors* (Lemaitre)[4], (Muslimov et al.)[5]. References can be found on curved detectors in Muslimov paper [15].

5 Conclusion

Modeling of freeform surfaces by development of *active optics techniques* or *stress mirror polishing* provides extremely smooth surfaces. Generated from elastically relaxed plane or spherical polishing with *full-size aperture tools* these surfaces are free from ripple errors.

Applied to MESSIER TMA telescope proposal the best angular resolution of a *non-centered optical designs* corresponds to a primary mirror freeform optical surface made of homothetic elliptical isolevel lines. It has been shown that this leads to *algebraic balance of local curvatures* – i.e. *balance of second derivatives* of the optical surface

Beside the facility to obtain easily a freeform aspheric from elastic relaxation of a *closed vase form* primary mirror, MESSIER proposal would also benefit from free distortion because of its *naturally* curved FoV. This field curvature shall be associated to a *curved detector*.

References

1 R. N. Wilson *Reflecting Telescope Optics II*, Astronomy & Astrophysics Library, Springer-Verlag Heidel- berg (1996)
2 G. E. Nelson, G. Gabor, L. K. Hunt, J. Lubliner, and T. S. Mast, "Stressed mirror polishing - 2: Fabrication of an off-axis section of a paraboloid", Appl. Opt., **19**, 14, pp. 2341-2352 (1980)
3 D.-q. Su, X. Cui, "Active optics in LAMOST", Chin. J. Astron. Astrophys., **4**(1), pp. 1-9 (2004)
4 G. R. Lemaitre, *Astronomical Optics and Elasticity Theory – Active Optics Methods*, Astronomy & As- trophysics Library, Springer-Verlag Heidelberg (2009)
5 E. Muslimov, D. Valls-Gabaud, G. R. Lemaitre, E. Hugot, W. Jahn, S. Lombardo, X. Wang, P. Vola, and
M. Ferrari, "Fast, wide-field and distortion-free telescope with curved detectors for surveys at ultra-low surface brightness", Appl. Opt., **56**, 31, pp. 8639-8647 (2017)
6 G. R. Lemaitre, "Sur la résolution des télescopes de Schmidt catoptriques", C. R. Acad. Sc. Paris, **288**, Série B, p.297 (1979)
7 S. P. Timoshenko & S. Woinovsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Engineering Mechanics Series, Mc-Graw-Hill Intl. Editions, p.310 (1959)
8 G. R. Lemaitre, R. Grange, S. Quiret, B. Milliard, S. Pascal, V. Lamandé, "Multi Object Spectrograph of the FIREBall-II Balloon Experiment", Proc. OSA Conference on Optical Fabrication and Testing - OF&T, June 22-26 Hawaii, Paper OTu2B.3 (2014)
9 D. Valls-Gabaud and behalf the MESSIER Consortium, "The MESSIER surveyor: Unveiling the ultra-low surface brightness universe", Proc. Int. Astronomical Union, 11(S321), 199-201 (2016).
10 G. R. Lemaitre, X. Wang and E. Hugot, "Reflective Schmidt Designs for Extended Object Detection in Space Astronomy - Active Optics Methods", 9th Int. Conf. on Optical Design and Fabrication, Tokyo 2014, Proc. ODF'14, Paper 12S1-08 (2014)
11 G. R. Lemaitre, "Aphérisation par relaxation élastique de miroirs astronomiques dont le contour circulaire ou elliptique est encastré", C. R. Acad. Sc. Paris, **290**, Série B, 171-174 (1980)
12 S. Nhamoinesu, and M. Overend, "The mechanical performance of adhesives for steel-glass composite façade system", Challenging Glass 3 – Conf. on Architectural and Structural Applications of Glass, Bos, Louter, Nijsse, Veer (Edts.), TU Delft (2012)
13 D. Malacara, *Optical Shop Testing*, Wiley - 3rd edition, USA (2007)
14 N. P. Larionov and A. V. Lukin, "Holographic monitoring of off-axis aspheric mirrors", J. Opt. Technol.
77, 490-494 (2010)
15 E. Muslimov, E. Hugot, M. Ferrari, T. Behagnel, G. R. Lemaitre, M. Roulet, and S. Lombardo, "Design of optical systems with toroidal curved detectors", Optics Letters, OSA, **43**, Issue 13, 3092 (2018)

Subtle properties of the anisotropic Foucault pendulum

René Verreault [1,*], Thomas J. Goodey [2], Dimitrie Olenici [3] and Jean-Bernard Deloly [4]

[1] Université du Québec à Chicoutimi, 555 Boulevard de l'Université, Chicoutimi (Québec), Canada G7H 2B1; rverreau@uqac.ca
[2] Unaffiliated; thomas.goodey@cantab.net ;
[3] Astronomical Observatory/Planetarium , "Stefan cel Mare" University, Suceava, Romania - retired ; dimitrieolenici@hotmail.com
[4] Fondation Maurice Allais sous égide de la Fondation ParisTech, Paris, France; delolyjb@hotmail.com
* Correspondence: rverreau@uqac.ca

Abstract: In the past seventy years, Foucault pendulums have occasionally been observed to show anomalous behavior correlated with lunisolar relative motion and/or syzygies. Those results led to controversies due to the lack of precise description of environmental parameters, of anisotropic properties of pendulum suspension, etc. Before such experiments could be given credibility, the normal fine motion of the pendulum must be known and the limit from which anomalous motion can be declared must be established. Results from recent well designed instruments are presented. The analysis of pendulum performance has recently been facilitated by the use of the anisosphere method of describing pendulum anisotropy, by designing a novel high precision alidade and by the development of efficient quasi-real-time analysis software. In particular, anisotropic pendulums appear to possess many hidden, low-energy degrees of freedom that may interfere with the detection of anomalies.

Keywords: Foucault pendulum; anisotropy; anomalies.

1. Introduction

Lunisolar periodicities in Foucault pendulum motion with amplitude unexplainable in a conventional frame have first been reported in the 1950 decade by the French physicist Maurice Allais [1,2,11]. On the one hand, Allais observed significant periodic motion in precession during one-month long experiments (periodic Allais effect). On the other hand, he also reported surprisingly large perturbations of his pendulum during two solar eclipses in Europe (Allais's eclipse effect) [2] (pp. 162-170). Others also claimed anomalous behavior of a Foucault pendulum, either diurnal or sporadic during eclipses [3-5], although most attempts by various experimenters to reproduce such results failed. However, contrary to Allais, the subsequent experimenters did not characterize the anisotropy of their pendulums. Moreover, none of them reported measurements of the environmental parameters (temperature fluctuations, air currents, gusts affecting the building, suspension geometry and stiffness, etc.). Consequently, it has been easy for detractors to put forward allegations about any fortuitous cause of the observed effects. A good survey of alleged conventional explanations has been given by Duif [7]. In view of the sensitivity of the subject, the authors have deployed many efforts during the last two decades in order

- to improve the dependability of Foucault pendulum implementations,
- to thoroughly understand, well beyond textbook idealizations, the classical mechanics of physical pendulums and
- to push the limits of precision in motion recording using up-to-date and novel instrumentation.

2. Materials and Methods

Since the most spectacular claims were about the so-called Allais effect observed during solar eclipses, the authors' research program consisted for about fifteen years in making expeditions the world over in order to install various pendulum types on eclipse sites, and to register data before, during and after the eclipse, in an attempt to demonstrate changes that could be attributed to lunisolar influences. Essentially, three pendulum types were used:

- a short, large amplitude ball-borne pendulum consisting of a rigid, ~1-meter long bob-rod-stirrup assembly solidary of a 6 mm steel ball rolling on a flat steel surface, said surface being firmly fixed to a massive metal tripod;
- a 6-meter long, large-amplitude ball-borne pendulum consisting of a steel wire joining bob and stirrup, the latter being solidary of a 6 mm steel ball rolling on the inside surface of a steel spherical shell about12 mm in radius;
- a long (8 to 20 m) low-amplitude pendulum with the same wire-in-chuck suspension as Foucault's original design, where motion comprises the periodic flexion of an elastic piano wire at the exit of the chuck.

In addition to those, a 6-meter long, large-amplitude pendulum with modified Foucault-type suspension has been installed on a permanent site in Romania. Due to the high risk of break of a low-drag fine wire at large amplitude, the long wire was clamped to the lower end of a 3.2 mm diameter, 1.2 meter long spring-steel rod. The upper end of that rod in the suspension chuck is more capable of enduring repeated flexions at nearly 0.1 rad amplitude than the fine wire can.

With the short pendulum, four positions of the rod on either side of the rest position were detected on each complete cycle via two lidar-type Keyence sensors. The time differences could yield precise proxies for azimuth and ellipticity of the pendulum orbit. A third lidar was aiming at a face of the rocking stirrup ring in order to measure the slow spinning motion of the rigid physical pendulum about the mobile contact point of the ball on the plane. The main source of anisotropy of that pendulum type could be traced to the massive stirrup ring that causes different moments of inertia for oscillations about horizontal axes parallel and perpendicular to the ring plane. The complete operation of that pendulum was automated. The bob was first pushed by a robotized lever and locked in its start position. Typically, after a retaining hook has flipped, the pendulum is free to run for six minutes always from the same launch azimuth. It is then stopped and pushed back to the start position. A new run is launched every ten minutes. The automatically recorded amount of precession and ellipticity at the end of each run becomes a measure of any given external influence.

The motion of the long ball-borne pendulum was measured visually with the help of a rotatable grid under a pointer underneath the bob. Major axis azimuth, minor axis length and ellipse chirality (sense of travel along the ellipse) were recorded manually. At the different experimental sites, the moments of inertia of the stirrup being negligible compared to those of the bob, the anisotropy of that pendulum is attributed to the anisotropic elastic properties of a L-shaped fixture holding the spherical cup in which the ball rolls. Moreover, in certain implementations, uneven flexibility of the wooden beam on which the holding fixture was bolted may have contributed another increment of anisotropy. Typical runs of the 6-meter pendulum last for 35 or 54 minutes and readings of period, azimuth, minor-axis length and ellipse chirality values are taken every 7 minutes. In general, 3-day experiments are made of such runs launched always from the same initial azimuth. A nominal restart pause of 6 minutes is necessary between runs.

In so far as the very long pendulum is concerned (8 to 20 m), it was normally installed in tall buildings under a main beam of the ceiling or of the roof. From the observed anisotropy

axes, namely with the largest period of oscillation corresponding to a swinging azimuth perpendicular to the beam, the main anisotropy source is attributed to the different elastic properties of the beam in torsion and in flexion. However, to a lesser extent, some anisotropy may originate from a lack of circular cross-section of the wire at the chuck exit. Indeed, since piano wire is usually stored in coils, unrolling it results in changing the cross-section from circular to slightly elliptic, once the wire is straightened under tension. Evidence of that sort can be inferred from a paper by Longden [6].

Experiments with the long pendulum were usually structured as consecutive 12-hour or 18-hour runs over 5-day period centered on the time of maximum eclipse. Vertical temperature profiles were obtained from a series of 5 to 8 thermometers distributed along a scaffold near the pendulum. They were read on an hourly basis. Bob motion was recorded via a high definition digital camera near the suspension point. Light from a small projector near the suspension was returned to the camera from small retroreflecting stickers placed on the bob and on a fixed circular alidade around the bob. Using proprietary image processing software, bob position could be tracked to ±13 μm 30 times per second. It was even possible to monitor suspension beam twisting from the apparent periodical motion of the fixed retroreflecting stickers on the alidade (amplitude of a few hundred nanoradians).

In the course of some 15 years of worldwide experimentation by the authors, it was noticed that phenomena apparently connected with eclipses could be observed even at great distances from the totality trace, so that it did not seem necessary to join the eclipse chasers. The new approach of the team in the current decade is therefore to erect permanent pendulum sites that are named *pendulariums*. The first one was built in Horodnic de Jos, Romania. It is now hosting two nearly identical 6-meter ball-borne pendulums. It consists of a 3-storey structure. The first storey is made of concrete blocks with a concrete roof having two circular holes above which two concrete block steeples support the suspension rigs. The other storeys consist of a wooden construction enclosing the two steeples in order to shield them from adverse weather. Inside each steeple as well as in the lower space, two chains of six electronic temperature sensors enable virtually continuous temperature profiles to be recorded during experimentation.

The second pendularium built in Saguenay, Canada, is only one year old. It has a steel structure based on an armored concrete foundation anchored into the easily accessible underlying bedrock. The steel frame, which is meant to resist hurricane winds, is surrounded by a thermally insulated wooden housing. Mechanically independent of the tower foundation, an armored concrete floor is also anchored to the bedrock. That floor supports a 6-meter high steel tripod bolted into it. It is understood that eventual wind-induced vibrations of the tower are not significantly transmitted to the tripod. During experimentation, thermal air conditioning is achieved in such a way that the temperatures of three 2-meter high virtual storeys are set by thermostats at three increasing values with height. In such thermally stratified atmosphere, large scale convection is therefore prohibited. So, a constant thermal gradient can be maintained along the pendulum wire, thus assuring a constant swinging period at a given azimuth.

Finally, a novel alidade system has been implemented in both pendulariums. It is based on timing measurements generated by the passing of a cylindrical pointer, underneath the bob, through a set of light beams (IR LED's in Romania, visible lasers in Canada) disposed in an M-configuration. At some construction stages of the alidade, precision 3-D printing is utilized in order to guarantee accurate implementation of the M geometry of the light beams. A simple timing file is generated during each run. Immediately thereafter, it is automatically copied to a proprietary software which uses various time interval combinations to calculate all the pertinent physical parameters for each swing cycle, namely: period, azimuth, major-axis length, minor-axis length, various precession rates and precession angles, x- and y-coordinates of oscillation center, together with a complete set of graphs showing the

evolution of all those parameters during the run. Moreover, in accordance with the anisosphere formalism newly developed by one of the authors [8] for describing pendulum anisotropy, the output of the above mentioned software includes an *anisosphere graph* showing how the completed run is graphically represented on the anisosphere. From the shape of the representative curve on the anisosphere, the azimuth of the slow eigenaxis of the pendulum (azimuth of longest swinging period) is calculated, thus yielding virtually real-time information on the evolution of the anisotropy characteristics of the pendulum, depending on how different perturbations are affecting it.

3. Results

Considering what has been said above about the difficulty of reproducing Allais's results, there is also not plenty of success in that matter for the authors. However, it can be stated that a few milestones have been passed in what regards pendulum design. Within the scope of this short paper, only a few neat successes will be mentioned. A more substantial report with pertinent graphs and photographs will be presented in a longer companion article to this paper.

3.1 Short ball-borne pendulum

Despite the high degree of sophistication of that robotized instrument, the difficulty of realizing long failure-free experiments, together with the lack of appropriate analysis software at that time, have been translated in the scarcity of neat indisputable results. Its principal achievement is a neat correlated response with another near-by short ball-borne pendulum, a near-by long pendulum and several distant torsion balances [9, 12].

3.2 Long ball-borne pendulum

This pendulum has been plagued with a rather noisy response, as if its anisotropy characteristics would suddenly change without notice during a single run. Such was the case, incidentally, with Kamelingh Onnes's own pendulum in his doctor dissertation [8] (Figure 12). To the best of the authors' observations, the rolling ball does wander while rolling back and forth, creeping off-center along the spherical-cup surface. It then seems to slip sporadically and start creeping again. Nevertheless, many significant effects have been recorded with this instrument, mostly in the form of sudden precession rate changes of the order of 10% during or shortly after a solar eclipse event and in coincidence with similar anomalies recorded by other observers [9].

3.3 Long low-amplitude pendulum with Foucault suspension

The first implementation of this pendulum was a 17.4-meter version hung from the vault of a cathedral [5] during the full moon preceding a solar eclipse. The spectral analysis of the highly redundant bob orbit trace across nearly 1.3 million video images unraveled precession components with the same periodicities as those of the local tide, although with different amplitude ratios. It must be emphasized here that the precise azimuth waveform, at 30 images/second, of an oscillation in precession over a half day with a noise level below 0.05° contains more spectral information than 2160 pendulum runs over 30 days in an experiment by Allais with a noise level of a few degrees.

During a 5-day eclipse experiment in Gifu Japan in 2009, the analysis of the 1.9 million images registered each day revealed a very smooth surge in precession rate culminating at

29% of the local Foucault rate as the Moon passes near the sub-solar point each day. However, no obvious difference was observed between eclipse day and the surrounding days.

On the contrary, six months later during an eclipse experiment in the Maldives, a sudden change in swing azimuth by 0.25° occurred about 1 hour before eclipse maximum. After all the possibilities of software error or artefact could be eliminated, the event looks as if the concrete elevator shaft in which the pendulum was hung had suddenly turned by 0.25°. It appears more reasonable to rely on a micro-seismic influence of Moon passage than on a direct action of the Moon on the pendulum.

3.4 Long high-amplitude pendulum with modified Foucault suspension

This rather recent pendulum type has not lived long enough to deliver significant findings regarding lunisolar influences. It has nevertheless been very useful in ascertaining many subtle dynamical properties of physical pendulums. Looking more closely at Foucault pendulums, as many as 12 degrees of freedom can be identified [10], although only the two high-energy ones are usually considered by other experimenters. In particular, it is virtually impossible to launch a pendulum without a small initial bend of the wire at the junction with the upper bob surface. This situation is somewhat countered by prolonging the bob upwards with an axial rod called the *stem*. Anyway, residual flexion of the wire at the wire-stem junction generates a double-pendulum effect that has a transient part and a permanent part. Moreover, the other rod-wire junction of the modified Foucault suspension adds another double-pendulum effect to the system, even though the influence of that one is a good order of magnitude smaller than the first one. When searching for anomalous pendulum motion and considering the levels of precision that are now currently achieved by the pendulums of the authors (a few micrometers in bob position and a few microseconds in period determination), such parasitic movements that are routinely measured must be controlled as much as possible. This long pendulum has proven very effective in defining parasitic motion. Right after launch, a noticeable *nodding* of the bob-stem assembly sets in. Through gyroscopic effect with the rotating bob axis during pendulum swing, lateral *swaying* of the bob-stem assembly is induced. The combination of these two motions results in an elliptical *wobbling* which dies out partly via aerodynamic damping after ten minutes to twenty minutes. However, since the tension in the wire is responsible for changing, with a small delay, the rotation velocity of the bob-stem assembly during the complete swing cycle, a permanent oscillation in precession and in *ovalization* (elliptic bob motion generation) persists throughout the run. This coordinated micro-motion is always observed over the true high-frequency noise level of the pendulum per se. On the other hand, it modulates the larger fluctuations associated with low-frequency noise.

4. Conclusion

The fine motion of recent implementations of high performance Foucault pendulums has been analysed with the help of the anisosphere, a new mathematical tool for describing pendulum anisotropy. A novel alidade concept developed by the authors in the form of interrupted light beams in an M-configuration, together with efficient proprietary companion software that permits quasi-real-time analysis of each pendulum run, gives access to unprecedented levels of precision.

References

1. Allais, M. Théorie du pendule paraconique et influence lunisolaire *CRAS* **1957,** *T245*, 2170.
2. Allais, M. *L'Anisotropie de l'espace*. Clément Juglar, Paris, France 1997, ISBN 2-908735-09-1.

3. Jeverdan, G.T.; Rusu, G.I.; Antonesco, V. Preliminary data on the behaviour of the Foucault pendulum during the solar eclipse of 15 February 1961 (in Romanian). *An. Univ. Iasi,* **1961**, *7*, 457.
4. Mihaila, I; Marcov, N.; Pambuccian, V.; Agop, M. Observation de l'effet d'Allais lors de l'éclipse du 11 août 1999. *Proc. Ro. Acad., Series A* **2003**, *4*, 3.
5. Verreault, R.; Lamontagne, S. Télédétection aérospatiale et pendule de Foucault. *Revue Télédétection* **2007**, *7*, 507-524.
6. Longden, A.C. On the irregularities of motion of the Foucault pendulum. *Phys. Rev.* **1919**, *13*, 251-258.
7. Duif, C.P. Conventional explanations of anomalous observations during solar eclipses. In *Should the laws of gravitation be reconsidered*, Munera, H.A., Ed.; Apeiron: Montreal, Canada, 2011; pp. 265-282, ISBN 978-0-9864926-5-5.
8. Verreault, R. The anisosphere as a new tool for interpreting Foucault pendulum experiments. Part I: Harmonic oscillators. *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **2017**, *79*, 1-17, 31001 epjap/2017160337.
9. Goodey, T.J.; Pugach, A.F.; Olenici, D. Correlated anomalous effects observed during the August 1st 2008 solar eclise. *J. Adv. Res. in Phys.* **2010**, *1, Nr. 2*, 021007. Available at: <http://stoner.phys.uaic.ro/jarp/index.php?journal=jarp&page=article&op=view&path%5B%5D=20
10. Verreault, R. Tidal accelerations and dynamical properties of three degrees-of-freedom pendula. In *Should the laws of gravitation be reconsidered*, Munera, H.A., Ed.; Apeiron: Montreal, Canada, 2011; pp. 111-126, ISBN 978-0-9864926-5-5.
11. Maurice Allais, the Physicist: http://www.fondationmauriceallais.org/the-physicist/the-physicist-historical/?lang=en
12. Continuation given to Maurice Allais's experimental work (as per 2015): http://www.fondationmauriceallais.org/wp-content/uploads/2016/05/situation_allais_2015-trad_2-.pdf

Correlated electron dynamics in field-induced time-dependent current in low-dimensional nanostructures

Tokuei Sako

Nihon University, College of Science and Technology, Japan

Abstract

Correlated dynamics of a few electrons confined initially in a low-dimensional nanostructure and then tunneling through the potential barrier by an external triggering electric pulse has been studied by solving the time-dependent Schrödinger equation directly. The transient current has been calculated as a flux of the probability density of electrons absorbed by an artificial complex potential placed at the downstream side of the computational domain. Numerous simulations have been performed by changing the central frequency and pulse width of the incident electric field and also the initial configuration of the confined electrons, that have led us to identify two distinct pathways for the transient current generation. The results have been rationalized on the basis of the nodal patterns of the probability density distributions.

Keywords: new parametrization, micropolar theory, thin body, theory of thin bodies, prismatic body, Legendre polynomials

Acknowledgements:

This study has been supported in part by the Grants-in-Aid for Scientific Research (No.17H02725 and No.18K19065) from JSPS and by Nihon University CST Research Grants (2018).

Investigation of the Porosity and Moisture Transfer Through Textiles in Multi-layerTextile Composites

Moseshvili T., Mardaleishvili N., Tskhakaia K., Dzadzamia D.
Akaki Tsereteli State University

Multi-layer multifunctional textile is a new-generation composite material, in which the textile layers with different structures and physico-mechanical properties are located in predefined sequence. The method of connecting separate textile materials into a single structure allows for changing and varying the technical properties of composites to a large extent, which allows for creating textile composites with additional qualities that combine the most diverse properties and functions. The air layer between the layers has some functional load, which in turn plays a certain role in a composite. The paper presents the results of the study of transport properties (moisture transfer) of the original layers of medical-purpose composite textile materials. When considering the fluid flow through the textiles, of particular importance are the shape, location and size distribution of the voids, through which the fluid flows. There a presented the results of analytical and structural studies of porosity and moisture transfer in the layers of composite.

In recent decades, a significant breakthrough has been achieved in exploring and enhancing the abilities of textiles. Such textiles are identified as smart or intelligent, and vary in their nature, technology solutions and applications. Smart textiles possess the properties of conventional textile materials and carry additive functional values.

The shift to the complex layered composite textile structures allows for creating new materials with predetermined properties that have high technical and operational properties, new functions, added qualities, and environmental friendliness.

The multifunctional 3D textile structures are formed by layering of individual textiles. Each layer, including air, brings its own properties. Method of connecting separate textile materials into a single structure allows for changing and varying the technical properties of composites to a large extent, which enables to create textile composites with additional qualities, combining wide variety of properties and functions [1]. The advantages of such materials are the relative ease of connecting the layers into the complex structures; a wide variety of properties of connected textiles; the option to vary properties to a large extent; the possibility of creating multi-functionality on the surface and in volume; controllable anisotropy of properties; high predictability of the properties of composite.

The properties of obtained composites depend on the type of textile material (chemical composition, structural characteristics of fibers used, architecture of textile, etc.), physical and chemical properties of the layers; thickness and volume of the layers; air volume in a system, especially in the internal space; the order of mutual arrangement of the layers in the structure; connection technology.

The main methods of connecting flat textile elements into a multilayer structure are stitching, sticking, connecting by means of welding and pressing. Each of these methods has its advantages and disadvantages. The choice of the method of connecting is an important phase at the design stage, since it affects the technical properties of textile composite. First of all, it determines whether there is the air, which is placed between the layers and the thickness of product, and the type of binding material. Various textile and construction connective materials can change the air volume. In addition, the volume between the layers can play the role of a functional space.

Smart textiles find applications and have outstanding outlooks almost in every sphere of human activities. Many research projects are dedicated to exploring and developing smart textiles for medicine and healthcare. Use of such smart textile materials vary from in-vitro applications to in-vivo use as an asset in everyday activities and accomplishing such functions as philological monitoring and communication with environment.

It is well-known that the ability of textile materials to conduct moisture from the environment with an increased humidity to the environment with a lowered humidity is an important hygienic property. This

property allows foremoving the excess vaporous and dropping-fluid moisture from the sub-apparel layer or isolating the human body from external moisture [2].

Fig. 1 illustrates the diagram of multi-layered textile composite, which contains several textile layers that provide the moisture transfer from the surface of human skin into the depth of composite and the barrier layer, which prevents moisture from being transferred to the environment. The air gap is also a functional layer in the composite design. Being located between the layers, it creates climate control and performs a specific function of controlling of the moisture and heat transfer.

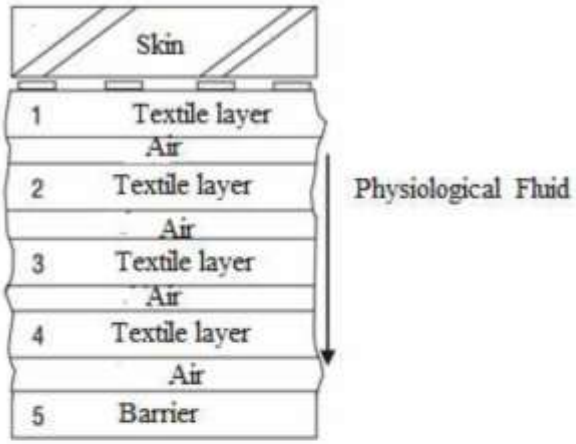


Fig.1. The movement of physiological fluid through the layers of composite

The results of studying the transport properties (moisture transport) of the initial layers of composite medical-purpose textile materials are shown below. In this case, there was examined the bedding for preventing pressure sores. Basic requirements for composite material are as follows:

- it must keep the skin dry, while the moisture from the skin respiration and fluid must be rapidly transported into the volume of composite and not pass into the environment;
- textiles used in the design must be harmless and hypoallergenic;
- ease of care and long-term use must be ensured.

Particular attention is paid to the first layer - to textile material, which comes into contact with the patient's body for a long time. Here follows an indicative list of requirements for bedding for bed patients: the hydrophilicity of the fibrous composition, the relief surface and porosity (the system of surface channels, cells); capillarity (diffusion of moisture); transmission of body fluids; antiallergenic capacity (no harmful substances); barrier for the ticks and products of their life activity, the length of time to use; abrasion resistance.

The process of the moisture transfer through textile material is a complex multistage process. It consists of the moisture diffusion through the pores in the structure of material and the moisture transfer by its sorption and desorption by fibers of material. During the process of moisture transfer, three characteristic periods can be distinguished. During the first period, there occurs the moisture diffusion over the thickness of material, as well as the intense sorption of moisture by hydrophilic fibers, and the process of moisture absorption proceeds. During the second period, the process of the moisture diffusion occurs through material and, simultaneously, the process of further moisture sorption by fibers is under way; besides, there is a slight decrease in the diameters of the capillaries due to the swelling of fibers. The third period is characterized by striking a dynamic balance, in which the processes of sorption and desorption of water vapor are balanced and the process of the moisture diffusion occurs through the pores.

The porosity of fabric plays an important role in the moisture transfer in textile structures. It is associated with some of its important features, such as air permeability, water permeability, dyeing

properties, etc. Thanks to its porous structure, textiles exhibit high fluid permeability. The fluid flow through the textile is a complex physical phenomenon due to the fibrous and very heterogeneous organization of the structure and deformation. Nevertheless, the fluid flow through the fabric is essential for understanding many physical and mechanical properties. Filtration efficiency, moisture transfer from the body into the environment, comfort of clothing, thermal insulation properties, the penetration rate of fluid into the wet treatment and the removal of fluid during drying fabrics, etc. [3].

When considering the fluid flow through textiles, of particular importance are the shapes, location and size distribution of voids, through which the fluid medium flows. The thickness of fabric and pressure drop between two surfaces of fabric are other dominant factors affecting permeability.

The structure of textile fabrics has the pores between the filaments and between fibers in the filaments. It is clear that the size and distribution of pores depend on the geometric parameters of fabric. The greatest factor affecting the porosity of textile fabrics are: the filament diameter, the number of filaments for woven materials (yarn density) and the number of loops for knitted fabrics per unit area, as well as on the filling textile materials with fibers. The maximum amount of fluid passes through the area between the filaments of fabric [2]. In addition, the fluid can easily penetrate into fabrics with a lower surface density as compared to fabrics with a high density. This is due to the fact that in densely woven materials consisting of hydrophilic yarns, the wet filaments swell, increase compactness and act as a barrier to fluid flow.

Let us consider a model of a porous medium made of incompressible material in which fluid (gas) flows. We set the problem of the one-dimensional stationary fluid flow into the plane porous deformable layer of finite thickness with account for interactive forces in case of small strains of the frame, on the basis of a model of A.G. Grishayeva [4].

Let us introduce the Cartesian axis $x$in the direction of the flow of sweat. Taking into account the one-dimensionality, all vector values will have only one nonzero component (projection on the axis x). In particular, for the sweat velocity vector and the vector of the displacements of the frame points, the representations are valid:

$$\vec{v}_f = (v, 0,0)\text{and}\vec{u}_s(u, 0,0). \quad (1)$$

We write down the interactive forces as follows [5]:

$$f = d_0 v + c_0 v^2, \quad (2)$$

where $d_0 v$ - the Darcy-type interactive force (the efficacy of the fluid action on frame), $c_0 v^2$-the frontal head-type interactive force (the efficacy of the fluid action on the frame),

We'll adopt the coefficients $d_0$and $c_0$as constant ones.

$$\begin{cases} \frac{d\sigma^s}{dx} + d_0 v + c_0 v^2 = 0, \\ \frac{d\sigma^f}{dx} - d_0 v - c_0 v^2 = m\rho_{fm} v \frac{dv}{dx}, \\ \frac{d(m\rho_{fm} v)}{dx} = 0, \\ m = m_0 + (1 - m_0)\frac{du}{dx}, \\ \sigma^s = -(1 - m)p_p + (\lambda_s + 2\mu_s)\frac{du}{dx}, \\ \sigma^f = -mp_p + (\lambda_f + 2\mu_f)\frac{dv}{dx}, \\ \varrho_s = (1 - m)\rho_{sm}, \\ \varrho_f = m\rho_{fm}, \\ p_p = \varphi(\rho_{fm}), \end{cases} \quad (3)$$

where the unknown functions are: nonzero components of the effective stress tensors of fluid and frameσ^s, σ^f,fluid velocity$v$, displacements of the frame points u, actual pressure in the pores, actual pressure of fluid ρ_f, effective density of the frame ϱ_s, pore volume of the frame m.

The coefficients$d_0$andc_0, are the effective characteristics of the elastic frame λ_s, μ_s, effective viscosities of fluid λ_f, μ_f, initial porosity of skeleton m_0, true density of the frame$\rho_{sm}$are considered the known ones. Hence, we have a system of nine equations for nine unknown functions.

Presuming that $\lambda_f = 0$, $\mu_f = 0$ (the absence of viscosities), of the interactive forces, only the darcy force is acting, taken as: $\vec{f}_D = d_0\vec{v}$, the ratio$p_p = \varphi(\rho_{fm})$is linear$p_p = p_{0+}c_{fm}(\rho_{fm} - \rho_{fm0})$with known constants$p_0, \rho_{fm0}, c_{fm}$ [6], then the equation system (3) is writtenas:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma^s}{dx} + d_0 v = 0, \\ \frac{d\sigma^f}{dx} - d_0 v = m_0 \rho_{fm} v \frac{dv}{dx}, \\ \frac{d(m\rho_{fm} v)}{dx} = 0, \\ \sigma^s = -(1-m)p_p + (\lambda_s + 2\mu_s)\frac{du}{dx} \\ \sigma^f = -mp_p, \\ p_p = p_{0+}c_{fm}(\rho_{fm} - \rho_{fm0}). \end{cases} \quad (4)$$

For our problem, we assign the following boundary conditions:

$$u(0) = 0, v(0) = v_{inc}/m, \quad \sigma^s(L) = -(1-m)p_p(L), \; p_p(0) = p_{inc}, \quad (5)$$

wherep_{inc}andv_{inc}–boundary values of true pressure in the pores, and speed of sweat before entering the porous layer.

After trivial transformations of the system (4) takes the following form:

$$\left(\frac{c_1 c_{fm}}{v^2} - c_1\right)\frac{dv}{dx} - d_0 v = 0, \quad (6)$$

$$\left(\frac{(1-m_0)c_1 c_{fm}}{m_0 v^2}\right)\frac{dv}{dx} + (\lambda_s + 2\mu_s)\frac{d^2u}{dx^2} + d_0 v = 0. \quad (7)$$

Note that the unknown constant expressing discharge of sweat, which was derived by integration of the equation of the third equation of the system (4), is calculated upon the formula:

$$c_1 = \left(\frac{p_{inc} - p_0}{c_{fm}} + \rho_{fm0}\right) \cdot v_{inc}$$

Let us move on the dimensionless quantities:

$$v = \frac{v_{inc}}{m}\tilde{v}, \; u = L \cdot \tilde{u}, x = L \cdot \tilde{x}\,, c_1 = \rho_{fm0} \cdot v_{inc} \cdot \tilde{c_1}, \; c_{fm} = v_{inc}^2 \tilde{c}_{fm},$$

$$d_0 = \frac{\rho_{fm0} \cdot v_{inc}}{L}\tilde{d}_0, \lambda_s + 2\mu_s = \rho_{fm0} \cdot v_{inc}^2(\tilde{\lambda}_s + 2\tilde{\mu}_s), p = p_0 \cdot \tilde{p}.$$

$$\left(\frac{m\tilde{c}_1\tilde{c}_{fm}}{\tilde{v}^2} - \frac{\tilde{c}_1}{m}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} - \left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v} = 0, \quad (8)$$

$$\left(\frac{(1-m)\tilde{c}_1\tilde{c}_{fm}}{\tilde{v}^2}\right)\frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} + \left(\tilde{\lambda}_s + 2\tilde{\mu}_s\right)\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{x}^2} + \left(\frac{\tilde{d}_0}{m}\right)\tilde{v} = 0. \quad (9)$$

Boundary conditions (5) will take the following form:

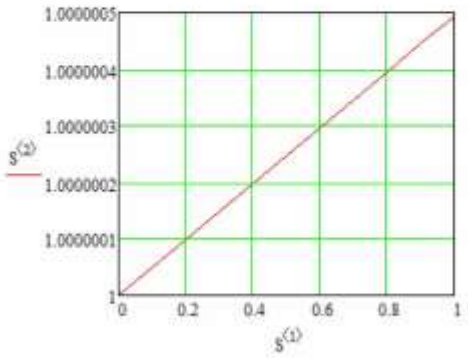
$$\tilde{u}(0) = 0, \tilde{v}(0) = 1, \quad \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}}(1) = 0 \quad (10)$$

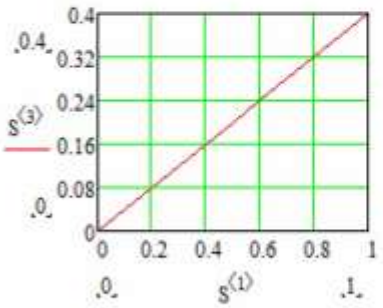
For numerical solution of the system (8)-(9), we take the following dimensional quantities:

$$c_{fm} = 2.5 \cdot 10^6 \frac{M^2}{c^2}, v_{inc} = \frac{0.01M}{c}, L = 0.1Mm = 0.18\rho_{fm0} = \frac{1012кг}{M^3}$$

$$E_s = 485 \cdot 10^7 па, \quad \nu_s = 0.46 p_0 = \frac{10^5 H}{M^2}$$

Let us bring the velocity-time diagrams of fluid and displacements of the frame points (solved numerically by means of Mathcad package):





The first figure illustrates the fact that fluid velocity on the boundary of penetration is slightly lower than the exit velocity. The second figure shows that the displacements somewhat increase from the inlet to the outlet (due to the presence of Darcy resistance).

Our samples have been obtained by connecting textile materials in a multilayer structure by stitching. Differences in a structure and physical properties allowed for dividing the initial textile fabrics into the groups depending on the function they perform in moisture absorption and transfer. Changing the relative position of the layers, replacing them or changing the thickness, it is possible to regulate the velocity of movement of moisture inside the composite textile material.

As is known, the moisture permeability of material depends heavily on the sorption properties of fibers and filaments that constituent material and the porosity of the material structure. To that end, we have selected fabrics produced from hydrophilic fibers, in particular, from ordinary viscose fibers and from high modulus viscose fibers (siblon), which are characterized by high hygroscopic indices. Table 1 shows the physico-mechanical parameters of the properties of viscose fibers of both types [7].

Table 1.hysical-mechanical properties of viscose and siblon fibers

Parameters	Siblon	Viscose
Relative breaking force, sN/Teks		
In standard condition	32,7	21
In wet condition	20,5	10,1
Unit strain,%		
In standard condition	19,7	24,
In wet condition	21,	28,0
Stiffness to yield point in wet condition, GPa	1,37	0,53
Swelling index in water ,%	77	110

The parameters of viscose fabric we proposed as the first layer of composite are shown in Table 2.

Table 2 .Viscose fabric parameters

Kind of weave	Grey cloth width, cm	Weight of 1 sq.m. of fabric	Total number of filaments in warp	Number of filaments in 1- cm of fabric	
				Warp-wise	Filling-wise
Plain	100	123	2232	258	205

The porosity between the filaments in the fabric, and the pore size have been obtained by method of image analysis to predict the parameters of pores in fabrics with a plain structure.

The image analysis system used in this study, consisted of a microscope, a color CCD camera assembled in a microscope, a PC as an image analysis device and software (MATLAB R 2013b), which provides all the necessary image processing and image analysis tools [8]. The structures of fabric samples were taken in JPG format, 2288 1712 pixels in size (Figure 2).

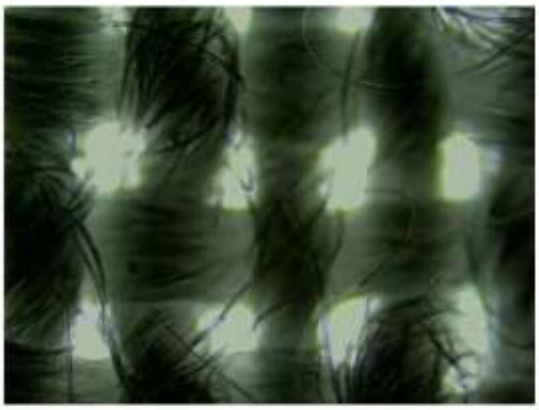


Figure 2. Microphotograph of plain fabric

After image capture, a group of steps of image processing and analysis have been taken to derive the structural parameters from the fabric images, such as porosity.,). In the image analysis method, the first step was the transformation of all captured images of 8 bpp, 256 levels of gray color (Fig. 3).

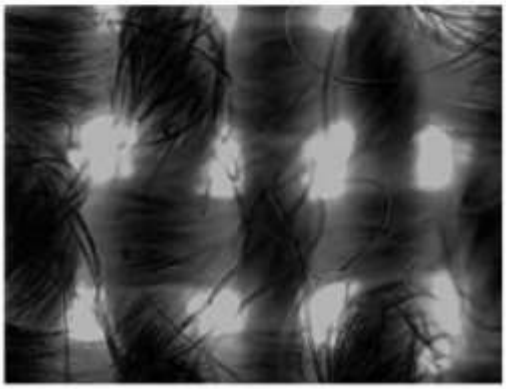


Figure3. Microphotograph of plain fabric in grey color.

We presented the obtained image for binarisation, that is we transform them into two colors (black and white).



Figure 4. Microphotograph of plain fabric after binarisation

The second step was to determine the threshold value. Using a suitable threshold value in the image at the gray level, the pixels were classified into two groups: dark pixels, corresponding to the filaments transformed into black, and bright pixels, corresponding to the pores, transformed into white. In this study, it was decided that the Otsu threshold will be used to determine the threshold value.

At the next stage, by processing the picture obtained we got a histogram (distribution curve, Fig. 5). On this diagram, the number of black dots is indicated near 0 and the number of white dots (pores) - near 255.

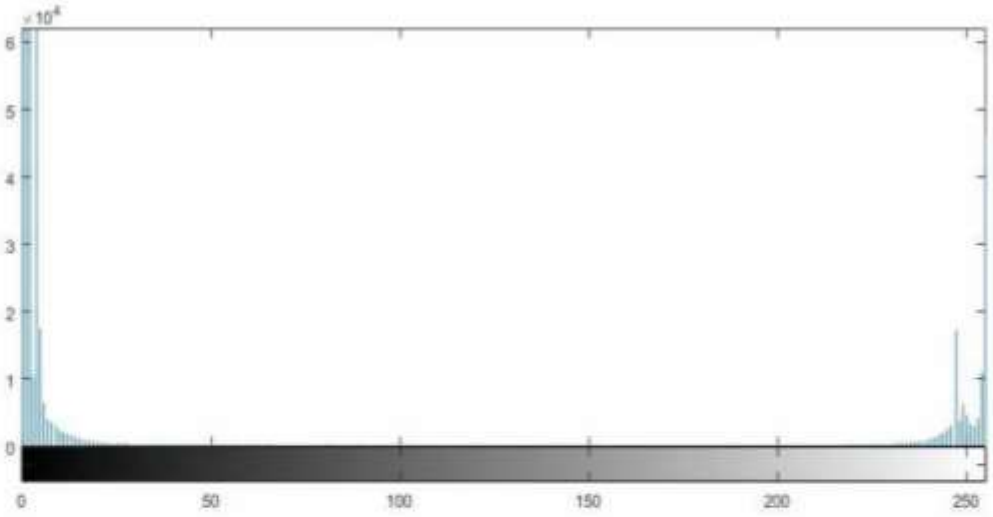


Figure 5. A histogram of pores distribution of plain fabric

In this figure, the volume of the white dots makes up 18% of the total volume, which is typical of fabrics with the average air permeability.

Thus and so, it can be concluded that the ability of composite textile materials to absorb, transport and retain in their structure water and heat depends on their structure, design and properties of individual

textile materials that are part of the structure of composite textile material.

Acknowledgment.

This study implemented by support of Shota Rustaveli National Science Foundation, project N DI- 2016-41 "**Mathematical models and computer program for multi-functional researches of multi-layer textile composites".**

References:

1. В. В. Хамматова. Многофункциональные композиционные материалы на основе применения химических волокон. Вестник Казанского университета. 2012
2. K. P. M. Tang, Y. S. Wu, K. H. Chau, C. W. Kan. Characterizing the transplanar and in-plane water transport of textiles with gravimetric and image analysis technique. Scientific Reports volume5, Article number: 9689 (2015)
3. Ayodya Kavitha, N.Giribabu, Salwa Rasheed. Moisture management of textiles. www.fibre2fashion.com/industry-article/7497/moisture-management-of-textiles?page=3
4. Гришаев А. Г. К моделированию свойств наполненных пористых сред // Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 95-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (Москва, 19-20 января 2006 года) / Под ред. И. А. Кийко, Р. А. Васина, Г. Л. Бровко. М.: ЛЕНАНД, 2006. С. 124–129
5. Бровко Г. Л. Принцип материальной независимости от системы отсчета и структуры интерактивных взаимодействий в гетерогенных средах // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т.11. Вып.2. Механика. С. 21–29
6. Wilmanski K. A few remarks on Biot's model and linear acoustics of poroelastic saturated materials. Elsevier, 2006.
7. Т. В Мосешвили. Особенности структуры и физико-механических свойств ткани, выработанной избескруточной пряжи. Вестник академии наук Азербайджана 2007
8. Xiao-YunJiang, Xiao-HongZhou. Image Processing Techniques and its Application in Water Transport through Fabrics. Journal of Fiber Bioengineering and Informatics.2010 N 9

PULSATING FLOW OF WEAKLY CONDUCTIVE LIQUID WITH HEAT TRANSFER

B. Tsutskiridze
Georgian Technical University, Department of Mathematics
Kostava str., 77, 0175. Tbilisi, Georgia
E-mail: b.tsutskiridze@mail.ru, btsutskiridze@yhoo.com

Abstract : *The title problem is studied for the case when the flow of liquid is due to pulsating pressure drop or pulsating motion of one wall or pulsating motion of walls or pulsating pressure drop and pulsating motion of walls.*

Physical characteristics of liquid flow are found.

Keywords: *weakly conducting; liquid; pulsation; fluid; heat transfer.*

Study of pulsating flows of viscous incompressible liquid is of great practical and theoretical importance. Such problems with consideration of heat transfer are not practically studied.

The article studies pulsating motion of weakly electroconductive liquid in planar tube with consideration of heat transfer when external homogeneous magnetic field is acting. Pressure fall is given with formula $\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Ae^{-i\omega t}\right)$, while heat transfer change happens in pulsating mode. Energy dissipation caused by friction $\eta\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2$ and also Joule heat σV^2 are considered in heat transfer equation. Exact solutions of Navier-Stokes and heat transfer equations are received in case of weakly electroconductive viscous incompressible liquid nonstationary motion. The introduced criteria characterize vibrational motion of liquid induced with friction force under the effect of external homogeneous magnetic field.

Let's consider pulsating flow of weakly conductive viscous incompressible liquid in planar tube when external homogeneous (H_0) magenetic field is applied vertical to the motion. Internal induction is small compared to external field, therefore it is neglected. It is supposed that fluid velocity has $V = V_z(x,t)$ component along oz axis, while temperature T is the function of x and t $-T = T(x,t)$
In noninductive approach equations of motion and heat transfer have the form [1-8]:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\Delta\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}gradp + \nu\Delta\vec{V} - \frac{\sigma}{\rho}\left[H\left[\vec{V}\cdot\vec{H}\right]\right]$$

$$\rho C_v\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \left(V\nabla\right)T\right) = k\Delta T + \Phi + \sigma\left[\vec{V}\cdot\vec{H}\right]^2 \qquad (1)$$

where $\sigma\left[\vec{V}\cdot\vec{H}\right]^2$ is Joule heat and Φ is energy dissipation function resulting of friction and is equal to:

$$\Phi = 2\eta\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Considering the above said, from system (1) in dimensionless values we receive:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + M^2 U(\xi,\tau) = De^{-i\omega\tau}$$

(2)

$$S\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}=\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)^2+M^2U^2$$

where $\xi=\frac{x}{L}$, $\tau=\frac{\nu}{L^2}t$, $U=\frac{V}{V_0}$, $\theta=\frac{k}{\eta V_0^2}T$ – are dimensionless values while V_0 and L are characteristic speed and characteristic length, respectively. $M=H_0L\sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$ – is Hartman number, $\alpha=\frac{\omega L^2}{\nu}$ – is the similarity criterion of steady pulsating motion, $S=\frac{\eta C_v}{k}$ – is Prandtl number, $D=\frac{AL^2}{\nu V_0}$ – the amplitude of pressure pulsating fall, σ – the coefficient of conductance, ν – kinematic coefficient of viscosity, η – dynamic coefficient of viscosity, ω – frequency, C_v – specific heat capacity, k – heat conductance coefficient.

Let's study liquid flow caused with pulsating motion of walls and pulsating fall of pressure: $-\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}=Ae^{-i\omega t}\right)$.

In this case boundary conditions have the form:

$$U(\xi,\tau)\big|_{\xi=1}=A_1e^{-i\alpha\tau},\ U(\xi,\tau)\big|_{\xi=-1}=A_2e^{-i\alpha\tau}, \tag{3}$$

$$\theta(\xi,\tau)\big|_{\xi=1}=B_1e^{-2i\alpha\tau},\ \theta(\xi,\tau)\big|_{\xi=-1}=B_2e^{-2i\alpha\tau} \tag{4}$$

Let's find solution of system (2) in the following form:

$$U(\xi,\tau)=\Phi(\xi)e^{-i\alpha\tau},\ \theta(\xi,\tau)=F(\xi)e^{-2i\alpha\tau}$$

Then in boundary conditions (3)-(4) we shall have the following formulas for speed and temperature:

$U(\xi,\tau)=$ (5)

$$=\left\{\frac{A_1sh\sqrt{M^2-i\alpha}(1+\xi)+A_2sh\sqrt{M^2-i\alpha}(1-\xi)}{sh2\sqrt{M^2-i\alpha}}-\frac{D}{M^2-i\alpha}\left(\frac{ch\sqrt{M^2-i\alpha}\xi}{ch\sqrt{M^2-i\alpha}}-1\right)\right\}e^{-i\alpha\tau},$$

$$\theta(\xi,\tau)=\left\{C_1e^{-\sqrt{\alpha S}(1-i)\xi}+C_2e^{\sqrt{\alpha S}(1-i)\xi}+\frac{1}{4M^2-2i\alpha(2-S)}\left(a_1ch2\sqrt{M^2-i\alpha}(1+\xi)+\right.\right.$$

$$+a_2ch2\sqrt{M^2-i\alpha}(1-\xi)+a_4ch2\sqrt{M^2-i\alpha}\xi\quad+a_5sh\sqrt{M^2-i\alpha}(1+2\xi)+$$

$$\left.+a_6sh\sqrt{M^2-i\alpha}(1-2\xi)\right)+\frac{1}{M^2-i\alpha(1-2S)}\left(a_3ch\sqrt{M^2-i\alpha}\xi+a_7sh\sqrt{M^2-i\alpha}(1+\xi)+\right.$$

$$\left.\left.+a_8sh\sqrt{M^2-i\alpha}(1-\xi)\right)+\frac{a_9}{2i\alpha S}\right\}e^{-2i\alpha\tau}, \tag{6}$$

where

3

$$C_1=\frac{1}{2sh2\sqrt{\alpha S}(1-i)}\left\{\frac{1}{4M^2-2i\alpha(2-S)}\left[e^{-\sqrt{\alpha S}(1-i)}\left(a_1ch4\sqrt{M^2-i\alpha}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+a_5sh3\sqrt{M^2-i\alpha}+a_4ch2\sqrt{M^2-i\alpha}+a_6sh\sqrt{M^2-i\alpha}+a_2\right)-$$

$$e^{\sqrt{\alpha S}(1-i)}\left(a_2ch4\sqrt{M^2-i\alpha}+a_6sh3\sqrt{M^2-i\alpha}+a_4ch2\sqrt{M^2-i\alpha}+a_5sh\sqrt{M^2-i\alpha}+a_1\right)\Big]+$$

$$+\frac{1}{M^2-i\alpha(1-2S)}\left[e^{-\sqrt{\alpha S}(1-i)}\left(a_3ch\sqrt{M^2-i\alpha}++a_7sh2\sqrt{M^2-i\alpha}\right)-\right.$$

$$\left.-e^{\sqrt{\alpha S}(1-i)}\left(a_3ch\sqrt{M^2-i\alpha}+a_8sh2\sqrt{M^2-i\alpha}\right)\right]-$$

$$\left.-\frac{a_9}{i\alpha S}\,sh\sqrt{\alpha S}(1-i)+B_1e^{\sqrt{\alpha S}(1-i)}-B_2e^{-\sqrt{\alpha S}(1-i)}\right\},$$

$$C_2=\frac{1}{2sh2\sqrt{\alpha S}(1-i)}\left\{\frac{1}{4M^2-2i\alpha(2-S)}\left[e^{-\sqrt{\alpha S}(1-i)}\left(a_2ch4\sqrt{M^2-i\alpha}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+a_6sh3\sqrt{M^2-i\alpha}+a_4ch2\sqrt{M^2-i\alpha}+a_5sh\sqrt{M^2-i\alpha}+a_1\right)-$$

$$-e^{\sqrt{\alpha S}(1-i)}\left(a_1ch4\sqrt{M^2-i\alpha}+a_5sh3\sqrt{M^2-i\alpha}+a_4ch2\sqrt{M^2-i\alpha}+a_6sh\sqrt{M^2-i\alpha}+a_2\right)\Big]+$$

$$+\frac{1}{M^2-i\alpha(1-2S)}\left[e^{-\sqrt{\alpha S}(1-i)}\left(a_3ch\sqrt{M^2-i\alpha}+a_8sh2\sqrt{M^2-i\alpha}\right)-\right.$$

$$\left.-e^{\sqrt{\alpha S}(1-i)}\left(a_3ch\sqrt{M^2-i\alpha}+a_7sh2\sqrt{M^2-i\alpha}\right)\right]-$$

$$\left.-\frac{a_9}{i\alpha S}\,sh\sqrt{\alpha S}(1-i)+B_1e^{\sqrt{\alpha S}(1-i)}-\;B_2e^{-\sqrt{\alpha S}(1-i)}\right\},$$

$$a_1=\frac{A_1^2\left(2M^2-i\alpha\right)}{2sh^2\,2\sqrt{M^2-i\alpha}},\qquad a_2=\frac{A_2^2\left(2M^2-i\alpha\right)}{2sh^2\,2\sqrt{M^2-i\alpha}},\qquad a_3=\frac{2M^2D^2}{\left(M^2-i\alpha\right)ch\sqrt{M^2-i\alpha}},$$

$$a_4=\frac{A_1A_2\left(2M^2-i\alpha\right)}{sh^2\,2\sqrt{M^2-i\alpha}}-\frac{D^2\left(2M^2-i\alpha\right)}{\left(M^2-i\alpha\right)ch^2\sqrt{M^2-i\alpha}},\quad a_5=\frac{A_1D\left(2M^2-i\alpha\right)}{\left(M^2-i\alpha\right)sh2\sqrt{M^2-i\alpha}ch\sqrt{M^2-i\alpha}},$$

$$a_6=\frac{A_2D\left(2M^2-i\alpha\right)}{\left(M^2-i\alpha\right)sh2\sqrt{M^2-i\alpha}ch\sqrt{M^2-i\alpha}},\quad a_7=-\frac{2M^2DA_1}{\left(M^2-i\alpha\right)sh2\sqrt{M^2-i\alpha}},$$

$$a_8=-\frac{2M^2DA_2}{\left(M^2-i\alpha\right)sh2\sqrt{M^2-i\alpha}},\quad a_9=\frac{i\alpha}{2}\left(\frac{A_1^2-2A_1A_2ch2\sqrt{M^2-i\alpha}+A_2^2}{sh^2\,2\sqrt{M^2-i\alpha}}+\right.$$

3

4

$$+\frac{2D(A_1+A_2)}{(M^2-i\alpha)ch^2\sqrt{M^2-i\alpha}}-\frac{D^2}{2(M^2-i\alpha^2)ch^2\sqrt{M^2-i\alpha}}\Bigg)-\frac{M^2D^2}{(M^2-i\alpha)^2}.$$

In order to study physical characteristics of flow it is necessary to separate real parts from (5)-(6). For simplicity we consider such separation for concrete cases.

1. Walls are immovable $(A_1 = A_2 = 0)$ and there is no heat transfer on walls $(B_1 = B_2 = 0)$. The motion is caused by pulsating drop of pressure $(D \neq 0)$.

Then the real parts of speed and temperature from (5)-(6) are presented in the following form:

$$U(\xi,\tau)=\frac{D}{M^4+\alpha^2}\left\{\left(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau\right)\left(1-\frac{cha(1+\xi)\cos b(1-\xi)+cha(1-\xi)\cos b(1+\xi}{ch2a+\cos 2b}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(M^2\sin\alpha\tau-\alpha\cos\alpha\tau\right)\frac{sha(1+\xi)\sin b(1-\xi)-sha(1-\xi)\sin b(1+\xi)}{ch2a+\cos 2b}\right\}, \qquad (7)$$

$$\theta(\xi,\tau)=(p_1\cos\alpha\tau+q_1\sin 2\alpha\tau)f_1(\xi)+(p_1\sin 2\alpha\tau-q_1\cos 2\alpha\tau)g_1(\xi)+$$
$$+(p_2\cos 2\alpha\tau+q_2\sin 2\alpha\tau)f_2(\xi)+(p_2\sin 2\alpha\tau-q_2\cos\alpha\tau)g_2(\xi)+$$
$$+(p_3\cos 2\alpha\tau+q_3\sin 2\alpha\tau)f_3(\xi)+(p_3\sin 2\alpha\tau-q_3\cos 2\alpha\tau)g_3(\xi), \qquad (8)$$

where

$$a=\pm\sqrt{\frac{M^2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{M^4+\alpha^2}}, \qquad b=-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{a},$$

$$p_1=\frac{2M^4D^2\left(M^4-\alpha^2(3-4S)\right)}{\left(M^4+\alpha^2\right)^2\left(M^4+\alpha^2(1-2S)^2\right)}, \qquad q_1=\frac{2M^2D^2\alpha\left(M^4(3-2S)-\alpha^2(1-2S)\right)}{\left(M^4+\alpha\right)^2\left(M^4+\alpha^2(1-2S)^2\right)},$$

$$p_2=D^2\frac{M^4\left(4M^4-\alpha^2(10-3S)\right)+\alpha^4(2-S)}{\left(M^4+\alpha^2\right)^2\left(4M^4+\alpha^2(2-S)^2\right)}\cdot\frac{ch4a+2ch2a\cos 2b+\cos 4b}{(ch2a+\cos 2b)^2}-$$
$$-2M^4D^2\frac{2+M^2(2-S)}{\left(M^4+\alpha^2\right)^2\left(4M^4+\alpha^2(2-S)^2\right)}\cdot\frac{2sh2a\sin 2b}{(ch2a+\cos 2b)^2},$$

$$q_2=D^2\frac{M^4\left(4M^4-\alpha^2(10-3S)\right)+\alpha^4(2-S)}{\left(M^4+\alpha^2\right)^2\left(4M^4+\alpha^2(2-S)^2\right)}\cdot\frac{2sh2a\sin 2b}{(ch2a+\cos 2b)^2}+$$
$$+2\alpha M^4D^2\frac{2+M^2(2-S)}{\left(M^4+\alpha^2\right)^2\left(4M^4+\alpha^2(2-S)^2\right)}\cdot\frac{ch4a+2ch2a\cos 2b+\cos 4b}{(ch2a+\cos 2b)^2},$$

$$p_3=\frac{D^2}{2S\left(M^4+\alpha^2\right)^2}\left\{\frac{\left(M^4-\alpha^2\right)(1+ch2a\cos 2b)}{(ch2a+\cos 2b)^2}-2\alpha M^2\left(\frac{sh2a\sin 2b}{(ch2a+\cos 2b)^2}-\frac{M^2}{\alpha}\right)\right\},$$

$$q_3=\frac{D^2}{2S\left(M^4+\alpha^2\right)^2}\left\{\left(M^4+\alpha^2\right)\left(\frac{sh2a\sin 2b}{(ch2a+\cos 2b)^2}-\frac{M^4}{\alpha}\right)+2\alpha M^4\frac{1+ch2a\cos 2b}{(ch2a+\cos 2b)^2}\right\},$$

$$f_1(\xi)=\frac{cha(1+\xi)\cos b(1-\xi)+cha(1-\xi)\cos b(1+\xi)}{ch2a+\cos 2b}-$$

4

$$-\frac{ch\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\cos\sqrt{\alpha S}(1-\xi)+ch\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\cos\sqrt{\alpha S}(1+\xi)}{ch2\sqrt{\alpha S}+\cos 2\sqrt{\alpha S}}, \qquad (9)$$

$$q_1(\xi)=-\frac{sha(1+\xi)\sin b(1-\xi)-sha(1-\xi)\sin b(1+\xi)}{ch2a+\cos 2b}-$$

$$-\frac{sh\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\sin\sqrt{\alpha S}(1-\xi)-sh\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\sin\sqrt{\alpha S}(1+\xi)}{ch2\sqrt{\alpha S}+\cos 2\sqrt{\alpha S}},$$

$$f_2(\xi)=\frac{ch2a(1+\xi)\cos 2b(1-\xi)+ch2a(1-\xi)\cos 2b(1+\xi)}{ch4a+\cos 4b}-$$

$$-\frac{ch\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\cos\sqrt{\alpha S}(1-\xi)+ch\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\cos\sqrt{\alpha S}(1+\xi)}{ch2\sqrt{\alpha S}+\cos 2\sqrt{\alpha S}}, \qquad (10)$$

$$q_2(\xi)=-\frac{sh2a(1+\xi)\sin 2b(1-\xi)-sh2a(1-\xi)\sin 2b(1+\xi)}{ch4a+\cos 4b}-$$

$$-\frac{sh\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\sin\sqrt{\alpha S}(1-\xi)-sh\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\sin\sqrt{\alpha S}(1+\xi)}{ch2\sqrt{\alpha S}+\cos 2\sqrt{\alpha S}},$$

$$f_3(\xi)=1-\frac{ch\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\cos\sqrt{\alpha S}(1-\xi)+ch\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\cos\sqrt{\alpha S}(1+\xi)}{ch2\sqrt{\alpha S}+\cos 2\sqrt{\alpha S}}, \qquad (11)$$

$$q_3(\xi)=-\frac{sh\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\sin\sqrt{\alpha S}(1-\xi)-sh\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\sin\sqrt{\alpha S}(1+\xi)}{ch2\sqrt{\alpha S}+\cos 2\sqrt{\alpha S}}.$$

For friction force on walls we receive:

$$F\Big|_{\xi=\pm 1}=\mp\frac{D}{a^2+b^2}\left\{\frac{sh2a}{ch2a+\cos 2b}(a\cos\alpha\tau-b\sin\alpha\tau)+\frac{\sin 2a}{ch2a+\cos 2b}(a\sin\alpha\tau+b\cos\alpha\tau)\right\},$$

while for heat consumption and mean speed we shall have respectively:

$$Q=\frac{2D}{M^4+\alpha^2}\left\{\left(1-\frac{ash2a}{(a^2+b^2)(ch2a+\cos 2b)}\right)(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau)+\right.$$

$$\left.+\frac{a\sin 2b-bsh2a}{(a^2+b^2)(ch2a+\cos 2b)}(M^2\sin\alpha\tau-\alpha\cos\alpha\tau)\right\},$$

$$U=\frac{D}{M^4+\alpha^2}\left\{\left(1-\frac{ash2a}{(a^2+b^2)(ch2a+\cos 2b)}\right)(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau)+\right.$$

$$\left.+\frac{a\sin 2b-bsh2a}{(a^2+b^2)(ch2a+\cos 2b)}(M^2\sin\alpha\tau-\alpha\cos\alpha\tau)\right\}.$$

If in equation (2) of heat conductance we reject at first Joule heat and then friction heat and at the same time consider that $\alpha\to 0$ (when each particle of liquid in the same phase vibrate with the same amplitude) then respectively we have:

$$\theta_1^{(1)}(\xi)=\frac{D^2}{2M^2ch^2M}\left(\frac{\xi^2-1}{2}+\frac{ch2M-ch2M\xi}{4M^2}\right),$$

$$\theta_2^{(1)}(\xi)=\frac{D^2}{2M^2ch^2M}\left\{(2+ch2M)\frac{1-\xi^2}{2}+\frac{4chM}{M^2}(chM\xi-chM)+\frac{1}{4M^2}(ch2M-ch2M)\right\}.$$

$\theta_1^{(1)}(\xi)$ and $\theta_2^{(1)}(\xi)$ achieve maximum value on the axis of planar tube (in point $\xi=0$).

For small values of Hartman number the heat effect caused by viscosity is more important than that caused by Joule heat while for great values of Hartman number the effect of Joule heat is more important for heat motion than that of friction heat.

2. Let liquid flow be caused with upper $\xi = 1$ wall pulsating motion ($A_1 \neq 0$, Quetta flow) and pressure fall is equal to zero ($D = 0$), also $A_2 = 0$. Then from (5)-(6) the real parts of speed and heat transfer are given in the following form:

$$U(\xi,\tau)=\Big\{ \left[cha(3+\xi)\cos b(1-\xi)-cha(1-\xi)\cos b(3+\xi)\right]\cos\alpha\tau + \\ +\left[sha(3+\xi)\sin b(1-\xi)+sha(1-\xi)\sin b(3+\xi)\right]\sin\alpha\tau \Big\}, \quad (12)$$

$$\theta(\xi,\tau) = \left(p_1\cos 2\alpha\tau + q_1\sin 2\alpha\tau\right)f_1(\xi)+\left(p_1\sin 2\alpha\tau - q_1\cos 2\alpha\tau\right)g_1(\xi)+ \\ + \left(p_2\cos 2\alpha\tau + q_2\sin 2\alpha\tau\right)f_2(\xi)+\left(p_2\sin 2\alpha\tau - q_2\cos\alpha\tau\right)g_2(\xi)+ \\ + B_1\cos 2\alpha\tau\cdot f_3(\xi)+B_2\sin 2\alpha\tau\cdot g_3(\xi), \quad (13)$$

where

$$p_1 = -\frac{A_1^2}{4M^2+\alpha^2(2-S)^2}\times \\ \times\Big\{ \left(4M^4+\alpha^2(2-S)\right)\frac{sh2\left(\sqrt{\alpha S}+2a\right)\cos 2\left(\sqrt{\alpha S}-2b\right)}{\left(ch4\sqrt{\alpha S}-\cos 4\sqrt{\alpha S}\right)\left(ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2\right)}+ \\ +\left(4M^4+\alpha^2(2-S)\right)\frac{ch2\left(\sqrt{\alpha S}-2a\right)\cos 2\left(\sqrt{\alpha S}+2b\right)-2sh\sqrt{\alpha S}\cos 2\sqrt{\alpha S}}{\left(ch4\sqrt{\alpha S}-\cos 4\sqrt{\alpha S}\right)\left(ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2\right)}+ \quad (14) \\ +2\alpha M^2(S-1)\times \\ \times\frac{ch2\left(\sqrt{\alpha S}+2a\right)\sin 2\left(\sqrt{\alpha S}-2b\right)+ch2\left(\sqrt{\alpha S}-2a\right)\sin 2\left(\sqrt{\alpha S}+2b\right)-2ch2\sqrt{\alpha S}\sin 2\sqrt{\alpha S}}{\left(ch4\sqrt{\alpha S}+\cos 4\sqrt{\alpha S}\right)\left(ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2\right)}\Big\},$$

$$q_1 = \frac{A_1^2}{4M^2+\alpha^2(2-S)^2}\times \\ \times\Big\{ \left(4M^4+\alpha^2(2-S)\right)\frac{ch2\left(\sqrt{\alpha S}+2a\right)\sin 2\left(\sqrt{\alpha S}-2b\right)}{\left(ch4\sqrt{\alpha S}-\cos 4\sqrt{\alpha S}\right)\left(ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2\right)}+ \\ +\left(4M^4+\alpha^2(2-S)\right)\frac{ch2\left(\sqrt{\alpha S}-2a\right)\sin 2\left(\sqrt{\alpha S}+2b\right)-2ch\sqrt{\alpha S}\sin 2\sqrt{\alpha S}}{\left(ch4\sqrt{\alpha S}-\cos 4\sqrt{\alpha S}\right)\left(ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2\right)}- \\ -2\alpha M^2(S-1)\times \\ \times\frac{sh2\left(\sqrt{\alpha S}+2a\right)\cos 2\left(\sqrt{\alpha S}-2b\right)+sh2\left(\sqrt{\alpha S}-2a\right)\cos 2\left(\sqrt{\alpha S}+2b\right)-2sh2\sqrt{\alpha S}\cos 2\sqrt{\alpha S}}{\left(ch4\sqrt{\alpha S}+\cos 4\sqrt{\alpha S}\right)\left(ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2\right)}\Big\},$$

$$p_2 = \frac{A_1^2}{S}-\frac{ch4a\cos 4b-1}{ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2},\quad q_2 = \frac{A_1^2}{S}-\frac{sh4a\sin 4b}{ch8a+\cos 8b-4ch4a\cos 4b+2}, \quad (15)$$

$$f_1(\xi) = \frac{1}{2}\Big\{ sh2\left(\sqrt{\alpha S}+a(1+\xi)\right)\cos 2\left(\sqrt{\alpha S}-b(1+\xi)\right)+$$

$$+sh2\left(\sqrt{\alpha S}-a(1+\xi)\right)\cos 2\left(\sqrt{\alpha S}+b(1+\xi)\right)-sh\left(4a+\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\right)\cos\left(4b-\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\right)+$$
$$+sh\left(4a-\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\right)\cos\left(4b+\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\right)-2sh\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\sin\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\Big\},\qquad(16)$$

$$g_1(\xi)=\frac{1}{2}\Big\{\ ch2\left(\sqrt{\alpha S}+a(1+\xi)\right)\sin 2\left(b(1+\xi)-\sqrt{\alpha S}\right)-$$
$$-ch2\left(\sqrt{\alpha S}-a(1+\xi)\right)\sin 2\left(\sqrt{\alpha S}+b(1+\xi)\right)-ch\left(4a+\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\right)\sin n\left(4b-\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\right)-$$
$$-ch\left(4a-\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\right)\sin\left(4b+\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\right)+2ch\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\sin\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\Big\},$$

$$f_2(\xi)=1-\frac{ch\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\cos\sqrt{\alpha S}(1-\xi)+ch\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\cos\sqrt{\alpha S}(1+\xi)}{ch2\sqrt{\alpha S}+\cos 2\sqrt{\alpha S}},$$

$$g_2(\xi)=\frac{sh\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\sin\sqrt{\alpha S}(1-\xi)+sh\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\sin\sqrt{\alpha S}(1+\xi)}{ch2\sqrt{\alpha S}+\cos 2\sqrt{\alpha S}},\qquad(17)$$

$$f_3(\xi)=\frac{ch\sqrt{\alpha S}\,\frac{3+\xi}{2}\cos\sqrt{\alpha S}\,\frac{1-\xi}{2}-ch\sqrt{\alpha S}\,\frac{1-\xi}{2}\cos\sqrt{\alpha S}\,\frac{3+\xi}{2}}{ch2\sqrt{\alpha S}-\cos 2\sqrt{\alpha S}},$$

$$g_3(\xi)=\frac{sh\sqrt{\alpha S}\,\frac{3+\xi}{2}\sin\sqrt{\alpha S}\,\frac{1-\xi}{2}-sh\sqrt{\alpha S}\,\frac{1-\xi}{2}\sin\sqrt{\alpha S}\,\frac{3+\xi}{2}}{ch2\sqrt{\alpha S}-\cos 2\sqrt{\alpha S}}.\qquad(18)$$

For the friction force on walls we get:

$$F\Big|_{\xi=1}=\frac{A_1}{ch4a-\cos 4b}\left\{sh4a\left(a\cos\alpha\tau+b\sin\alpha\tau\right)+\sin 4b\left(b\cos\alpha\tau-a\sin\alpha\beta\tau\right)\right\},$$

$$F\Big|_{\xi=-1}=\frac{2A_1}{ch4a-\cos 4b}\left\{sh2a\cos 2b\left(a\cos\alpha\tau+b\sin\alpha\tau\right)+ch2a\sin 2b\left(b\cos\alpha\tau-a\sin\alpha\beta\tau\right)\right\},$$

while for heat consumption and mean speed we shall have respectively:

$$Q=\frac{A_1}{\left(a^2+b^2\right)\left(ch2a+\cos 2b\right)}\left\{sh2a\left(a\cos\alpha\tau-b\sin\alpha\tau\right)+\sin 2b\left(a\sin\alpha\tau+b\cos\alpha\tau\right)\right\},$$

$$U=\frac{A_1/2}{\left(a^2+b^2\right)\left(ch2a+\cos 2b\right)}\left\{sh2a\left(a\cos\alpha\tau-b\sin\alpha\tau\right)+\sin 2b\left(a\sin\alpha\xi+b\cos\alpha\tau\right)\right\}.$$

If in equation (2) of heat conductance we reject at first Joule heat and then friction heat and, at the same time, suppose that $\alpha\to 0$ (when each particle of liquid in the same phase vibrate with the same amplitude), then, respectively, we shall have:

$$\theta_1^{(2)}(\xi)=\frac{A_1^2M^2}{2ch^2M}\left(\frac{1-\xi^2}{2}+\frac{ch4M-ch2M(1+\xi)}{4M^2}\right)+B_1\frac{\xi+1}{2},$$

$$\theta_2^{(2)}(\xi)=\frac{A_1^2M^2}{2ch^2M}\left(\frac{\xi^2-1}{2}+\frac{ch4M-ch2M(1+\xi)}{4M^2}\right)+B_2\frac{\xi+1}{2}.$$

When $M\to 0$, heat transfer caused with friction heat has parabolic character while the law of heat transfer caused with Joule heat has a linear form.

For small values of Hartman number the effect of Joule heat is more important on heat motion than that of friction heat while for great values of Hartman number the effect of friction heat is more important than the effect caused with Joule heat.

3. Let the flow be caused with pulsating motion of walls, i.e. $A_1 = A_2 = A_0$, $B_1 = B_2 = B_0$, $D = 0$.

Then real parts of speed and heat transfer from (5)-(6) will have the following form:

$$U(\xi,\tau) = \frac{A_0}{ch2a + \cos 2b}\left\{ \begin{array}{l} (cha(1+\xi)\cos b(1-\xi) + cha(1-\xi)\cos b(1+\xi))\cos\alpha\tau - \\ -(sha(1+\xi)\sin b(1-\xi) - sha(1-\xi)\sin b(1+\xi))\sin\alpha\tau \end{array} \right\}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \theta(\xi,\tau) = {} & (p_1\cos 2\alpha\tau + q_1\sin 2\alpha\tau) f_1(\xi) + (p_1\sin 2\alpha\tau + q_1\cos 2\alpha\tau) g_1(\xi) + \\ & + (p_2\cos 2\alpha\tau + q_2\sin 2\alpha\tau) f_2(\xi) + (p_2\sin 2\alpha\tau + q_2\cos 2\alpha\tau) g_2(\xi) + \\ & + B_0\cos 2\alpha\tau \cdot f_4(\xi) + B_0\sin 2\alpha\tau \cdot g_4(\xi). \end{aligned} \quad (20)$$

For friction force on walls we shall have:

$$F\Big|_{\xi=\pm 1} = \pm\frac{A_0}{ch2a + \cos 2b}\left\{ sh2a(a\cos\alpha\tau + b\sin\alpha\tau) - \sin 2b(b\cos\alpha\tau - a\sin\alpha\tau) \right\},$$

while for heat consumption and mean speed we shall respectively have:

$$Q = \frac{2A_0}{(a^2+b^2)(ch2a + \cos 2b)}\{sh2a(a\cos\alpha\tau - b\sin\alpha\tau) + \sin 2b(a\sin\alpha\tau + b\cos\alpha\tau)\},$$

$$U = -\frac{A_0}{(a^2+b^2)(ch2a + \cos 2b)}\{sh2a(a\cos\alpha\tau - b\sin\alpha\tau) + \sin 2b(a\sin\alpha\tau + b\cos\alpha\tau)\},$$

where

$$p_1 = -\frac{A_0^2}{4M^2 + \alpha^2(2-S)^2}\left\{ \begin{array}{l} (4M^4 + \alpha^2(2-S))\dfrac{ch6a\cos 2b + ch2a\cos 6b - 2ch2a\cos 2b}{(ch4a - \cos 4b)^2} + \\ + 2\alpha M^2(1-S)\dfrac{sh6a\sin 2b + sh2a\sin 6b + 2sh2a\sin 2b}{(ch4a - \cos 4b)^2} \end{array} \right\}, \quad (21)$$

$$q_1 = -\frac{A_0^2}{4M^2 + \alpha^2(2-S)^2}\left\{ \begin{array}{l} (4M^4 + \alpha^2(2-S))\dfrac{sh6a\sin 2b + sh2a\sin 6b + 2sh2a\sin 2b}{(ch4a - \cos 4b)^2} + \\ + 2\alpha M^2(1-S)\dfrac{ch6a\cos 2b + ch2a\cos 6b - 2ch2a\cos 2b}{(ch4a - \cos 4b)^2} \end{array} \right\}, \quad (22)$$

$$p_2 = -\frac{A_0^2(ch2a\cos 2b + 1)}{2S(ch2a + \cos 2b)^2}, \qquad q_2 = \frac{A_0^2 sh2a\sin 2b}{2S(ch2a + \cos 2b)^2},$$

$$f_4(\xi) = \frac{ch\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\cos\sqrt{\alpha S}(1-\xi) + ch\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\cos\sqrt{\alpha S}(1+\xi)}{ch2\sqrt{\alpha S} + \cos 2\sqrt{\alpha S}},$$

$$g_4(\xi) = \frac{sh\sqrt{\alpha S}(1+\xi)\sin\sqrt{\alpha S}(1-\xi) - sh\sqrt{\alpha S}(1-\xi)\sin\sqrt{\alpha S}(1+\xi)}{ch2\sqrt{\alpha S} + \cos 2\sqrt{\alpha S}}. \quad (23)$$

For calculation of $f_1(\xi)$, $g_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ and $g_2(\xi)$ we use formulas (9)-(10).

9

If in equation (2) of heat conductance we reject, at first, Joule heat and then friction heat and at the same time suppose that $\alpha \to 0$, then respectively we shall have:

$$\theta_1^{(3)}(\xi)=\frac{A_0^2M^2}{2ch^2 2M}\left(\frac{ch4M-ch2M(1+\xi)}{4M^2}+\frac{\xi^2-1}{2}\right)+B_0,$$

$$\theta_2^{(3)}(\xi)=\frac{A_0^2M^2}{2ch^2 2M}\left(\frac{ch4M-ch2M(1+\xi)}{4M^2}+\frac{1-\xi^2}{2}\right)+B_0.$$

When $0,7 < M < 1$, then the effect caused with Joule heat is more important that the effect caused by friction heat, while in all other cases the effect caused with friction heat is more important.

4. Let liquid flow be caused with pulsating drop of pressure $(D \neq 0)$ and with pulsating motion of walls $(A_1 = A_2 = A_0)$. Heat transfer on walls is permanent $(B_1 = B_2 = B_0)$.

Then speed and heat transfer real parts are presented from (5)-(6) as follows:

$$U(\xi,\tau)=\frac{cha(1+\xi)\cos b(1-\xi)+cha(1-\xi)\cos b(1+\xi)}{ch2a+\cos 2b}\left\{\left(A_0^2-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)\cos\alpha\tau+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^4}\sin\alpha\tau\right\}-$$
$$-\frac{sha(1+\xi)\sin b(1-\xi)-sha(1-\xi)\sin b(1+\xi)}{ch2a+\cos 2b}\left\{\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^4}\cos\alpha\tau+\right.$$
$$\left.+\left(A_0^2-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)\sin\alpha\tau\right\}+\frac{D}{M^4+\alpha^2}\left(M^2\cos\alpha\tau-\alpha\sin\alpha\tau\right), \qquad (24)$$

$$\theta(\xi,\tau)=(p_1\cos 2\alpha\tau+q_1\sin 2\alpha\tau)f_1(\xi)+(p_1\sin 2\alpha\tau+q_1\cos 2\alpha\tau)g_1(\xi)+$$
$$+(p_2\cos 2\alpha\tau+q_2\sin 2\alpha\tau)f_2(\xi)+(p_2\sin 2\alpha\tau+q_2\cos 2\alpha\tau)g_2(\xi)+$$
$$+(p_3\cos 2\alpha\tau+q_3\sin 2\alpha\tau)f_3(\xi)+(p_3\sin 2\alpha\tau+q_3\cos 2\alpha\tau)g_3(\xi)$$
$$+B_0\cos 2\alpha\tau\cdot f_4(\xi)+B_0\sin 2\alpha\tau\cdot g_4(\xi), \qquad (25)$$

where

$$p_1=\frac{2DM^2}{(M^4+\alpha^2)(M^4+\alpha^2(1-2S)_2)}\left[\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)(M^4-\alpha^2(1-2S))+\frac{\alpha^2(1-2S)}{M^4+\alpha^2}\right],$$

$$q_1=\frac{2DM^2}{(M^4+\alpha^2)(M^4+\alpha^2(1-2S)_2)}\left[\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)\frac{\alpha(1-2S)}{D}-\alpha D(M^4-\alpha^2(1-2S))\right],$$

$$p_2=\left\{\frac{4M^4+\alpha^2(2-S)}{4M^4+\alpha^2(2-S)^2}\left[\left(\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^2}\right)^2-\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)^2\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{4\alpha^2DM^2(1-S)}{(M^4+\alpha^2)(4M^4+\alpha^2(2-S)^2)}\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)\right\}\frac{ch4a+2ch2a\cos 2b+\cos 4a}{(4ch2a+\cos 2b)^2}-$$
$$-\left\{\frac{2\alpha D(4M^4+\alpha^2(2-S))}{(M^4+\alpha^2)(4M^4+\alpha^2(2-S)^2)}\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)-\right.$$

$$- \frac{2\alpha M^2(1-S)}{4M^4+\alpha^2(2-S)_2}\left[\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)^2-\left(\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^2}\right)^2\right]\Bigg\}\frac{sh2a\sin 2b}{2(ch2a+\cos 2b)^2},$$

$$q_2=\Bigg\{\frac{4M^4+\alpha^2(2-S)}{4M^4+\alpha^2(2-S)^2}\left[\left(\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^2}\right)^2-\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{2\alpha D(4M^4+\alpha^2(2-S))}{(M^4+\alpha^2)(4M^4+\alpha^2(2-S)^2)}\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)\Bigg\}\frac{sh2a\sin 2b}{2(ch2a+\cos 2b)^2}+$$

$$+\Bigg\{\frac{2\alpha D(4M^4+\alpha^2(2-S))}{(M^4+\alpha^2)(4M^4+\alpha^2(2-S)^2)}\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)-$$

$$-\frac{2\alpha M^2(1-S)}{4M^4+\alpha^2(2-S)_2}\left[\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)^2-\left(\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^2}\right)^2\right]\Bigg\}\frac{ch4a+2ch2a\cos 2b+\cos 4a}{(4ch2a+\cos 2b)^2},$$

$$p_3=\left[\left(\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^2}\right)^2-\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)^2\right]\frac{ch2a\cos 2b+1}{2S(ch2a+\cos 2b)^2}+$$

$$+\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^2}\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)\frac{sh2a\sin 2b}{S(ch2a+\cos 2b)^2}-\frac{DM^4}{S(M^4+\alpha^2)},$$

$$q_3=\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^2}\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)\frac{ch2a\cos 2b+1}{S(ch2a+\cos 2b)^2}-$$

$$-\left[\left(\frac{\alpha D}{M^4+\alpha^2}\right)^2-\left(A_0-\frac{DM^2}{M^4+\alpha^2}\right)^2\right]\frac{sh2a\sin 2b}{2S(ch2a+\cos 2b)^2}+\frac{M^2D}{2\alpha S(M^4+\alpha^2)},$$

$f_1(\xi)$, $g_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $g_2(\xi)$, $f_3(\xi)$, $g_3(\xi)$, $f_4(\xi)$ and $g_4(\xi)$ are respectively calculated with formulas (9), (10), (11) and (23).

Calculating friction force on walls we get:

$$F\Big|_{\xi=\pm 1}=\pm\frac{sh2a}{ch2a+\cos 2b}\left[a\left(A_0-\frac{D}{a^2+b^2}\right)\cos\alpha\tau+b\left(A_0+\frac{D}{a^2+b^2}\right)\sin\alpha\tau\right]\mp$$

$$\mp\frac{\sin 2b}{ch2a+\cos 2b}\left[b\left(A_0+\frac{D}{a^2+b^2}\right)\cos\alpha\tau-a\left(A_0-\frac{D}{a^2+b^2}\right)\right],$$

while for liquid consumption and mean speed we respectively shall have:

$$Q=\frac{2}{M^4+\alpha^2}\Bigg\{\frac{sh2a}{ch2a+\cos 2b}\Bigg[a\left(A_0-\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau\right)-$$

$$-b\left(A_0+\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(\alpha\cos\alpha\tau-M^2\sin\alpha\tau\right)\Bigg]-$$

$$-\frac{\sin 2b}{ch2a+\cos 2b}\left[\ b\left(A_0+\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau\right)+\right.$$

$$\left.+a\left(A_0-\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(\alpha\cos\alpha\tau-M^2\sin\alpha\tau\right)\ \right]+D(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau)\ \Bigg\},$$

$$U=\frac{1}{M^4+\alpha^2}\left\{\ \frac{sh2a}{ch2a+\cos 2b}\left[\ a\left(A_0-\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau\right)-\right.\right.$$

$$\left.-b\left(A_0+\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(\alpha\cos\alpha\tau-M^2\sin\alpha\tau\right)\ \right]-$$

$$-\frac{\sin 2b}{ch2a+\cos 2b}\left[\ b\left(A_0+\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau\right)+\right.$$

$$\left.\left.+a\left(A_0-\frac{D}{a^2+b^2}\right)\left(\alpha\cos\alpha\tau-M^2\sin\alpha\tau\right)\ \right]+D(M^2\cos\alpha\tau+\alpha\sin\alpha\tau)\ \right\}.$$

If in heat conductance equation (2) we reject at first Joule heat and then friction heat and at the same time suppose that $\alpha\to 0$ we shall respectively get:

$$\theta_1^{(4)}(\xi)=\frac{M^2C^2}{2}\left(\frac{\xi^2-1}{2}+\frac{ch2M\xi-ch2M}{4M^2}\right)+B_0,$$

$$\theta_2^{(4)}(\xi)=\left(\frac{M^2C^2}{2}+\frac{D^2}{M^2}\right)\frac{1-\xi^2}{2}+\frac{2DC}{M^2}\left(chM-chM\xi\right)+\frac{C^2}{8}\left(ch2M-ch2M\xi\right)+B_0,$$

where

$$C=\frac{A_0-\dfrac{D}{M^2}}{chM}.$$

For small values of Hartman number friction heat has more important role in heat transfer than Joule heat, while for great values of Hartman number their effect on heat transfer is almost identical.

Investigations show that: the action of external homogeneous magnetic field slows down liquid pulsating flow. At the increase of magnetic field the speed of liquid flow on the axis of planar tube decreases and near walls it increases while mean speed value in planar tube section does not change.

Speed, temperature, friction and consumption versus time have periodical properties.

Each period begins with forward flow of liquid after which inverse flow begins and then we have immobility and again weak inverse flow.

$\alpha=\dfrac{\omega L^2}{\nu}$ represents similarity criterion of steady pulsating motion of weakly conductive viscous incompressible liquid.

α show the relation between inertial force and friction force produced as a result of pulsation. The less is α, the less is inertial force and the more quantity of liquid undergoes vibration. When α=0 (this is the case, when $\nu=\infty$) each particle of liquid in one phase vibrates with similar amplitude. The greater is α, the greater is its inertial force and the less quantity of liquid undergoes vibration. When $\alpha=\infty$ (this is the case of ideal liquid, $\nu=0$), vibrating motion of walls do not induce vibration motion of liquid.

When liquid flow is caused with pulsating drop of pressure and external magnetic field does not act, we get Hartman stationary problem with consideration of heat transfer while when flow is caused with walls pulsating motion and pressure pulsating change, we get Hartman nonstationary problem (we mean that $M=0$, $D\neq 0$, $\alpha\to 0$).

When liquid flow is caused with pressure pulsating drop or with pulsating motion of one wall or with pulsating motion of walls with the increase of external homogeneous magnetic field and with the increase of similarity criterion $\left(\alpha = \frac{\omega L^2}{\nu} \right)$, friction on walls increases while consumption decreases.

When liquid pulsating flow is caused with pulsating motion of walls and pulsating fall of pressure, friction on walls decreases and consumption increases.

At the increase of Hartman number, temperature in planar tube decreases. This result fits to the result received in the previous case according to which the increase of Hartman number causes the slowing down of pulsating flow.

The action of external magnetic field on pulsating motion of liquid generally causes temperature increase in planar tube.

REFERENCES

[1]. Vatazin A. B., Lubimov G. A., Regirer C. A., Magnetohydrodynamic Flow in Channels. Moscow: Sciences, 1970, pp.672.

[2]. Mikhailov U. A., Ozolo R. Ya. Heat exchange in the cross homogeneous magnetic field // Commun. of the Acad. of Scien. of Latvia, phys. and tech. scien. seri., №2, 1965, pp.19-28.

[3]. V. Tsutskiridze, Exact-solution of the problem of nonstationary convective heat transfer in a flat channel.//Problems of Mechanics//International scientific journal. Tbilisi, 2005, №4 (21), pp.88-91.

[4]. Sharikadze J. V, Falkner-Skan problems for conducting fluid with strong magnetic field .Transactions of the International Conference The Problems of Continium Mechanics, Tbilisi, 2007, 82-86 (Engl.).

[5]. V. Tsutskiridze, L. Jikidze, Heat transfer in tubes with porous walls under internal heat sources. Proceedigs of A. Razmadze Mathematical Institute. Vol. 154, 2010, 127-133, (Engl).

[6] L. A. Jikidze and V. N. Tsutskiridze, Approximate method for solving an unsteady rotation problem for a porous plate in the conducting fluid with regard for the heat transfer in the case of electroconductivity. Several Problems of Applied Mathematics and Mechanics. *Series: Science and Technology Mathematical Physics(ebook), New York,* pp.157-164, 2013, (Engl).

[7]. V. Tsutskiridze and L. Jikidze, The nonstationary flow of a conducting fluid a plane pipe in the presence of a transverse magnetic field. Elsevier (www. Elsevier. Com/locate/trmi) Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute Vol. 170, Issue 2, September 2016, pp.280-286, (Engl).

[8]. J. Sharikadze, V. Tsutskiridze, L. Jikidze, Pulsating flow of weakly conductive liquid with heat transfer. AMIM(Applied Mathematics Informatics and Mechanics) Tbilisi, vol.18, No.2, 2013, pp. 42-53, (Engl.)

Analytical solution of internal boundary value problem of elasticity for domain bounded by parabola with normal load

Zirakashvili N.

I.Vekua Institute of Applied Mathematics of Iv. Javakhishvili Tbilisi State University

Abstract. *In this paper internal boundary value problem of elastic equilibrium of the homogeneous isotropic body bounded by coordinate lines of the parabolic coordinate system is considered, when on parabolic border normal stress is given. Analytical solution is obtained by the method of separation of variables. Using the MATLAB software numerical results and constructed graphs of the mentioned boundary value problem are obtained.*

Keywords: *internal boundary value problem; analytical solution; method of separation of variables; parabolic coordinates.*

1. Introduction

The solution of boundary value and boundary-contact problems in the areas with curvilinear border, it is simplified if examining such problems in the appropriate curvilinear coordinate system. For example, for a circle and its parts the tasks are considered in the polar coordinate system [1-4], for ellipse and its parts the tasks are considered in elliptical coordinate system [5-8], for an areas with circle with different centers and radiuses the tasks are considered in the bipolar coordinate system [9-11]. The above-mentioned tasks are solved by both analytical and numerical methods. In [12] the boundary value problems are formulated according to the complex potential function, using as parabolic coordinate system.

In the current paper the boundary value problem is considered in parabolic coordinate system ξ,η; $-\infty<\xi<\infty$, $0\le\eta<\infty$ (see Appendix). In the parabolic coordinates are written the equilibrium equations system and Hooke's law. Analytical (exact) solution of two-dimensional static boundary value problems of elasticity are constructed in the domain bounded by coordinate lines of the parabolic coordinate system. Here we represent internal boundary value problem of elastic equilibrium of the homogeneous isotropic body bounded by coordinate lines of the parabolic coordinate system, when on parabolic border normal stress is given. Analytical (exact) solution is obtained using the method of separation of variables. Numerical results and corresponding graphs of the mentioned problem are presented.

2. Equilibrium equations and Hooke's law in parabolic coordinates

In a parabolic coordinates ξ,η, equilibrium equations with respect to the function D, K, $\overline{u}$, $\overline{v}$ and Hooke's law can be written as [13]

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ D_{,\xi}-K_{,\eta}=0, \qquad \text{c)}\ \overline{u}_{,\xi}+\overline{v}_{,\eta}=\frac{\kappa-2}{\kappa\mu}h_0^2 D,\\ &\text{b)}\ D_{,\eta}+K_{,\xi}=0, \qquad \text{d)}\ \overline{v}_{,\xi}-\overline{u}_{,\eta}=\frac{1}{\mu}h_0^2 K, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\sigma_{\eta\eta} = h_0^{-1}\left\{\lambda\bar{u}_{,\xi} + (\lambda+2\mu)\bar{\mathrm{v}}_{,\eta} + \left[(\lambda+\mu) - \mu h_0^{-2}\right](\xi\bar{u} + \eta\bar{\mathrm{v}})\right\},$$
$$\sigma_{\xi\xi} = h_0^{-1}\left\{(\lambda+2\mu)\bar{u}_{,\xi} + \lambda\bar{\mathrm{v}}_{,\eta} + \left[(\lambda+\mu) + \mu h_0^{-2}\right](\xi\bar{u} + \eta\bar{\mathrm{v}})\right\}, \qquad (2)$$
$$\tau_{\xi\eta} = \mu h_0^{-1}\left[(\mathrm{v}_{,\xi} + u_{,\eta}) - h_0^{-2}(\xi\bar{\mathrm{v}} + \eta\bar{u})\right],$$

where $\bar{u} = \frac{hu}{c^2}$, $\bar{\mathrm{v}} = \frac{h\mathrm{v}}{c^2}$; $h_0 = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$, $h = h_\xi = h_\eta = c\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ are Lamé coefficients, u, v are components of the displacement vector at tangents to the coordinate lines η, ξ; $\frac{\kappa-2}{\kappa\mu}D$ is the divergence of the displacement vector, $\frac{K}{\mu}$ is the rotor of the displacement vector; $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$ and $\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi}$ are normal and tangential stresses; subscripts ξ, η denote partial derivatives with respect to the corresponding coordinates; $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1-\nu)}$ are elastic Lamé constants; $\kappa = 4(1-\nu)$; ν is the Poisson's ratio and E is the modulus of elasticity.

3. Statement and solution of problem

Now let us formulate the following boundary value problem: in domain $\Omega_1 = \{0 < \xi < \xi_1,\ 0 < \eta < \eta_1\}$ (see Fig.1) find a solution of the system of equilibrium equations (1) with respect to the unknowns D, K, u, v using the boundary conditions:

$$\text{for } \eta = \eta_1: \quad \frac{h_0^2}{2\mu}\sigma_{\eta\eta} = P,\ \frac{h_0^2}{2\mu}\tau_{\xi\eta} = 0. \qquad (3)$$

$$\text{for } \eta = 0: \quad \bar{u} = 0,\ \bar{\mathrm{v}}_{,\eta} = 0, \qquad (4)$$

$$\text{for } \xi = 0: \quad \bar{\mathrm{v}} = 0,\ \bar{u}_{,\xi} = 0.. \qquad (5)$$

Provision. We make the following assumptions:

1) ξ_1 is sufficiently great positive number;

2) The boundary conditions given on $\eta = \eta_1$, i.e. displacements or stresses equal zero at $\tilde{\xi}_1 < \xi < \xi_1$ interval;

3) When stresses are given on $\eta = \eta_1$, the main vector and main moment equal zero.

$$\text{for } \xi = \xi_1 \to \infty: \quad \sigma_{\xi\xi} = 0,\ \sigma_{\xi\eta} = 0. \qquad (6)$$

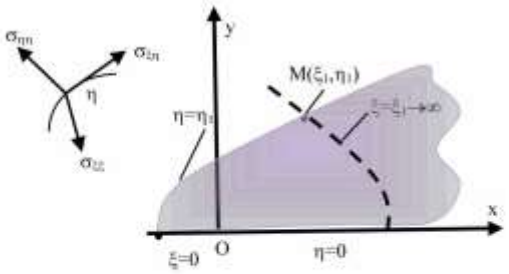


Figure 1 Area $\Omega_1 = \{0 < \xi < \xi_1,\ 0 < \eta < \eta_1\}$ bounded by parabola and line $y=0$

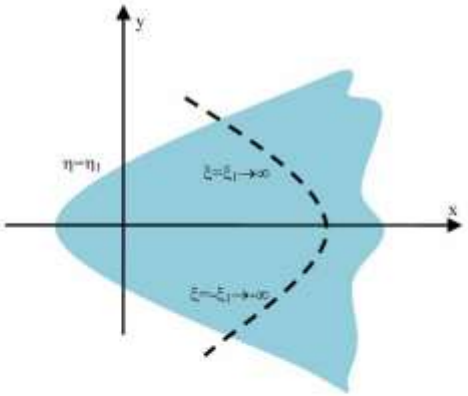


Figure 2 Area $D_1 = \{-\xi_1 < \xi < \xi_1,\ 0 < \eta < \eta_1\}$ bounded by parabola

Boundary conditions on the linear parts $\xi = 0$ and $\eta = 0$ of consideration area enables us to continue the solutions continuously in the domain, that is the mirror reflection of the consideration area in a relationship $y = 0$ line (see Fig.2).

The solution is constructed using its general representation by two harmonic functions φ_1, φ_2. The components of the displacement vector have the form

$$\overline{u} = -\left[\eta\left(\varphi_{1,\eta} - \varphi_{2,\xi}\right) + (\kappa - 1)\varphi_1\right]\xi + \left[\frac{\eta_1^2}{\eta}\left(\varphi_{1,\xi} + \varphi_{2,\eta}\right) - (\kappa - 1)\varphi_2\right]\eta, \tag{7}$$

$$\overline{v} = \left[\frac{\eta_1^2}{\eta}\left(\varphi_{1,\eta} - \varphi_{2,\xi}\right) + (\kappa - 1)\varphi_1\right]\eta + \left[\eta\left(\varphi_{1,\xi} + \varphi_{2,\eta}\right) - (\kappa - 1)\varphi_2\right]\xi;$$

$$D = \frac{\kappa\mu}{h_0^2}\left[\left(\varphi_{1,\eta} - \varphi_{2,\xi}\right)\eta - \left(\varphi_{1,\xi} + \varphi_{2,\eta}\right)\xi\right],$$

$$K = \frac{\kappa\mu}{h_0^2}\left[\left(\varphi_{1,\eta} - \varphi_{2,\xi}\right)\xi + \left(\varphi_{1,\xi} + \varphi_{2,\eta}\right)\eta\right].$$

where $\frac{1}{h^2}\left(\varphi_{i,\xi\xi}+\varphi_{i,\eta\eta}\right)=0,\ \ i=1,2.$

The stress tensor components can be written as:

$$\frac{h_0^2}{2\mu}\sigma_{\eta\eta}=-\left[\frac{\eta_1^2}{\eta}\left(\varphi_{1,\xi\xi}+\varphi_{2,\xi\eta}\right)-\frac{\kappa}{2}\varphi_{1,\eta}-\frac{\kappa-2}{2}\varphi_{2,\xi}\right]\eta$$
$$+\left[\eta\left(\varphi_{1,\xi\eta}-\varphi_{2,\eta\eta}\right)+\frac{\kappa-2}{2}\varphi_{1,\xi}-\frac{\kappa}{2}\varphi_{2,\eta}\right]\xi$$
$$-\frac{\eta_1^2-\eta}{\xi^2+\eta^2}\left[\left(\varphi_{1,\eta}-\varphi_{2,\xi}\right)\eta-\left(\varphi_{1,\xi}+\varphi_{2,\eta}\right)\xi\right],$$

$$\frac{h_0^2}{2\mu}\tau_{\xi\eta}=\left[\frac{\eta_1^2}{\eta}\left(\varphi_{1,\xi\eta}-\varphi_{2,\xi\xi}\right)+\frac{\kappa-2}{2}\varphi_{1,\xi}-\frac{\kappa}{2}\varphi_{2,\eta}\right]\eta$$
$$+\left[\eta\left(\varphi_{1,\xi\xi}+\varphi_{2,\xi\eta}\right)-\frac{\kappa}{2}\varphi_{1,\eta}-\frac{\kappa-2}{2}\varphi_{2,\xi}\right]\xi \qquad (8)$$
$$-\frac{\eta_1^2-\eta}{\xi^2+\eta^2}\left[\left(\varphi_{1,\eta}-\varphi_{2,\xi}\right)\xi+\left(\varphi_{1,\xi}+\varphi_{2,\eta}\right)\eta\right],$$

$$\frac{h_0^2}{2\mu}\sigma_{\xi\xi}=\left[\frac{\eta_1^2}{\eta}\left(\varphi_{1,\xi\xi}+\varphi_{2,\xi\eta}\right)-\frac{\kappa-4}{2}\varphi_{1,\eta}-\frac{\kappa+2}{2}\varphi_{2,\xi}\right]\eta$$
$$-\left[\eta\left(\varphi_{1,\xi\eta}-\varphi_{2,\xi\xi}\right)+\frac{\kappa+2}{2}\varphi_{1,\xi}-\frac{\kappa-4}{2}\varphi_{2,\eta}\right]\xi$$
$$+\frac{\eta_1^2-\eta}{\xi^2+\eta^2}\left[\left(\varphi_{1,\eta}-\varphi_{2,\xi}\right)\eta-\left(\varphi_{1,\xi}+\varphi_{2,\eta}\right)\xi\right],$$

The boundary conditions (4), (5) are satisfied if

$$\varphi_i=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{in},\ \ i=1,2, \qquad (9)$$

where

$$\varphi_{1n}=A_{1n}\sinh(n\eta)\sin(n\xi),\quad \varphi_{2n}=A_{2n}\cosh(n\eta)\cos(n\xi).$$

Instead of conditions (3) we have to take their equivalent following expressions

$$\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{\eta\eta}\cdot\eta_1-\sigma_{\xi\eta}\cdot\xi\right)=-\eta_1\left(\varphi_{1,\xi\xi}+\varphi_{2,\xi\eta}\right)-\frac{\kappa}{2}\varphi_{1,\eta}-\frac{\kappa-2}{2}\varphi_{2,\xi},$$
$$\qquad (10)$$
$$\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{\eta\eta}\cdot\xi+\sigma_{\xi\eta}\cdot\eta_1\right)=\eta_1\left(\varphi_{1,\xi\eta}-\varphi_{2,\xi\xi}\right)+\frac{\kappa-2}{2}\varphi_{1,\xi}-\frac{\kappa}{2}\varphi_{2,\eta}.$$

The constants A_{1n} and A_{2n} are defined if the boundary conditions (3) are satisfied. Thus, from the (3), (6) (9), (10) we receive following equations:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(n^2\eta_1\sinh(n\eta_1)-n\frac{\kappa}{2}\cosh(n\eta_1)\right)A_{1n}\right.\\
&\left.+\left(n^2\eta_1\sinh(n\eta_1)+n\frac{\kappa-2}{2}\cosh(n\eta_1)\right)A_{2n}\right]=\widetilde{F}_{1n},\\
&\left[\left(n^2\eta_1\cosh(n\eta_1)+n\frac{\kappa-2}{2}\sinh(n\eta_1)\right)A_{1n}\right.\\
&\left.+\left(n^2\eta_1\cosh(n\eta_1)-n\frac{\kappa}{2}\sinh(n\eta_1)\right)A_{2n}\right]=\widetilde{F}_{2n},\\
&n=1,2,\ldots,
\end{aligned}\qquad (11)$$

where $\widetilde{F}_{1n}$ and $\widetilde{F}_{2n}$ are the coefficients of expansion into Fourier series $f_1(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{F}_{1n}\sin(n\xi)$ and $f_2(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{F}_{2n}\cos(n\xi)$, respectively, $f_1(\xi)=P\eta_1/(\xi^2+\eta_1^2)$ and $f_2(\xi)=P\xi/(\xi^2+\eta_1^2)$ functions.

As seen, the main matrix of the system (11) has a block-diagonal form, The dimension of each block is 2×2 and determinant is not equal to zero, but in infinite the determinant of block strive to the finite number different to zero. Thus, will be solve two equations, to two unknowns A_{1n} and A_{2n}. After solve this system, we find coefficients A_{1n} and A_{2n}, and put them into the formula (9) we get functions φ_1 and φ_2. Further after put them into the formula (7) and (8), we get displacements and stresses at any points of body.

It is very easy to establish convergence of (7), (8) functional series on the area $\overline{D}_1=\{-\xi_1\le\xi\le\xi_1,\ 0\le\eta\le\eta_1\}$ by construction of the corresponding uniform convergent numerical majorizing series. So we have the following

Proposal 1. The functional series corresponding to (7), (8) are absolutely and uniform by convergent series on the area $\overline{D}_1=\{-\xi_1\le\xi\le\xi_1,\ 0\le\eta\le\eta_1\}$.

Numerical results obtained in $M_2(\xi_1,\eta_1)$ points (see. Fig. 1), when $0.1\le\eta_1\le 3$ for the following data: $\nu=0.3$, $E=2*10^6\,kg/cm^2$, $P=-10kg/cm^2$, $0.1\le\eta_1\le 3$, $\xi_1=2*\pi$, $\xi_1=4*\pi$ and $\xi_1=6*\pi$. Numerical calculations and the visual presentation is made MATLAB's software.

In points $M(\xi_1,\eta_1)$, ($0.1\le\eta_1\le 3$ and $\xi_1=2*\pi$, $\xi_1=4*\pi$, $\xi_1=6*\pi$) are presented graphs and tables of values of a) normal $\sigma_{\eta\eta}$, tangential $\tau_{\xi\eta}$ and shearing $\sigma_{\xi\xi}$ stresses, when on the parabolic boundary are given normal load (see Fig. 3 and Tab.1); b) normal u and tangential v displacements, when on the parabolic boundary are given normal load (see Fig.3 and Tab.2).

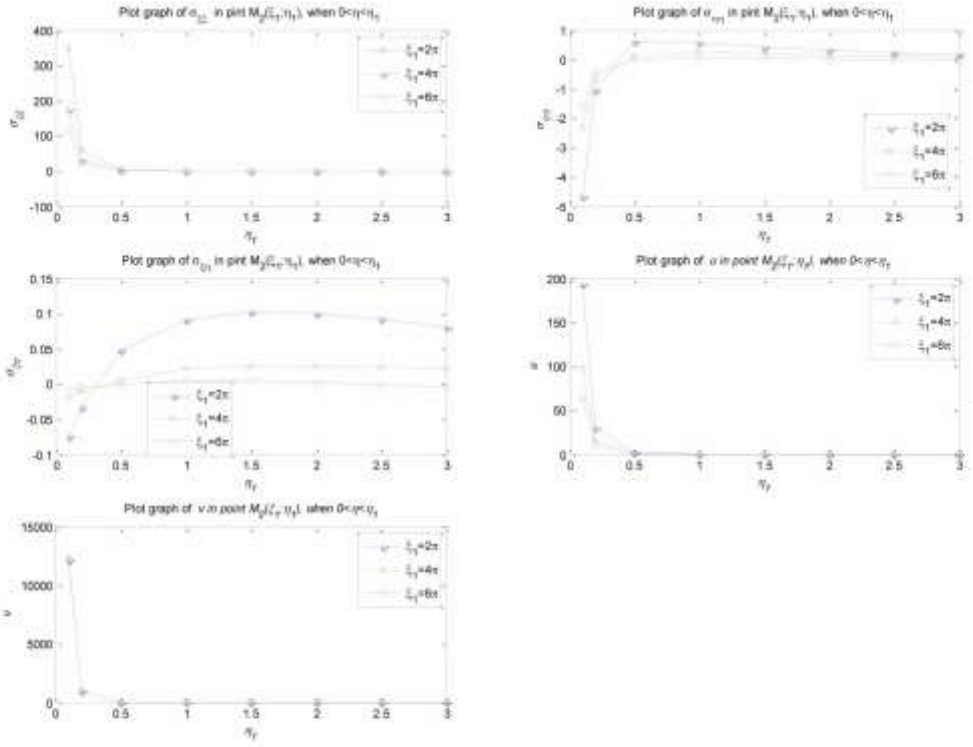


Figure 3 Stresses and displacements in points $M(\xi_1,\eta_1)$ for $\xi_1 = 2*\pi$, $\xi_1 = 4*\pi$ and $\xi_1 = 6*\pi$, when $0.1 \le \eta_1 \le 3$

Table 1 Values of stresses at points $M(\xi_1,\eta_1)$, when $0.1 \le \eta_1 \le 3$

η_1	$\xi_1 = 2*\pi$			$\xi_1 = 4*\pi$			$\xi_1 = 6*\pi$		
	$\sigma_{\xi\xi}$	$\sigma_{\eta\eta}$	$\tau_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}$	$\sigma_{\eta\eta}$	$\tau_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\xi}$	$\sigma_{\eta\eta}$	$\tau_{\xi\eta}$
0.01	3.48×10^{-02}	-4.68×10^{-00}	-7.45×10^{-02}	1.75×10^{-02}	-2.35×10^{-00}	-1.87×10^{-02}	1.17×10^{-02}	-1.66×10^{-00}	-8.81×10^{-03}
0.02	5.81×10^{-01}	-1.04×10^{-00}	-3.32×10^{-02}	2.98×10^{-01}	-7.08×10^{-01}	-1.13×10^{-02}	1.98×10^{-01}	-4.48×10^{-01}	-4.75×10^{-03}
0.5	4.97×10^{-00}	6.03×10^{-01}	4.80×10^{-02}	2.80×10^{-00}	1.18×10^{-01}	4.71×10^{-03}	2.01×10^{-00}	-1.22×10^{-02}	-3.24×10^{-04}
1.	6.52×10^{-01}	5.75×10^{-01}	9.15×10^{-02}	3.78×10^{-01}	2.81×10^{-01}	2.23×10^{-02}	3.57×10^{-01}	9.74×10^{-02}	5.17×10^{-03}
1.5	1.01×10^{-01}	4.30×10^{-01}	1.03×10^{-01}	8.73×10^{-02}	2.13×10^{-01}	2.54×10^{-02}	1.58×10^{-01}	5.36×10^{-02}	4.27×10^{-03}
2.	$=3.58\times10^{-02}$	3.16×10^{-01}	1.01×10^{-01}	9.10×10^{-03}	1.60×10^{-01}	2.55×10^{-02}	1.02×10^{-01}	2.00×10^{-02}	2.12×10^{-03}
2.5	-6.86×10^{-02}	2.32×10^{-01}	9.22×10^{-02}	-1.48×10^{-02}	1.21×10^{-01}	2.42×10^{-02}	8.27×10^{-02}	-4.38×10^{-03}	-5.81×10^{-04}
3.	-6.89×10^{-02}	1.70×10^{-01}	8.10×10^{-02}	-2.09×10^{-02}	9.28×10^{-02}	2.21×10^{-02}	7.60×10^{-02}	-2.18×10^{-02}	-3.47×10^{-03}

Table 2 Values of displacements at points $M(\xi_1,\eta_1)$, when $0.1 \le \eta_1 \le 3$

η_1	$\xi_1 = 2*\pi$		$\xi_1 = 4*\pi$		$\xi_1 = 6*\pi$	
	u	v	u	v	u	v
0.01	1.931722×10^{-02}	1.213736×10^{-04}	9.748764×10^{-01}	1.225066×10^{-04}	6.511376×10^{-001}	1.227366×10^{-004}
0.02	3.070168×10^{-01}	9.645219×10^{-02}	1.557706×10^{-01}	9.787358×10^{-02}	1.041636×10^{-001}	9.817192×10^{-002}
0.5	2.449950×10^{-00}	3.078698×10^{-01}	1.253830×10^{-00}	3.151218×10^{-01}	8.340506×10^{-001}	3.144297×10^{-001}
1.	7.756216×10^{-01}	4.873374×10^{-00}	3.965540×10^{-01}	4.983244×10^{-00}	2.568356×10^{-001}	4.841236×10^{-000}
1.5	6.356776×10^{-01}	2.662720×10^{-00}	3.216085×10^{-01}	2.694301×10^{-00}	2.016807×10^{-001}	2.534394×10^{-000}

2.	5.864609×10^{-01}	1.842421×10^{-00}	2.974889×10^{-01}	1.869178×10^{-00}	1.811615×10^{-001}	1.707407×10^{-000}
2.5	5.405192×10^{-01}	1.358473×10^{-00}	2.777550×10^{-01}	1.396149×10^{-00}	1.640132×10^{-001}	1.236631×10^{-000}
3.	4.876470×10^{-01}	1.021326×10^{-00}	2.559660×10^{-01}	1.072188×10^{-00}	1.458306×10^{-001}	9.162808×10^{-001}

4. Conclusion

The main results of this work can be formulated as follows.

- The equilibrium equations (1) are written in terms of parabolic coordinates.
- The solution of the equilibrium equation (1) is obtained by the method of separation of variables. The solution is constructed using its general representation by two harmonic functions.
- In the parabolic coordinates exact solution of two-dimensional static boundary value problem for the elasticity is constructed for homogeneous isotropic body occupying domain bounded by coordinate lines of parabolic coordinate system, when on parabolic border normal stress is given.
- Numerical results and corresponding graphs of the mentioned problem are presented.

Appendix

Some principal formulas in parabolic coordinates

If x, y are Cartesian coordinates and ξ,η are parabolic coordinates, then $x=\frac{c}{2}\left(\xi^2-\eta^2\right)$, $y=c\xi\eta$, where c is a scale factor and in the present paper, we take $c=1$. In orthogonal parabolic coordinate system $\xi,\eta\ \left(-\infty<\xi<\infty,\ 0\le\eta<\infty\right)$ [14,15] we have $h_\xi=h_\eta=h=c\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, where h_ξ, h_η are Lame's coefficients of the system of parabolic coordinates.

The coordinate axis are parabolas (see Fig.4)

$$y^2=-2c\xi_0^2\left(x-\frac{c\xi_0^2}{2}\right),\quad \xi_0=\text{const},$$

$$y^2=-2c\eta_0^2\left(x+\frac{c\eta_0^2}{2}\right),\quad \eta_0=\text{const}.$$

Laplace's equation $\Delta f=0$, where $f=f(\xi,\eta)$, in the parabolic coordinates has the form

$$\frac{1}{c^2\left(\xi^2+\eta^2\right)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right)=0.$$

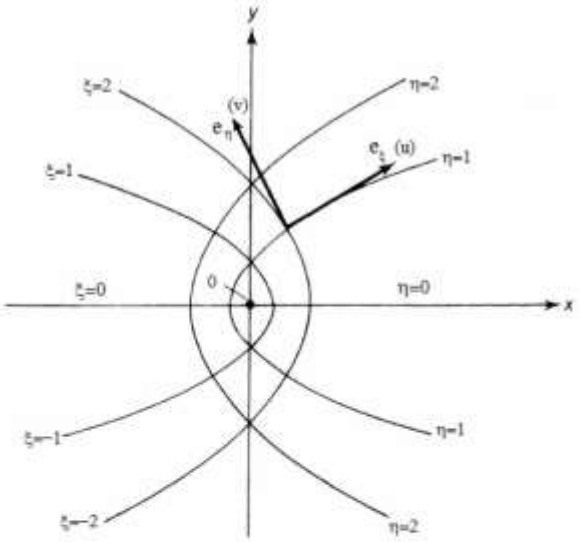


Figure 4 Parabolic coordinate system

e_{ξ}, e_{η} are unit vectors .

Some basic problems of the mathematical theory of elasticity: Fundamental equations, plane theory of elasticity, torsion and bending

References

[1] Muskhelishvili N *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity: Fundamental equations, plane theory of elasticity, torsion and bending*. Enlarged 5th edition, Nauka, Moscow, , 1966, 78 pages (Russian)..

[2] Khomasuridze N. Thermoelastic equilibrium of bodies in generalized cylindrical coordinates. *Georgian Math. J.* 5(6), 1998, Tbilisi, pp. 521–544.

[3] Khomasuridze N., Zirakashvili N. Strain control of cracked elastic bodies by means of boundary condition variation. *Proceedings of International Conference "Architecture and Construction – Contemporary Problems"*, 30 September-3 October, 2010, Yerevan – Jermuk, pp.158-163.

[4] Zirakashvili N. Application of the boundary element method to the solution of the problem of distribution of stresses in an elastic body with a circular hole whose interior surface contains radial cracks. *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute* 141, 2006, Tbilisi, pp.139-147.

[5] Tang Renji, Wang Yinbang. On the problem of crack system with an elliptic hole. *Acta Mechanica Sinica* 2(l), 1986, Hong Kong, pp. 47-53.

[6] Zirakashvili N. The numerical solution of boundary value problems for an elastic body with an elliptic hole and linear cracks. *J. Eng. Math.* 65(2), 2009, Springer Netherlands, pp.111–123.

[7] Shestopalov Y., Kotik N. Approximate decomposition for the solution of boundary value problems for elliptic systems arising in mathematical models of layered structures. In: *Progress in electromagnetics research symposium, Cambridge*, USA, March 26–29, 2006, pp.514–518.

[8] Zirakashvili N. Some Boundary Value Problems of Elasticity for Semi-Ellipses. *Proceeding of I. Vekua Institute of Applied Mathematics* 52, 2002, Tbilisi, pp.49 – 55.

[9] Jeffery G. B. Planes tress and planes train in bipolar coordinates. *Trans. Roy. Soc. London*, 221, A. 1921, pp.265-293.

[10] Ufland Ya. S. *Bipolar coordinates in elasticity*. Gostehteoretizdat, Moscow-Leningrad, 1950, 232 pages (Russian).
[11] Khomasuridze N. Solution of some elasticity boundary value problems in bipolar coordinates. *Acta Mechanica*. 189 (3-4), 2007, pp. 207-224.
[12] Zappalorto M., Lazzarin P., Yates J.R. Elastic stress distributions for hyperbolic and parabolic notches in round shafts under torsion and uniform antiplane shear loadings. *International Journal of Solids and Structures* 45(18–19), 2008, pp. 4879–4901.
[13] Novozhilov V. V. *Elasticityt heory*. Sudpromgiz, Leningrad, 1958, 371 pages (Russian).
[14] Lebedev N.N. *Special functions and their applications*. Gosizdat of Theoretical Technical Literature, Moscow, 1958, 380 pages (Russian).
[15] Bermant A. F. *Mapping, Curvilinear coordinates. Transformations. Green,s forurula*. Fizmatgiz, Moscow, 1958, 308 pages (Russian).

ძირითადი სასაზღვრო-კონტაქტური ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნების აგების ახალი მეთოდის შესახებ

ლეკვეიშვილი დ., ჭუმბურიძე მ.

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ანოტაცია. *ნაშრომში განხილულია მიახლოებითი ამოხსნების აგების ახალი მეთოდი გრინის ტენზორების გამოყენებით. დასაბუთებულია რომ გრინის ტენზორი შეიძლება გამოყენებულ იქნას ამოცანის ამონახსნის რაგინდ ზუსტ რაოდენობრივ შეფასებათა აპროქსიმაციის მისაღებად. კვლევის ობიექტს წარმოადგენს ძირითადი საკონტაქტო ამოცანები. კვლევა ეფუძნება ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდს, გრინის ტენზორებისა და პოტენციალთა მეტოდებს.*

საკვანძო სიტყვები. მიახლოებითი ამოხსნები; გრინის ტენზორი; საკონტაქტო ამოცანები.

შესავალი

უახლესი ტექნოლოგიური მიღწევები ცხადყოფენ, რომ მეცნიერების სხვადასხვა მიმართულების დარგებში, ინჟინერიაში, ბიომექანიკასა და მატემატიკურ ინდუსტრიაში მოვლენების მათემატიკური აღწერის გაცილებით ძლიერი აპარატია რთული კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც არ მიეკუთვნებიან ცნობილ კანონიკურ ტიპებს. ურთულეს ამოცანას წარმოადგენს ამ განტოლებების რიცხვითი მიახლოებითი ამოხსნების აგება და მათი გადაწყვეტის რაგინდ ზუსტ რაოდენობრივ შეფასებათა ეფექტური ალგორითმების შემუშავება, რაც პირდაპირ კავშირშია ამონახსნის სტრუქტურის სიმარტივესთან. ამასთან დაკავშირებით არსებობს სხვადასვა აპროქსიმაციები[1], რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ამონახსნის აგების სტრატეგიებითა და სიზუსტით.

ნაშრომში შემოთავაზებულია და დამტკიცებულია კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის ინოვაციური გამოთვლითი მეთოდები კლასიკური დრეკადობის სასაზღვრო-კონტაქტური ამოცანის მაგალითზე.

ნაშრომის მთავარ არსს წარმოადგენს აპროქსიმაციის ალგორითმების განზოგადებული მეთოდების კვლევა და ახალი ეფექტური მოდიფიკაციების შემოთავაზება გრინის ტენზორების გამოყენებით[3]. კვლევის ობიექტს წარმოადგენს დრეკადობის თეორიის ორგანზომილებიანი სასაზღვრო-კონტაქტური ამოცანების მოდელები სხვადასხვა სასაზღვრო-კონტაქტური პირობებით არაერთგვაროვანი სასრული და უსასრულო არეებისთვის, რომლებიც შემოსაზღვრული არიან ჰოლდერის კლასის შეკრული წირებით[4].

ამოცანის დასმა

ავაგოთ ძირითადი სასაზღვრო-კონტაქტური ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნები დრეკადობის თეორიის კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სტატიკური სისტემებისათვის ცენტრ-სიმეტრიანი არაერთგვაროვანი იზოტროპული წრიული არეებისათვის კოშის ჰიპოთეზის პირობებში [3]:

$$\forall x \in D_r, r = 1,2: \qquad A^{(r)}(\partial x)u^{(r)}(x) = f^{(r)}(x)$$

$$\forall y \in S \in L_2(\alpha), \alpha > 0: \quad \{u^{(1)}(y)\}^+ = \{u^{(2)}(y)\}^-$$

$$\{T^{(1)}(\partial y, n)u^{(1)}(y)\}^+ = \{T^{(2)}(\partial y, n)u^{(2)}(y)\}^-$$

და გამოსხივების პირობებით უსასრულობაში.

სადაც, $D_1 = \{x = (x_1, x_2) \epsilon R^2,\ x_1^2 + x_2^2 \le l^2\}$, $D_2 = \{x = (x_1, x_2) \epsilon R^2,\ x_1^2 + x_2^2 \ge l^2\}$,

$S = \{x = (x_1, x_2) \epsilon R^2,\ x_1^2 + x_2^2 = l^2\} \in \Lambda_2(\alpha), \alpha > 0$ –ლიაპუნოვის წირი ჰოლდერის კლასის(სურ.1), სადაც l – მოცემული რიცხვია. $A^{(r)}(\partial x) = A(\partial x, \mu_r, \lambda_r)$,

$A(\partial x, \mu, \lambda) = \|A_{ij}(\partial x, \mu, \lambda)\|_{2\times 2}$, $A_{ij}(\partial x, \mu, \lambda) = \delta_{ij}\mu\Delta + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1,2$; $\Lambda_2(\alpha)$, $\alpha > 0$,

$T^{(r)}(\partial y, n) = T(\partial y, \mu_r, \lambda_r, n)$ – ძაბვის ტენზორი, $T(\partial y, \mu, \lambda, n) = \|T_{ij}(\partial y, \mu, \lambda, n)\|_{2\times 2}$,

$T_{ij}(\partial y, \mu, \lambda, n) = \lambda n_i(y)\frac{\partial}{\partial y_j} + \mu n_j(y)\frac{\partial}{\partial y_i} + \delta_{ij}\mu\frac{\partial}{\partial n(y)}$, $i, j = 1,2$; $n(y)$ - გარე ერთეულოვანი ნორმალია S ზედაპირისადმი y წერტილში, $u^{(r)} = (u_1^{(r)}, u_2^{(r)})$- გადაადგილების ვექტორი, μ_r, λ_r – დრეკადობის მუდმივები, $f^{(r)} = (f_1^{(r)}, f_2^{(r)}) \in C^{2,\alpha}(D_r) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D_r}), \alpha > 0$- მოცემული ვექტორ-ფუნქციები.

ნებისმიერი $\varphi(x)$ ფუნქციის შეზღუდვა D_r არეზე აღვნიშნოთ $\varphi^{(r)}(x)$-ით.

კოშის ჰიპოთეზის პირობებში:

$$\frac{\mu_2}{\lambda_2} = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \text{ სადაც, } \qquad \mu_1 < \mu_2$$

გვაქვს შემდეგი შეფასებები[3]:

$$L^1(\partial x) = \frac{\mu_1}{\mu_2}L^{(2)}(\partial x),\ T^{(1)}(\partial x, n) = \frac{\mu_1}{\mu_2}T^{(2)}(\partial x, n)$$

როგორც ცნობილია ამ ამოცანას, გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი[4]. ვიპოვოთ ის მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით.

ამონახსნის აგება

ნულოვან მიახლოებად ავიღოთ u_0=0 ფუნქცია. ვთქვათ მიმდევრობის $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_k$ წევრები უკვე აგებულია. ამ მიმდევრობის შემდეგი წევრი განვსაზღვროთ როგორც ამონახსნი შემდეგი ამოცანებისა:

ნეიმანის ამოცანა:

$$A^{(2)}(\partial x)u_{k+1}^{(2)}(x) = f^{(2)}(x), x \in D_2$$

$$\{T^{(2)}(\partial y, n)u_{k+1}^{(2)}(y)\}^- = \{T^{(1)}(\partial y, n)u_k^{(1)}(y)\}^+, y \in S$$

დირიხლეს ამოცანა:

$$A^{(1)}(\partial x)u_{k+1}^{(1)}(x) = f^{(1)}(x), x \in D_1$$

$$\{u_{k+1}^{(1)}(y)\}^{+} = \{u_{k+1}^{(2)}(y)\}^{-}, y \in S$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ სახით აგებული მიმდევრობა კრებადია და მისი ზღვარი u დასმული ამოცანის ამონახსნია.

განვიხილოთ მწკრივი:

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k,$$

სადაც $v_k = u_k - u_{k-1}, k \geq 1$. ცხადია,$v_1$ წარმოადგენს შემდეგი ამოცანების ამონახსნს

ნეიმანის ამოცანა:

$$A^{(2)}(\partial x)v_1^{(2)}(x) = f^{(2)}(x), x \in D_2$$

$$\{T^{(2)}(\partial y, n)v_1^{(2)}(y)\}^{-} = 0, y \in S$$

დირიხლეს ამოცანა:

$$A^{(1)}(\partial x)v_1^{(1)}(x) = f^{(1)}(x), x \in D_1$$

$$\{v_1^{(1)}(y)\}^{+} = \{v_1^{(2)}(y)\}^{-}, y \in S$$

ხოლოv_k, როცა $k > 1$ აკმაყოფილებს ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას :

$$A^{(r)}(\partial x)v_k^{(r)}(x) = 0, x \in D_r, r = 1,2$$

და საკონტაქტო პირობებს:

$$\left\{v_k^{(1)}(y)\right\}^{+} = \left\{u_k^{(1)}(y) - u_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^{+} = \left\{u_k^{(1)}(y)\right\}^{+} - \left\{u_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^{+} =$$

$$= \left\{u_k^{(2)}(y)\right\}^{-} - \left\{u_{k-1}^{(2)}(y)\right\}^{-} =$$

$$= \left\{u_k^{(2)}(y) - u_{k-1}^{(2)}(y)\right\}^{-} = \left\{v_k^{(2)}(y)\right\}^{-}, y \in S$$

$$\left\{T^{(2)}(\partial y, n)v_k^{(2)}(y)\right\}^{-} = \{T^{(2)}(\partial y, n)(u_k^{(2)}(y) - u_{k-1}^{(2)}(y))\}^{-} =$$

$$= \left\{T^{(2)}(\partial y, n)u_k^{(2)}(y)\right\}^{-} - \left\{T^{(2)}(\partial y, n)u_{k-1}^{(2)}(y)\right\}^{-} =$$

$$= \left\{T^{(1)}(\partial y, n)u_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^{+} - \left\{T^{(1)}(\partial y, n)u_{k-2}^{(1)}(y)\right\}^{+} =$$

$$= \{T^{(1)}(\partial y, n)(u_{k-1}^{(1)}(y) - u_{k-2}^{(1)}(y))\}^{+} = \{T^{(1)}(\partial y, n)v_{k-1}^{(1)}(y)\}^{+}, y \in S,$$

ვთქვათ k>1. როგორც ცნობილია,

$$v_k^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}\int_S \left[T^{(1)}(\partial z, n)G_1^{(1)}(z,x)\right]' \left\{v_k^{(1)}(z)\right\}^+ d_z S =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_S \left[T^{(1)}(\partial z, n)G_1^{(1)}(z,x)\right]' \left\{v_k^{(2)}(z)\right\}^- d_z S. x \in D_1$$

თავის მხრივ,

$$v_k^{(2)}(x) = \frac{1}{2}\int_S G_2^{(2)}(x,y)\left\{T^{(2)}(\partial y, n)v_k^{(2)}(y)\right\}^- d_y S = \frac{1}{2}\int_S G_2^{(2)}(x,y)\left\{T^{(1)}(\partial y, n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^+ d_y S,$$

$$x \in D_2.$$

სადაც, $G_1^{(1)}(z,x)$ გრინის პირველი ტენზორია D_1 - შიგა არესათვის[4], ხოლო $G_2^{(2)}(x,y)$ - გრინის მეორე ტენზორი D_2 გარე არესათვის[4].

უკანასკნელ ტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე როცა $D_2 \ni x \to z \in S$, მივიღებთ

$$\left\{v_k^{(2)}(z)\right\}^- = \frac{1}{2}\int_S G_2^{(2)}(z,y)\left\{T^{(1)}(\partial y, n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^+ d_y S.$$

რომლის გათვალისწინებით მივიღებთ,

$$v_k^{(1)}(x) = -\frac{1}{4}\int_S \left[T^{(1)}(\partial z, n)G_1^{(1)}(z,x)\right]' \left[\int_S G_2^{(2)}(z,y)\left\{T^{(1)}(\partial y, n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^+ d_y S\right] d_z S =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_S \left[\int_S \left[T^{(1)}(\partial z, n)G_1^{(1)}(z,x)\right]' G_2^{(2)}(z,y)\, d_z S\right]\left\{T^{(1)}(\partial y, n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^+ d_y S$$

გრინის მეორე ტენზორის სიმეტრიულობა წრეწირის მიმართ[3.4] გვაძლევს შესაძლებლობას გრინის მეორე ტენზორი გარე არისათვის შევცვალოთ გრინის მეორე ტენზორით შიგა არისათვის:

$$\int_S \left[T^{(1)}(\partial z, n)G_1^{(1)}(z,x)\right]' G_2^{(2)}(z,y)\, d_z S = G_2^{(2)}(x,y) = -G_2^{(1)}(x^*, y)$$

სადაც $G_2^{(1)}(x^*, y)$ გრინის მეორე ტენზორია D_1 - შიგა არესათვის, $x^*(x_1^*, x_2^*) \in D_1$ არის $x = (x_1, x_2) \in D_2$ წერტილის სიმეტრიული წერტილი S − წრეწირის მიმართ.

მაშინ საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$v_k^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\int_S G_2^{(1)}(x^*, y)\left\{T^{(1)}(\partial y, n)v_{k-1}^{(1)}(y)\right\}^+ d_y S = \frac{\mu_1}{\mu_2}v_{k-1}^{(1)}(x)$$

აქ უნდა გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც x მიისწრაფვის სასაზღვრო z წერტილისაკენ, მაშინ x^*-იც მიისწრაფვის იმავე z-ისკენ. მიიღება კრებადი მწკრივი წრეწირზე და რადგანაც დირიხლეს ამოცანა კორექტული ამოცანაა, მწკრივი კრებადია მთელ სიბრტყეზე.

დასკვნა

ამრიგად, ნაშრომში დასაბუთებულია მიახლოებითი ამონახსნების აგების ახალი მეთოდი გრინის ტენზორებისა და განზოგადებულ მწკრივთა თეორიის გამოყენებით, ორგანზომილებიანი კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სტატიკური მოდელებისთვის სასაზღვრო-კონტაქტური ამოცანებისათვის.
არსებობს კლასიკური მომენტური თერმოდრეკადობის თეორიის სხვადასხვა განზოგადებები. ეს მეთოდები შეიძლება განზოგადებულ იქნას სხვა მოდელების შემთხვევაშიც.

ლიტერატურა

[1]. Chumburidze, M., & Lekveishvili, D. (2014). Approximate Solution of Some Mixed Boundary Value Problems of the Generalized Theory of Couple-Stress Thermo-Elasticity. World Academy of Science, engineering and Technology, 6(28), 161-163.
[2]. Chumburidze, M., & Lekveishvili, D. (2017, August). Numerical approximation of basic boundary-contact problems. In ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference(pp. V009T07A021-V009T07A021). American Society of Mechanical Engineers.
[3]. Kupradze, V. et al.: Three-Dimensional Problemsof the Mathematical Theory of ElasticityandThermo Elasticity. North-Holland,Amsterdam-New York (1983)
[4] Chumburidze, M.: Non-classical models of thesome theory of boundary value problems.Saarbrcken, Germany (2014)

About the new method to construct of approximate solution of boundary-contact problem

Lekveishvili D., Chumburidze M.
Akaki Tsereteli State University

This paper is devoted to the development of approximation method for the solution of basic boundary-contact problems of elasticity for isotropic inhomogeneous elastic materials. In particular, we consider a static system with a conditions of Cauchy Hypothesis.
We propose and justify that Green's tensors can be used to improve the efficiency and accuracy in computing the numerical solutions in assumptions that surfaces of materials are sufficiently smooth.
The tools applied in this development are based on boundary integral equations method, Green's tensors and generalized series analysis.

ექსკალატორის სახელურების დამზადება ბაზალტის როვინგისაგან ფორმირებული ქსოვილის კომპოზიტისაგან

ბაკურაძე ე., ზივზივაძე ბ., მოსეშვილი თ., ბაკურაძე კ.
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

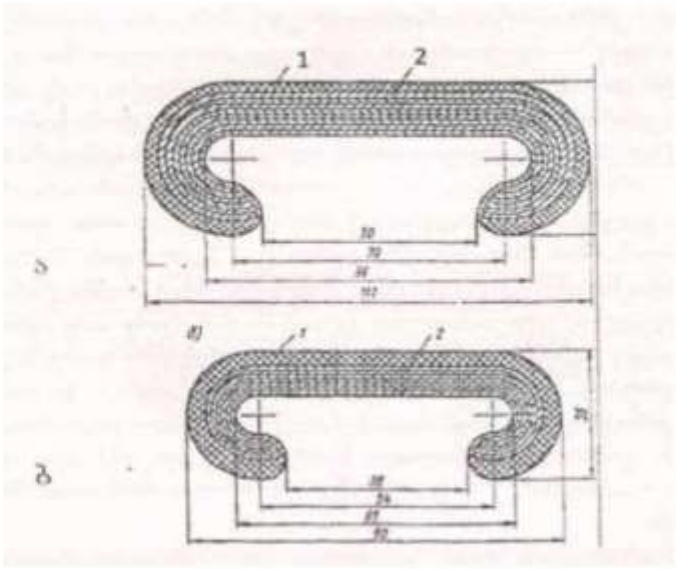
ნაშრომში განხილულია ახალი სახის ბაზალტის ღერძულ-გარსული სტრუქტურის ძაფებისაგან გამომუშავებული ტექნიკური ქსოვილის ლენტების გამოყენების პერსპექტიულობა ესკალატორის სახელურების დასამზადებლად, რომელთა გამოყენება გამორიცხავს სახელურის კონსტრუქციაში ფოლადის ბაგირთა სისტემის გამოყენების აუცილებლობას. სახელური გაუმჯობესებული იქნება სამომხმარებლო და საექსპლოატაციო თვისებებით.

კომპოზიტი, ტექნიკური ქსოვილი, ესკალატორი, ჰიბრიდული ძაფი, ღერძულ-გარსული, ბაზალტი

XX საუკუნის მეორე ნახევარში, განსაკუთრებით ბოლო პერიოდში მსოფლიოში აღინიშნებოდა კომპოზიციურ მასალებზე მნიშვნელოვანი ზრდა. აშშ-ის მეცნიერები მიუთითებენ, რომ XXI საუკუნე იქნება კომპოზიტთა ერა, სადაც წამყვანი ადგილი მათი უნიკალური თვისებების გამო მოვა საფეიქრო ფუძეზე დამზადებულ კომპოზიტებზე [1].

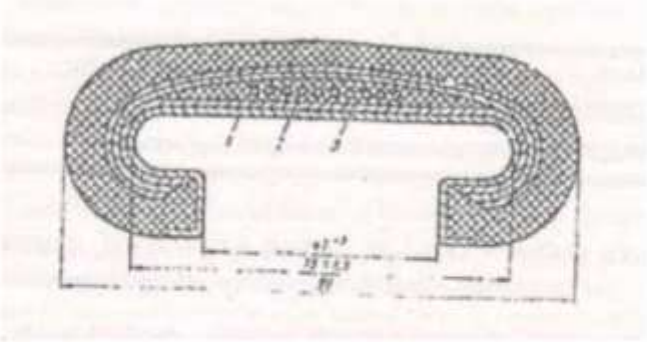
საფეიქრო ფუძეზე დამზადებულ კომპოზიტებს ფართო გამოყენება აქვს უწყვეტ სატრანსპორტო საშუალებებში: კონვეიერების, ელევატორების ლენტების, სახელურების და სხვა სახით.

სატრანსპორტო საშუალებებში გამოყენებულ ერთერთ რთული კონსტრუქციის კომპოზიტს წარმოადგენს ესკალატორის სახელურები, რომელთა დასამზადებლად ჯერჯერობით ძირითადად გამოიყენება ბამბის ტექნიკური ბრეზენტის ქსოვილი [2]. 90 და 112 მმ სიგანის სახელურებს ამზადებენ 7 და 8 ფენის ბამბის ბელტინგისაგან (ნახ.1).



ნახ.1. რეზინქსოვილოვანი სახელური სიგანით 112 მმ (ა) და 90 მმ (ბ).
1 - რეზინის ფენა; 2 - ბელტინგის ფენა.

ამ სახის სახელურებს აყენებენ ყველა ტიპის ესკალატორზე გარდა ЭТ ტიპის ესკალატორებისა. უნიფიცირებულ დაარმატურებულ 90 მმ სიგანის ფოლადის 10 ბაგირიან, ბამბის ბელტინგის 4 ფენიან, სახელურებს აყენებენ ЭТ ტიპის ესკალატორებზე (ნახ.2).



ნახ.2. რეზინისქსოვილოვანი უნიფიცირებული დაარმატურებული სახელური.
1- ბელტინგის ფენები; 2- ფოლადის ბაგირები; 3- რეზინის ფენა.

სახელურის უმნიშვნელოვანეს ელემენტს წარმოადგენს ტექნიკური ქსოვილი, რომელიც ქსელის მიმართულებით უნდა ფლობდეს გაჭიმვისადმი დიდ სიმტკიცეს, დარტყმისა და მრავალჯერადი ღუნვისადმი მდგრადობას, მუშა დატვირთვისას მინიმალურ დაგრძელებას და რეზინის მიმართ დაბალ ადჰეზიას, ხოლო მისაქსელის მიმართულებით გაჭიმვაზე საკმარის სიმაგრეს, მჩხვლეტი და დარტყმითი დეფორმაციისადმი წინააღმდეგობას, მოქნილობას და რეზინის მიმართ დაბალ ადჰეზიას.

ЭТ ტიპის უნიფიცირებული სახელურის კონსტრუქციის ძირითად მზიდ ელემენტს წარმოადგენს 2 მმ დიამეტრის 10 ცალი ფოლადის ბაგირი, 0,041 მმ დიამეტრის ფოლადის 49 ელემენტალური სიმით.

ფოლადის ბაგირთა სისტემის რეზინთან და ბელტინგის ფენებთან ადჰეზია არის მაღალი, რის გამოც კომპოზიტი ხანგრძლივად ვერ მუშაობს როგორც ერთიანი სისტემა, იწვევს ბელტინგის ფენების დაზიანებას. აგრეთვე მხოლოდ ბამბის ქსოვილისაგან დამზადებული სახელურების საექსპლოატაციო მახასიათებლებიც არ არის მაღალი.

მსოფლიოში დაგროვილი გამოცდილება გვიჩვენებს, რომ ზემოთ აღნიშნული მახასიათებლების მიღწევა შესაძლებელია მხოლოდ ახალი თვისებების ნედლეულის გამოყენების გზით [3].

რუსეთში კონვეიერების ლენტების წარმოებაში ფართოდ გამოიყენებოდა პოლიეთერის ძაფებისა და ბამბის ნართის ერთდროული შეგრეხვით მიღებული კომბინირებული ქსელისა და მისაქსელის ძაფებისაგან დამზადებული ტექნიკური ქსოვილები. ბოლო წლებში ისინი შეცვალეს პოლიამიდური (ლავსან-კაპრონი) ძაფებისაგან გამომუშავებული ქსოვილით, რომელიც მოითხოვს გამჟღენთში წინასწარ დამუშავებას.

დასავლეთ ევროპის ქვეყნებში კონვეიერების ლენტების დასამზადებლად ძირითადად გამოიყენება ქიმიური ბოჭკოებისაგან (პოლიეთერული-პოლიამიდური) დამზადებული ქსოვილები. ქსელში გამოიყენება მაღალი სიმტკიცისა და და დაბალი ადჰეზიის უნარის პოლიეთერის ძაფები - „ტრევირა“და „დიოლენი“, ხოლო მისაქსელში - მაღალი სიმტკიცის ნეილონის ძაფი.

კონვეიერების ლენტების დასამზადებლად პერსპექტიულ მიმართულებას წარმოადგენს არამიდული ბოჭკოს - „კევლარის“ გამოყენება. დამუშავებულია ღრმა შახტებში

გამოსაყენებლად კონვეიერის ლენტები, რომელთა ერთი ფენის კარკასი „კევლარი“-საა და ორმხრივი ცეცხლმედეგი დაფარვა - პოლიქლოროპროპილენისაგან.

იმ შემთხვევაში, როდესაც საჭიროა დიდი ცვეთამედეგობა, გამოიყენება „კევლარი“-ს ღერძული ძაფებისაგან დამზადებული ლენტები. „კევლარი“-ს ბოჭკოს გამოყენება საშუალებას გვაძლევს უზრუნველვყოთ დაბალი თბოგამტარობა, ლენტის დაგრძელების 0,7%-მდე შემცირება და მაღალი ცვეთამედეგობა. აღნიშნული კომპოზიტების მაღალი საექსპლოატაციო მახასიათებლების მიუხედავად, მათი გამოყენების სფერო შეზღუდულია მაღალი ფასის გამო.

წინამდებარე ნაშრომში შემოთავაზებულია ბაზალტ-პოლიეთერ-ბამბის ჰიბრიდული ძაფების გამოყენებით დამზადებული ტექნიკური ქსოვილის ლენტებისაგან ესკალატორის სახელურების ფორმირების ალტერნატიული მეთოდი.

ახალი სტრუქტურის ქსოვილები აგრეთვე შეიძლება წარმატებით იქნას გამოყენებული კონვეიერებისა და ელევატორების ლენტების დასამზადებლად.

ღერძულ-გარსული სტრუქტურის მაღალი სიმტკიცის და მცირე დაგრძელების უნარის თერმომდგრადი ძაფებისაგან შექმნილი კომპოზიტი უფრო მეტად მოქნილი, მსუბუქი, გამძლე და მოხერხებული იქნება დამუშავების, შეკეთების და ექსპლოატაციისათვის, ვიდრე არსებული უნიფიცირებული სახელურები.

ЭТ ტიპის უნიფიცირებული ესკალატორის სახელურის მზიდი ელემენტის - ერთი ცალი ფოლადის ბაგირის ზღვრული სიმაგრეა 38 კნ, ხოლო მთლიანი კონსტრუქციისათვის ეს სიდიდე შეადგენს 380-400 კნ-ს.

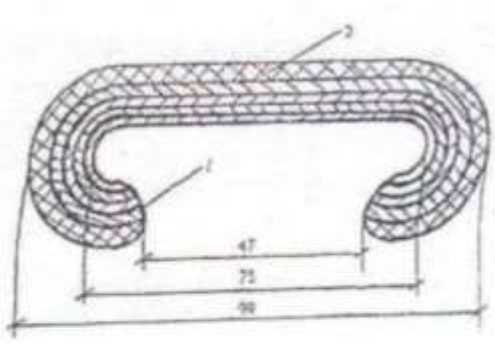
ახალი სტრუქტურის ესკალატორის სახელურის დასამზადებლად ქსოვილის დაპროექტების მიზანია საჭირო საექსპლოატაციო და სამომხმარებლო მახასიათებლების ქსოვილის მიღება. ტექნიკური ქსოვილების დაპროექტებას უმეტესად აწარმოებენ ქსოვილის გამწყვეტი დატვირთვით, რომელიც შეიძლება განვსაზღვროთ ფორმულით $F=П \cdot Т \cdot К$ კნ [3], სადაც П - ძაფთა რიცხვია ქსოვილის ლენტში, Т - ერთეული ძაფის სიმაგრეა, К - კოეფიციენტი, რომელიც ითვალისწინებს ხლართის შესაბამისად ქსოვილის სიმტკიცის ზრდას, რაც ტილოს ხლართის ქსოვილისათვის შეადგენს 1,08-1,15.

ალტერნატიული სახელური (ნახ.3) მზადდება ახალი სტრუქტურის და შედგენილობის ქსოვილის ბელტინგის 4 ფენისაგან, რომელთაგან 1-3 ფენის სიგანეა 120 მმ, ხოლო მეოთხე ფენის - 170 მმ, რომლებზედაც უნდა განაწილდეს საერთო 400 კნ დატვირთვა. მხედველობაშია მისაღები ლენტში ქსელის ძაფთა რაოდენობა და მისი ხაზობრივი სიმჭიდროვე, რადგან, როდესაც ვზრდით ძაფთა რაოდენობას და შესაბამისად ვამცირებთ ზღვრულ მნიშვნელობამდე მის ხაზობრივ სიმჭიდროვეს, ლენტის საექსპლოატაციო მახასიათებლები (ელასტიურობა, ხანგამძლეობა, სიმტკიცე) იზრდება.

ზღვრული დეფორმაციის (Δ=0,014-0,018) გარდა ქსოვილი უნდა ფლობდეს გარკვეულ თერმომდგრადობას, რადგანაც ექსპლოატაციის დროს გზის რთულ მონაკვეთებზე დიდი დატვირთვით მუშაობისას ადგილი აქვს დიდ ხახუნს და გაზრდილი რაოდენობით სითბოს გამოყოფას.

ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარე ნედლეულის შერჩევისას უპირატესობას ვანიჭებთ არამიდულ და მინის ჯგუფის ძაფებს. ვირჩევთ სამამულო წარმოების ბაზალტის როვინგს 200-220 ტექსი ხაზობრივი სიმჭიდროვით.

ელემენტალურ ბოჭკოთა მაქსიმალური სიმტკიცის შენარჩუნებისათვის ვირჩევთ ღერძულ-გარსული სტრუქტურის დაბალი გრეხვის კომპლექსური ძაფების ფორმირების სიტემას - „ბოჭკო-ძაფი“ ბოჭკოს სიმტკიცის შენარჩუნების კოეფიციენტის К=96 რეალიზაციით [5].



ნახ.3. ბაზალტ-პოლიეთერ-ბამბის ბელტინგისაგან დამზადებული სახელური.
1 - ბელტინგის ფენები; 2 - რეზინის ფენა.

200т ხაზობრივინ სიმჭიდროვის ბაზალტის როვინგისაგან ღერძულ-გარსული სტრუქტურის ძაფების ფორმირებას ვახდენთ სართავ-საგრეხ მანქანაზე, სტრუქტურით 200т X 2, 200т X 3, 200т X 4, ღერძული შემადგენელია ბაზალტის როვინგი, ხოლო გარსული - შემომხვევი16,6 ტექსი ხაზობრივი სიმჭიდროვის პოლიეთერის ძაფი. გრეხვის რაოდენობა 1 მეტრზე შეადგენს K=70-100.

ბაზალტ-პოლიეთერის ღერძულ-გარსული სტრუქტურის ძაფების ფიზიკურ-მექანიკური მახასიათებლები მოცემულია ცხრილში.

ძაფის ხაზობრივი სიმჭიდროვე T, ტექსი	გამწყვეტი დატვირთვა P, კნ	ფარდობითი წაგრძელება, %	გრეხვის რაოდენობა K 1 მ-ზე
200 X 2	1	0,5	100
200 X 2	1,5	0,45	80
200 X 2	2	0,40	70

200т X 2 ხაზობრივი სიმჭიდროვის ბაზალტის ძაფის გამოყენებისას $B_т$ = 120 მმ სიგანის ლენტში ძაფთა რაოდენობა ტოლია H_o = 108, ლენტის გამწყვეტი სიმაგრე $P_л = П \cdot T \cdot K = 1 \cdot 108 \cdot 1,15 = 124,2$ კნ.

200т X 3 ხაზობრივი სიმჭიდროვის ბაზალტის ძაფის გამოყენებისას ლენტში ძაფთა რაოდენობა ტოლია H_o = 72, შესაბამისად $P_{л2} = 1,5 \cdot 72 \cdot 1,15 = 162$ კნ.

200т X 4 ხაზობრივი სიმჭიდროვის ბაზალტის ძაფის გამოყენებისას ლენტში ძაფთა რაოდენობა ტოლია H_o = 48, შესაბამისად $P_{л3} = 2 \cdot 48 \cdot 2 = 144$ კნ.

მეოთხე $B_{т4}$ =170 მმ სიგანის ლენტში 200т X 2, 200т X 3, 200т X 4 ხაზობრივი სიმჭიდროვის ბაზალტის ძაფის გამოყენებისას ლენტის გამწყვეტი სიმაგრე ტოლია:

$P_{л4}^{I} = 153 \cdot 1 \cdot 1,15 = 175,95$ კნ.

$P_{л5}^{II} = 102 \cdot 1,15 \cdot 1,15 = 229,5$ კნ.

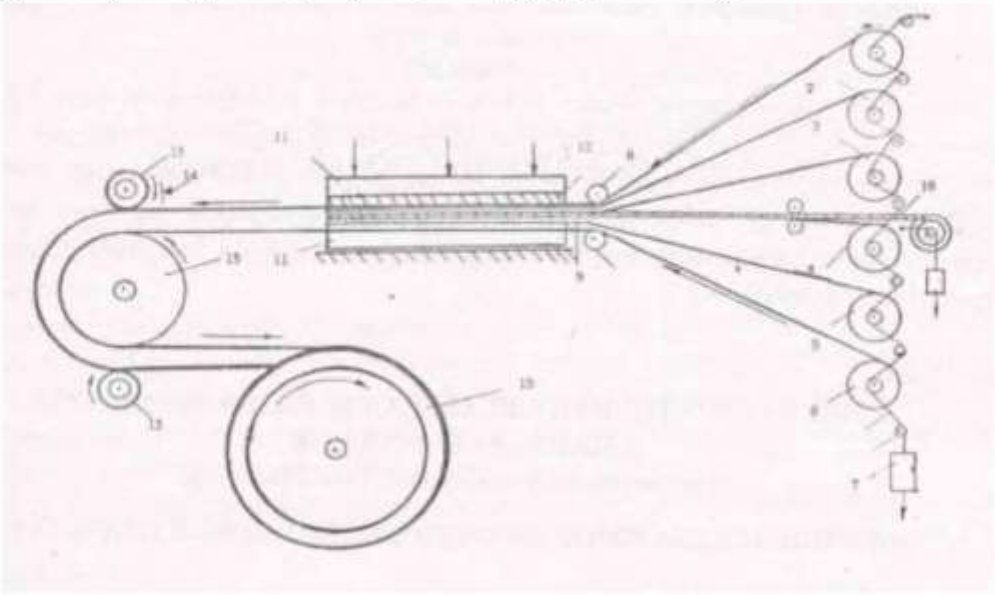
$P_{л6}^{III} = 153 \cdot 1 \cdot 1,15 = 175,95$ კნ.

კომპოზიტის შემადგენელი ოთხივე ფენის ქსოვილის ერთდროული მუშაობისას მათი ჯამური გამწყვეტი სიმაგრე შეადგენს: P_1=548,5 კნ; P_2=715 კნ; P_3=888 კნ.

ვირჩევთ ლენტს ჯამური P_1=548,5 კნ დატვირთვით, რადგან ეს მნიშვნელობა უფრო ახლოსაა სახელურის საექსპლოატაციო დატვირთვასთან. გარდა ამისა, ქსოვილის მაფორმირებელი ძაფის ხაზობრივი სიმჭიდროვე და შესაბამისი რაოდენობა უზრუნველყოფს

კომპოზიტის მუშაობის საიმედოობას და ელასტიურობას.

კომპოზიტის მაფორმირებელ ქსოვილთა ახალი სტრუქტურები გამომუშავებული იქნა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საფეიქრო მრეწველობის ლაბორატორიაში. სახელურის ფორმირების სქემა ახალი მეთოდით მოცემულია ნახ.4-ზე.



ნახ.4. კომპოზიტის - ესკალატორის სახელურის ფორმირების სქემა

მოდერნიზებული ქსოვილების რულონებისაგან შემდგარი პარტია - სამი რულონი 120 მმ სიგანით, ხოლო ერთი რულონი 170 მმ სიგანით და ორი რულონი 50 მმ სიგანით (ფოლადის ბაგირთა შემცვლელი ქსოვილის ლენტი) თავსდება სახელურის მაფორმირებელი აგრეგატის თაროზე თანმიმდევრობით: 1 და 2 რულონი 120 მმ სიგანით, 3 და 4 ფოლადის ბაგირთა შემცვლელი ლენტები 50 მმ სიგანით, მე-5 რულონი 120 მმ სიგანით და მე-6 რულონი 170 მმ სიგანით. იმისათვის, რომ ლენტები მიეწოდოს სათანადო დაჭიმულობით, მათზე მოქმედებს სპეციალური სამუხრუჭე მოწყობილობა 7. მიმმართველის 8 გავლით ლენტები მიეწოდება წინასწარი ფორმირების ზონაში 9, სადაც ხდება 3-4 ლენტების ზედაპირებს შორის ნედლი რეზინის ფენის მე-10 ფენის დაფენა. ამგვარი წყობით განლაგებული ქსოვილის ლენტები მიემართებიან საბოლოო ფორმირების თერმიულ პრესფორმაში 11. ლენტის 1 ზედაპირზე ხდება ნედლი რეზინის მე-12 ლენტის დაფენა. წნევის საშუალებით ხდება წნეხფორმის ორი ნახევრის შეერთება და 20 წუთის განმავლობაში 151^{0}C ტემპერატურაზე გახურება. ამ დროს მიმდინარეობს რეზინის ვულკანიზაცია და სახელურის ამ მონაკვეთის ერთიან კომპოზიტად ფორმირება. თერმო და დროის რელის იმპულსის მოქმედებით ხდება წნეხფორმის გაღება და გამომტანი მექანიზმით 13 ვულკანიზირებული მონაკვეთი გამოიტანება მუშა ზონიდან. გამოტანის სიგრძის რეგულირება ხდება გამომრთველი ღილვაკის 14 საშუალებით. გამოტანილი ფორმირებული სახელური აიხვევა ამხვევი მექანიზმით რულონის 15 სახით. სახელურის ფორმირების მეთოდი, ზომები და საექსპლოატაციო მახასიათებლები შეესაბამება სტანდარტს.

სახელურის ექსპერიმენტალური პარტია გამომუშავებული იქნება ქუთაისში შპს „დინა“-ს მიერ და საექსპლოატაციოდ გადაეცემა თბილისის მეტროპოლიტენს.

ლიტერატურა

1. Любина Д. Справочник по композиционным материалам. М.: Машиностроение, 1988. -279 с.
2. Инструкция по техобслуживанию и техремонту поручней эскалаторов метрополитена. М.: Транспорт, 1988. – 80 с.
3. Технология и оборудование для производства технических тканей. Выпуск 2, ЦНИИТЭИ легпром. М.: 1988. – 31 с.
4. Потягалов А.Ф. Технология построения тканей. Ярославль, 1997. – 143 с.
5. Т.В.Чу и Ф.Ко. Тканные конструкционные композиты. М.: 1991. – 427 с.

PRODUCING THE ROLLING STAIRS BANISTERS FROM BASALT ROVING TEXTILE COMPOSITES

E. Bakuradze, B. Zivzivadze, T. Moseshvili, K. Bakuradze
Akaki Tsereteli State University

The paper dwells on prospects of using the technical textile ribbons produced from new-type basalt threads with axial-shell structure for producing the rolling stairs banisters, the use of which excludes the application of the steel rope systems in the design of banisters. The banister's consumer and operating properties will be improved significantly.

საფეიქრო კომპოზიციური მასალებისაგან ელექტროსაკონტაქტო მილების დამზადების ახალი ინოვაციური ტექნოლოგიის დამუშავება

ბაკურაძე ე., ზივზივაძე ბ., ბაკურაძე კ.
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

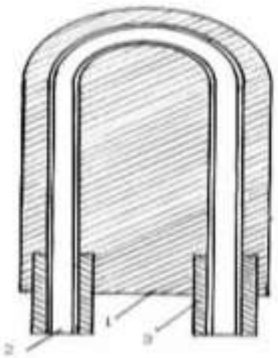
ნაშრომში განხილულია ფეროშენადნობთა სალღობი ღუმელის მუშაობის გაუმჯობესება ახალი სტრუქტურის კომპოზიციური მასალებიდან დამზადებული ელექტროსაკონტაქტო კვანძის - ყბების გამოყენებით.

ფეროშენადნობი, ღუმელი, კომპოზიციური მასალა, ელექტროდი, ყბა

ფეროშენადნობი – არის რკინის მარგანეცთან ან სხვა ელემენტებთან შუალედური შენადნობი, რომელიც გამოიყენება ფოლადის წარმოებაში, მისი თვისებების გასაუმჯობესებლად. ამ შენადნობში წამყვანი ელემენტი არის მაგნგანუმი Mn, რკინა Fe არის ფუძე ანუ ბაზა. სილიციუმი Si და ნახშირბადი C არასასურველი მინარევებია, რომელთა შემცველობა დიდი არ არის და მკაცრად ლიმიტირებულია, ფოსფორი P და გოგირდი S მიეკუთვნება მავნე მინარევებს.

ფერომანგანუმის შენადნობის ელექტრული სალღობი ღუმელი შეიძლება დავყოთ ორ ძირითად ჯგუფად. დიდ –7500 კვ და მცირე 2500-5500 კვ სიმძლავრით. ყველა ღუმელს აგებენ სამფაზად, სამი ელექტროდით, ისინი არიან უფრო იაფი კაპიტალური დანახარჯების მიხედვით და აქვთ უკეთესი მაჩვენებლები ექსპლუატაციისას [1].

განხილული შრომების ანალიზიდან ნათელია თუ რა უმნიშვნელოვანეს ელემენტს წარმოადგენს ფეროშენადნობთა სალღობი ღუმელების ელექტროდებისათვის ელექტრონული კვების გადამცემი ერთადერთი წყარო ელექტრო-საკონტაქტო კვანძი ე.წ. ყბები, რომელთა მუშაობის საიმედოობაზეცაა დამოკიდებული ღუმელის სრულყოფილი მუშაობა. ისინი ღუმელის ექსპლუატაციისას განიცდიან დიდ ელექტრონულ (ათიათასობით ამპერი) და თერმულ დატვირთვას. აღნიშნულის გამო მუშაობის გახანგრძლივების მიზნით მათ აგრილებენ წყლის ნაკადით, რომელიც მიეწოდებათ ყბის ჩამოსხმის პროცესში მასში ჩატანებულ სპეციალურ კონსტრუქციის (45-60 კგ) სპილენძის მილებს (ნახ. 1).

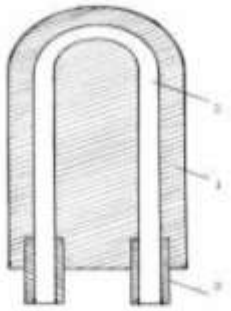


ნახ.1. ელექტროდებზე ელექტრული კვების გადამცემი არსებული კონსტრუქციის ელექტროსაკონტაქტო კვანძი «ყბა».
1-ყბის კორპუსი; 2- სპილენძის მილი; 3- საკონტაქტო მილისები

ღუმელების საექსპლუატაციო დაკვირვებები გვიჩვენებს, რომ ყბის ჩამოსხმის ტექნოლოგიური პროცესის სრულყოფის მიუხედავად მილის და ყბის სხმულის კორპუსს შორის ურთიერთკონტაქტი (კავშირი) ნაკლებია, ვიდრე სხმულის სივრცულ სხვა მონაკვეთებზე, რაც ყბების მაღალი ხანგრძლივად უწყვეტი საექპლუატაციო დატვირთვით მუშაობისას იწვევს მათ დაზიანებას და მწყობრიდან ადრე გამოსვლას. ერთ ღუმელს ემსახურება სამი ელექტროდი, რომელთაგან თითოეული აღჭურვილია 8 ცალი ელსაკონტაქტო ყბით. ე.ი. ღუმელს ჯამურად ემსახურება 24 ყბა. თითოეულის წონა ღუმელის კონსტრუქციის გათვალისწინებით 300-350 კგ. ერთ ღუმელზე ყბების შეცვლისას, რომელიც წელიწადში ორჯერ მაინც ხდება საჭიროა 14420-216000 კგ სპილენძი. გარდა დიდი ფინანსური დანახარჯებისა ყბების შეცვლისას ღუმელიც ჩერდება, რაც წარმოებისათვის დიდი ზარალის მომტანია. ზესტაფონის ს.ს. ფეროშენადნობთა ქარხნის ხელმძღვანელთა შეფასებით ყბები წარმოებისათვის «აქილევის ქუსლია». საკითხი ერთნაირად პრობლემატურია მსოფლიოს ანალოგიური წარმოებებისათვის.

ვითვალისწინებთ, რა პრობლემის აქტუალობას და დარგობრივ მის მსოფლიო მნიშვნელობას, წინამდებარე ნაშრომში შემოთავაზებულია ყბების დამზადების ალტერნატიული ტექნოლოგია (ხერხი) [2-4], სადაც სპილენძის მილები შეცვლილია კომპოზიციური მასალისაგან (საფეიქრო, ლითონური) დამზადებული მილკომპოზიტით, რომლის ზომები სპილენძის მილის იდენტურია. ალტერნატიული მეთოდით ჩამოსხმული ყბები თავიანთი მუშაობის ხანგრძლივობით და ტექნოლოგიური საიმედოობით აღემატება ტრადიციული მეთოდით დამზადებული ყბებს.

აღნიშნული ტექნიკური შედეგი მიიღწევა იმით, რომ ყბის ჩამოსხმის შემდეგ ვახდენთ სხმულიდან კომპოზიციური მილის ფრაქციებად დაშლას და გამოტანას, რის შედეგადაც სხმულის მთელ სივრცეში (მოცულობაში) მიიღება ერთგვაროვანი სტრუქტურის, გაუმჯობესებული თბოცვლის ელექტროსაკონტაქტო კვანძი ყბა 1 (ნახ.2) წყლის სავალი გამაგრილებელი არხით 2, რომელიც ელექტრულ დატვირთვაზე მუშაობს როგორც ერთგვაროვანი მონოლითური კვანძი [4].



ნახ.2. კომპოზიციური მილებისაგან დამზადებული ალტერნატიული ელექტროსაკონტაქტო კვანძი «ყბა».
1-ყბის კორპუსი; 2- წყლის სავალი არხი; 3- ელექტროსაკონტაქტო მილისები

ელექტროთერმული სადნობი ღუმელის ელექტროდების ელექტროსაკონტაქტო კვანძის ყბის ახალი მეთოდით დამზადება ითვალისწინებთ (ნახ.2) წყლის არხის 2 ფორმირებას, U-სებრი მოხრილი კომპოზიციური მილის ყალიბში წინასწარ მოთავსებას, მასზე საკონტაქტო მილისების 3 წამოცმას, გამდნარი ლითონის ყალიბში ჩასხმას. გაცივების შემდეგ სხმულიდან 1 კომპოზიციური მილის ფრაქციებად დაშლას და გამოტანას. აღნიშნულის უზრუნველსაყოფად

კომპოზიციური მილის სწორ მონაკვეთებს მის რკალურ ნაწილებთან აქვთ შედარებით სუსტი კავშირი.

აღნიშნული სამუშაოს მაღალეფექტური რეალიზაციისათვის საჭიროა ყბის დამზადების და მისი საექსპლუატაციო ტექნოლოგიური ყველა პარამეტრების გათალისწინებით შერჩეული იქნას კომპოზიციური მილის შემადგენელი საფეიქრო და ლითონური მასალები, მათი სტრუქტურა, ფორმა და კომპოზიციური მასალის ფორმირების მეთოდები.

ყალიბში ყბის ფორმირებისათვის მოთავსებული U-სებრი მილი განიცდის გამღვალი სპილენძის დაწნევას, რისთვისაც ის უნდა ფლობდეს დეფორმაციის მიმართ მაღალ მდგრადობას და ტემპერატურამედეგობას. მილის სწორხაზოვანი მონაკვეთები-ნაწილები უნდა დამზადდეს თერმომდგრადი ლითონის მილისაგან, პერფორირებული ზედაპირით. ზედაპირის პერფორირება აუცილებელია ნამწვი აირების სხმულიდან ატმოსფეროში გამოსატანად, წინააღმდეგ შემთხვევაში შესაძლებელია ჰაერის ბუშტულები დარჩეს სხმულში და გამოიწვიოს ნამზადის დეფექტები.

კომპოზიციური მილის რკალური ნაწილი უნდა დამზადდეს თერმომდგრადი მავთულისაგან სპირალური ფორმით, ხვიების ურთიერთნაკვეთი დაშორებით. რკალური მონაკვეთი უნდა დამზადდეს ორი ნაწილისაგან, მილის მაქსიმალური სიმრუდის მონაკვეთზე ხვიების ურთიერთში ჩასმით. მათი ასეთი ურთიერთკავშირი გაადვილებს სხმულიდან მათ გამოტანას. სპირალთა მეორე ბოლოები სწორხაზოვანი ფორმის მავთულის სახით უნდა გატარდეს ლითონის მილების სწორ მონაკვეთების სიღრუეში და აღემატებოდეს მილის სწორი მონაკვეთების სიგრძეს 15-20 სმ-ით. რაც საჭიროა სხმულიდან სპირალის გამომტან-ამხვევ თაურაზე კარგად ფიქსირებისათვის.

სპირალების პერფორირებულ მილებთან დაკავშირება უნდა მოხდეს მილებში სპირალის მჭიდრო ჩასმით, რის გამოც ისინი უნდა ბოლოვდებოდეს ლითონის მილის შიგა დიამეტრის შესაბამისი ხრახნული-სპირალით ნულოვანი ბიჯის ხვიებით. გათვალისწინებული უნდა იქნეს ლითონის მილის დიამეტრი, სისქე, ნახვრეტების ზომები და რაოდენობა. აგრეთვე მავთულის განივი კვეთის და ხვიების ზომები.

ამგვარად ჩამოყალიბებულია კომპოზიციური მილის შემადგენელი ლითონური ნაწილის პროექტირების ელემენტები. შედარებით უფრო სპეციფიკური და რთულია საფეიქრო ბოჭკოვანი მასალების შერჩევა. ისინი უნდა ფლობდნენ სხვადასხვა დონის თერმო და ფიზიკო-მექანიკურ თვისებებს, რადგანაც ძირითადად მათ თვისებებზეა დამოკიდებულია ყბის ჩამოსხმის და სხმულიდან მილკომპოზიტის ფრაქციებად დაშლის და გამოტანის პირობები, წყლის სავალი მილის ზომები და ზედაპირული სისუფთავე, საბოლოო ანგარიშში კი ყბის მუშაობის ტექნიკური საიმედობა.

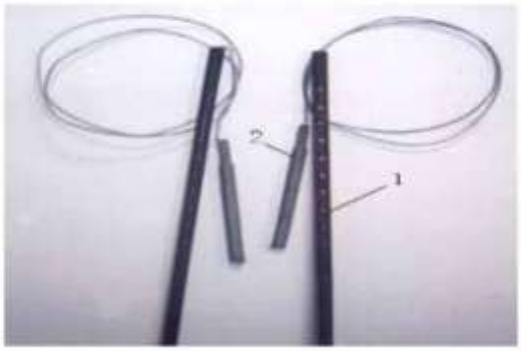
კომპოზიციური მილის სხმულში საჭირო სივრცული განლაგება მთელ პერიმეტრზე რეგულირდება ფიქსირებული საყელურების საშუალებით.

კომპოზიციური U-სებრი მილის რკალური და სწორი მონაკვეთები აუცილებელია დაიფაროს თერმომდგრადი ბოჭკოვანი რამოდენიმე ფენით. საჭიროა, რომ პირველადი დამფარი ფენა ფლობდეს 600-700^{0}C თერმომდგრადობას, რადგანაც მან ყალიბში გამდნარი სპილენძის ჩასხმის მომენტში უნდა შეინარჩუნოს მილის საწყისი ზომები, ხოლო შემდგომ ეტაპზე უნდა დაიწვას-დაიშალოს, რის შედეგადაც მილის ლითონის ზედაპირსა და მეორე ბოჭკოვან ფენას შორის წარმოიქმნება 2-3 მმ წრიულ-სივრცული სიცარიელე, რაც აადვილებს პერფორირებული ლითონის მილების სხმულიდან გამოტანას. წინააღმდეგ შემთხვევაში სხმულიდან მილის გამოტანა ვერ განხორციელდება. მომდევნო - შემდეგი ბოჭკოვანი ფენა უნდა ფლობდეს უფრო

მაღალ თერმომდგრადობას, ვიდრე გამღვალი სპილენძი ფლობს (1200°C >). ეს იმისათვისაა საჭირო, რომ დავიცვათ წყლის სავალი არხის საჭირო ზომები. აღნიშნულისათვის მიზანშეწონილია შერჩეული იქნას საჭირო თვისებების თერმომდგრადი როვინგი, რომელიც სპირალურად რამოდენიმე ფენად უნდა დაეხვიოს პირველ ბოჭკოვან ფენას კომპოზიციური მილის სწორ და რეალურ მონაკვეთებზე. მესამე ფენა საჭიროა ფორმირებული იქნას თერმომდგრადი (1200°C >) ბოჭკოვანი პასტის სახით კომპოზიციური მილის გარე ზედაპირის სიგლუვის მისანიჭებლად, რომელიც აუცილებელი ფაქტორია ყბაში წყლის ნაკადის ნორმალური დინებისათვის.

კომპოზიციური მილის დასამზადებლად ასეთი თვისებების მასალების და კონსტრუქციის შერჩევა უზრუნველყოფს ყბის ჩამოსხმის პროცესში მილის ზომების და ფორმის შენარჩუნებას, ჩამოსხმის შემდეგ კომპოზიციური მილის ფრაქციებად დაშლას და ყბის კონსტრუქციიდან მათ თავისუფალ გამოტანას. საბოლოო შედეგად ფორმირდება გაუმჯობესებული თბოცვლის და საექსპლუატაციო მახასიათებლების ერთიანი სტრუქტურის ელექტროსაკონტაქტო კვანძი – ყბა, რომელიც ღუმელის ექსპლუატაციისას იმუშავებს როგორც მონოლითური კვანძი.

კომპოზიციური მილების სწორი მონაკვეთები (ნაწილები) დამზადებული იქნა 2,5 მმ-ის სიქის ლითონის მილებისაგან, რომელთა ზედაპირზე დატანილი იქნა 5 მმ დიამეტრის გამჭოლი ნახვრეტები 30 მმ-ის ბიჯით. მილის სიგრძე ყბის კონსტრუქციის შესაბამისად 20 სმ-ით მეტია ყბის სიგრძეზე, რაც აუცილებელია მასზე ელექტროსაკონტაქტო მილისების ფიქსირებისა და კომპოზიციური მილის ფრაქციებად დაშლა-გამოტანისათვის, მასზე მბრუნავ-გამომქაჩავი გამომტანი ძალის მოდებისათვის. კომპოზიციური მილის შემადგენელი რკალური ნაწილები დამზადდა 2 მმ დიამეტრის ნიქრომის მავთულისაგან ხვიათა ნულოვანი ბიჯით (ფორმირება ხდება სახარატო ჩარხზე), რომლის ზომები პერფორირებული მილის გარე დიამეტრის ტოლია, ხოლო პერფორირებულ მილებთან ურთიერთ შიგა შეერთებისათვის კი შესაბამისი ნაწილის ხვიების გარე ზომები პერფორირებული მილის შიგა დიამეტრის ტოლია. ნახ.3-ზე მოცემულია პერფორირებული ლითონის მილები 1 და რკალური ნაწილებისათვის ფორმირებული ზამბარული ელემენტები 2.



ნახ.3. კომპოზიციური მილის შემადგენელი ლითონის ელემენტები.
1- პერფორირებული ლითონის მილები; 2- ზამბარული ელემენტები

ზემოთ განხილული (დამზადებული) მილისაგან აწყობილი იქნა U-სებრი კომპოზიციური მილის შემადგენელი ლითონის კონსტრუქცია.

კომპოზიციური მილის ფორმირების პირველ ეტაპზე ვიყენებთ ბოჭკოვანი როვინგის დახვევის მეთოდს. საწყის ეტაპზე ხელით განფენის მეთოდით კომპოზიციური მილის შემად-

გენელი ორივე ლითონის პერფორირებულ მილებზე ბრუნვის მეთოდით დაგვაქვს თერმომდგრადი (650-700ºC) ბოჭკო «ლონას» როვინგის ფენა 3 მმ-ის სისქით. მეორე ფენა ფორმირდება (2000ºC თერმომდგრადობით) აზბესტის როვინგისაგან. ბოჭკოვანი ფენებით დაფარულ მილებზე მჭიდრო ჩასმით ვათავსებთ მილის ნახევარ რკალურ ნაწილის ზამბარულ ელემენტებს, რომლებიც ერთმანეთთან კომპოზიციური მილის მაქსიმალური სიმრუდის რადიუსზე დაკავშირებულია ხვიების ერთიმეორეში ჩასმით (ასეთი შეერთება აადვილებს ნამზადიდან მათ ფრაქციებად დაშლა-გამოტანის პროცესს). ზამბარული ნაწილების სწორხაზოვან ბოლოებს ვატარებთ ლითონის მილის სირღრუეში და ვაფიქსირებთ მათ ბოლოებზე. აღნიშნული ტექნოლოგიური პროცესების ერთობლიობით ვღებულობს U-სებრი მილის საწყის სტრქუტურას. რკალურ ნაწილებს ვფარავთ «ლონას» ბოჭკოვანი, ხოლო შემდეგ აზბესტის როვინგის შესაბამისი სისქის ფენებით. კონსტრუქციას ვაძლევთ ვერტიკალურ მდგომარეობას (სწორი მონაკვეთებით ზემოთ). მილზე ვახდენთ ნახევარ ყალიბებით შედგენილ ყალიბების აწყობას, რომლის შიგა ზომები (დიამეტრი) სამაცივრო არხის გარეზომის (დიამეტრის) ტოლია. ყალიბების კედლიდან მილის ზედაპირის (მთელ პერიმეტრზე) დაცილება-დაშორება რეგულირდება ფიქსატორების საშუალებით. ბოჭკოვანი მასალებით დაფარული U-სებრი მილის და ფორმა-ყალიბს შორის სივრცეს – არეს თანდათანობით ვავსებთ აზბესტის ბოჭკოვანი პასტის ფენით გარკვეული წნევითი ზემოქმედებით. კომპოზიციური მილის აზბესტის პასტით შევსებას ვიწყებთ მილის სიმრუდის მაქსიმალური წერტილიდან სწორი მონაკვეთების დასრულებამდე.

მეტალური და ბოჭკოვანი სტრუქტურული კომპოზიციური მილის ფორმირების აღწერილ ტექნოლოგიურ პროცესთა ერთობლიობით საბოლოო ანგარიშში ვღებულობთ საპროექტო მახასიათებელი თვისებების კომპოზიციურ მილს.

ჩვენს მიერ ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ტექსტილის ტექნოლოგიისა და დიზაინის დეპარტამენტის საფეიქრო ტექნოლოგიურ ლაბორატორიაში დამუშავებული იქნა კომპოზიციური მილების მიღების სხვადასხვა მეთოდები და გამომუშავებული იქნა კომპოზიციური მილები (ნახ. 4).

მილკომპოზიტების ყბის კონსტრუქციაში ჩამოსხმისათვის გამოყენებამდე ვატარებთ გაზის ღია ალზე წინასწარი თერმოდამუშავების პროცესს, რა დროსაც მისი კონსტრუქციიდან გამოიდევნება ჭარბი ტენი და გაიტრუსება მის ზედაპირზე მოხვედრილი ბოჭკოვანი ჩანართები. ხოლო ყალიბებში მათ განთავსებამდე საბოლოოდ ვაშრობთ მაღალი ტემპერატურის სპეცღუმელებში (ს.ს. ფეროშენადნობთა ქარხნის სამსხმელო საამქრო) ნარჩენი ტენის ლიკვიდაციის მიზნით.



ნახ.4. სხვადასხვა სტრუქტურის კომპოზიციური მილები
საყალიბე ფორმაში კომპოზიციური მილის საჭირო სივრცული განლაგებისათვის მილზე

ვაგებთ საპროექტო ზომების მქონე სპილენძის საყელურებს, ხოლო სწორი მონაკვეთების რკალურ ნაწილებთან შეერთების ადგილზე კი ვაფიქსირებთ სპილენძის მილისებრი ფორმის ფურცლოვან ფირფიტებს (შეერთების ადგილის დამატებითი სიმტკიცის მინიჭების თვალსაზრისით). მილის სწორი მონაკვეთების ბოლოებზე კი მჭიდროდ ვათავსებთ ელსაკონტაქტო მილისებს ნახ.5.



ნახ.5. ყალიბში კომპოზიციური მილის სივრცითი განთავსება

კომპოზიციური მილის ნახევარ ყალიბში განთავსების შემდეგ ყალიბს ვახურავთ მეორე ნახევარ ყალიბს, ვაფიქსირებთ მათ შეერთებას ყალიბების ზედაპირზე მძიმე წონის ტვირთების განლაგებით და ვახდენთ გამღვალი სპილენძის ჩასხმას ნახ.6.

სხმულის ფორმირების ახალმა მეთოდმა, მისთვის განკუთნილმა კომპოზიციურმა მილის გამოცდამ ცხადყო, რომ ელექტრო საკონტაქტო ყბა და მისი სამაცივრო არხი ფორმირდება სრულფასოვნად. კომპოზიციურ მილში არსებული ტენი და მილის პირველადი «ლონას» ბოჭკოვანი როვინგის ნამწვი აირები ინტენსიურად სრულად გამოიყოფა სხმულიდან ნახ.7, რაც თავიდან გვაშორებს სხმულში ჰაერის ბუშტუკების არსებობის შესაძლებლობას და ყბის კონსტრუქციულ არასრულყოფას.



ნახ.6. ყბის ყალიბში გამდნარი სპილენძის ჩასხმის პროცესი



ნახ. 7. ყბის სხმულიდან ტენის და ნამწვი აირების გამოყოფის პროცესი

ყბის სხმულის გაცივების შემდეგ ვახდენთ კომპოზიციური მილის ფრაქციებად დაშლას და კონსტრუქციიდან მის გამოტანას, რომელიც მიმდინარეობს ეტაპებად შემდეგი თანმიმდევრობით:

პირველად ვახდენთ კომპოზიციური მილის შემადგენელ პერფორირებულზედაპირიანი

ლითონის მილის ყბიდან გამოტანას მილის დაბოლოებაზე ფიქსირებული თაურის ბრუნვით და გამოქაჩვით ნახ.8.



ნახ.8. ყბიდან კომპოზიციური პერფორირებულზედაპირიანი ლითონის მილის გამოტანის პროცესი

აღნიშნული პროცესის შესრულებას გვიადვილებს ჩამოსხმის პროცესის მსვლელობისას პერფორირებულზედაპირიანი მილის და თერმომდგრადი აზბესტის ფენებს შორის მოთავსებული ბოჭკოვანი პირველი ფენის (ბოჭკო «ლონას» როვინგი) დაწვის შედეგად წარმოქმნილი სივრცითი სიცარიელე-ღრეჩო.

მეორე ეტაპზე ვახდენთ სხმულიდან კომპოზიციური მილის მარჯვენა და მარცხენა ზამბარული-რკალური ნაწილების ხვიების ცალ-ცალკე გამოტანას, რისთვისაც ვახდენთ კომპოზიციური პერფორირებულზედაპირიანი მილის სიღრუეში გატარებული სპირალის სწორახაზოვანი მონაკვეთის ამხვევ-გამომტან დოლზე ფიქსირებას. ამხვევი დოლით ვახდენთ გამოქაჩვის და დახვევის მეთოდით ხვიების გასწორხაზებული მავთულის დახვევას.

აღნიშნული პროცესის შესრულებაში გვეხმარება ის გარემოება, რომ მილის მოხრილი ნახევარრკალური მონაკვეთები ურთიერთ დაკავშირებული გვქონდა ხვიების ურთიერთჩასმით და არა მყარი კავშირით.

მესამე ეტაპზე სხმულიდან (ყბიდან) კომპოზიციური მილის აზბესტის ბოჭკოვანი ფენის დაჭუცმაცებას და გამოტანას ვახდენთ ფოლადის გაშლილთავიანი გვარლის საშუალებით ბურღვის მეთოდის გამოყენებით. ხოლო ბოჭკოვანი ნარჩენების გამოტანისათვის ვიყენებთ პნევმო-ჰიდრავლიკურ მეთოდს ნახ.9.



ნახ.9. პნევმო-ჰიდრავლიკური მეთოდით ყბის გამოთავისუფლება ბოჭკოვანი ნარჩენებიდან

აღნიშნულ პროცესთა ერთობლიობით ვაღწევთ ყბის სხმულიდან კომპოზიციური მილის ყველა ფრაქციის სრულად გამოტანას, რის შედეგადც ვღებულობთ ახალი კონსტრუქციის ელსაკონტაქტო ყბას საჭირო ზომების წყლის სავალი არხით, რომელიც ელექტროთერმულ საექსპლუატაციო დატვირთვაზე მუშაობს როგორც ერთგვაროვანი მონოლითური კვანძი.

ჩვენს მიერ შექმნილი კომპოზიციური მილების გამოყენებით ყბების ჩამოსხმა მოვახდინეთ ს.ს. ზესტაფონის ფეროშენადნობთა ქარხნის სამსხმელო საამქროში. ახალი კონსტრუქციის ყბებმა სამრეწველო აპრობაცია გაიარა სხვადასხვა სიმძლავრის ელექტროღუმელებზე. ჩამოსხმის ახალმა მეთოდმა და მისთვის განკუთვნილმა ნამზადის გამოცდამ ცხადყო, რომ საკონტაქტო ყბა და მისი სამაცივრე არხი ფორმირდება სრულფასოვნად, რომ სხმული და მისი მექანიკური დამუშავებით მიღებული ელექტროსაკონტაქტო ყბა სრულად აკმაყოფილებს მისდამი წაყენებულ კონსტრუქციულ და ტექნოლოგიურ მოთხოვნებს. ყბის მუშაობის ხანგრძლივობა გაიზარდა 2-2,5-ჯერ. ს.ს. ზესტაფონის ფეროშენადნობთა ქარხნის ხელმძღვანელობა აღნიშნავს, რომ აღნიშნული სამუშაოს დანერგვა წარმოებისათვის მნიშვნელოვანია. მათი დაკვეთით ჩვენს მიერ დამზადებული იქნა 59 ცალი კომპოზიციური მილი, რომლებიდანაც ჩამოისხა რამოდენიმე ელექტროსაკონტაქტო ყბა.

ახალი სტრუქტურის და კონსტრუქციის ელსაკონტაქტო კვანძის ყბის დამზადების ტექნოლოგიაზე მიღებული გვაქვს საქართველოს პატენტი გამოგონებაზე [5].

ფერად ლითონებზე ფასების განუწყვეტელი ზრდის ტენდენციიდან გამომდინარე აღნიშნული სამუშაოს დანერგვა წარმოებისათვის მეტად მნიშვნელოვანია. სამუშაოს რეალიზაციით წლიურად მხოლოდ ზესტაფონის ს.ს. ფეროშენადნობთა ქარხნის მაგალითზე ელექტროთერმული სადნობი ღუმელების ელექტროდების ელექტროსაკონტაქტო კვანძების – ყბებში სპილენძის მილების გამოთავისუფლებით წლიურად იქნება 48000 ლარი, ხოლო ყბების მუშაობის საიმედობის გაზრდით კი 756000 ლარის ეკონომიური ეფექტი მოგება, რომელიც თანდათანობით გაიზრდება ქარხნის სიმძლავრის ზრდასთან ერთად.

ლიტერატურა

1. გ. ქაშაკაშვილი. ფოლადის მეტალურგია. თბილის, მეცნიერება, 2012.
2. ე. ბაკურაძე, კ. ბაკურაძე. „მადნის ელექტროთერმული სადნობი ღუმელების მუშაობის საიმედოობის ამაღლება“. რესპუბლიკური სამეცნიერო-პრაქტიკული კონფერენციის „გამოყენებითი ქიმიის და ტექნოლოგიების თანამედროვე მიღწევები“, ქუთაისი, 2009,
3. Бакурадзе К. Е., Бакурадзе Е. П. Повышение надежности электротермических рудоплавильных печей с применением композиционных материалов. Международный научный журнал «Научные новости Грузии», №1, Кутаиси, 2009, стр. 20-23.
4. Бакурадзе Е., Зивзивадзе Б., Абесадзе Н., Бакурадзе К. Альтернативный узел электропитания электротермических рудоплавильных печей. მე-2 საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია „ენერგეტიკა: რეგიონული პრობლემები და განვითარების პერსპექტივები“, ქუთაისი, 2013.
5. ე. ბაკურაძე, კ. ბაკურაძე. გამოგონება აპ 2008 9387 ა . ელექტროთერმული სადნობი ღუმელის ელექტროდების ელექტროსაკონტაქტო კვანძის ყბის დამზადების ხერხი. საქ. პატენტი, ბიულეტინი 7(251), თბილისი, 2008.

DEVELOPING THE INNOVATIVE TECHNOLOGY FOR PRODUCING THE ELECTRO-CONTACT PIPES FROM TEXTILE COMPOSITE MATERIALS

E. Bakurdze, B. Zivzivadze, K. Bakuradze
Akaki Tsereteli State University

The paper dwells on improvement of performance of ferroalloy smelting furnaces by using the electric-contact unit made of novel composite materials.

შედგენილი კონსტრუქციების გაანგარიშების მაგალითი ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით

რევაზ კახიძე
ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

რეზიუმე: განხილულია ბზარების მქონე რკინაბეტონის გარსების დეფორმირების არაწრფივი თეორიის განტოლებები იტერაციული მეთოდებით და ამ განტოლებების გაწრფივებისათვის გამოყენებული ორი მეთოდი: დრეკადი ამოხსნის და თანდათანობითი დატვირთვის, აგრეთვე ამ მეთოდების შეხამება. კონკრეტული ამოცანისათვის მეთოდის შერჩევა ხორციელდება მისი ფიზიკური არსის, ხასიათისა და საანგარიშო პარამეტრების ცვლილების სიჩქარის მიხედვით. მსგავსი განტოლებების ამოხსნის ანალიზით ნაჩვენებია, რომ იტერაციული მეთოდების გამოყენების დროს ცენტრალური პრობლემა არის მდგრადი და კრებადი ალგორითმების კონსტრუირება.

საკვანძო სიტყვები: ავარიული ნაგებობა; აღდგენა; რეკონსტრუქცია; დაპროექტება.

ბზარების მქონე რკინაბეტონის გარსების დეფორმირების არაწრფივი თეორიის განტოლებები მათი სირთულის გამო უნდა გადაწყდეს უმეტეს შემთხვევებში იტერაციული მეთოდებით. ამ განტოლებების გაწრფივებისათვის გამოიყენებოდა ორი მეთოდი: დრეკადი ამოხსნის და თანდათანობითი დატვირთვის [1, 2], აგრეთვე ამ მეთოდების შეხამება. კონკრეტული ამოცანისათვის მეთოდის შერჩევა ხორციელდებოდა მისი ფიზიკური არსის, ხასიათისა და საანგარიშო პარამეტრების ცვლილების სიჩქარის მიხედვით. მაგრამ, ყველა ამ შემთხვევაში მხედველობაში მიიღებოდა გამოყენებული მეთოდების შემდეგი თავისებურებანი.

მსგავსი განტოლებების ამოხსნის ანალიზმა აჩვენა, რომ იტერაციული მეთოდების გამოყენების დროს ცენტრალური პრობლემა არის მდგრადი და კრებადი ალგორითმების კონსტრუირება. გამოკვლევებით დადგენილია, რომ ეს განისაზღვრება თვით ან გადამწყვეტი განტოლებების სტრუქტურით და მათი ამოხსნის მეთოდია ეფექტურობით იტერაციის ყოველ ეტაპზე. საკმაოდ რაციონალური აღმოჩნდა ე.წ. საწყისი განტოლებების მეთოდი, რომელიც შემოთავაზებული იყო პროფესორ ი. მილეიკოვსკის [3] მიერ და შემდგომში გამოიყენეს მრავალ შრომაში.

დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნის პირდაპირი ვარიაციული მეთოდების გამოყენებისას ეფექტურია სხვა ხერხიც. მისი არსი ისაა, რომ სიხისტის კოეფიციენტების დისკრეტული ფუნქციები, როგორც საძიებელი ფუნქციები, შეირჩევა ან მოინახება რაიმე სპეციალური წესით, უფრო ხშირად – ადვილად წარმოებადი უწყვეტი ფუნქციების გამოყენებით. ამ ფუნციებზე ამოცანის დაყვანის ყველაზე მეტად გავრცელებული ვარიანტია უმცირესი კვადრატების მეთოდის გამოყენება განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მეთოდთან შერწყმით [4, 5].

ცვლადკოეფიციენტებიანი განტოლებების ამოხსნის აღნიშნული ხერხი საშუალებას გვაძლევს მოვახდინოთ მთელი რიგი გამარტივებანი, რომლებიც აუმჯობესებს ამოხსნათა კრებადობას. ერთ-ერთი ხერხი, რომელიც გამოყენებულია ქვემოთ, ეფუძნება ამოცანის ფიზიკურ მხარეს: ნაცვლად ცვლადკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლებების დაყვანისა მუდმივკოეფიციენტებიანზე. ეს შესაძლებელი გახდა იმის გამო, რომ ვარიაციული მეთოდის განტოლებები საშუალებას იძლევა მივიღოთ საძიებელი ფუნქციებისა და სიხისტის კოეფიციენტების ხარისხიანი სურათი იტერაციის ყოველ ბიჯზე. განტოლებათა ამოხსნა ხდება ტრადიციული მეთოდებით [3]:

1) ტრიგონომეტრიული მწკრივების გამოყენებით;
2) კოჭოვანი ფუნდამენტური ფუნქციების გამოყენებით, რომლებსაც ხშირად მ. კრილოვის ფუნქციებსაც უწოდებან;
3) ჩაკეტილი ანალიზური ფორმით (განტოლებების შეზღუდული რიგის შემთხვევაში).

ცვლადკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლებების სისტემის ამოხსნის ასეთი ხერხის მიზანშეწონილობას ადასტურებს კიდევ ის გარემოება, რომ სიხისტის კოეფიციენტებისა და საძიებელი ფუნქციების ანალოგიური აპროქსიამცია პოლინომების, კოჭური ან ტრიგონომეტრიული ფუნქციების სახით აღმოჩნდა გამოსადეგი არა მარტო დაძაბული მდგომარეობის ამოცანების ანალიზისათვის, არამედ კონსტრუციათა სინთეზის ამოცანებისთვისაც. ამ ამოცანებში კონფიგურაციისა და ელემენტების კვეთების სტრუქტურის კორექტირებისათვის უცნობ ფუნქციათა წარმოდგენის ასეთი ფორმა აღმოჩნდა ყველაზე მეტად მარტივი.

შედგენილი კონსტრუქციის გაანგარიშების მაგალითად ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით განხილულია ერთმალიანი სახსროვნად დაყრდნობილი კოჭი, რომლის შედგენილი კვეთი მოიცავს ორ ძელს და თანაბრად განაწილებული დატვირთვას (ნახ. 1).

განივ დატვირთვაზე მომუშავე ამ კონსტრუქციებისათვის საანგარიშო მოდელები და შესაბამისი ვარიაციული მეთოდების განტოლებები შეიძლება მივიღოთ ცხრილის 1 პირველი და მეორე ჯგუფის განტოლებებიდან გამომდინარე. ერთეულოვანი ფუნქციის სახე მოყვანილია ნახ. 1-ზე მათი მნიშვნელობები შემდეგია:

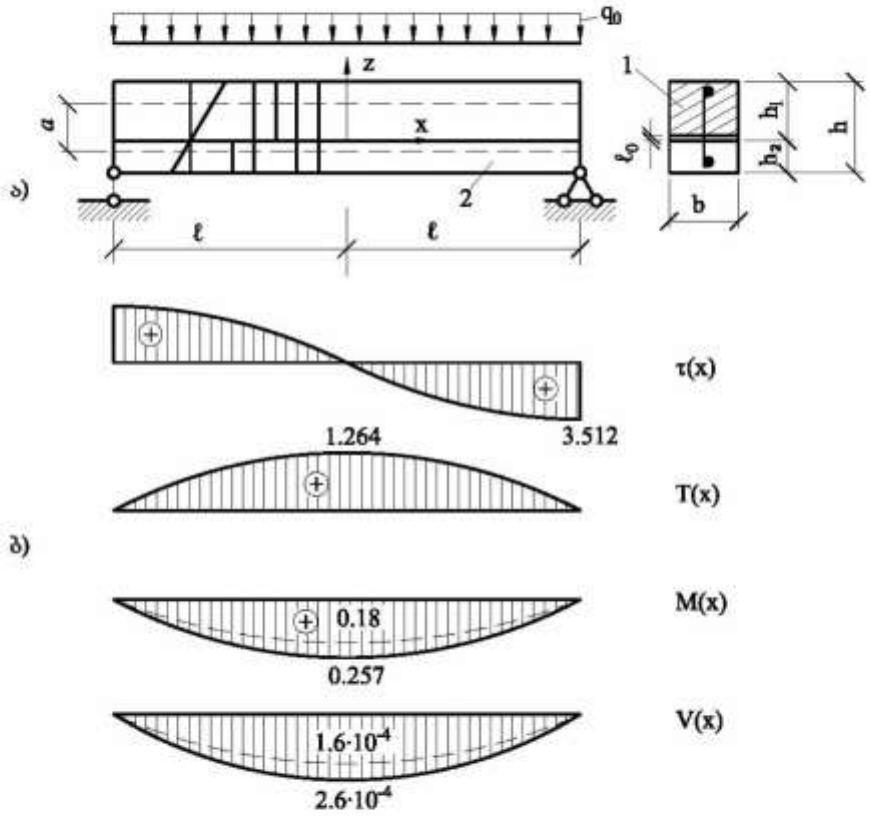
$\xi_0 = z; \xi_1 = 1; \xi_2 = 1.$

ξ_0 და ξ_1 ფუნქციები ახასიათებს გადაადგილებათა ცვლილებას მონოლითური ღეროებისათვის და ვრცელდება მთელს განკვეთზე, ხოლო ξ_2 ფუნქციები ახასიათებს შედგენილი ღეროს ზედა და ქვედა ელემენტების ურთიერთძვრას და ვრცელდება მხოლოდ ზედა ელემენტების სიმაღლეზე.

ცხრილი 1

	$\overline{U}_i(x)$	$V_i(x)$	$\overline{V}_i(x)$	$W_i(x)$	$M_m(x)$	
I	$\sum(\bar{k}_n n) - \sum b_k$	$-\left(\sum_i \bar{k}_i D^2 + k_\delta \sum_i \bar{\alpha}_m\right)'$	$-\left(\left(k_\delta \sum_n \bar{\theta}_m\right)' + \sum_\gamma \bar{\sigma}_\gamma'\right)$	$-\left(\sum_\gamma k_\delta \bar{\beta}_n + \sum_\gamma \bar{\alpha}_n\right)'$	0	$-\bar{F}$
II	$\left(k_2 \sum_n \bar{\alpha}_n + \sum_m \bar{\delta}_m\right)'$	$\left[\left(\sum_i \bar{I}_n D^2\right)'' + k_2^2 + \left(k_2 \sum_n \bar{c}_n\right)'' + k_2 \sum_\gamma \bar{c}_\gamma D^2 - \left(\sum_i \bar{p}_n D\right)'\right]$	$-\left[k_0^2 \sum_n \bar{\beta}_n + \left(k_2 \sum_n \bar{\varepsilon}_n\right)'' - \left(\sum_i \bar{p}_n D\right)'\right]$	$-\left(\left(\sum_i \bar{e}_i D^2\right)'' + k_0^2 \sum_n \bar{\beta}_n' + k_2 \sum_i \bar{c}_{ik} + \left(k_2 \sum_n \bar{\sigma}_{nk}' + \sum_n \bar{\delta}_{nk}'\right)' - \left(\sum_i \bar{p}_n D\right)'\right]$	$\sum_n \bar{S}_n + \sum_m \bar{a}_m D^2$	$-(\bar{q}' + \bar{q})$
III	$\left(k_2 \sum_n \bar{\alpha}_n + \sum_m \bar{\delta}_m\right)'$	$-\left[k_1^2 \sum_i \bar{\beta}_{ni} + \left(k_2 \sum_i \bar{\varepsilon}_{ni}\right)'' - \left(\sum_i \bar{p}_{ni} D\right)'\right]$	$-\left[k_0^2 \sum_n \bar{\beta}_n + \left(\sum_n \bar{\tau}_{ni} D\right)' - \left(\sum_i \bar{p}_n D\right)'\right]$	$-\left[\left(\sum_i \bar{e}_{ip} D^2\right)'' + k_0^2 \sum_n \bar{\beta}_n' + k_2 \sum_i \bar{e}_{ip} + \left(\sum_i \bar{p}_{ip}' D\right)'\right]$	$\sum_n \bar{S}_m + \sum_m \bar{a}_m D$	$-\bar{q}$
IV	$\left(k_2 \sum_n \bar{\alpha}_n + \sum_m \bar{\delta}_m\right)'$	$-\left[k_1^2 \sum_i \bar{\beta}_{ni}' + k_2 \sum_i \bar{c}_{in} - \left(\sum_i \bar{\varepsilon}_n D^2\right)'' + \left(k_2 \sum_i \bar{c}_{in}' + \sum_i \bar{\varepsilon}_m\right)'' - \left(\sum_i \bar{p}_n' D\right)'\right]$	$-\left[\left(\sum_i \bar{\varphi}_{ip} D^2\right)'' + k_1^2 \sum_i \bar{\beta}_{ni}' + \sum_i \bar{\varphi}_{ip} + k_2 \sum_i \bar{\varphi}_{ip}'' - \left(\sum_i \bar{p}_{ip} D\right)'\right]$	$-\sum_n \bar{S}_n' - \sum_i \bar{a}_n D^2$	$-\bar{\tau}$	
V	0	$-\sum_n \bar{S}_\delta - \sum_i \bar{a}_n D^2$	$-\sum_n \bar{S}_{n\delta} - \sum_i \bar{a}_n' D^2$	$-\sum_n \bar{\theta}_{im}$	$-\sum_n \bar{\delta}_n$	$-\Theta_i$

განსახილველი მაგალითის რიცხვით რეალიზაციას ვახდენთ შემდეგი საწყისი მონაცემებით (ნახ. 1,ა). კოჭის საერთო სიმაღლე h=100 მმ; მალი 2ℓ=1200 მმ; თანაბრად განაწილებული დატვირთვის ინტენსიურობა $q_0 = \ell$ კნ/მ². კოჭი შედგება ორი ელემენტისაგან. ზედა ელემენტის განივი კვეთია $h_1 \times b_1$ =50×50 მმ, ქვედასი $h_2 \times b_2$ =60×40 მმ. ბეტონის კლასი ზედა ელემენტისათვის არის B30, ქვედასი − B20. პირველი ელემენტის დეფორმაციის მოდული $E_{b1} = 3.25 \times 10_4$ მპა, მეორისა − $E_{b2} = 3{,}25 \times 10^4$ მპა; ელემენტებისნ ღერძებს შორის მანძილი ℓ=60 მმ. კოჭი დაარამატურებულია ერთი კარკასით მთელი განიკვეთის სიმაღლეზე. განივი ღეროების არმატურის კლასია $B_q 1$, დიამეტრი − 4 მმ, ბიჯი − 50 მმ. ელემენტების ურთიერთმიმართება განხორციელებულია დრეკად-დამყოლი ნაკერით, რომლის სისქე $t_0 = 0.4$ მმ.გაანგარიშებისას იგულისხმება, რომ ძვრაზე მუშაობს მხოლოდ განივი არმატურის ღერო − ნაგელები. კოჭის ელემენტები მუშაობს დრეკად სტადიაში და ბზარები არ არ არსებობს.



ნახ. 1. შედგენილი კოჭი: ა − საანგარიშო სქემა; ბ − $\tau(x)$, $T(x)$, $M(x)$ და $V(x)$ ეპიურები

ცხრილი 1 გამოსახულების სიხისტის კოეფიციენტების გამოთვლა ხდება ერთეულოვანი ფუნქციების ეპიურების ინტეგრირებით.

კოჭის ელემენტებს შორის ძვრის კავშირების დაყვანილი გრძივი სიხისტე განისაზღვრება ფორმულით

$$G_0 \frac{12EJ\Delta}{(2\bar{t}_0 + t_0)S_w b} = 1.4 \cdot 10^5.$$

b_{22} სიხისტის კოეფიციენტი, რომელიც დაკავშირებულია ძვრასთან, განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$b = b_{22} = G_0\left(\bar{\xi}_2^H - \bar{\xi}_2^B\right) = 4G_0 = 5.6 \cdot 10^5.$$

განტოლების A_1, q_1, A_2, q_2, α, q და λ კოეფიციენტებს გამოვთვლით შესაბამისი ფორმულებით. გაანგარიშებების საფუძველზე მიღებულია ამ სიდიდეების შემდეგი მნიშვნელობები:

$$A_1 = 0.362;\ q_1 = 1.398 \cdot 10^5;\ A_2 = 21.406;\ q_2 = -5.844 \cdot 10^{-3};$$
$$\alpha = 43.687 \cdot 10^3;\ q = 21.406;\ \lambda = 3.580.$$

A, q, A_2, Q_2, α, q და s მხები ძაბვების, $T(x)$ ჯამური ძვრის ძალას ნაკერში, მღუნავ მომენტებსა და ჩაღუნვების მნიშვნელობებს განვსაზღვრავთ შემდეგი ფორმულებით:

$$\tau(x) = -\frac{-21.406}{2}\left[x - \frac{sh(3.580x)}{3.580x \cdot ch(3.580 \cdot 0.6)}\right];$$

$$x = \ell, \tau(\ell) = -3.512 \text{ კნ/მ};$$

$$T(x) = -\frac{-21.406}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{ch(3.580x)}{(3.580)^2 \cdot ch(3.580 \cdot 0.6)} + \frac{1}{(3.580)^2} - \frac{0.6^2}{2}\right];$$

$$x = 0, T(0) = 1.284 \text{ კნ};$$

$$M(x) = \frac{q_0(\ell^2 - x^2)}{2} + T(x)\omega;$$

$$x = 0, M(0) = 0.18 + 1.284 \cdot 0.06 = 0.257 \text{ კნ·მ};$$

$$V_0(x) = \frac{21.406 \cdot 21.406 \cdot ch(3.580x)}{5.6 \cdot 10^5 \cdot 3.580^2 \cdot ch(3.580 \cdot 0.6)} +$$
$$+\left(-\frac{21.406 \cdot 21.406}{5.6 \cdot 10^5} - \frac{21.406 \cdot 0.6^2}{2}\right) \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{5.844 \cdot 10^{-3}}{24}\ (x^4 + 5 \cdot 0.6^4) -$$
$$-\frac{21.406 \cdot 21.406}{5.6 \cdot 10^5}\left(\frac{1}{3.580^2} - \frac{0.6^2}{2}\right) = 1.47 \cdot 10^{-5} \cdot ch(3.58x) -$$
$$-1.927 \cdot x^2 + 2.435 \cdot 10^{-4} \cdot x^4 + 2.412 \cdot 10^{-4};$$

$$x = 0, V_0(x) = 1.47 \cdot 10^{-5} + 2.412 \cdot 10^{-4} \cong 2.6 \cdot 10^{-4} \text{ მ}.$$

$\tau(x), T(x), M(0)$ ეპიურები ნახ. 1,ბ ზუსტ ხაზითაა წარმოდგენილი.

აქვე, შედარებისათვის, წყვეტილი ხაზითაა წარმოდგენილი მომენტებისა და ჩაღუნვების ეპიურები იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ელემენტები ხისტადაა დაკავშირებული ერთმანეთთან, ე.ი. მოქნილი კოჭისათვის.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. *Изд. Саратовского университета, Саратова, 1975. -119 с.*
[2] Ржаницин А.Р. Составные стержни и пластинки. *Стройиздат, Москва, 1986. -316 с.*
[3] Милейковский И.Е., Кулар А.К. Расчет и проектирование пологих оболочек покрытий в форме гиперболических параболоидов. *Стройиздат, Москва, 1982.*
[4] Михайлов Б.К., Кипиани Г.О. Деформированность и устойчивость пространственных пластинчатых систем с разрывными параметрами. *Стройиздат СПб, С.-Петербург, 1996. -442 с.*

EXAMPLE OF ANALYSIS OF COMPOUND STRUCTURES BY APPLICATION OF VARIATION METHOD

Revaz Kakhidze
Batumi Shota Rustaveli State University

Abstract: The equations of the nonlinear theory of deformation of the reinforced concrete shells with cracks are considered by the iteration methods and the two methods are applied for the generation of these equations: elasticity and gradual loading and combinations of these methods. The method for selection of a specific task is carried out according to the rate of change of physical nature, character and design parameters. Analysis of similar equations shows that the central problem of using iterating methods is to construct stable and convergence algorithms.

კომპოზიტური სამშენებლო კონსტრუქციები და მათი გაანგარიშების თავისებურებანი ანიზოტროპიის გათვალისწინებით

ხმელიძე თ.*, ყიფიანი გ**., ქრისტესიაშვილი ე.*
*საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
**საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტი

განხილულია სამშენებლო სივრცეში ახლად დამკვიდრებული კომპოზიტური მასალების ძირითადი შემადგენელი ბოჭკოებისა და მატრიცული მასალების მრავალფეროვნება. დასაბუთებულია კომპოზიტური მასალების უნიკალური თვისება – საჭიროებისამებრ არეგულიროს სიმტკიცე, სიხისტე, თბოგამტარობა და სხვ. თვისებები კომპონენტების თანაფარდობისა და მაკროსტრუქტურის ცვლილებების ხარჯზე. წარმოდგენილია ხის კომპოზიტური კოჭების გაანგარიშების შედეგები და მათი შედარება ჩვეულებრივ ხის კონსტრუქციებთან. მოცემულია კომპოზიტური არმატურით დაარმირებული ბეტონის სამშენებლო კონსტრუქციების გაანგარიშების საფუძვლები, რომელიც ეყრდნობა ამერიკულ, ევროპულ, იაპონურ სამშენებლო ნორმებსა და სტანდარტებს.

ზოგადი ნაწილი

თანამედროვე სამშენებლო ინდუსტრიის განვითარების ანალიზი ნათლად აჩვენებს ახალი ტექნოლოგიებით მიღებული საშენი მასალების (მოდიფიცირებული მერქანი, ნანომასალები, კომპოზიტები და სხვ.) საფუძველზე დამზადებული მზიდი და შემომღობავი კონსტრუქციების წილის განუხრელად ზრდას. ამ მასალებიდან განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს კომპოზიტურს, მიღებულს პოლიმერების საფუძველზე.

მშენებლობაში კომპოზიტური მასალების გამოყენებით შესაძლებელია გადაიჭრას ისეთი მნიშვნელოვანი საკითხები, როგორებიცაა: შენობა-ნაგებობათა საექსპლუატაციო ხარჯებისა და მასის შემცირება, კონსტრუქციების ტექნიკური მახასიათებლების, საექსპლუატაციო, სიმტკიცის, დეფორმაციულობის, თბოსაიზოლაციო და საექსპლუატაციო თვისებების გაუმჯობესება და სხვ.

კომპოზიტების უმნიშვნელოვანესი უპირატესობაა მისგან დამზადდეს სამშენებლო კონსტრუქციები, ელემენტები, დეტალები წინასწარ განსაზღვრული თვისებებით, რომლებიც შეესაბამება მუშაობის პირობებსა და წაყენებულ მოთხოვნებს. ბოჭკოებისა და მატრიცის მასალების მრავალფეროვნება, დაარმირების სქემების ოპტიმიზაცია გამოყენებული კომპოზიტური კონსტრუქციების შესაქმნელად, სრულ თავისუფლებას აძლევს ინჟინრებს საჭიროებისამებრ არეგულირონ კომპოზიტური მასალის სიმტკიცე, სიხისტე, თბოგამტარობა და სხვა თვისებები კომპონენტების თანაფარდობისა და მაკროსტრუქტურის ცვლილებების ხარჯზე.

თანამედროვე სამშენებლო ინდუსტრიის განვითარების დონე საშუალებას იძლევა შენობების სარეკონსტრუქციო და სარემონტო სამუშაოების ჩატარებისას, ტრადიციული მასალისგან დამზადებული ზოგი ელემენტი შევცვალოთ უმნიშვნელოდ მოდიფიცირებული კომპოზიტური ელემენტით.

ამჟამად, წარმოების ყველა მიმართულებით შეინიშნება სამეცნიერო-ტექნიკური პროგრესის სწრაფი განვითარება., რაც მოითხოვს დიდი რაოდენობით ახალ მასალებს წინასწარ განსაზღვრული თვისებებით. იზრდება მოთხოვნები ზემაღალი სიმტკიცის, სიმაგრის, მხურვალმედეგ, კოროზიამედეგ მასალებზე, აგრეთვე მასალებზე, სადაც ეს

თვისებები ერთმანეთთან არის შეთავსებული. დღესდღეობით ცნობილია ასი ათასობით ბუნებრივი (არაკომპოზიტური) და ხელოვნური მასალები, რომლებიც ვეღარ პასუხობენ გაზრდილ მოთხოვნებს. ამასთანავე, ახალი მასალის აღმოჩენა იშვიათად ხდება. ყოველივე ეს მიუთითებს იმაზე, რომ „ჩვეულებრივი“ მასალების უმეტესობა უკვე აღმოჩენილია და ამ მიმართულებით რაიმე ახლის მოლოდინი პრაქტიკულად განულებულია. სამეცნიერო-ტექნიკური პროგრესი კი მოითხოვს ახალ კონსტრუქციულ მასალებს, ამიტომ, ბუნებრივია დღის წესრიგში დგას უკვე არსებული მასალების გამოყენებით შეიქმნას თანამედროვე კომპოზიტური მასალები. ეს ეხება როგორც ლითონურ, ისე პოლიმერულ მასალებს.

არსებული პოლიმერების მოდიფიკაცია და კომბინირება ერთმანეთთან ან სხვა ნივთიერებებთან ახალი პოლიმერული მასალების მიღების ძირითადი მეთოდია. მრეწველობის მსოფლიო პრაქტიკა კი გვაჩვენებს პოლიმერული კომპოზიტური მასალების წილობრივ ზრდას სხვა მასალებთან (ლითონი, კერამიკა, მერქანი და სხვ.) მიმართებაში, რასაც განაპირობებს კომპოზიტების რიგი უპირატესობები: უნიკალური ერთობლიობა თვისებებისა, რომელიც არა აქვთ სხვა მასალებს (სიმტკიცე, დეფორმატულობა, დარტყმითი, ტემპერატურული, რეოლოგიური, ადჰეზიური, ელექტრული, ფრიქციული, თბოგამტარული და სხვ.); მასალის თვისებების მართვის შესაძლებლობა შედგენილობის მარტივი ცვლით; პოლიმერების ძირითადი დადებითი თვისებების (გადამუშავების სიმარტივე, დაბალი სიმკვრივე) შენარჩუნება და სხვ. მართალია ერთი რომელიმე თვისებით კომპოზიტი ვერ ჯობს სხვა, ანალოგიური თვისების მქონე მასალას, მაგრამ საუკეთესოა მრავალი თვისების ერთობლიობით.

კომპოზიტური მასალების მიღების პროცესებს შეისწავლის XX საუკუნის შუა წლებში ჩამოყალიბებული მეცნიერება კომპოზიტური მასალების შესახებ. მას საფუძველი ჩაეყარა აშშ-ში, როცა დაიწყეს ავიამშენებლობასა და კოსმონავტიკაში მასალების ახალი კლასის – ბორისა და ნახშირბადის მაღალი სიმტკიცის მქონე ბოჭკოების ბაზაზე წარმოებული კომპოზიტური მასალების გამოყენება. მოკლე დროში მიღებული იქნა სრულიად ახალი მასალები, დამუშავდა ტექნოლოგიები და მათ საფუძველზე დამზადებული კონსტრუქციების გაანგარიშების მეთოდები და თეორიები.

კომპოზიტი ხელოვნურად შექმნილი არაერთგვაროვანი უწყვეტი მყარი მასალაა, რომელიც შედგება ორი ან მეტი კომპონენტისაგან, რომლებიც ზუსტი საზღვრებითაა ერთმანეთთან დაკავშირებული. კომპოზიტების უმრავლესობაში კომპონენტები იყოფა მატრიცად (შემკვრელი) და მაარმირებელ ელემენტებად (შემვსები). კონსტრუქციული დანიშნულების კომპოზიტებში მაარმირებელი ელემენტები უზრუნველყოფს მასალის მექანიკურ მახასიათებლებს (სიმტკიცე, სიხისტე და ა.შ.), ხოლო მატრიცა – დაარმირებული ელემენტების ერთობლივ მუშაობას და მათ დაცვას მექანიკური დაზიანებისა და ქიმიურად აგრესიული გარემოსაგან.

კომპოზიციის შესაქმნელად გამოიყენება სხვადასხვა ტიპის მაარმირებელი შემვსები და მატრიცები. ესენია: გეტინაქსი და ტექსტოლითი (ფენოვანი პლასტიკები ქაღალდისა და ქსოვილისაგან შეწებებული თერმორეაქტიული წებოთი), მინა და გრაფიტოპლასტი (ქსოვილი ან დახვეული ბოჭკო მინისა და გრაფიტისგან შეერთებული ეპოქსიდური წებოთი), ფანერა, ბულატი (ერთ-ერთი უძველესი კომპოზიტური მასალა, რომელშიც მაღალნახშირბადიანი ფოლადის უთხელესი ფენები ან უწვრილესი ძაფები "შეწებებულია" რბილ მცირენახშირბადიან რკინასთან). არსებობს აგრეთვე მასალები, რომლებშიც მაღალი სიმტკიცის შენადნობების წვრილი ბოჭკოები ამოვსებულია თხევადი ალუმინის მასით.

სტრუქტურის მიხედვით კომპოზიტები იყოფა რამდენიმე კლასად: ბოჭკოვანი, ფენოვანი, დისპერსიულად განმტკიცებული, გაძლიერებული ნაწილაკებითა და ნანოკომპოზიტები. ბოჭკოვანი კომპოზიტები დაარმირებულია ბოჭკოებით ან ძაფისებრი კრისტალებით. ასეთი ტიპის კომპოზიტში შემავსებლის მცირე რაოდენობაც კი, მოგვცემს ხარისხობრივად ახალი მექანიკური თვისებების მასალას, ხოლო ბოჭკოების ორიენტაციისა და კონცენტრაციის ცვლილება, შესაბამისად, შეცვლის მასალის თვისებებს. გარდა ამისა, ბოჭკოებით დაარმირება ერთგვაროვან მასალას აძლევს ანიზოტროპიულ თვისებებს. თუ დაარმირებისათვის გამოვიყენებთ ლითონის ბოჭკოებს, მაშინ ასეთი კომპოზიტური მასალა გახდება ელექტროგამტარი ბოჭკოების მიმართულებით.

ფენოვან კომპოზიტურ მასალებში მატრიცა და შემავსებელი განლაგებულია შრეებად, ისევე როგორც, მაგალითად, განსაკუთრებულად მაგარ მინაში, სადაც მინა დაარმირებულია რამდენიმე ფენა პოლიმერული აფსკით.

დანარჩენი კლასის კომპოზიტური მასალების მიკროსტრუქტურა ხასიათდება იმით, რომ მატრიცა ივსება მაარმირებელი ნივთიერების ნაწილაკებით და განსხვავდებიან ისინი მხოლოდ ამ ნაწილაკების ზომებით.

გამოყენების სფერო: რკინაბეტონის კონსტრუქციები, მინაპლასტიკის ნაკეთობები, საავტომობილო საბურავები, ლითონ-კომპოზიტები, სპორტული ველოსიპედები, თხილამურები, ჰოკიჯოხები (ჰოკეის), ციგურები, კანოე, ბაიდარკები, სარბოლო ავტომობილებისა და მოტოციკლების ძარის დეტალები, მუზარადები, შიგაწვის ძრავის დგუშები, ბარბაცები და სხვ.

კომპოზიტის მექანიკური თვისებები განისაზღვრება სამი ძირითადი პარამეტრით: მაარმირებელი ბოჭკოს მაღალი სიმტკიცით, მატრიცის სიხისტითა და მატრიცა–ბოჭკოს საზღვარზე კავშირის სიმტკიცით. ამ პარამეტრების თანაფარდობა ახასიათებს მასალის მექანიკური თვისებებისა და რღვევის მექანიზმის მთელ კომპლექსს.

ბოჭკოვანი სტრუქტურის უმარტივესი შემთხვევაა, როცა პლასტიკურ მატრიცაში განლაგებულია ერთგვაროვანი (ერთი მიმართულების) ბოჭკოები და შესაბამისად, ასეთი კომპოზიტი თვისობრივად ანიზოტროპიულია. მისი სიმტკიცე და სიხისტე მაქსიმალურია სწორედ ბოჭკოების განლაგების მიმართულებით, ხოლო მეორე მიმართულებით – მინიმალური.

მატრიცასა და მაარმირებელ ელემენტებს შორის გამყოფის საზღვრის არსებობა მნიშვნელოვნად ამაღლებს მასალის მზარმედეგობას. ცნობილია, რომ ნებისმიერი მყარი ტანის მდგრადობა მზარების გავრცელების მიმართ, განისაზღვრება მზარდი მზარის წვეროში ენერგიის შთანთქმის მექანიზმით. კომპოზიტებში განივმა გამჭიმავმა ძაბვებმა მზარდი მზარების ბოლოში შეიძლება გამოიწვიოს ბოჭკოების განშრევება მატრიცისაგან, ხოლო ძვრის ძაბვებმა გაყოფის საზღვარზე – განშრევებული ფენის ზრდა ბოჭკოების გასწვრივ. განშრევებაზე იხარჯება გარკვეული ენერგია, რადგან ბოჭკო გადაადგილდება მატრიცის მიმართ. გარდა ამისა, დატვირთვის ზრდისას ბოჭკოების რღვევა შეიძლება მოხდეს მზარებისაგან მოშორებით მატრიცაში. ამიტომ დაარმირებული მასალებისთვის დამახასიათებელია ბლანტი რღვევის მექანიზმი, განსხვავებით ჰომოგენური (შემადგენლობით, წარმოშობით, თვისებებით ერთგვარი) მასალებისგან.

ძირითადი ნაწილი

თანამედროვე კონსტრუქციული კომპოზიტების დაარმირებისათვის გამოყენებული ძირითადი მასალებია მინის, ნახშირბადის, ორგანული და ბორის ბოჭკოები. მათ საფუძველზე მუშავდება, აგრეთვე, მრავალკომპონენტიანი მასალები, რომლებშიც გამოიყენება სხვადასხვა არმატურა (მაგ., ორგანული და ბორის, მინისა და ნახშირბადის და სხვა კომბინაციები), რაც ართულებს კლასიფიკაციას არმატურის ტიპის მიხედვით.

მაარმირებელი კომპონენტის სახეობაზე დამოკიდებულებით კომპოზიტები შეიძლება დაიყოს ორ ძირითად ჯგუფად: დისპერსიულად განმტკიცებული და ბოჭკოვანი, რომლებიც ერთმანეთისგან განსხვავდებიან სტრუქტურითა და მაღალი სიმტკიცის მასალის შექმნის მექანიზმით.

დისპერსიულად განმტკიცებული კომპოზიტი ისეთი მასალაა, რომლის მატრიცაში თანაბრად განაწილებულია მეორე მასალის წვრილდისპერსიული ნაწილაკები. ასეთ კომპოზიტებში მთელ დატვირთვას ღებულობს მატრიცა, რომელშიც პრაქტიკულად გაუხსნელი მეორე ფაზის ნაწილაკების სიმრავლით იქმნება სტრუქტურა, რომელიც ეფექტურად ეწინააღმდეგება პლასტიკურ დეფორმაციებს.

ბოჭკოვანი პლასტიკური კომპოზიტის მატრიცის დაარმირება ხდება ბოჭკოებით, მავთულით ან ძაფისებრი კრისტალებით. ბოჭკოებით დაარმირებული სტრუქტურის შექმნის იდეა ითვალისწინებს არა მატრიცულ მასალაში პლასტიკური დეფორმაციების გამორიცხვას, არამედ დეფორმაციის პროცესში ბოჭკოების მაქსიმალურ დატვირთვას და მისი მაღალი სიმტკიცის გამოყენებას.

ბოჭკოვანი კომპოზიტური სტრუქტურის განსაკუთრებულობა ისაა, რომ პლასტიკურ მატრიცაში თანაბრადაა განაწილებული მაღალი სიმტკიცის, მაღალმოდულური ბოჭკოები, რომელთა მოცულობითმა წილმა შეიძლება მიაღწიოს 75%-ს. მეორე განსხვავებული თვისებაა – ანიზოტროპიულობა, რასაც იწვევს ბოჭკოების ორიენტაცია ერთი მიმართულებით. დისპერსიულად განმტკიცებულ მასალებს კი ერთნაირი თვისებები აქვთ ყველა მიმართულებით.

არმატურის ტიპი და მისი განლაგების სახე იძლევა დიდ ინფორმაციას კომპოზიტური მასალების თვისებებზე, რადგან არმატურის ბოჭკოების სიხისტისა და სიმტკიცის მახასიათებლები სხვადასხვა ტიპის არმატურის ბოჭკოებისათვის (მინა, ნახშირბადი, ბორი) მნიშვნელოვნად განსხვავებულია, შესაბამისად, განსხვავებულია კომპოზიტების თვისებები არმატურის განლაგების მიმართულებით.

ზემოთჩამოთვლილზე დამოკიდებულებით კომპოზიტური სტრუქტურები შეიძლება დაიყოს ორ ჯგუფად: ფენოვან და სივრცითად დაარმირებულად.

ერთ სიბრტყეში დალაგებული მაარმირებელი ბოჭკოების ორიენტაციაზე დამოკიდებულებით ფენოვანი სტრუქტურები იყოფა შემდეგ ძირითად ჯგუფებად: ერთმიმართულებიანი, ორთოგონალურად დაარმირებული, ჯვარედინად დაარმირებული და ქაოტურად (უწესრიგოდ) დაარმირებული. თუ ერთმიმართულებიან მასალაში ბოჭკოები განლაგებულია თანაბრად, მაშინ მას ეწოდება ტრანსვერსალურად იზოტროპიული (მონოტროპიული) სიბრტყეში, რომელიც მართობულია დაარმირების მიმართულების. თუ მასალას აქვს მკვეთრად გამოხატული ფენოვანი სტრუქტურა, მაშინ ის არის ორთოტროპიული კომპოზიტური მასალა.

ორთოგონალურად დაარმირებული კომპოზიტი ორთოტროპიულია ღერძებში, რომლებიც ემთხვევა დაარმირების მიმართულებას. გრძივი და განივი ფენების რიცხვი შეიძლება იყოს შემდეგი თანაფარდობით: (1:1, 1:3, 1:5, 2:5 და სხვ.).

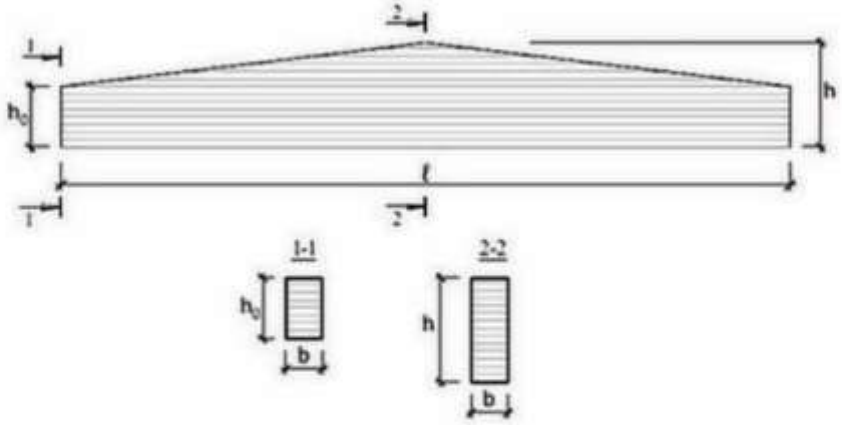
ჯვარედინად დაარმირებულ მასალაში ორივე მიმართულებით ფენების რაოდენობა ერთნაირია. ქაოტურად დაარმირებულ მასალაში გამოიყენება ერთ სიბრტყეში ქაოტურად განლაგებული მოკლე ბოჭკოები. თუ არმატურის დანიშნულებით გამოყენებულია ერთფენიანი ქსოვილი, მაშინ მიიღება კომპოზიტი ფენოვანი სტრუქტურით (ტექსტოლითი). მასში ფენების მიმართულების კუთხე და მასალის სისქეში ფენების რაოდენობა შეიძლება ცვალებადი იყოს. ამის მიხედვით არსებობს ფენოვანი სტრუქტურის სამი სახე: სიმეტრიული, ანტისიმეტრიული და არასიმეტრიული. პირველს მიეკუთვნება მასალები, რომლებსაც აქვთ ფიზიკური და გეომეტრიული თვისებების სიმეტრია შუა სიბრტყის მიმართ, მეორეს – მასალები, რომლებსაც აქვთ ერთნაირი სისქის ფენების განაწილების სიმეტრია, მაგრამ ბოჭკოების (ფენის) განლაგების (განფენის) კუთხე ეცვლება საწინააღმდეგოდ შუა სიბრტყიდან თანაბარ მანძილზე. არასიმეტრიულ სტრუქტურებს მიეკუთვნება მასალები, რომლებსაც არა აქვთ ზემოთჩამოთვლილი თვისებები.

მშენებლობაში გამოიყენება შემდეგი სახის კომპოზიტები: ბოჭკოვანი, დისპერსიულ-განმტკიცებული, მერქან-პოლიმერული, ტიტან-ტანტალ-ვოლფრამის, ბამბუკის, მინატექსტოლიტი, მინაპლასტიკი, ქაფპლასტი, პოლიურეთანი, პოლისტირენი, პოლიკარბონატი, პოლივინილქლორიდი და სხვ. ამ კომპოზიტების მატრიცები არსებობს პოლიმერული, ლითონური, ნახშირბადოვანი და კერამიკული, ხოლო მაარმირებლები – ბოჭკოვანი (ძაფი, მონობოჭკო, ორგანული, ნახშირბადის, მინის, ბორის, ბაზალტის, სილიციუმის კარბიდის, ლითონური ბოჭკოები, მავთული, ფიბრა, ჩალიჩი, ბადე, ღენტი, ქსოვილი, ტილო, ქაღალდი), ფურცლოვანი (ქსოვილური, ნაქსოვხლართული ტექსტილი, ტრიკოტაჟი) და ღეროვანი (სხვადსხვა სახის არმატურა).

კომპოზიტური კონსტრუქცია შეიძლება იყოს ხის, პლასტმასის, ლითონის ან ბეტონის.

ხის მთლიანკვეთიანი, ხე-ფანერის და ხის დაწებებული კონსტრუქციების (ძირითადად კოჭების) გაანგარიშება (ძაბვების გამოთვლა და განივკვეთების დანიშვნა) წარმოებს ტრადიციული მეთოდებით და მოყვანილია ლიტერატურაში [2, 3].

ავტორების მიერ გაანგარიშებული იყო გადახურვის ორქანობიანი ხის კოჭი მალით 12 მ. მასალა – **ულტრალამი** (Ultralam Rs) II ხარისხის (ნახ. 1).



ნახ. 1. ხის დაწებებული ორქანობიანი კოჭი

გაანგარიშებული კოჭის მასალის ხარჯი გამოვიდა:

$$[(h_0+h)/2]\cdot\ell\cdot b = [(0,3+0,8)/2]\cdot 12\cdot 0,165 = 1,09\ მ^3$$

შევადაროთ მიღებული შედეგები ლიტერატურულ მონაცემებს ([2], თავი 6, მაგალითი 6.5). ანალოგური მალისა და დატვირთვების ქვეშ, ჩვეულებრივი ფიცრებისგან შედგენილი დაწებებული კოჭის მასალის ხარჯია:

$$[(h_0+h)/2]\cdot\ell\cdot b = [(0,5+1)/2]\cdot 12\cdot 0,165 = 1,48\ მ^3$$

რაც იმაზე მიუთითებს, რომ ულტრალამისგან დამზადებულ დაწებებულ კოჭში მასალის პირდაპირი ხარჯი 36%-ით ნაკლებია, ვიდრე ჩვეულებრივ ფიცრულ დაწებებულ კოჭში.

შევადაროთ ღირებულებები:

საქართველოს ბაზარზე 1 მ³ წიწვოვანი მშრალი ხის მასალის ფასია 550 ლარი (2018 წლის მონაცემებით), ე. ი. ერთი კოჭის მასალის ღირებულებაა – 1,48×550 = 814 ლარი. 1 მ³ კომპოზიტური ხის მასალა ულტრალამის საერთაშორისო ფასია 488 ამერიკული დოლარი, ანუ 1195 ლარი, ე. ი. ერთი კოჭის მასალის ღირებულებაა – 1,09×1195 = 1300 ლარი, რაც იმაზე მიუთითებს, რომ ულტრალამისგან დამზადებულ დაწებებულ კოჭში მასალის ღირებულება 38%-ით მეტია, ვიდრე ჩვეულებრივ ფიცრულ დაწებებულ კოჭში.

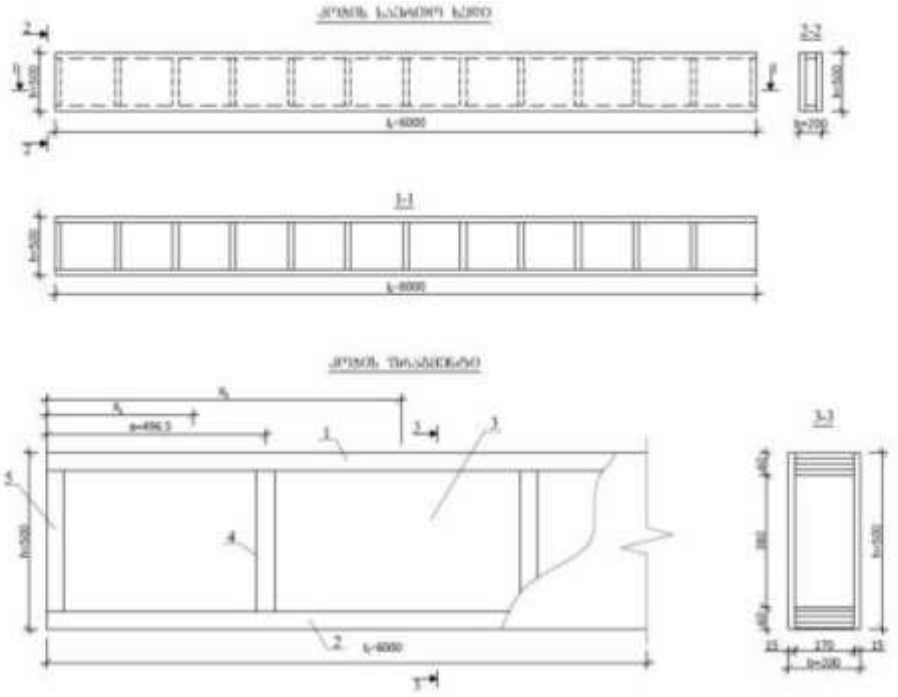
მიღებული შედეგების ანალიზი გვიჩვენებს, რომ ულტრალამისგან დამზადებული კონსტრუქცია უფრო ძვირია ჩვეულებრივ კონსტრუქციასთან შედარებით, მაგრამ თუ გავითვალისწინებთ კომპოზიტური კონსტრუქციების ხანგამძლეობას, რომელიც 2...3-ჯერ აჭარბებს ჩვეულებრივი ხის დაწებებული კონსტრუქციების ხანგამძლეობას, თვალნათლივ დავინახავთ კომპოზიტების დიდ უპირატესობას.

ანალოგური შედეგები დაფიქსირდა ხე-ფანერის კოჭების (ნახ. 2) გაანგარიშებითაც ([1], მაგალითი 7.2).

კომპოზიტური პლასტმასის კონსტრუქციების გაანგარიშების საფუძვლები განხილულია ლიტერატურაში [1, 3].

ლითონის კონსტრუქციებში კომპოზიტების გამოყენება ჩვეულებრივ უკავშირდება გაძლიერებას გარე დაარმირებით, რისთვისაც გამოიყენება ნახშირბადის, მინის, ბაზალტის და არამიდის ბოჭკოებით დაარმირებული კომპოზიტური მასალები. ასეთ მასალებს აქვს უფრო მაღალი სიმტკიცე, ვიდრე ფოლადს, მცირე წონა (ანუ დიდი კუთრი სიმტკიცე), კოროზიამედეგია, ადვილად მუშავდება და მონტაჟისა და ტრანსპორტირების პროცესში არ საჭიროებს მძიმე მანქანა-მექანიზმებს. თუმცა გასათვალისწინებელია ის, რომ ლითონის კონსტრუქციების გაძლიერება კომპოზიტური მასალებით ნაკლებ ეფექტურია, ვიდრე ბეტონის, რკინაბეტონის და ქვის კონსტრუქციების. გაანგარიშებას I ჯგუფის ზღვრული მდგომარეობის მიხედვით ექვემდებარება ბოჭკოებით დაარმირებული პლასტიკატებით გაძლიერებული ყველა კონსტრუქცია, ხოლო II ჯგუფის ზღვრული მდგომარეობის მიხედვით გაანგარიშება ხდება იმ შემთხვევაში, თუ გაძლიერების შემდეგ გაიზარდა კონსტრუქციაზე მოქმედი საანგარიშო დატვირთვა.

მშენებლობაში გამოყენებული კომპოზიტური ბეტონების სახეებია: პოლიმერბეტონი, ბეტონპოლიმერი, პოლისტირენბეტონი, ფიბრობეტონი, მინაფიბრობეტონი, ბაზალტფიბრობეტონი, ბეტონი გოგირდიანი, ბეტონი პოლიმერსილიკატური, ბეტონი სპეციალური, ბეტონი წვრილმარცვლოვანი კომპოზიტური, ბეტონი მრავალკომპონენტიანი, ბეტონი პოლიმერცემენტის და სხვ.



ნახ. 2. კოლოფისებრი განივკვეთის კომპოზიტური შედგენილი დაწებებული ხის კოჭი: 1 - ზედა სარტყელი; 2 - ქვედა სარტყელი; 3 - კედელი OSB ფილის δ = 15 მმ; 4 - განივი სიხისტის წიბოები; 5 - საყრდენი წიბო (ზომები მმ-ში)

განვიხილოთ ასეთი ბეტონებით დამზადებული და კომპოზიტური ღეროვანი პოლიმერული არმატურით (მინაკომპოზიტური, ბაზალტკომპოზიტური, ნახშირბადკომპოზიტური, არამიდკომპოზიტური და ორგანოპლასტიკური ანუ კომბინირებული) დაარმირებული სამშენებლო კონსტრუქციების გაანგარიშების ზოგიერთი ასპექტი.



ნახ. 3. მინაპლასტიკის კომპოზიტური არმატურა

კონსტრუქციები კომპოზიტური არმატურით (ნახ. 3) მინაპლასტიკის კომპოზიტური არმატურა) გაანგარიშდება I და II ჯგუფის ზღვრული მდგომარეობის მეთოდით (შესაბამისად საანგარიშო და ნორმატიული დატვირთვების მოქმედებისას). I ჯგუფის ზღვრულ მდგომარეობაში (ULS – Ultimate Limit State) შედის გაანგარიშება: სიმტკიცეზე; ფორმის მდგრადობაზე (თხელკედლიანი კონსტრუქციები); მდგომარეობის მდგრადობაზე (ამოყირავება, გასრიალება, ამოტივტივება). II ჯგუფის ზღვრული მდგომარეობაში (SLS – Second Limit State) შედის გაანგარიშება: ბზარწარმოქმნაზე; ბზარების გახსნაზე და დეფორმაციებზე.

გაანგარიშების მიმდინარეობის პროცესში გათვალისწინებული უნდა იქნას: 1) სხვადასხვა საანგარიშო სიტუაციები ([3]), კერძოდ: დამზადების, ტრანსპორტირების, აგების, ექსპლუატაციის, ავარიის, ხანძრის სტადიები; 2) ძალოვანი ფაქტორები – მღუნავი და მგრეხი მომენტები, გრძივი და განივი ძალები, აგრეთვე ადგილობრივი (შეყურსული) დატვირთვები.

ასაწყობი კონსტრუქციების გაანგარიშებისას აწევის, ტრანსპორტირების, მონტაჟისა და მისი მასის გათვალისწინებით, დინამიკურობის კოეფიციენტის მნიშვნელობა მიიღება: 1,6 – ტრანსპორტირებისას; 1,4 – აწევის და მონტაჟისას. დასაშვებია ამ კოეფიციენტების სიდიდის შემცირება, მაგრამ არანაკლები 1,25-ისა.

ზოგადად, კონსტრუქციები კომპოზიტური არმატურით გაანგარიშდება ნორმალური (მღუნავი მომენტისა და გრძივი ძალის გათვალისწინებით), დახრილი (განივი ძალების გათვალისწინებით), სივრცითი (მგრეხი მომენტების გათვალისწინებით) კვეთების და ადგილობრივად მოქმედი (ადგილობრივი კუმშვა, ჩაჭყლეტა) დატვირთვების მიხედვით.

არსებული სამშენებლო ნორმები და რეკომენდაციები კონსტრუქციების გასაანგარიშებლად კომპოზიტური პოლიმერული არმატურით, უმეტეს შემთხვევებში, წარმოადგენს ფოლადის არმატურით დაარმირებული რკინაბეტონის კონსტრუქციების გაანგარიშების ნორმების მოდიფიკაციას. ცვლილებები დაკავშირებულია არმატურის ფიზიკურ-მექანიკური თვისებების ნორმირებასთან და ემპირიულ მონაცემებთან, რომლებიც მიღებულია ექსპერიმენტული კვლევების შედეგად.

არსებობს გაანგარიშებისადმი ორი მიდგომა:

ევროპული – ზღვრული მდგომარეობის პირობა ჩაიწერება ფორმულით:

$$R \geq \qquad (1)$$

სადაც R – ღეროს განივკვეთის საანგარიშო წინაღობა, როგორც მასალის საანგარიშო მახასიათებლების ფუნქცია (ნორმატიული მნიშვნელობა გაყოფილი მასალის უსაფრთხოების კოეფიციენტზე); S – ძალვა განივკვეთში, აღძრული გარე საანგარიშო დატვირთვებისა და ზემოქმედებისაგან.

(1) ფორმულა მიგვანიშნებს იმას, რომ ელემენტის განივკვეთში წარმოშობილი ძაბვის სიდიდე არ უნდა აღემატებოდეს ამ ელემენტის მასალის საანგარიშო წინაღობას. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოხდება მასალის (ელემენტის) რღვევა.

ჩრდილოამერიკული – ზღვრული მდგომარეობის პირობა ჩაიწერება ფორმულით:

$$\varphi \cdot Rn \geq S, \qquad (2)$$

სადაც Rn – განივკვეთის ნომინალური წინაღობა, რომელიც მასალის ნორმატიული მახასიათებლის ფუნქციაა (მოცემული უზრუნველყოფით); φ – უსაფრთხოების

განზოგადებული კოეფიციენტი, რომელიც დამოკიდებულია რღვევის სახეზე (ამერიკის ბეტონის ინსტიტუტის მონაცემებით φ = 0,5...0,7); S – ძალვა განივკვეთში, აღძრული გარე საანგარიშო დატვირთვებისა და ზემოქმედებისაგან.

ამგვარად, კომპოზიტური არმატურიანი სამშენებლო კონსტრუქციების გაანგარიშებებს შორის განსხვავება მდგომარეობს უსაფრთხოების უზრუნველყოფის პრინციპებში. ევროპულ ნორმებსა და რეკომენდაციებში ([4], [5], [6]) გაანგარიშების უსაფრთხოება (უტყუარობა) უზრუნველყოფილია მასალებისა და დატვირთვების კერძო კოეფიციენტების მეშვეობით, ხოლო ამერიკულ და კანადურ სამშენებლო ნორმებში ([7], [8], [9]) – უსაფრთხოების (მარაგის) განზოგადებული კოეფიციენტებით მზიდუნარიანობის მიხედვით და დატვირთვის უსაფრთხოების კოეფიციენტებით. იაპონური სამშენებლო ნორმებით [10] მიღებულია უსაფრთხოების ორი პრინციპი – მასალის უსაფრთხოება კერძო კოეფიციენტებით და მზიდუნარიანობა მარაგის დამატებითი კოეფიციენტებით.

უსაფრთხოებაზე გაანგარიშების რუსული ნორმები ისეთივეა, როგორც ევროპული, იმ განსხვავებით, რომ მასში დამატებულია სიმტკიცეზე გაანგარიშება ხანგრძლივი და მრავალციკლური დატვირთვების ზემოქმედების პირობებში, ანუ I ზღვრული მდგომარეობის დროს გაანგარიშებისას სიმტკიცეზე განიხილება ორი საანგარიშო სქემა: გაანგარიშება ხანგრძლივ და მუდმივ ძალებზე და გაანგარიშება ხანმოკლე და ხანგრძლივი ჯამური ძალების მოქმედებაზე. ორივე შემთხვევაში დატვირთვები მიიღება დატვირთვის უსაფრთხოების კოეფიციენტების გათვალისწინებით.

დასავლეთის და ამერიკულ ნორმებში სიმტკიცეზე შემოწმება წარმოებს დატვირთვების ხანგრძლივი და მრავალციკლური ზემოქმედების გათვალისწინებით დასაშვები ძაბვების მეთოდით II ჯგუფის ზღვრული მდგომარეობით გაანგარიშების ჩანჩოში. იგი ითვალისწინებს ძალვების განსაზღვრას ხანგრძლივი ნორმატიული დატვირთვებისაგან და მასალაში შესაბამისი ძაბვების გამოთვლას. დასაშვები ძაბვები განისაზღვრება მასალის უსაფრთხოების კოეფიციენტების გათვალისწინებით II ჯგუფის ზღვრული მდგომარეობის მეთოდით გაანგარიშებისას (γ = 1) და შესაბამისი მუშაობის პირობების კოეფიციენტის მხედველობაში მიღებით.

პოლიმერული არმატურისათვის უსაფრთხოების კოეფიციენტი მასალის მიხედვით დადგენილია მხოლოდ ევროპულ ნორმებში. იტალიურ ნორმებში [9] დადგენილია γ = 1,5 – I ჯგუფის ზღვრული მდგომარეობისათვის და γ = 1 II ჯგუფისათვის. შვეიცარიული ნორმებით ([6], [11]) პირველი ზღვრული მდგომარეობისათვის უსაფრთხოების კოეფიციენტის მნიშვნელობა უნდა აღემატებოდეს 1,25-ს.

კომპოზიტური არმატურის სიმტკიცესა და დეფორმატულობაზე გარემო პირობების გათვალისწინება ხდება მუშაობის პირობების კოეფიციენტით. ამერიკულ ნორმებში ACI 440 ([12], [13]) მოცემულია გარე პირობების ორი ტიპი: ექსპლუატაციის პირობები მშრალ და ტენიან გარემოში. ანალოგურია იტალიურ ნორმებშიც. იაპონურ [10] და ევროპული რეკომენდაციების უმეტეს ნაწილში [15, § 3.2] განიხილება მუშაობის პირობების განზოგადოებული კოეფიციენტები. კანადური ნორმები ითვალისწინებს მასალის კლასს ხარისხის მიხედვით. ზოგიერთი ნორმა ითვალისწინებს მუშაობის პირობების კოეფიციენტს, დაკავშირებულს ელემენტის დატვირთვის ხასიათზე. ლიტერატურაში ([1], ცხრ. 10.7) მოცემულია კომპოზიტური პოლიმერული არმატურის მუშაობის პირობების კოეფიციენტის მნიშვნელობები გარემოს პირობებისა და დატვირთვის სახეების მიხედვით.

ბეტონის კონსტრუქციების გაანგარიშება კომპოზიტური პოლიმერული არმატურით მოცემულია ლიტერატურაში ([1], თავი 10).

ლიტერატურა

1. თ. ხმელიძე, გ. ყიფიანი, დ. გურგენიძე. სამშენებლო კონსტრუქციები კომპოზიტების გამოყენებით. გამომცემლობა „უნივერსალი“, თბილისი, 2018. -509 გვ.
2. თ. ხმელიძე. ხის კონსტრუქციები. საგ. სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“. თბილისი, 2015. -531 გვ.
3. თ. ხმელიძე. ხისა და პლასტმასის სამშენებლო კონსტრუქციები. საგ. სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“. თბილისი, 2008. -210 გვ.
4. IstructE, Interim guidance on thedesign of reinforced concrete structures using fibre composite reinforcement, London, UK, 1999.
5. CNR-DT 203/2006, Guide for the Design and Construction of Concrete Structures Reinforced with Fiber-Reinforced Polymer Bars, Rome, Italy, 2006.
6. fib bul.40, FRP reinforcement in RC structures. Technical report TG9.3., Lausanne, Switzerland: fib, 2007.
7. CAN/CSA-S6-00, Canadian High Bridge Design Code, Canadian Standards Association, 2000.
8. CAN/CSA-S6-02, Design and Construction of Building Components with Diber-Reinforced Polymers, Canadian Standards Association, 2002.
9. 25. ACI 440.1R-06, Guide for the Design and Construction of Structural Concrete Reinforced with FRP Bars, American Concrete Institute, 2006.
10. **СНиП 2-01. 07-85.** Нормы проектирования. Нагрузки и воздеиствия. – М.: Стройиздат, 2007.
11. fib bul. 55, ModelCode 2010. First complete draft, Lausanne, Switzerland: fib, 2010.
12. ACI 440.1R-03, Guide for the Design and Construction of Concrete Reinforced with FRP Bars, American Concrete Institute, 2003.
13. ACI 440.4R-04, Prestressing Concrete Structures with FRP tendons, American Concrete Institute, 2004.

გარემოსდაცვითი და გეომორფოლოგიური პრობლემები ქალაქ ფოთის შავი ზღვისპირა რეგიონში და მათი აღმოფხვრის გზები

საღინაძე ი. ს., ფხაკაძე მ. დ.
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნაშრომში გაანალიზებულია ქალაქ ფოთის შავიზღვისპირა რეგიონში არსებული გარემოსდაცვითი და გეომორფოლოგიური ხასიათის დღემდე გადაუჭრელი პრობლემები. პრობლემების არსებობა განაპირობა ამ რეგიონში სხვადასხვა წლებში და სხვადასხვა მიზნით წარუმატებლად დაპროექტებულმა და განხორციელებულმა ჰიდროსაინჟინრო მშენებლობებმა. ფოთის რეგიონში არსებული ეროზირებული უბნებისა და ნგრევის პირას მისული ჰიდროტექნიკური ნაგებობების სარეაბილიტაციოდ შემოთავაზებულია მსოფლიოში საკმარისად აპრობირებული, მაგრამ საქართველოში ჯერ კიდევ დაუნერგავი ტექნოლოგია, რაც გულისხმობს წყალქვეშ ტალღმტეხებად ქვიშით შევსებული გეოტექსტილის მილების (გეოტუბების) გამოყენებას. შემუშავებულია წყალქვეშა გეოტუბზე ტალღების გადავლებისას გადავლების კოეფიციენტისა და ნაპირის მორფოლოგიური რეაქციის საანგარიშო ფორმულები. გამოთვლილია ისეთი გეოტუბების პარამეტრები, რომლის განთავსებისას მოხდება ნაპირის ხაზის სტაბილიზაცია და პლაჟის ზრდა.

საკვანძო სიტყვები: ზღვა, ტალღა, ნაპირი, ეროზია, გეოტუბი.

შავი ზღვის აუზის ქვეყნების ეკონომიკური განვითარების პერსპექტივები მნიშვნელოვნადაა დაკავშირებული აზიისა და ევროპის კონტინენტებს შორის სატრანსპორტო და საკაბელო კავშირების ინტენსიფიკაციასთან, რაშიც ქალაქი ფოთი, თავისი პორტითა და საზღვაო წყალქვეშა კავშირგაბმულობის კაბელებით უკვე ასრულებს მნიშვნელოვან როლს. მაგრამ, ამავე დროს, ქალაქ ფოთსა და მის საზღვაო რეგიონში რამდენიმე ათეული წელია არსებობს გარემოსდაცვითი და გეომორფოლოგიური ხასიათის დღემდე გადაუჭრელი პრობლემები (იხ. პრობლემათა სიტუაციური რუკა, სურ. 1), რაც განაპირობა ამ რეგიონში, სხვადასხვა წლებში და სხვადასხვა მიზნით წარუმატებლად დაპროექტებულმა და განხორციელებულმა ჰიდროსაინჟინრო მშენებლობებმა [1].



სურ. 1. ქალაქ ფოთის სანაპირო ზოლის სქემა.

გეომორფოლოგიური ხასიათის ეს პრობლემები ქალაქ ფოთის სანაპირო ზოლში დაიწყო მას შემდეგ, რაც 1939 წელს მდ. რიონი მთლიანად იქნა გადაგდებული ქალაქის ჩრდილოეთით. ამ ღონისძიებამ მართალია თვით ქალაქი იხსნა ხშირი დატბორვებისგან, მაგრამ ქალაქის ნაპირზე შექმნა პლაჟწარმომქმნელი ნატანის აუნაზღაურებელი დეფიციტი. ზღვამ კატასტროფულად წარეცხა ფოთის სანაპირო ზოლი და ასეულობით მეტრით დაახევინა უკან [1].

2010-2018 წლებში, ფოთის რეგიონში თავი იჩინა ახალმა პრობლემამ: - დაიწყო ზღვის ნაპირის ინტენსიური წარეცხვები "საქალაქო არხის" შესართავის სამხრეთით. ქალაქ ფოთში მდინარე რიონის "საქალაქო არხის" შესართავის სამხრეთით, 250 მეტრის დაშორებით

გადის ფოთი-ნოვოროსიისკის შემაერთებელი წყალქვეშა ოპტიკურ-ბოჭკოვანი კაბელი. 2012-2017 წლების ძლიერმა შტორმებმა და მდინარე რიონის"საქალაქო არხის" შესართავში წარმოქმნილმა სანაპირო დინებებმა გამოიწვია ამ ზონაში ნაპირის ინტენსიური წარეცხვები და ნაპირმა ბოლო 5-6 წლის განმავლობაში 70-80 მეტრით დაიხია უკან. შედეგად წყალქვეშ გაშიშვლდა კაბელი, ზღვა მიუახლოვდა გამანაწილებელ ჭას და საფრთხე შეექმნა ოპტიკურ-ბოჭკოვანი კაბელის ფუნქციონირებას, (სურ. 2).

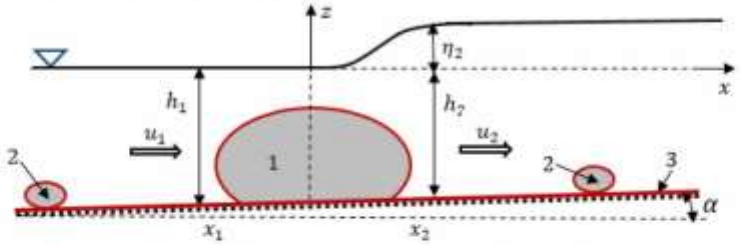


ა) ბ)

სურ. 2. წარეცხილი ნაპირი „საქალაქო არხის" შესართავთან და ამ უბნის გეოტუბებით დაცვის ერთ-ერთი ვარიანტი. ა) სურათზე წითელი ისრით ნაჩვენებია ფოთი-ნოვოროსიისკის წყალქვეშა ინტერნეტ კაბელის მიმართულება, ხოლო ბ) სურათზე წითელ ხაზებში ნაპირდაცვისათვის საჭირო გეოტუბების განთავსების ერთ-ერთ ვარიანტია წარმოდგენილი.

ფოთის რეგიონში არსებული ეროზირებული უბნებისა და ნგრევის პირას მისული ჰიდროტექნიკური ნაგებობების სარეაბილიტაციოდ ჩვენს მიერ შემოთავაზებულია მსოფლიოში საკმარისად აპრობირებული, მაგრამ საქართველოში ჯერ კიდევ დაუნერგავი ტექნოლოგია, რაც გულისხმობს წყალქვეშა ტალღმტეხებად ქვიშით შევსებული გეოტექსტილის მილების (გეოტუბების) გამოყენებას. მაგრამ წყალქვეშა გეოტუბების არასწორად დაპროექტების გამო, მის მიერ გამოწვეულმა დინებების ცირკულაციებმა შეიძლება გამოიწვიოს საწინააღმდეგო ეფექტი. ნაშრომში [2] ნაჩვენებია, რომ წყალქვეშა ტალღმტეხების განთავსების 10-დან 7-მა შემთხვევამ გამოიწვია ნაპირის მოულოდნელი ეროზია.

ნახ. 3-ზე ნაჩვენებია ზღვის ფსკერზე გეოტუბის განთავსების ვარიანტი და და მასზე ტალღების დამსხვრევისას წყლის დონის აწევა.



ნახ. 3. წყალქვეშა გეოტუბზე წყლის დონის აწევა

ნახ. 3-ზე ნაჩვენებია: 1 - გეოტუბი; 2 – საანკერე გეოტუბები; 3 - გეოტექსტილის საფენი; η - ნაპირისკენ წყლის საშუალო დონის აწევა.

წყალქვეშა გეოტუბის ეფექტურობა და შესაბამისად სანაპირო ხაზის მორფოლოგიური რეაქცია დამოკიდებულია გეოტუბის გადავლებისას ტალღების გადაცემაზე. ტალღების გადაცემის კოეფიციენტი განისაზღვრება ფორმულით [3]:

$$K_t = \frac{H_t}{H_i}, \qquad (0 < K_t < 1)$$

ქალაქ ფოთის სანაპიროსათვის წყალქვეშა გეოტუბზე ტალღების გადავლებისას გადაცემის კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით [4]:

$$K_t = -0{,}4 \cdot \frac{h_t}{H_i} + 0{,}8 \cdot \left(\frac{B}{H_i}\right)^{-0{,}31} \cdot \left(1 - e^{-0{,}5\xi}\right), \qquad \xi = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{\frac{H_i}{L}}},$$

სადაც ξ – ირიბარენის კოეფიციენტია; L – ტალღის სიგრძეა გეოტუბთან, $L = \frac{gT^2}{2\pi}$; T – ტალღის პერიოდი.

ძირითადი პარამეტრები, რომლებიც განსაზღვრავენ წყალქვეშა ტალღმტეხის ეფექტურობას არის ტალღმტეხის სიგრძე – L_b და მისი ნაპირიდან დაშორება – x_b და გეოტუბებს შორის შუალედის სიგრძე - L_g. რამდენიმე გეოტუბის შემთხვევაში ქალაქ ფოთის ნაპირის გეომორფოლოგიური რეაქციის განსაზღვრისათვის შერჩეულ იქნა შემდეგი დამოკიდებულება [5]:

ტომბოლო	სალიენტი	განუსაზღვრელი
$\frac{1}{1-K_t} < \frac{L_b}{x_b} < \frac{1{,}5}{1-K_t}$	$\frac{L_b}{x_b} < \frac{1}{1-K_t}$	$\frac{L_b}{x_b} < 0{,}5$

რამდენიმე ტალღმტეხის შემთხვევაში სალიენტის ფორმირებისათვის შუალედის სიგრძის პარამეტრი L_g აკმაყოფილებს პირობას [5]:

$$\frac{L_g}{L_b^2} > 0{,}5\frac{(1-K_t)}{x_b}.$$

ფოთის სანაპირო ზოლისათვის რიცხვითი გაანგარიშებების შედეგები ნაჩვენებია შემდეგ ცხრილში.

$L_b = 150მ$	$L_g = 60მ$	$L_g = 80მ$	$L_g = 100მ$	$L_g = 120მ$
$x_b = 120მ$	-	-	+	+
$x_b = 180მ$	-	-	0	+

ცხრილში შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები: „-„ - ეროზია, „+“ - აკრეცია, „0“ - ნეიტრალური. გაანგარიშებები გაკეთებულია, როცა თითოეული წყალქვეშა გეოტუბების სიგრძეა 150მ. ცხრილიდან ჩანს, როცა ნაპირიდან გეოტუბების დაშორებაა 120მ, მთ შორის არსებული შუალედების სიგრძეების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის ორ შემთხვევაში ნაპირის მორფოლოგიური რეაქცია აკრეციულია, ხოლო ორ შემთხვევაში - ეროზიული. ანალოგიურად 180მ დაშორებისას ორ შემთხვევაში ეროზიულია, ერთში - ნეიტრალური და ერთში - აკრეციული.

უნდა აღვნიშნოთ, რომ მოცემული ემპირიული ფორმულები ვარგისია ტალღმტეხის პროექტირებისას ნაპირის რეაქციის განსაზღვრის პირველადი შეფასებისათვის. იმისათვის, რომ გეოტუბის განთავსების შემდეგ ნაპირი რეაქცია იყოს დადებითი, საჭიროა დამატებითი დეტალური გამოკვლევები.

ლიტერატურა

[1] გაგოშიძე შ., კოდუა მ., საღინაძე ი., ქადარია ი. სამდინარო ჰიდრომშენებლობა და საქართველოს შავიზღვისპირეთის გეომორფოლოგიური პროცესები. მონოგრაფია. საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი", თბილისი, 2017. 191 გვ.

[2] Bellotti, G. 2004. A simplified model of rip currents systems around discontinuous barriers. *Coastal Engineering.* 51, 323 –335pp.

[3] Ranasinghe, R., I.L. Turner and G. Symonds. 2006. Shoreline response to multi-functional artificial surfing reefs: A numerical and physical modeling study. *Coastal Engineering 53*, 589-611pp.

[4] D'Angremond, K., van der Meer, de Jong, R.J.: "Wave transmission at low crested structures"; ASCE, Proc. ICCE, Orlando,1996, Florida, 3305-3318pp.

[5] Krystian W. Pilarczyk K.W., Design of low-crested (submerged) structures – an overview. 6th International Conference on Coastal and Port Engineering in Developing Countries, Colombo, Sri Lanka, 2003. 19p. k.w.pilarczyk@dww.rws.minvenw.nl.

Ecological and geomorphological problems of the Poti Black Sea region and ways of their elimination

Saghinsdze I., Pkhadze M.
Akaki Tsereteli State University

The article analyzes ecological and geomorphological problems of the Poti, Black Sea, region. The existence of problems is caused by hydrotechnical constructions, which were unsuccessfully designed. For rehabilitation of eroded sections and disintegrating hydraulic constructions in Poti region we propose the well-known, but not used in Georgia, technology providing the use of geotextile tubes (geotubes) filled by the sand. The formulas for determining the transmission coefficient of waves after passage of geotubes and morphological responses of the shoreline are developed. The parameters of such geotubes have been calculated and their location will lead to stabilization of the shoreline and the build-up of the beach.

იმიტაციური მოდელირება პროექტირების ეტაპზე და მისი პრაქტიკული რეალიზაცია

ბერაძე ც. გ.

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
cira.beradze.65@mail.ru

ნაშრომში აღნიშნულია, რომ იმიტაციური მოდელის პროექტირება წარმოადგენს ძალზე რთულ პროცესს, მაგრამ ახალი ობიექტების შექმნა თუ უკვე არსებული ობიექტების გამოცდა თუნდაც მეტროლოგიურ მახასიათებლებზე, დიდი ღირებულების ამოცანაა და მისი იმიტაცია აუცილებლად უნდა ჩატარდეს თანამედროვე გამთვლითი ტექნიკის გამოყენებით.

იმიტაციური მოდელის გამოცდის დროს ძირითად მომენტს წარმოადგენს იმის დასაბუთება, რომ იმიტაციური მოდელი მუშაობს ისე, როგორც ეს გათვალისწინებული იყო პროექტირების დროს. გამოცდის პროცესში საჭიროა პროგრამირების შეცდომების გასწორება, უნდა მოხდეს რეალური სისტემის და იმიტაციური მოდელის განსხვავებების აღმოფხვრა.

ნაშრომში წარმოდგენილია, რომ მოდელში ყოველი ალგორითმი ახდენს რაიმე მოვლენის რეალიზებას, ხოლო თვით ალგორითმი ამ შემთხვევაში წარმოადგენს მოვლენის ქვეპროგრამას. მოვლენების წრფივ მიმდევრობას შეესაბამება ერთი დროის მომენტი, მიუხედავად იმისა, თუ ამ დროის მომენტში რამდენი ალგორითმი სრულდება.

საკვანძო სიტყვები: ალგორითმი, იმიტაცია, ნავიგაცია, გრაფი, ტრეკი.

იმიტაციური მოდელირება გამოიყენება იდეალიზირებული პროცესის აღსაწერად, როცა გათვალისწინებულია პროცესის ფუნქციონალური დანიშნულება. სისტემა მასში მიმდინარე პროცესების მიმდინარეობის მიხედვით იყოფა ფუნქციონალურ ობიექტებად, რომლებშიც პროცესი მიმდინარეობს მიმდევრობით ან პარალელურად.

ვთქვათ მოცემულია დროის მომენტის სიმრავლე, რომლის მდგომარეობის ცვლილება სასრულია და წარმოდგენილია სახით:

$$T =< t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n >$$

სადაც i დროის მომენტია, როცა იცვლება სისტემის მდგომარეობა; n სისტემაზე დაკვირვებათა რაოდენობა.

დროის ყოველ მომენტს შეესაბამება ოპერატორი H_i , მდგომარეობა s_i , სადაც $s_i \in S$; ოპერატორი H_i, ასრულებს დროის ასახვას S სიმრავლის რომელიმე ერთ ელემენტზე მაინც.

საერთო შემთხვევაში ოპერატორი H შეიძლება წარმოვადგინოთ სახით: s=H(A,t,w), სადაც $s_i \in S - Z$ პროცესის მდგომარეობაა; A - არგუმენტების სიმრავლე; t - დროის მიმდინარე მნიშვნელობა; w -შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც იცვლება თანაბრად ან გარკვეული კანონით $[0,1]$ შუალედში და ყოველთვის იღებს ახალ მნიშვნელობას ოპერატორის ყოველ შესრულებაზე.

აქედან გამომდინარე t_1 დროის მომენტისათვის $s_i = H_i(A_i, t_i, w)$ თუ ორი განსხვავებული დროის მომენტისთვის t_i და $\in A_i$ მაშინ ამბობენ, რომ H_i დაკავშირებულია და აღინიშნება $H_i \infty H_j$ სადაც ∞ დაკავშირების ნიშანია. პრაქტიკულად ეს ნიშნავს რომ t_j დროის მომენტში s_i პროცესის გამოსათვლელად საჭიროა t_i დროის მომენტში s_i პროცესის მდგომარეობის ცოდნა.

დაუშვათ რომ მიმდინარე დროის მომენტში გვაქვს ისეთი ქვეოპერატორების $< \frac{h'}{1}, m_i >$ მიმდევრობა, რომ $s' = h(A'tw)$; $h^k \infty h'$ ყველა 1>k-თვის, მაშინ H ოპერატორის და $< h' >$ ქვეოპერატორების მიმდევრობის შესრულების შემდგომ სისტემა იღებს s

მდგომარეობას. ასე რომ H ოპერატორი შეიძლება განვიხილოთ როგორც $<h'>$ ქვეოპერატორების კომპოზიცია. მათი გამოყენებით შეიძლება დანაწევრებული აღწერის მირება. H ოპერატორის დანაწევრება არ არის ერთადერთი და განისაზღვრება მოდელირებული სისტემის და ფუნქციონალური აღწერის სტრუქტურით. სხვადასხვა სახის დანაწევრების კომპოზიცია ფარავს H ოპერატორების მრავალსახეობას.

სისტემის ფუნქციონირებაში იგულისხმება ისეთი პროცესი, როცა იცვლება სისტემის მდგომარეობა დროის მიხედვით. სისტემის ფუნქციონირება გამოისახება ფორმულით:

$$Z=<T,S,F,a>,$$

სადაც, Z -სისტემის ფუნქციონირებაა;

S-მდგომარეობათა სივრცე;

F-პროცესის ტრაქტორია;

a-წრფივი დონის კავშირი T სიმრავლეზე.

პროცესის ტიპიდან გამომდინარე პროცესის დროის მომენტთა სიმრავლე T პროცესის დროის მომენტთა სიმრავლე შეიძლება იყოს როგორც დისკრეტული, ასევე უწყვეტიც. თუ T

მოცემულია დალაგებულ რიცხვთა სიმრავლის სახით, მაშინ a შეიძლება (1) -დან ამოვიღოთ.

სისტემის მდგომარეობათა სიმრავლე S განისაზღვრება P სისტემის პარამეტრებით. ვთქვათ W- პარამეტრთა სიმრავლეა P სისტემისათვი, მაშინ სისტემის პარამეტრად გაიგება რაღაც სკალარული ცვლადი რომელსაც გააჩნია სახელი და მნიშვნელობათა სიმრავლე

$$P =< W_P\sigma(W_P) >$$

სადაც, W_P-პარამეტრის სახელია;

$\sigma(W_P)$-მნიშვნელობათა სიმრავლეა;

ამ პირობების დროს მდგომარეობის სიმრავლე $S = \Pi\sigma(W_P)$ ყველა w∈ W-თვის, სადაც Π- დეკარტული ნამრავლის სიმბოლოა. აქედან გამომდინარე S სივრცის განზომილება ტოლია სისტემის პარამეტრების რაოდენობისა.

სისტემაზე შეიძლება გამოყენებული იქნას პროექციის და შეკრების ოპერაციები. S სივრცის Z სისტემის პროექციას აღნიშნავენ pr_sZ და განიმარტება როგორც F-ის ტრაექტორია S' ქვესისტემაზე. თუ $S' = \Pi\sigma(W')$, სადაც W∈ W მაშინ ეს ოპერაცია აღწერს პროცესს W' ქვესისტემაში. Z პროცესის პროექცია დროის $[t_1, t_2]\epsilon T$ შუალედში აღწერს ქვეპროცესს . $Z_1 = pr_{[t1,t2]}$. პროექციების შებრუნებულ ოპერაციას შეკრებას უწოდებენ $Z=Z_1.+Z_2$ რადგან ხშირა შემთხვევაში პროცესის ანალიზურად აღწერა შეუძლებელია, გამოიყენებენ Sუფრო რთულ მოდელს. ასეთი მოდელები, როგორც ყოველთვის, აღწერენ არასრულყოფილ და არაუნივერსალურ მოდელებს.

პროცესის ალგორითმულ მოდელს აქვს სახე

$$< \{h_i, \beta, I\} >,$$

სადაც,

$\{h_i\}$ -ელემენტარული ოპერატორების ერთობლიობაა;

β -წრფივი რიგია $\{h_i\}$-ზე;

I -ინიციატორია.

ყოველ პროცესს შეესაბამება ერთი და მხოლოდ ერთი ინიციატორი, ახალ ოპერატორთან მიერთების შემდგომ ინიციატორი ან არის ამ ოპერატორში, ანდა გადის პროცესის ალგორითმული მოდელიდან. განსაზღვრული დროის გასვლის შემდგომ ინიციატორმა უნდა შეძლოს მომდევნო ოპერატორთან მიერთება, მაშინ ელემენტარული ოპერატორის სტრუქტურას ექნება სახე.

$$h_i =< h_i^c.h_i^y >,$$

სადაც, $h_i^c.h_i^y$ –i მდგომარეობის და პირობის ელემენტარული ოპერატორია. ასევე $h_i^y \in h_i^t h_{i,}^l$ სადაც h_i^t დროის მომენტთა სიმრავლეა, ხოლო $h_{i,}^l$ ლოგიკურ პირობათა სიმრავლე, აქედან გამომდინარე პროცესის ალგორითმული მოდელი სრულად აღწერს პროცესს.

$< \{h_i\}, \beta >$ ერთობლიობა აღწერს ინიციატორის ტრეკს (ნახ.1.)

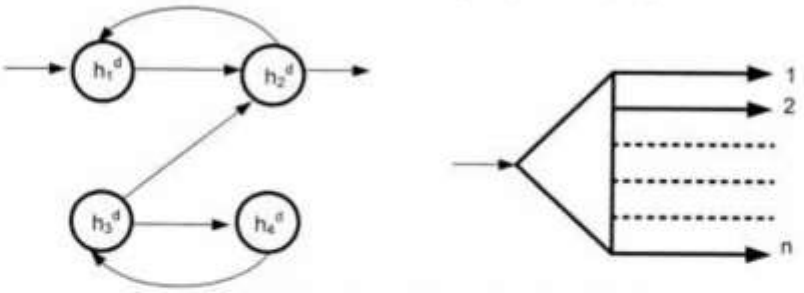
h_i ოპერატორების ანალიზის შედეგად გამოიყოფა რაიმე ოპერატორთა სიმრავლე $\{h^d\}$. დაუშვათ, რომ ნებისმიერი h_i -თვის შეიძლება მოიძებნოს , $\{h^d\}$ რომელსაც შეუძლია იგივე მდგომარეობის გამოთვლა, მაშინ ტრეკი$< \{h_i\}, \beta >$ შეიკვრება გრაფის სახით (ნახ.2.), რომელიც შეესაბამება ერთი და იგივე საბაზისო ოპერატორს. აღნიშნულ გრაფს ვუწოდოთ ინიციატორის სტრუქტურული ოპერატორის გრაფი. ტრეკის სტრუქტურა შეიძლება არაერთგვაროვანი იყოს, ამ პრობლემის მოსახსნელად შემოტანილია ოპერატორის ახალი ტიპი, ეგრეთ წოდებული ნავიგაციური ოპერატორი, რომელიც სრულდება მყისიერად, ოპერატორის მიერთებისთანავე. შედეგი არის შეკავშირების ნომერი 1,… ,n რომლის შესაბამისად ოპერატორი გამოითვლის მხოლოდ მდგომარეობას, ხოლო ლოგიკური ნაწილი ამ შემთხვევაში არ იგულისხმება.

შეიძლება გამოიყოს ოპერატორთა შემდეგი სტრუქტურები: წრფივი, რომელიც სტრუქტურით ტრეკს ემთხვევა და არ საჭიროებს ნავიგაციური ოპერატორების შემოტანას; საერთო სახის, რომელშიც აუცილებლად უნდა იყოს ნავიგაციური, ოპერატორები და სრულსტრუქტურიანი, რომელიც მიიღება ყველა ნავიგაციური ოპერატორის გაერთიანების შედეგად. უკანასკნელის გამოყენებით შეიძლება პროცესის მრავალდონიანი სახით წარმოდგენა; ე.ი. შეიძლება პროცესის დაყოფა უფრო მარტივ ქვეპროცესებად. დაყოფის პროცესი წყდება, როცა მიიღწევა ელემენტარული ოპერატორის დონე.

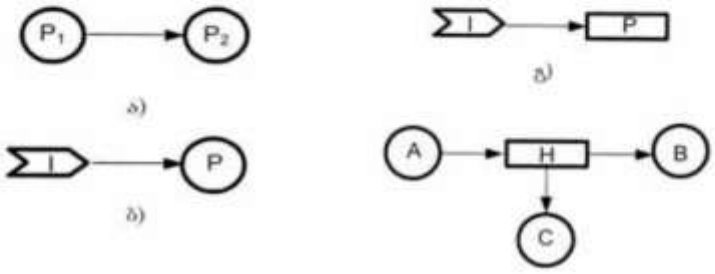
განვიხილოთ მიერთების სხვადასხვა სახე (ნახ. 3.) რომლებიც სრულდება პროცესის



ნახ. 1. ინიციატორის ტრეკი.



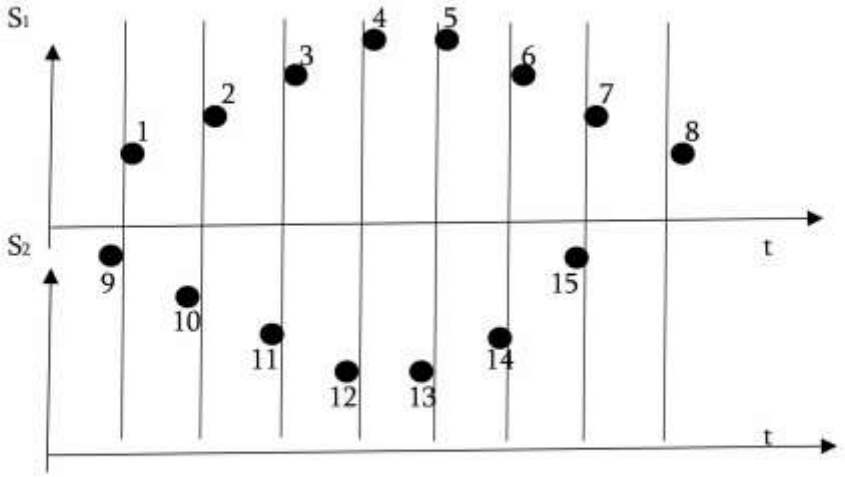
ნახ.2. გრაფის შეკვრა ტრეკის სახით.



ძირითადი ელემენტების საშუალებით: პარამეტრებით, ოპერატორებით და

ინიციატორებით. პარამეტრი P_1 შეიძლება მიერთდეს P_2 პარამეტეთან რაც უზრუნველყოფს 1 პარამეტრის კავშირს 2 პარამეტრთან (a).

ნახ.3. მიერთების სხვადასხვა სახე.



ნახ. 4. ორი დაკავშირებული პროცესორის შემთხვევა.

ასევე შესაძლებელია პარამეტრის მიერთება ინიციატორთან. (b); ამ შემთხვევაში ინიციატორთან კავშირი უზრუნველყოფს პარამეტრთან კავშირსაც. ინიციატორის კავშირი პარამეტრთან უზრუნველყოფს ოპერატორის შესრულებას და ოპერატორის დაშვებას სხვა ოპერატორთან; მიერთების მესამე სახეს წარმოადგენს ოპერატორის მიერთება A, B, C პარამეტრებთან (d). აქ A - შემავალი პარამეტრია, B - გამომავალი და C - მუშა ოპერატორი. მოცემულ სქემებს ოპერატიულ-პარამეტრული ქემები ეწოდებათ. ოპერატორების ან პარამეტრების არსებობის გამო, შეიძლება სქემა იყოს ოპერატიული ან პარამეტრული. ოპერატოპები პარამეტრებთან ერთიანდებიან ბლოკების სახით, რომლებშიც შეიძლება ჩართული იყოს როგორც ელემენტარული, ისე შედგენილი ოპერატორები. ბლოკები შეიძლება დაკავშირებული იყოს ერთმანეთთან საერთო პარამეტრებით ან ინიციატორებით. თუ მოცემულია ოპერატორების და პარამეტრების დაყოფა, მაშინ შეიძლება ყოველ დონეზე მიღებულ იქნას საკუთარი ბლოკური სქემა. განირჩევა შემდეგი სახის ბლოკური სქემები:

- A - ბლოკი, აგრეგატი. აღწერს ჩაკეტილ პროცესს, რომლის ინიციატორი არ ტოვებს ბლოკს. გარე ფაქტორებთან ის დაკავშირებულია მხოლოდ პარამეტრებით. მისი საშუალებით აღიწერება მოწყობილობა, მანქანები, აგრეგატები, რომლებიც ფუნქციონირებენ შიგა ლოგიკიდან გამომდინარე.
- P - ბლოკი, პროცესორი. აღწერს ინიციატორის ქვეპროცესს, რომელიც არის მასთან მიერთებული. მიერთების შემდგომ ინიციატორი ტოვებს ბლოკს და აგრძელებს გზას ბლოკური სქემის შესაბამისად. თუ ბლოკს მხოლოდ ერთი ინიციატორი აქვს, მაშინ იგი წარმოადგენს მონოპროცესორს, ხოლო თუ რამოდენიმე, მაშინ P ბლოკი შეიცავს რამოდენიმე ქვებლოკს, რომლებიც თავისთავად წარმოადგენენ მონოპროცესორს და გაერთიანებული არიან ერთ P ბლოკში. P გამოიყენება იმიტაციური მოდელირების დროს, რომელიც საშუალებას იძლევა საკმაოდ ეკონომიურად აღწერილ იქნას პარალელურად დაკავშირებული პროცესების ერთობლიობა.

- K- ბლოკი, მაკონტროლებელი. არის A ბლოკის სახეობა და გამოიყენება პარამეტრების დასამუშავებლად, რომლებიც იყვნენ ან გახდებიან ინიციატორებად. აქედან გამომდინარე K - ბლოკის გამოყენება შეიძლება პროცესში ქმედების დასაშვებად.
- Ф - ბლოკი, გამომთვლელი. გამოიყენება მხოლოდ მდგომარეობის გამოსათვლელად. ინიციატორი მიერთდება K - ბლოკთან მყისეულად. ეს ბლოკი განიხილება როგორც ტიპიური პარამერტების გარდაქმნის პროცედურასთან კავშირში.

კონფლიქტური სიტუაციის აღმოსაფხვრელად, რომელიც წარმოიშობა ერთი რესურსის რამოდენიმე პროცესით დაკავების კოლიზით, გამოიყენება ორი ძირითადი მეთოდი:

- პირველი მეთოდი მდგომარეობს იმაში, რომ თუ ყველა პროცესი მოცემულია P - ბლოკის საშუალებით, მაშინ მიერთების რეგულირება შესაძლებელია ყველა კონფლიქტური ოპერაციებისათვის საერთო ლოგიკური ცვლადის გამოყენებით. თუ ლოგიკური ცვლადი იღებს მნიშვნელობას „1“-ს, მაშინ რესურსი თავისუფალია და შეიძლება მისი გამოყენება. ხოლო თუ ლოგიკური ცვლადი მიიღებს მნიშვნელობა „0“-ს, მაშინ რესურსი დაკავებულია და საჭიროა მოცდა, რომ რესურსი განთავისუფლდეს. ყველა პროცესი თავის ქმედების დაწყებისას იწყებს ლოგიკური ცვლადის შემოწმებას თუ პროცესმა რესურსი მიიერთა, ლოგიკური ცვლადი იღებს მნიშვნელობა „0“-ს, ხოლო ქმედების დამთავრების შემდეგ ლოგიკური ცვლადი ისევ მიიღებს მნიშვნელობა „1“-ს;
- მეორე მეთოდი, მდგომარეობს იმაში, რომ რესურსი გამოიყოფა ცალკე ობიექტად. პროცესი რესურსში აღიწერება P - ბლოკის საშუალებით, ხოლო ინიციატორის დაშვების რეგულირებისათვის იქმნება K - ბლოკი. ყველა ინიციატორი P - ბლოკიდან რესურსთან მიერთების მცდელობის დროს მიდის K - ბლოკში და რესურსის მიერთებისათვის ირჩევს ახალ ინიციატორს.

მუშაობის ეფექტურობის გადიდებისათვის საჭიროა რეალიზირებულ იქნას მოდელირების პროგრამა VFP ინტეგრირებული პროგრამირების პაკეტში. ამ შემთხვევაში მოვლენა იქნება პროცედურის ნაწილი და არა ცალკე პროცედურები, რაც ამცირებს ერთი მოვლენიდან, მეორე მოვლენაზე გადასვლის დროს.

მოვლენების დალაგება ხდება აქტიური დროის სიის გამოყენებით, სადაც საჭიროა განსაზღვრულ იქნას მოვლენის სახელი, ან მისი ნომერი, მოვლენის დრო ან ტრანზაქციის დრო. დროის სია ყოველთვის დალაგდება დროის მნიშვნელობის გაზრდასთან ერთად.

ახალი მოვლენის ამორჩევა ხდება სიის დასაწყისიდან. ამ დროს მართვა გადაეცემა მოვლენის სექციას, რომლის ნომერი მითითებულია სიის ელემენტში. მოდელირების ასეთი პრინციპი საშუალებას იძლევა მოდელირებულ იქნას როგორც პროექტირების, ასევე პირობითი გამოძახების ამოცანა. მომხმარებლის პროგრამა ფორმდება ვიზუალური ელემენტების ფრეიმების საშუალებით. მომხმარებელს შეუძლია შექმნას თავისი ფრეიმი, მიანიჭოს მას უნიკალური სახელი, აღწეროს მისი ფუნქციონალური და მეტროლოგიური მახასიათებლები, მიანიჭის გრაფიკულად გამოსახული ცალკე ფორმა პიქტოგრამის სახით.

ძირითად შიგა ორგანიზატორად წარმოსდგება ფრეიმი MAIN რომელიც საშუალებას იძლევა აღიწეროს აქტიური დროის ცხრილი და მომხმარებლის მონაცემთა სტრუქტურა. ფრეიმის ლოგიკური ელემენტი ტოლია „0“-ის თუ იგი იმყოფება ბოლო ელემენტზე, ან მომდევნო ელემენტის რიგის ნომერისა და ელემენტი არ არის საბოლოო. აგრეთვე „0“ მნიშვნელობას იღებს ისეთი ფრეიმების ლოგიკური ელემენტები, რომლებიც

მიმდინარე მოვლენის დროს არ არის ჩართული ობიექტში ან ამ შემთხვევაში არ გამოიყენება, ასევე ახლად შექმნილი ობიექტის ფრეიმის ლოგიკური მნიშვნელობა „0“-ის ტოლია. საკმარისია ობიექტი აღებულ იქნას ფრეიმთა სიიდან და მიერთებულ იქნას ობიექტზე, რომ მისი ლოგიკური მნიშვნელობა იღებს „1“-ის ტოლ მნიშვნელობას. ანალოგიური აღებულ იქნას ფრეიმთა სიიდან და მიერთებულ იქნას ობიექტზე, რომ მისი ლოგიკური მნიშვნელობა იღებს „1“-ის ტოლ მნიშვნელობას. ანალოგიური ელემენტის გამოსაყენებლად საჭიროა ელემენტის ფრეიმის რიგი გაზარდოს გამოყენების რაოდენობას დამატებული ერთი ერთეულით, რათა შესაძლებელი იყოს ელემენტის კიდევ ერთხელ გამოყენება. შესაძლებელია ელემენტის რაოდენობის მაჩვენებელს დაენიშნოს რაოდენობის შეზღუდვის მაჩვენებელი. ელემენტის ჩართვა ხდება საჭირო პოზიციასთან მიტანით და „თაგვის“ ორჯერადი აქტივაციით. ჩართული ელემენტის შემდგომ ძირითადი ფრეიმი ამატებს ერთ ჩანაწერს და აღიწერება დრო, მოქმედების ნომერი და ტრანზაქტი.

მოდელში ყოველი ალგორითმი ახდენს რაიმე მოვლენის რეალიზებას, ხოლო თვით ალგორითმი ამ შემთხვევაში წარმოადგენს მოვლენის ქვეპროგრამას. მოვლენების წრფივ მიმდევრობას შეესაბამება ერთი დროის მომენტი, მიუხედავად იმისა, თუ ამ დროის მომენტში რამდენი ალგორითმი სრულდება. მაგალითად, ორი დაკავშირებული პროცესორის შემთხვევა (ნახ.4.)

განვიხილოთ ერთდროულად სიმრავლის გენერაციის ალგორითმები. მათ შორის ერთდროული დროით სიმრავლის გენერაციის წრფივი მოდელირების ალგორითმი. ამ ალგორითმში ქვეპროგრამები თვითონ ანგარიშობენ საჭირო პირობებს, ორგანიზებას უკეთებენ მართვის გადაცემას და მმართავ ალგორითმს, ინფორმაციას მოიხმარენ მხოლოდ წასაკითხად და ჩასაწერად. ამ ალგორითმის მანქანური ბრძანებების რიცხვი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$N = n(mC + B_k + mB_p)$$

სადაც, n - მოვლენათა რიცხვია რომელიც უნდა მოხდეს სისტემაში;

m-ერთ შეტყობინებაზე მოსული მოვლენათა საშუალო რიცხვია;

C- მანქანურ ბრძანებებში მოვლენის ქვეპროგრამის საშუალო სიგრძეა;

B_p-მანქანურ მოვლენათა რიცხვია, რომელიც სრულდება შემდგომი გადასვლის ერთი მანქანური პირობის გამოსათვლელად.

იმიტაციური მოდელის პროექტირება წარმოადგენს ძალზედ რთულ პროცესს, მაგრამ ახალი ობიექტების შექმნა თუ უკვე არსებული ობიექტების გამოცდა თუნდაც მეტროლოგიურ მახასიათებლებზე, დიდი ღირებულების ამოცანაა და მისი იმიტაცია აუცილებლად უნდა ჩატარდეს თანამედროვე გამთვლითი ტექნიკის გამოყენებით.

მოდეელირების ალგორითმი რამოდენიმე ძირითად ეტაპს შეიცავს:

-ტექნიკური ამოცანის ფორმულირება. იმიტაციურ მოდელზე მუშაობის მიზანია პროექტირების ამოცანის ჩამოყალიბება და მუშა ქვეპროგრამების ორგანიზაცია. ამისათვის საჭიროა რეალიზებული იყოს ტექნიკური ცოდნის ბაზა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს შემდგომში შესაბამის სპეციალისტთან ერთად გამოვიმუშაოთ ტექნიკური ამოცანა.

ტექნიკური წინადადების ჩამოყალიბება. ამ ეტაპზე საჭიროა ამორჩეულ იქნას მოცემული პრობლემის ოპტიმალური ამონახსნი უნდა შეიქმნას ყველა სამუშაოს შესრულების გეგმის ქვეპროგრამა.

ესკიზური პროექტირება. ამ ეტაპზე იწყება ინიტაციური მოდელის პირველი ვარიანტის რეალიზაცია. ამ დროს საჭიროა უკვე გვქონდეს ელემენტთა კონკრეტული აღწერა და მახასიათებლების მნიშვნელობები, ასევე საჭიროა გვქონდეს ფიზიკური მოდელირების ერთი მოდელი მაინც.

- იმიტაციური მოდელის გამოცდა. ამ ეტაპზე ძირითად მომენტს წარმოადგენს იმის დასაბუთება, რომ იმიტაციური მოდელი მუშაობს ისე, როგორც ეს გათვალისწინებული იყო პროექტირების დროს. გამოცდის პროცესში საჭიროა პროგრამირების შეცდომების გასწორება. უნდა მოხდეს რეალური სისტემის და იმიტაციური მოდელის განსხვავებების აღმოფხვრა.
- ტექნიკური პროექტირება. ტექნიკური პროექტირების დროს საჭიროა კომპონენტების და ელემენტების დაზუსტება და დეტალიზაცია, მათი იმიტაციურ მოდელში ფუნქციონირების დაზუსტება.
- მუშა პროექტირება. ეტაპი დამახასიათებელია იმირაციური მოდელის შექმნით. ამ დროს საჭიროა ტექნიკური დოკუმენტაციის ჩამოყალიბება. ტექნიკურია მონახსენთა ყველა ჩამონათვალის მიღება.

ლიტერატურა

1. Русадзе Т. П. Нагруженность трансмиссии и плавность хода автомобиля. Тбилиси. издательство Тбилисского университета. 1988.- 390 ст.

3. რუსაძე თ., ბერაძე ც. ავტომობილის დიაგნოსტიკაში გამოყენებული იმიტაციური მოდელირების პრინციპები. საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ქუთაისის სამეცნიერო ცენტრის შრომები, XI-თბილისი. მეცნიერება, 2004. გვ 3-8.

4. რუსაძე თ., ბერაძე ც. მობილური მანქანის საანგარიშო დინამიკური მოდელის შედგენის პრინციპები. საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ქუთაისის სამეცნიერო ცენტრის შრომები, XI-თბილისი. მეცნიერება, 2004. გვ 9-13.

SIMULATION MODELING IN THE DESIGN STAGE AND ITS PRACTICAL IMPLEMENTATION

Beradze Tsira
Akaki Tsereteli Sate University

The paper states that the design of a simulation model is a very difficult process, but creation of new objects, or testing of existing objects, even on metrological characteristics, is a task of great value and its simulation must be carried out using modern computer technologies.

The main point of testing the simulation model is to justify that the simuation model works as it was assigned in the design stage. During the testing process, it is necessary to correct the programming errors, as well as to eliminate the differences in the real system and simulation model.

The paper demonstrates that each algorithm in the model implements any event, but the algorithm itself in this case is a subprogram of the event. The linear sequence of events corresponds to a single point in time, regardless the number of algorithms implemented at this point in time.

მობილური მანქანის საანგარიშო დინამიკური მოდელის შედგენის და დიაგნოსტიკაში გამოყენებული იმიტაციური მოდელირების პრინციპები

ბერაძე ც. გ.
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნაშრომში აღნიშნულია, რომ მობილური მანქანის მნიშვნელოვანი კვანძის და აგრეგატის მატემატიკური მოდელის დამუშავება მოითხოვს საანგარიშო დინამიკური სქემის დამუშავებას და მის მატემატიკურ აღწერას. ამასთან საჭიროა წინასწარ განისაზღვროს ინერციული და დრეკადმადემპფირებელი მახასიათებლები, იმის გათვალისწინებით, რომ მობილური მანქანა მთლიანად, ისე როგორც მისი ძირითადი ქვესისტემები, წარმოადგენენ სისტემებს განაწილებული პარამეტრებით,

წარმოდგენილი მეთოდი ითვლება ექსპერიმენტალურ და თანდართულ მეთოდოლოგიად, რომელიც საშუალებას იძლევა განხილულ იქნას დიდი რაოდენობით ექსპერიმენტები, გაუმჯობესებული იქნას პრობლემის გადაჭრის ხარისხი და მისი შედეგის პროგნოზირების სიზუსტე. აღნიშნულია, რომ საანგარიშო სქემის დეტალურობის პრინციპი დამოკიდებულია: კვლევის კონკრეტულ მიზანთან, განსახილველი პროცესის სიხშირულ დიაპაზონთან და გაანგარიშების საჭირო სიზუსტესთან. ეს არის არა თეორია არამედ პრობლემის გადაჭრის მეთოდოლოგია.

საკვანძო სიტყვები: ალგორითმი, ტრანსმისია, მაძრავი, დაკიდება, დემპფერები.

შინაარსი

მობილური მანქანის მათემატიკური მოდელის ქვეშ იგულისხმება მისი საანგარიშო დინამიკური სქემა (ფიზიკური მოდელი) და დიფერენციალურ განტოლრებათა სისტემა, რომელიც აღწერს მის დინამიკას.

მობილური მანქანის მოძრაობის დინამიკის თანამედროვე მათემატიკური მოდელირება ეფუძნება შემდეგ მნიშვნელოვან პრინციპებს:

- მოდულირების პრინციპი, ანუ მობილური მანქანის ცალკეული ქვესისტემების მათემატიკური მოდელების (მოდელის) შექმნა, როგორიცაა ძრავის (ძალოვანი აგრეგატის), ტრანსმისიის, დაკიდების სისტემის, მაძრავის;
- ურთიერთკავშირის პრინციპი, საჭიროა იმისთვის, რომ ვთანამედროვე მობილური მანქანა წარმოადგენს დინამიკურ სისტემას, რომლის მუშაობა დაკავშირებულია ცვლადი ინტენსიური ზემოქმედებისაგან გარე გარემოსა და მღოლის ზემოქმედებისაგან. მობილური მანქანის ყველა ქვესისტემები - ძრავი, ტრანცმისია, დაკიდება, მაძრავი - ახდენენ ურთიერთზემოქმედებას როგორც ერთმანეთთან ასევე მობილური მანქანის საექსპლოატაციო მაჩვენებლებთან, რომელთა სრულყოფა შეუძლებელია მათი ურთიერთკავშირის მათემატიკური არწერის გარეშე, რომელიც გამოსახავს სისტემის ფუნქციონირებიზს რეალურ პირობებს;
- მართვადი და შემშფოთი პრინციპების გათვალისწინება, რომელიც აუცილებელია და გამოსახავს მძღოლის (ოპერატორის) მხრიდან მათემატიკური აღწერით ზემოქმედებას მობილური მანქანის მართვის ორგანოებზე (საწვავის მიწოდება, დამუხრუჭება, გადაბმულობის მართვა, გადაცემატა კოლოფში გადაცემების გადართვა) აგრეთვე მობილური მანქანის დინამიკურ სისტემაზე გარე გარემოს ზემოქმედება. როგორც პრაქტიკულად ჩანს მათ შორის მნიშვნელოვანია გზის მიკრო და მაკრო პროფილი და ჰაეროდინამიკური წინაღმდეგობა.
- ზემოთ ჩამოთვლილი პრინციპები არის ძირიტადი, მხოლოდ შესაძლებელია მოვიყვანოთ კიდევ რამდენიმე პრინციპი, რომელიც საშუალებას იძლევა მოვახდინოთ ყფრო მაღალ დონეზე ზემოთ ჩამოთვლილი პრინციპების რეალიზაცია:
- არაწრფივი ფაქტორების გათვალისწინების პრინციპი, განპირობებულია მობილური მანქანის დინამიკურ სისტემაში ელემენტების არაწრფივი მახასიათებლებით (ძრავა

ტრანსმისიის დეტალები ღრეჩოებით, რხევების ჩამხშობი დემპფერები, რესორები მის ფურცლებს შორის მშრალი ხახუნით და სხვა), რომელიც არსებითად ცვლიან მიმდინარე პროცესებს როგორც ხარისხობრივად ასევე რაოდენობრივად. მათემატიკურ მოდელში გათვალისწინებული უნდა იყოს მობილური მანქანის არაწრფივი მახასიათებლები იმისათვის, რომ გაიზარდოს გაანგარიშებების სიზუსტე;

- სიხშირული დიაპაზონის შესაბამისობის სპექტრი გამოხატავს საანგარიშო სქემას შესაბამისი ხარისხით დეტალიზაციას, რაც ნიშნავს საკუთარი სიხშირის სპექტრის წარმოდგენას, ისეთი მნიშვნელოვანი (განმსაზღვრელი) სიხშირული დიაპაზონით რომელიც რეაგირებს შემშფოთ ფაქტორებზე;
- კომპლექსურობის პრინციპი გამოხატავს მათემატიკური მოდელის აგების ისეთ აუცილებლობას, რომლის დროსაც წევითი დინამიკის, საწვავის ეკონომიურობის, სვლის სიმდოვრის ამოცანები იწყება მობილური მანქანის ცალკეული კვანძების და ქვესისტემების მახასიათებლების გათვალისწინებით და პროცესებით, რომელიც მიმდინარეობს დინამიკურ სისტემაში.

მობილური მანქანის მნიშვნელოვანი კვანძის და აგრეგატის მათემატიკური მოდელის დამუშავება მოითხოვს საანგარიშო დინამიკური სქემის დამუშავებას და მის მათემატიკურ აღწერას. მასთან საჭიროა წინასწარ განისაზღვროს ინერციული და დრეკადმადემპფირებელი მახასიათებლები, იმის გათვალისწინებით, რომ მობილური მანქანა მთლიანად, ისე როგორც მისი ძირითადი ქვესისტემები, წარმოადგენენ სისტემების განაწილებული პარამეტრებით. ერთი კია რომ ასეთი ქვესისტემები, ასე მაგალითად ტრანსმისია და დაკიდება, შეიძლება წარმოდგენილი იქნას რხევითი სისტემის სახით დისკრეტული შეყურსული პარამეტრებით.

დისკრეტიზაციის საფუძველს წარმოადგენს ექსპერიმენტალური დასაბუთება იმისა რომ ტრანსმისიაში გრეხვითი რხევების და მობილური მანქანის დარესორებულ სისტემაში რხევებს აქვს გამოკვეთილი დისკრეტული სპექტრი საკუთარი სიხშირეების 20 ჰც-ის დიაპაზონში ტრანსმისიაში და 90 ჰც-მდე დაკიდებაში. ამიტომ დისკრეტული რიცხვითი სისტემები ვარგისია პროცესების განხილვისათვის სიხშირის ამ დიაპაზონში, სისტემის დისკრეტიზაცია წარმოებს ელემენტების გამოკვეთის გზით, რომელიც ეკუთვნის შეყურსულ მასას და ელემენტებს, რომლებსაც გააჩნია დამყოლობა. ტრანსმისიაში შყურსულ მასას წარმოადგენს მქნევარა, გადაბრუნოლობის დისკოები, აგრეგატების კორპუსები და სხვა. ელემენტებს რომელსაც გააჩნიათ მხოლოდ დამყოლობა ასეთებია ლილვები და სპეციალური დრეკადი დეტალები. დისკრეტიზაციის შემდეგ მობილურ მანქანას წარმოადგენენ მექანიკური რხევითი სისტემის სახით, რომელიც შედგება შეყურსული მასების სიმრავლისაგან, შეერთებულს უინერციო დრეკადი რგოლებით. აუცილებელია აგრეთვე გამოსახული იყოს ყველა კინემატიკური კავშირები, რომელიც განხორციელებულია სხვადასხვა ტიპის გადაცემებით. საანგარიშო სქემის დეტალურობის პრინციპები დამოკიდებულია კვლევის კონკრეტულ მიზანთან, განსახილველი პროცესის სიხშირულ დიაპაზონთან, გაანგარიშების საჭირო სიზუსტესთან. საჭიროა აგრეთვე აღვნიშნოთ, რომ შესაძლოა მობილური მანქანის კონსტრუქციაში ცვლილებების შეტანა მისი საექსპლოატაციო მაჩვენებლების გაზრდის მიზნით.

მობილური მანქანის საანგარიშო დინამიკური სქემის მათემატიკური აღწერისათვის ვსარგებლობთ ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებით. ამისათვის საჭიროა გამოვსახოთ დინამიკური სისტემის კინეტიკური და პოტენციური ენერგია, დისიპაციური ფუნქცია და განზოგადოებული ძალები. სათანადო გარდაქმნების შემდეგ ვღებულობთ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც მატრიცული ფორმით შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგნაირად:

$$M+B+C=P \qquad (1)$$

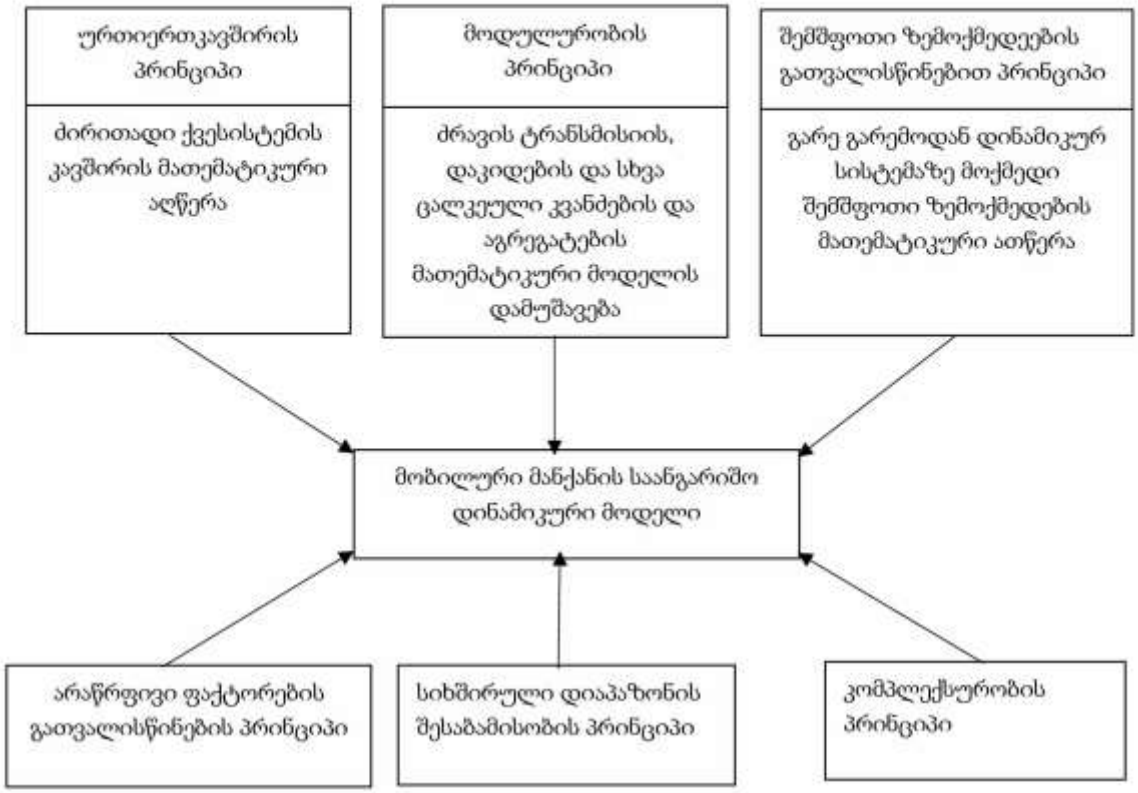
სადაც M – არის ინერციული ელემენტების მატრიცა;

C – სიხისტეების მატრიცაა;

B –დემპფერების კოეფიციენტების მატრიცა;

P – შემშფოთი ფაქტორების ვექტორ-სვეტი.

M, B და C მატრიცების განზომილება განისაზღვრება ინერციული ელემენტების (მასები და ინერციის მომენტები) რიცხვით და მობილური მანქანის დინამიკური სისტემის თავისუფლების ხარისხით.



ნახ. 1. მობილური მანქანის საანგარიშო დინამიკური მოდელის აგების პრინიპები

რთული ურთიერთდაკავშირებბული სისტემის „მძღოლი-ავტომობილი-გარემო“, ანალიზისათვი იმიტაციური მოდელირება ითვლება ყველაზე ძლიერ საშუალებად სხვა მეთოდებთან შედარებით. ასეთი მეთოდები საშუალებას იძლევა განხილული იქნას დიდი რაოდენობის ექსპერიმენტები, გაუმჯობესებული იქნას პრობლემის გადაჭრის ხარისხი და მისი შედეგის პროგნოზირების სიზუსტე. სისტემურ მიდგომად ითვლება ის, რომ მკვლევარი სისტემის ქცევას შეისწავლის მთლიანად, მაგრამ არ ამახვილებს ყურადღებას მის ცალკეულ ნაწილებზე.

იმიტაციური მოდელირება ძირითადად დამყარებულია (ბაზირებულია) გამოთვლით სისტემებზე, მათემატიკაზე, ალბათობის თეორიასა და სტატისტიკაზე.

შენონის სიტყვებით „იმიტაციური მოდელირება, ეს არის რეალური სისტემის მოდელების კონსტრუირებისა და ამ მოდელებზე ექსპერიმენტების ჩატარების პროცესი სისტემის ქცევის გაგების ან (ზღვრულ ჩარჩოებში) სხვადასხვა სტრატეგიების შეფასების მიზნით რომელიც უზრუნველყოფს მოცემული სისტემის ფუნქციონირებას ამ შემთხვევაში იმიტაციური პროცესის მოდელირებას ჩვენ ვგულისხმობთ, როგორც მოდელის კონსტრუირებას და სხვადასხვა პრობლემების შესწავლისათვის მოდელის ანალიტიკურ გამოყენებას.“

იმიტაციური მოდელირება ითვლება ექსპერიმენტალურ და თანდართულ მეთოდოლოგიად, რომელსაც აქვს შემდეგი მიზანი:

- სისტემის ქცევის აღწერა,
- სისტემის თეორიისა და ფიპოთეზის შედგენა რომელსაც შეუძლია ახსნას მოცემული ქცევა. ამ თეორიის გამოყენება სისტემის მომავალი წინასწარ

მეტყველების მიზნით ე.ი. იმ ზემოქმედებისა, რომლებიც შეიძლება გამოწვეული იქნას სისტემაში მომხდარიცვლილებით ან მისი ფუნქციონირების ხერხის შეცვლით.

ამა თუ იმ ობიექტის მოდელი შეიძლება იყოს ზუსტი ასლი, ან ობიექტის სხვადასხვა მახასიათებელი თვისებების გამოსახვა შებრუნებული ფორმით.

ხშირად იმიტაციური მოდელირება კლასიფიცირდება სხვადასხვა ხერხით. სამწუხაროდ მათ შორის არც ერთი არ ითვლება დამაკმაყოფილებლად, თუმცა თითოეული მათგანი ემსახურება გარკვეულ მიზანს.

განვიხილოთ მოდელისრამოდენიმე ტიპიური ჯგუფი, რომლებიც შეიძლება იყოს კლასიფიკაციის სისტემის საფუძველი:

- სტატიკური და დინამიკური;დეტერმინირებული და შემთხვევითი; დისკრეტული და უწყვეტი;
- ნატურალური, ანალოგიური და სიმბოლური.

ყველა იმიტაციური მოდელი წარმოადგენს ე. წ. შავი ყუთის ტიპის მოდელს. ეს აისახება იმით, რომ ისინი უზრუნველყოფენ სისტემის გამომავალი სიგნალის მიღებას. თუ ქვესისტემაზე რომლებიც აღნიშნულ სისტემებზე ზემოქმედებენ, ვიმოქმედებთ შე4მავალი სიგნალით. ამის გამო აუცილებელია ინფორმაციის ან შედეგის მიღებისათვის განვახორციელოთ ინფორმაციული მოდელის „დაყვანა“ და არ „ამოვხცნათ იგი“. იმიტაციურ მოდელს არ გააჩნია „გათელვა“ მისი საკუთარი გადაწყვეტილების ფორმულირების უნარი იმ სახით, როგორითაც ამას ადგილი აქვს ანალიტიკურ მოდელებში. ხოლო შეუძლიაღ გამოყენებულ იქნან სისტემის ქცევის ანალიზისათვის იმ პირობებში რომლებსაც განსაზღვრავენ ექსპერიმენტატორები.

მაშასადამე იმიტაციური მოდელირება ეს არის არა თეორია არამედ პრობლემის გადაჭრის მეთოდოლოგია.

ამის შემდეგ ვიწყებთ მოდელის დამუშავებას. აუცილებელია გვახსოვდეს, რომ ამ მოდელს წარმოადგენს სტრუქტურული ელემენტი რომლისგანაც არის ის აგებული, თუმცა მოდელის მათემატიკური ან ფიზიკური სტრუქტურა შეიძლება იყოს ძალიან რთული. მოდელის სტრუქტურა ზოგადი სახით მათემატიკურად შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$E = f(x_i, y_i) \qquad (2)$$

სადაც, E -სისტემის ზემოქმედების შედეგია.

x_i-ცვლადი პარამეტრებია რომლებიც შეგვიძლია ვმართოთ.

y_i-ცვლადი პარამეტრები რომელთა მართვა ჩვენ არ შეგვიძლია.

f - x_i და y_i- შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულებაა, რომლებიც განსაზღვრავენ E სიდიდეს.

გამარტივება სასარგებლოა ომისათვის, რომ ის გვიჩვენებს სისტემის ფუნქციონირების დამოკიდებულებას როგორც ჩვენს მიერკონტროლირებად ასევე არაკონტროლირებად ცვლადებზე. ყოველი მოდელი წარმოადგენს ისეთი მდგენელების რამოდენიმე კომბინაციას როგორიც არის:

- კომპონენტები;
- ცვლადები;
- პარამეტრები
- ფუნქციონალური დამოკიდებულებები;
- შეზღუდვები;
- მიზნის ფუნქციები.

კომპონენტის ქვეშ იგულისხმება შემადგენელი ნაწილები, რომლებიც შესაბამისი გაერთიანებების დროს წარმოადგენენ სისტემას. ზოგჯერ კომპონენტებად ვთვლით აგრეთვე სისტემის ელემენტებს ან მის ქვესისტემას.

სისტემის მოდელში ჩვენ განვასხვავებთ ორი სახის ცვლადებს: ეგზოგენურს და ენდრიგენურს.

ეგზოგენური ცვლადები ითვლება აგრეთვე შემავალად, ეს იმას ნიშნავს,რომ ისინი წარმოიშვებიან სისტემის გარეთ ან წარმოადგენენ გარე მიზეზების ზემოქმედების შედეგს.

ენდროგენური ცვლადები ეწოდება ისეთ ცვლადებს რომლებიც წარმოიქმნებიან სისტემაში ან შიგა მიზეზების ზემოქმედების შედეგებში.

პარამეტრები არის სიდიდეების ჯამი, რომლებიც მოდელზე მომუშავე ოპერატორებმა შეიძლება შეარჩიონ ნებისმიერად და განსხვავდებოდეს ცვლადებისაგან. რომლებიც შეგვიძლია მივიღოთ მოცემული ფუნქციით განსაზღვრულ მნიშვნელობებად და განსხვავდებოდეს ცვლადებისაგან. ეს ცვლადები შეიძლება მივიღოთ იმ მნიშვნელობებად, რომლებიც განისაზღვრებიან მოცემული ფუნქციის სახით.

ფუნქციონალური დამოკიდებულებები აღწერენ ცვლადების ქცევას და პარამეტრებს კომპონენტების საზღვრებში ან გამოხატავენ დამოკიდებულებას სისტემის კომპონენტებს შორის.

ეს თანაფარდობები ან ოპერაციული მახასიათებლები თავისი ბუნებით ითვლებიან დეტერმინირებულად ან შემთხვევითად.

დეტერმინირებული თანაფარდობა-ეს არის იგივეობა ან განსაზღვრება, რომლებიც ამყარებენ დამოკიდებულებას განსაზღვრულ ცვლადებს შორის ან პარამეტრებს შორის, იმ შემთხვევაში როცა სისტემის გამოსავალზე პროცესი განისაზღვრება შესავალზე მოცემული ინფორმაციით. ამისგან განსხვავებით შემთხვევითი თანაფარდობა წარმოადგენს ისეთ დამოკიდებულებას, რომელიც შესავალზე მოცემული ინფორმაციის დროს გამოსავალზე იძლევა განუსაზღვრელ შედეგს.

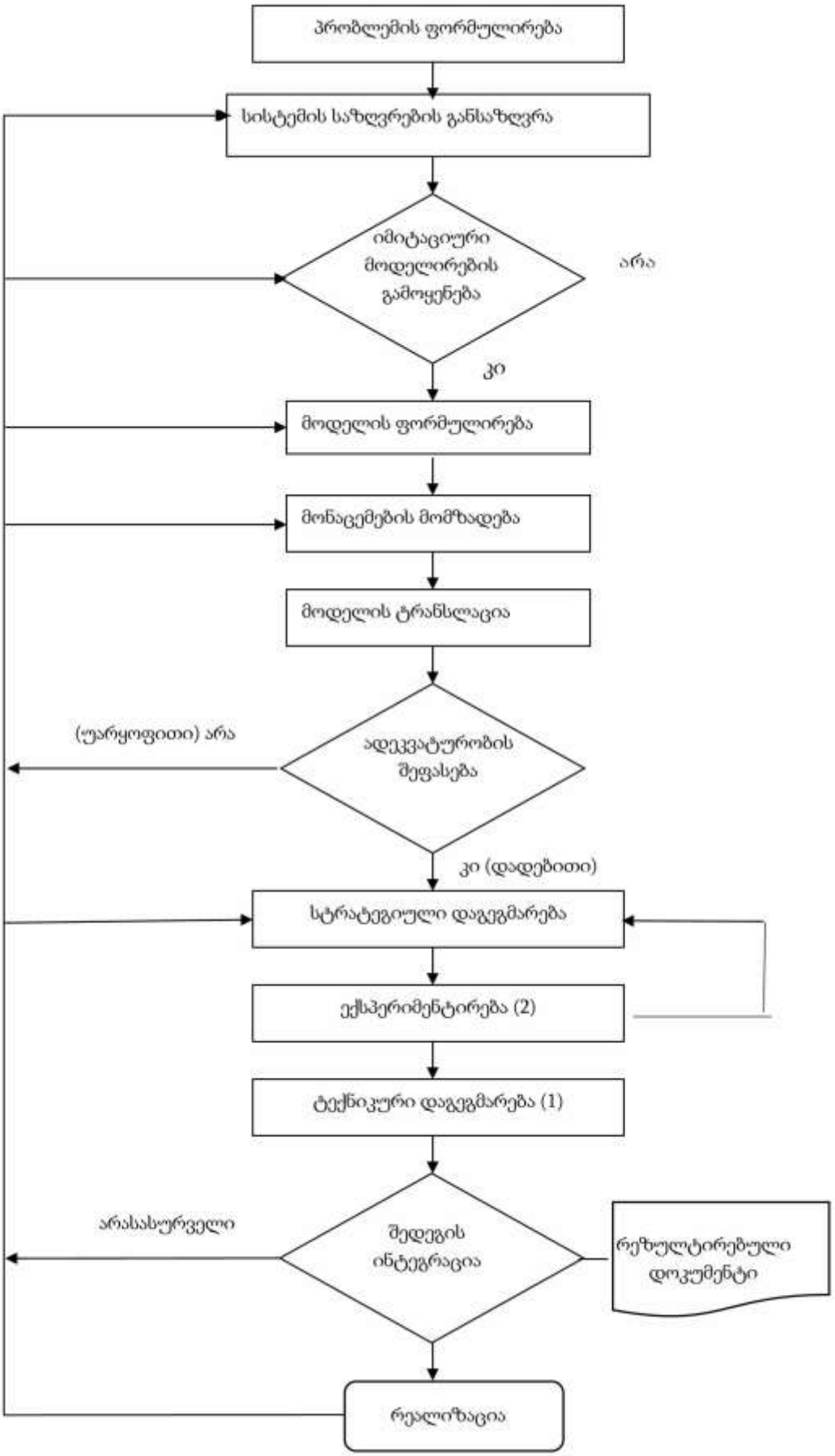
შეზღუდვა წარმოადგენს ამა თუ იმ საშუალებების განაწილებისა და ხარჯვის ან შეზღუდული პირობების შეცვლის დადგენილ საზღვარს. მიზნის ფუნქცია ან კრიტერიუმის ფუნქცია ეს არის მიზნით ზუსტი ასახვა ან სისტემის მოცემა.

გამომდინარე იქედან, რომ იმიტაცია შეიძლება გამოვიყენოთ რეალური სისტემის კვლევისათვის, შეიძლება შევარჩიოთ ამ პროცესის შემდეგი ეტაპები:

პროგრამული უზრუნველყოფის თანამედროვე საშუალებებმა შესაძლებლობა მოგვცა შეგვექმნა საკიდარის ფიზიკური მოდელი, სადაც მობილური მანქანა წარმოდგენილია მყარი სხეულით და გათვალისწინებულია საკიდარის ძირითადი დრეკად- მადემპფირებელი და გეომეტრიული პარამეტრები. მოდელი საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ საკიდარის ფუნქციონირება და მოვახდინოთ მისი პარამეტრების დიაგნოსტირება.

ასეთი მიდგომა წარმოადგენს ახალ შესაძლებლობას მობილური მანქანის კვანძებში და აგრეგატებში მიმდინარე პროცესების შესწავლისათვის და მათემატიკურ მოდელირებასთან ერთად ნაწილობრივად მაინც ცვლის ძვირადღირებულ ექსპერიმენტალურ გამოცდებს.

ფიზიკურ მოდელში საბურავი, რესორი, დარესორებული და დაურესორებელი მასები წარმოდგენილია თვისობრიობისა და პარამეტრების შენარჩუნების პრინციპით, რაც თავისთავად უზრუნველყოფს მიღებული შედეგების საიმედობას.


პრობლემის ფორმულირება
სისტემის საზღვრების განსაზღვრა
იმიტაციური მოდელირების გამოყენება
არა
კი
მოდელის ფორმულირება
მონაცემების მომზადება
მოდელის ტრანსლაცია
ადეკვატურობის შეფასება
(უარყოფითი) არა
კი (დადებითი)
სტრატეგიული დაგეგმარება
ექსპერიმენტირება (2)
ტექნიკური დაგეგმარება (1)
შედეგის ინტეგრაცია
არასასურველი
რეზულტირებული დოკუმენტი
რეალიზაცია

ლიტერატურა:

1. Русадзе Т. П. Нагруженность трансмиссии и плавность хода автомобиля. Тбилиси. издательство Тбилисского университета. 1988.- 390 ст.

2. ბერაძე ც., ლომიძე ნ. მოდელირების საკითხები კომპიუტერული ტექნოლოგიების განვითარებაში. აგრარული მეცნიერების პრობლემები: სამეცნიერო შრომათა კრებული, ტ. XXII თბილისი. 2003. გვ 203-204.

3. რუსაძე თ., ბერაძე ც. ავტომობილის დიაგნოსტიკაში გამოყენებული იმიტაციური მოდელირების პრინციპები. საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ქუთაისის სამეცნიერო ცენტრის შრომები, XI-თბილისი. მეცნიერება, 2004. გვ 3-8.

4. რუსაძე თ., ბერაძე ც. მობილური მანქანის საანგარიშო დინამიკური მოდელის შედგენის პრინციპები. საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ქუთაისის სამეცნიერო ცენტრის შრომები, XI-თბილისი. მეცნიერება, 2004. გვ 9-13.

Исследование деформационных процессов в многослойных тканевых оболочках при сжатии

Датуашвили М.В.
Государственный университет им. Ак. Церетели

В статье рассмотрен вопросы проектирования многослойных армированных тканевых оболочек для стеклопластикового изделия. Анализ литературных источников показал, что основными показателями эксплуатационных свойств изделий из армированных пластиков являются их объемная плотность, стабильность формы и геометрических размеров. В качестве критерия оценки изменения геометрических размеров многослойных тканевых оболочек выбрана величина деформации сжатия по толщине, т.к. при создании армирующего каркаса необходимо обеспечить требуемую толщину при определенной величине объемной плотности. Регулирование геометрических размеров и объемной плотности во многом зависит от технологических процессов изготовления многослойной тканевой оболочки и сборки самого изделия. наиболее доступным способом создания армированных структур является способ прошивки слоистых материалов с помощью швейного оборудования. Испытания по определению изменения толщины при сжатии проводились по разработанной методике. Целью проведенных исследований является определение величины обьемной плотности в зависимости от усилия сжатия.

С целью определения величины полной деформации многослойной оболочки в зависиооти от усилия сжатия и количества циклов нагружения была разработана методика проведения исследовании.

В результате проведенных исследований и обработки результатов установлено, что при проектировании многослойных оболочек из стеклоткани марки Г\С 8\3 КТО ГОСТ 6-11-216-76 толщиной 4,9±0,1 мм и с объемной плотностью 1±0,02 г\см^3 рекомендуется испльзовать оболочки, состоящие из 20 слоев, при сжимающей нагрузке 840-1058 кПА.

Во многих областях применение текстильных конструкционных композитов требует, чтобы изделия из них сохраняли работоспособность и в условиях динамического нагружения, включая специфические сочетания напряжений от механических, термических и ударных воздействий. До сих пор нерешенными вопросами в плане динамических свойств текстильных композитов остаются оценка степени целостности и непрерывности волокнистых элементов, составляющих армирующий каркас, а также обеспечение стабильности формы и геометрических размеров в зависимости от времени, параметров окружающей среды и характера эксплуатации. Например, очень мало известно о длительной стабильности размеров, ползучести и морфологических изменениях структуры текстильных конструкционных композитов при циклических и динамических воздействиях различной интенсивности. Результатов исследований волокон, нитей, тканей и текстильных армирующих каркасов недостаточно для прогнозирования изменения во времени свойств текстильных конструкционных композитов под действием динамических эксплуатационных напряжений [1.2.8.9].

Для решения этих и других вопросов необходимы обширные экспериментальные исследования поведения текстильных конструкционных композитов при действии динамических напряжений.

Анализ литературных источников показал, что основными показателями эксплуатационных свойств изделий из текстильных композитов являются их объемная плотность, стабильность формы и геометрических размеров, а также сохранение армирующих функций [2.8].

Регулирование геометрических размеров, объемной плотности, показателей жесткости и прочности во многом зависит от технологических процессов изготовления многослойной тканевой оболочки и сборки текстильных композитов. К основным причинам изменения геометрических размеров и объемной плотности оболочки относится способность применяемого материала под действием приложенных усилий деформироваться, причем деформации носят неполный релаксационный характер.

Одним из наиболее часто встречающихся видов механического воздействия в пакетах оболочки является деформация сжатая по толщиие. При этом величины сжимающего воздействия при изготовлении и сборке армирующего многослойного каркаса различны.

Вданном разделе интерес представляет воздействие сжимающих усилий непосредственно при изготовлении армирующего каркаса. Величины и направления воздействия рабочих органов оборудования при изготовлении оболочек и дальнейшей их обработке могут вызвать как изменение внутренних размеров и формы, так и привести к разрушению конструкции.

В качестве критерия оценки изменения геометрических размеров оболочки выбрана величина деформации сжатия по толщине, т.к. при создании армирующего каркаса необходимо обеспечить требуемую толщину при определенной величине объемной плотности. Объектом исследования являются многослойные оболочки из стеклоткани ГОСТ 6-11-216-76 с поверхностной плотностью 250 г/м^2.

Условная объемная плотность многослойной оболочки может быть рассчитана по формуле

$$\gamma = \frac{Mn}{h} \qquad (1)$$

Где M - поверхностная плотность слоя оболочки, г\см^2;

n- количество слоев, шт;

h- толщина оболочки, см.

На первом этапе работы было рассчитано количество слоев, при котором во время технологической обработки толщина оболочки достигает 4,9±0,1мм при объемной плотности 1±0,2г\см^3. Установлено, что требуемых параметров можно достичь с помощью многослойной оболочки из 18,19,20,21,22 слоев [5].

На втором этапе необходимо определять величины полной деформации многослойной оболочки в зависиюоти от усилия сжатия и количества циклов нагружения; величины усилий сжатия для получения оболочек требуемой толщины; величины объемной плотности в зависимости от усилия сжатия. С этой целью была разработана методика проведения исследовании деформационных процессов при сжатии.

Испытания по определению изменения толщины при сжатии проводились по разработанной методике на установке ВРМХС, предназначенной для определения жесткости пластмасс на изгиб. С целью приближения условий эксперимента к реальным условиям производства многослойных армированных оболочек установка была модернизирована: изготовлен съемный сжимающий идентор, имеющий плоскую рабочую поверхность в виде прижимной лапки универсальной машины и полностью повторяющей ее геометрические размеры; вместо двух опор для размещения образцов при испытании материалов на изгиб, при испытаниях на сжатие применялась одна опора в виде горизонтальной площадки, имитирующей платформу швейной машины.

Методика проведения эксперимента состоит в следующем: опорный столик в месте испытуемого образца с помощью маховика перемешается вверх до легкого соприкосновения с рабочей площадкой сжимающего идентора. Стрелка индикатора при соприкосновении штока индикатора с закрепленным на направляющей стойке упором перемещается и устанавливается в нулевое положение. По индикатору перемещений фиксируется толщина материала. После этого испытуемый образец сжимаем до заданного усилия и держим в деформированном состоянии в течение заданного времени, а перо самописца регистрирует на диаграмной бумаге спад (релаксацию) усилия в образце по времени.

По истечении заданного времени нагружения, вращением маховика нагрузку уменьшаем до нуля, что определяется по положению пера самописца. При этом по показаниям индикатора определяем величину остаточной деформаций.

При необходимости, в зависимости от цели исследования, образец после определенного времени отдыха подвергается повторному нагружению.

Для многослойных оболочек диапазон давлений, при которых проводились исследования выбран с учетом нагрузок, которые испытывает многослойная оболочке под действием рабочих органов технологического оборудования, применяемого для прошивки. По результатам иесследований, проведенных на рабочем оборудовании, установлено, что усилие прижатия прошиваемой многослойной оболочки к рейке изменяется в течение цикла работы машины и зависит от массы звеньев прижимного устройства, приведенной к стержню лапки, податливости пружины лапки и податливости сшиваемых деталей. Исходя из этих данных, образцы многослойных оболочек испытывались при значениях давления 100 , 300 , 600 , 900, 1200 КПа.

Исследования проводились в статических условиях При статическом сжатии испытания проводились в течение 5 мм., после чего следовал 5-минутный отдых. Длительность испытаний выбрали исходя из результатов разведывательного эксперимента, показавшего, в частности, что после 5 минутного действия нагрузки спад (релаксация) усилия практически заканчивается и его дальнейшее изменение составляет не более 1-5% от начального усилия в образце.

После отдыха каждкй образец подвергался повторному нагружению с последующим отдыхом. Количество циклов определено экспериментальным путем и равно трем, что соответствует максимальное числу проходов лапки швейной машины в отдельно взятой точке при любом способе и схеме прошиивки.

С целью определения требуемого количества измерений, обеспечивающего достоверность результатов, при заданной нагрузке были исследованы различные образцы многослойной оболочки. Как показывают статические результаты, для получения гарантированной относительной ошибки среднего арифметического, не превшающей 5%, достаточно провести 6 измерений.

Как отмечали выше, возникавшие при производстве многослойных армированных оболочек усилия сжатия приводят к деформированию оболочек и изменению их размеров. Часть этих изменений носит упругий характер и следовательно, обратимый, а часть - необратимый, и после снятия усилия сжатия размеры многослойной оболочки полностью не восстанавливаются, т.е. пакеты накапливают остаточную деформкцию. Анализ литературных источников не позволил выявить данные об изменениях толщины оболочек данного типа от величины прикладываемого усилия сжатия и времени деформирования. Однако, известно, что в нормальных условиях и при малом времени действия нагрузки изменения, происходящие в микроструктуре материала, обратимы. Увеличение времени выдержки материала в деформированном состоянии приводит к проявлению релаксационных процессов в микроструктуре (релаксация деформации) и накоплению остаточной деформаций [4].

Поэтому, в соответствии с разработанной методикой проведения эксперимента и целью работы предполагалось решить следующие задачи:

- исследовать влияние величины усилия сжатил на изменение толщины многослойной оболочки;
- изучить влияние периодичности действия сжимающих усилий на величины полной и остаточной деформаций сжатия;
- определить величины усилия сжатия для получения оболочек требуемой толщины;
- определить величины объемной плотности в зависимости от уоилия сжатия.

Так как в условиях изготовления многослойных оболочек изменение толщины зависит в основном от действующей нагрузки, необходимо установить математическую зависимость толщины от сжимающей нагрузки для всех случаев.

Пусть H_1 - толщина оболочки; H - толщина при давлении P. Тогда при изменении давления на величину ΔP произойдет изменение толщины на величину ΔH.

Считая ЭТИ зависимости нелинейными, получим уравнение:

$$-\Delta H = K\Delta P\left(H_1 - H\right)^{\beta} \tag{2}$$

приводящее при $\Delta P \to 0$ к дифференциальному уравнение:

$$-dH = K\left(H_1 - H\right)^{\beta} dp \tag{3}$$

где K и β - некоторые коэффициенты пропорциональности, определяемые материалом. Решая это уравнение, получим:

$$-\int \frac{dH}{\left(H_1 - H\right)^{\beta}} = K\int dp \Rightarrow \left(H_1 - H\right)^{1-\beta} = -KP + C \Rightarrow H = H_1 + \left(KP + C\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{4}$$

Эти соображения приводят нас к следующему виду зависимости H от P:

$$H = C + BP \tag{5}$$

где A, B, C - некоторые действительные числа.

Учитывая свойства материала, величинц Но и Нпр носят случайный характер, поэтому точно определять из уравнения (4) параметры A, B, C не представляется возможным.

В связи с этим была поставлена следующая задача. Величины A, B, C находили методом наименьших квадратов, т.е. минимизировалась величина

$$L = \sum_{i=0}^{m} \left(\overline{H_i} - BP^A - C \right)^2 / \sigma_i^2 \to \min \tag{6}$$

где $\overline{H_i}$ - среднее значение толщин H при давлении $P = P_i$

$$H_i = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^{5} H_{ij}$$

где H_{ij} значение H при давлении P_i в j-мизмерений,

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{5} \left(H_{ij} - \overline{H_i} \right)^2$$

- среднее квадратичное отклонение.

Модель (6) является нелинейной и представляет собой довольно сложную задачу [6.7], для ее решения использовалась модификация программы "PRJBL10". Были получены оценки $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ параметров A, B, C. 95% доверительные интервалы для A, B, C имеют вид:

$$A : \hat{A} \pm \sigma_A t_{95\%} = \hat{A} \pm 3{,}18\sigma_A$$

$$B : \hat{B} \pm 3{,}18\sigma_B, \qquad C : \hat{C} \pm 3{,}18\sigma_C,$$

Где $б_A, б_B, б_C$, - оценки асимтотических стандяртных отклонений находились как и величины K_{AC}, K_{AB}, K_{BC} с помощью коэффициентов матрицы, обратной к матрице, определяемой вторыми частными производными:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial A^2}; \frac{\partial^2 L}{\partial B^2}; \frac{\partial^2 L}{\partial C^2}; \frac{\partial^2 L}{\partial A \partial B}; \frac{\partial^2 L}{\partial A \partial C}; \frac{\partial^2 L}{\partial B \partial C}$$

и оценкой для дисперсии $б^2$.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(\overline{H_i} - \hat{B} \hat{P^A} - \hat{C} \right)}{m - 3}$$

$t_{95\%}$=3,18 - выбирается из таблиц Стьюдента по числу степеней свободы (m-3)=3.

Стандартное отклонение для $\overline{H}(p) = \hat{B} \hat{P^A} + \hat{C}$ находvvилось следующим образом:

$$\sigma^2_{\hat{H}}(p) = \sigma^2 \left(\hat{B} \hat{P^A} + \hat{C} - BP^A - C \right) =$$

$$= \sigma^2 - \left(\hat{C} - C + \left(\hat{B} - B \right) P^{\hat{A}} + B P^{\hat{A}} \left(1 - P^{\left(\hat{A} - A \right)} \right) \right) \tag{7}$$

Далее, так как 95% доверительный интервал достаточно мал, то последним слагаемым можно пренебречь и таким образом

$$\sigma^2_{\hat{H}}(P) = \sigma_B^2 P^{\hat{A}2} + 2K_{BC} P^{\hat{A}} \tag{8}$$

Эта величина служит для определения средней толщины изделия при давлении P. Например, прибавленным 95% доверительным интервалом для среднего значения H при давления P будет:

$$\hat{H}(P)\pm 3{,}18\sigma_{\hat{H}}(P)=\left(\hat{H}(P)-3{,}18\sigma_{\hat{H}}(P)\hat{H}(P)+3{,}18\sigma_{\hat{H}}(P)\right)$$

Для проверки адекватности модели использовалась статистика [8],

$$F_0 = M_{SA} / M_{SW} \qquad (9)$$

$$M_{SA}=\sum_{i=1}^{m}\left(\hat{H}_i-\hat{H}(P_i)\right)^2/(m-2)$$

где

$$M_{SW}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\sigma}\left(\hat{H}_i-\hat{H}_i\right)^2/5$$

средние квадраты разброса относительно регрессии и внутри групп

Если $$F_0 < F_{0,95}(m-3,5)$$

То Нулевая гипотеза но "модель адекватная" принимается при уровне значимости 0,05. Значения $F_{0.95}(v_1\ v_2)$ находятся из таблиц Фишера [3].

Исходя из этих зависимостей, результаты испытаний обрабатывались методами математической статистики. Ошибка опыта не превышало 5%,что свидетельствует о достаточно хорошей воспроизводимости испытаний и является подтверждением высокой точности используемой установки.

Анализ полученных при первом цикле сжатия данных, приведенных в табл. 1, показал, что с увеличением величины давления происходит уменьшение толщины исследуемых материалов. Однако эти изменения имеют свои закономерности.

Таблица 1

Толщина (мм) многослойной оболочки, находящейся под нагрузкой при первом цикле сжатия

Номер образца	Количество слоев, шт	Толщина оболочки, мм	Толщина оболочки при нагрузке, кПа.				
			100	300	600	900	1200
1	2	3	4	5	6	7	8
1	18	7,23	6,21	5,65	5,18	4,77	4,42
2	19	7,48	6,30	5,74	5,31	4,87	4,54
3	*20*	7,71	6,38	5,84	5,40	4,98	4,63
4	21	7,96	6,48	5,95	5,49	5,09	4,78
5	*22*	8,18	6,56	6,05	5,61	5,19	4,97

Обработка данных позволила получить графическую зависимость толщины многослойной оболочки от давления и уравнения регрессии для всех исследуемых образцов.

Превышение табличного значения критерия Фишера над расчетным позволяет сделать вывод об адекватности полученных уравнений регрессии.

Анализ кривых зависимости толщины образцов от величины давления свидетельствует об их идентичности. В начальный период приложения нагрузки происходит значительная деформация оболочки, а затем при увеличении нагрузки деформация постепенно затухает. Т.е. характерно наличие двух участков: первый - нагрузка вызывает значительное уменьшение толщины материала; второй - уменьшение толщины идет незначительно.

Так как в условиях производства многослойные армированные оболочки испытывают многократные воздействия сжимающих усилий,чередующихсяс разгрузкой и отдыхом, то представляет практическийинтерес выяснить динамику изменения толщины пакета после нескольких циклов нагружения, что соответствует числу воздействий рабочих органов швейных машин на операциях сборки.

В табл. 2 и на рис.1 представлены значения толщины исследуемых пакетов и кривые зависимости при третьем цикле нагружения. Как видно из графиков, изменение толщины при увеличении циклов сжатия растет в малой степени.

Таблица 2

Толщина (мм) многослойной оболочки, находящейся под нагрузкой при третьем цикле сжатия

Номер образца	Количество слоев, шт	Толщина оболочки, мм	Толщина оболочки при нагрузке, кПа.				
			100	300	600	900	1200
1	2	3	4	5	6	7	8
1	18	7,23	6,13	5,59	5,13	4,73	4,39
2	19	7,48	6,23	5,68	5,23	4,82	4,51
3	20	7,71	6,3	5,78	5,35	4,94	4,59
4	21	7,96	6,41 .	5,89	5,40	5,04	4,76
5	22	8,18	6,52	5,98	5,56	5,25	4,85

Так как на практике возникает необходимость получения многослойной оболочки с заданными значениями толщины, при определенном значении объемной плотности, допустимые отклонения которых не должны превышать соответственно ±0,1 мм и ±0,02 г/см^3, на основе полученных результатов (табл.2 и рис.1) были определены рекомендуемые величины сжимающей нагрузки на пакет для получения требуемых параметров в процессе изготовления (табл.3). А в табл.4 представлены величины объемной плотности исследуемых образцов в зависимости от величин сжимающей нагрузки.

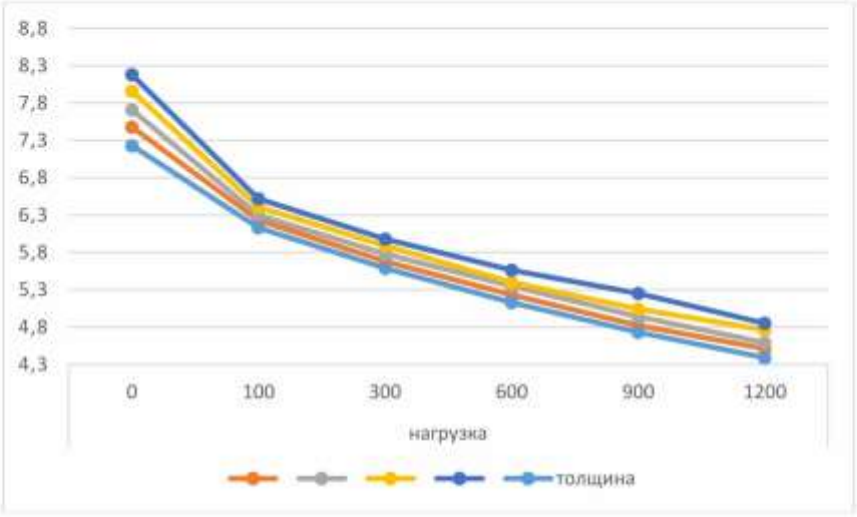


Рис. 1. Зависимость толщины образцов от сжимающей нагрузки после трех циклов сжатия

Таблица 3

Рекомендуемая величина сжимающей нагрузки (кПа) для получения требуемой толщины оболочки

Требуемая толщина, мм	Величина нагрузки (кПа) при количестве слоев				
	18	19	20	21	22
4,9±0,1	660 ÷831	755÷956	840÷1058	957÷1204	1159÷1467

Таблица 3.4

Значения объемий плотности (г/см^3) оболочек в зависимости от сжимающей нагрузки

Требуемая объемная плотность, г/см^3	Значение объемной плотности при сжимающей нагрузке, кПа				
	660 ÷831	755÷956	840÷1058	957÷1204	1159÷1467
1±0,02	0,9-0,94				
1±0,02		0,95-0,99			
1±0,02			1-1,04		
1±0,02				1,05-1,09	
1±0,02					1,1-1,14

Таким образом, в результате всех проведенных исследований установлено, что при проектировании многослойных оболочек из стеклоткани марки Г\С 8\3 КТО ГОСТ 6-11-216-76 толщиной 4,9±0,1 мм и с объемной плотнотью 1±0,02 г\см^3 рекомендуется испльзовать оболочки, состоящие из 20 слоев, при сжимающей нагрузке 840-1058 кПА.

Литература:

1. Curtis P.T., Bishop S.M. Composites. 1984.-259.
2. Датуашвили М.В., Сергеева Н.И., Долидзе Н.А. Исследование возможности дополнительного армирования многослойных тканевых оболочек методом прошивки. ENG. NEWS. №2. 2007. стр. 160.
3. Фишер Р. Статические методы для исследователей. Пер. с англ. Госстатиздат. Москва. 1958.
4. Мортон В.Е. , Хелп В.И Механические свойства текстильных волокон. Пер. с англ.Легкая индустрия. Москва.1971.-184 стр.
5. Датуашвили М.В.,Базаев Е.М., Посполота А.П. Исследование деформиационных процессов в многослойных оболочках из тканей. Швейная промышленность №3. Москва.1993.43-45 стр.
6. Дрейнер Н.,Смит Г.Прикладной регресионный анализ. Пер. с англ. Мир. Москва.1975.
7. Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. Мир. Москва.1975.
8. Перепелкин К.Е. Полимерные волокнистые композиты, их основные виды, принципы получения и свойства. Химические волокна, 2005, № 4, с. 7 - 22.; № 5 - С. 55-69; 2006, №1.
9. HIGH-TEX FROM GERMANI. Высокие текстильные технологии из германии. Аннотации докладов на симпозиуме в рамках выставки TECHTEXTIL RUSSIA

INVESTIGATION OF DEFORMATION PROCESSES IN MULTILAYERED SHELLS UNDER COMPRESSION

Datuashvili M.V.
Akaki Tsereteli State University

The article deals with the design of multi-layer reinforced fabric shells for fiberglass products. The analysis of literary sources has shown that the main indicators of the operational properties of products from reinforced plastic are their bulk density, stability of shape and geometric dimensions. As a criterion for estimating the change in the geometric dimensions of single-layered shells, the value of the deformation of the compression along the thickness is chosen. When creating a reinforcing cage, it is necessary to provide the required thickness at a certain volume density. The regulation of geometric dimensions and bulk density largely depends on the technological processes of manufacturing a multi-layer fabric shell and the assembly of the product itself. The most accessible way to create reinforced structures is the way of flashing laminates with the help of sewing equipment. Tests to determine the change in thickness during compression were carried out according to the developed method. The purpose of the studies is to determine the bulk density in relation to the compression force.

In order to determine the magnitude of the total deformation of the multilayer shell, depending on the compression force and the number of loading cycles, a methodology for the study was developed.

As a result of the conducted studies and processing of the results it was established that when designing multilayer shells of glass fabric of grade G \ S 8 \ 3 KTO GOST 6-11-216-76 with a thickness of 4.9 ± 0.1 mm and with a bulk density of 1 ± 0.02 g / cm3, it is recommended to use shells consisting of 20 layers, with a compressive load of 840-1058 kPa.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОФАЗОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Киквидзе О.Г.*, Сахвадзе Г.Ж.**

*Государственный университет Ак. Церетели, г. Кутаиси, Грузия
**Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва, Российская Федерация

В статье приведены уравнения, описывающие деформирование металлов за пределами упругости при термомеханическом нагружении с учетом фазовых превращений. Дана методика решения краевой задачи. Рассмотрен расчет толстостенной трубы и дан анализ результатов расчета.

Ключевые слова: *деформация, напряжение, неупругое деформирование, фазовые превращения, краевая задача*

При моделировании краевой задачи необходимо записать замкнутую систему уравнений и сформулировать граничные условия. Общие предположения, принимаемые при постановке задачи, следующие: тело изотропное и изначально свободно от напряжений, объемными силами пренебрегаем, термосиловое нагружение статическое, температурное поле стационарное и оно задано.

Замкнутая система уравнений неупругого деформирования металлов в интервале температур фазовых превращений включает в себя следующие уравнения:

- уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \qquad i, j = 1,2,3 \ ; \tag{1}$$

- уравнения, связывающие компоненты приращения компонентов деформаций с компонентами приращений перемещений

$$d\varepsilon_{ij} = [\partial(du_i)/\partial x_j + \partial(du_j)/\partial x_i]/2, \quad i, j = 1,2,3 ; \tag{2}$$

- уравнения, связывающие приращения компонентов деформаций с приращениями компонентов напряжений, с компонентами напряжений и с приращением температуры. В работе [1] для приращений неупругих деформаций в интервале температур фазовых превращений получены определяющие уравнения:

$$d\varepsilon_{ij}^{\ H} = \partial(a_{kl}\varepsilon_{kl}^{H})/\partial\sigma_{ij}dT + 3\overline{d\varepsilon}_e^{*H}(\sigma_{ij} - \sigma_0)/(2\sigma_e),$$

где

$$\overline{d\varepsilon}_e^{*H} = \sqrt{2de_{ij}^{*H}de_{ij}^{*H}/3}, \quad de_{ij}^{*H} = d\varepsilon_{ij}^{H} - \partial(a_{kl}\varepsilon_{kl}^{H})/\partial\sigma_{ij}dT \ , \tag{3}$$

a_{kl} - параметры материала, которые определяются путем обработки дилатометрических кривых, σ_0 - гидростатическое давление, σ_e - эквивалентное напряжение.

Используя принцип аддитивности, приращения полной деформации представим как сумму приращений упругих, температурных и неупругих деформаций $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^H$. Имеем:

$$d\varepsilon_{ij} = [d\sigma_{ij} - \delta_{ij} d(3\nu\sigma_0/(1+\nu))]/(2G) + [\alpha\delta_{ij} + \partial(a_{kl}\varepsilon_{kl}^H)/\partial\sigma_{ij}]dT + 3\overline{d\varepsilon}_e^{*H}(\sigma_{ij} - \sigma_0)/(2\sigma_e) \quad (4)$$

где ν - коэффициент Пуассона. При записи соотношения (4) полагается, что модуль упругости второго рода G и коэффициент линейного температурного расширения α не зависят от температуры.

Уравнение (4) замыкается зависимостью $\sigma_e = F(\int \overline{d\varepsilon}_e^{*H})$, которая определяется на основе экспериментальных данных. Решение задачи должно удовлетворять уравнениям совместности деформаций.

Для большинства сплавов с памятью формы при термоупругих мартенситных превращениях изменением объема от фазовых превращений можно пренебречь. Следовательно, $\partial(a_{kk}\varepsilon_{kk}^H)/\partial\sigma_{ij} = 0$. При сварке конструкционных материалов изменение объема неупругого характера в интервалах температур фазовых превращений существенно и необходимо учитывать в расчетах.

Для определения неизвестных σ_{ij}, ε_{ij}, u_i имеем уравнения (1), (2), (4). Интегрирование дифференциальных уравнений проводиться при граничных условиях:

статических $\sigma_{ij}\mu_j|_{\sum\sigma} = p_i$, кинематических $u_i|_{\sum u} = u_i^*$. (5)

В соотношении (4) входит нелинейный множитель $\overline{d\varepsilon}_e^{*H}/\sigma_e$ и для решения краевой задачи используются приближенные (итерационные) методы [2]: метод переменных параметров упругости, метод дополнительных напряжений или метод дополнительных деформации. Представим величину $\overline{d\varepsilon}_e^{*H}$ в виде суммы:

$$\overline{d\varepsilon}_e^{*H} = \overline{d\varepsilon}_e^{H} + d\varepsilon_{dop}, \quad (5)$$

где $d\varepsilon_{dop}$ - назовем приращением дополнительной деформации.

Задачу решим в напряжениях. Решение нелинейной задачи строится в следующей последовательности:

1. на первом шаге итерации задается нулевое приближение компонентов напряжений σ_{ij}^{10}, удовлетворяющие граничным условиям. Положим $\overline{d\varepsilon}_e^{*H} \approx \overline{d\varepsilon}_e^{H}$, $\partial(a_{kl}\varepsilon_{kl}^H)/\partial\sigma_{ij} \approx 0$;

2. далее определяются соответствующие значения эквивалентного напряжения σ_e^{10}, дополнительной деформации $d\varepsilon_{dop}^{10}$ и эквивалентной величины приращений неупругой деформации по формуле (Q - структурный параметр)

$$\bar{d}\bar{\varepsilon}_e^H = F_{*\sigma}(T,\sigma_e,Q)d\sigma_e + F_{*T}(T,\sigma_e,Q)dT \qquad (6)$$

3. определяются $\bar{d}\bar{\varepsilon}_e^{*H10} = \bar{d}\bar{\varepsilon}_e^{H10} + d\varepsilon^{10}{}_{dop}$;

4. определяются приращения компонентов неупругой деформации $d\varepsilon_{ij}^{H1}$;

5. интегрируются дифференциальные уравнения и определяются сначала компоненты напряжений σ_{ij}^1, а затем величины $\sigma_e^1, \bar{d}\bar{\varepsilon}_e^{H1}$. Значения $\partial(a_{kl}\varepsilon_{kl}^H)/\partial\sigma_{ij}$ находятся по формуле:

$$\partial(a_{kl}\varepsilon_{kl}^H)/\partial\sigma_{ij} \approx a_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}^H/(\sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^{10}); \qquad (7)$$

6. определяются компоненты de_{ij}^{*H1}, $de_{ij}^{*H1} = d\varepsilon_{ij}^{H1} - \partial(a_{kl}\varepsilon_{kl}^H)/\partial\sigma_{ij}dT$, а по формулам (3) вычисляются $\bar{d}\bar{\varepsilon}_e^{*H1}$;

7. величина дополнительной деформации на первом шаге итерации определяется по формуле (5): $d\varepsilon_{dop}^1 = \bar{d}\varepsilon_e^{*H1} - \bar{d}\bar{\varepsilon}_e^{H1}$.

Значения величин σ_{ij}, $\partial(a_{kl}\varepsilon_{kl}^H)/\partial\sigma_{ij}$, $d\varepsilon_{dop}$ на каждом шаге итерации берется с предыдущего шага. Итерационный процесс заканчивается тогда, когда разница значений компонентов напряжений в двух последовательных итерациях не превышает малую, наперед заданную величину.

Интегрирование дифференциальных уравнений в нелинейных задачах проводиться численно, используя метод конечных разностей. Приведенный алгоритм используется для расчета муфт с памятью формы при термомеханическом нагружений в интервале температур термоупругих мартенситных превращений.

В качестве расчетной модели напряженно-деформированного состояния выбран толстостенный цилиндр, нагруженный внутренним давлением и температурным полем. Принимается цилиндрическая система координат r, x, θ. Допускается, что температура распределена по длине цилиндра равномерно, поперечные сечения при деформации остаются плоскими и перпендикулярными к оси, т.е. осевая деформация постоянна. Положим ее равной нулю $\varepsilon_x = 0, d\varepsilon_x = 0$. Задача осесимметричная и, поэтому, величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние, меняются только по радиусу. Приведем основные уравнения, описывающие деформирование цилиндра:

- дифференциальное уравнение равновесия [2]:

$$d\sigma_r/dr + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0\,, \qquad (8)$$

где σ_r, σ_θ - радиальное и окружное напряжения соответственно;

- геометрические соотношения, связывающие приращения окружных и радиальных деформации с приращением радиальных перемещений точки и радиусом:

$$d\varepsilon_r = d(du)/dr, \quad d\varepsilon_\theta = du/r \ ; \tag{9}$$

- уравнение совместности деформации:

$$rd(d\varepsilon_\theta)/dr + d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_r = 0 \ . \tag{10}$$

Формулы (4) для приращений компонентов деформаций принимают вид:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_r &= [d\sigma_r - \nu(d\sigma_\theta + d\sigma_x)]/E + [\alpha + \partial(a_k\varepsilon_k^H)/\partial\sigma_r]dT + d\lambda(\sigma_r - \sigma_0), \\ d\varepsilon_\theta &= [d\sigma_\theta - \nu(d\sigma_r + d\sigma_x)]/E + [\alpha + \partial(a_k\varepsilon_k^H)/\partial\sigma_\theta]dT + d\lambda(\sigma_\theta - \sigma_0), \\ d\varepsilon_x &= [d\sigma_x - \nu(d\sigma_r + d\sigma_\theta)]/E + [\alpha + \partial(a_k\varepsilon_k^H)/\partial\sigma_x]dT + d\lambda(\sigma_x - \sigma_0), \end{aligned} \tag{11}$$

где: E - модуль упругости первого рода, $d\lambda = 3\overline{d\varepsilon}_e^{*H}/(2\sigma_e)$.

В интервале температур термоупругих мартенситных превращений изменением объема неупругого характера можно пренебречь. После несложных преобразований уравнений (8), (9), (10), (11) получается система дифференциальных уравнений относительно компонентов напряжений:

$$\begin{aligned} &d^2\sigma_r/dr^2 + \{3(\nu+4)/[r(5\nu+8)] + 7Ed\lambda/[(5\nu+8)dr]\}d\sigma_r/dr - (1+4\nu)/[(5\nu+8)r]d\sigma_x/dr + \\ &2Ed\lambda(\sigma_r - \sigma_x)/[(5\nu+8)rdr] - 3E\alpha dT/[(5\nu+8)rdr] = 0 \\ &d\sigma_x/dr + 2E\sigma_x d\lambda/(3dr) - \nu d(\sigma_r + \sigma_\theta)/dr - E\alpha dT/dr - Ed\lambda(\sigma_r + \sigma_\theta)/(3dr) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

При решении системы уравнений (12) имеем граничные условия:

$r = r_1 \quad \sigma_r = -p; \qquad r = R_1 \quad \sigma_r = 0$, а также условие равенство нулю суммарной осевой силы:

$$\int_{r_1}^{R_1} \sigma_x r dr = 0 . \tag{13}$$

Условие (13) удобнее будет удовлетворить, если ввести обозначение: $\sigma_x^0 = \int_{r_1}^{r} \sigma_x r dr$. В этом случае имеем

$$\sigma_x = d\sigma_x^0/(rdr) \ . \tag{14}$$

Тогда второе уравнение системы (12) с учетом уравнений (8) и (14) примет вид:

$$\frac{d^2\sigma_x^0}{dr^2} - (\frac{1}{r} - \frac{2}{3}E\frac{d\lambda}{dr})\frac{d\sigma_x^0}{dr} - \nu r^2\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} - \frac{d\sigma_r}{dr}(3r\nu + \frac{Er^2}{3}\frac{d\lambda}{dr}) + rE\alpha\frac{dT}{dr} - \frac{2}{3}Er\frac{d\lambda}{dr}\sigma_r = 0 \tag{15}$$

Для интегрирования уравнения (15) имеем очевидные граничные условия:

$$r = r_1 \quad \sigma_x^0 = 0; \qquad r = R_1 \quad \sigma_x^0 = 0. \tag{16}$$

Окружное напряжение σ_θ определяется из уравнения равновесия (8) $\sigma_\theta = \sigma_r + r d\sigma_r / dr$.

Эквивалентное напряжение определяется как [2]:

$$\sigma_e = \sqrt{[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_r)^2]/2} \tag{17}$$

В рассматриваемом случае $\overline{d\varepsilon}_e^{*H} = d\varepsilon_e^H = F_{*\sigma} d\sigma + F_{*T} dT$, где функции $F_{*\sigma}, F_{*T}$ зависят от механических свойств материала в интервалах температур фазовых превращений и определяются после обработки экспериментальных кривых. С учетом последнего соотношения и формулы (17), определяется множитель $d\lambda / dr = 3\overline{d\varepsilon}_e^{*H} / (2 dr \sigma_e)$. Таким образом, напряженно-деформированное состояние толстостенного цилиндра определяется с учетом термоупругих фазовых превращений и пути термомеханического нагружения $P = P(T)$.

Решение системы дифференциальных уравнений (15), первого уравнения (12) проводится численно методом конечных разностей. В качестве нулевого приближения для напряжения σ_r берется линейная функция удовлетворяющая граничным условиям, а для σ_x^0-квадратичную функцию, удовлетворяющая условиям (16). По формулам (14) и (8) определяются соответствующие значения σ_θ, σ_x. Далее решение проводится по описанной выше методике. Проведен расчет толстостенного цилиндра, у которого $r_1 / R_1 = 0{,}5$. Температура распределена по радиусу по степенному закону $T = T_0 + (T_1 - T_0)[(r - r_1)/(R_1 - r_1)]^{1/2}$, где T_1, T_0- температуры наружной и внутренней поверхностей соответственно.

Расчеты показывают, что закон изменения температуры больше влияет на окружные напряжения, чем на радиальные и осевые. Отношение T_1 / T_0 также существенно влияет на распределение растягивающих окружных напряжений. Растягивающие окружные напряжения могут быть причиной появления продольных трещин в трубах при наличии дефектов в материале.

Литература

1. Киквидзе О.Г. Неупругое деформирование материала при термомеханическом нагружении твердых тел. РАН и МОНРФ. Машиностроение и инженерное образование.- №2.-2005.-С.55-59
2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. Изд. 3-ое, перераб. и доп. М.:, Издательство Юрайт, 2017-402с.

MODELLING OF INELASTIC DEFORMATION METALS AND METHOD SOLUTIONS OF TERMOELASTICPHASE BOUNDARY PROBLEM

Kikvidze O*., Sakhvadze G.**
*Ak. Tsereteli State University Kutaisi, Georgia
**Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, RUSSIA

The equations of non elastic deformation of metals at thermomechanical loading taking into account phase transformations are given. In the article presented method of solution of boundary problem. Calculation of a thick-walled pipe is considered and the analysis of results of calculation is given.

Об одной практической методике определения усилий в стенках многоячейковых силосных корпусов

Панин А.Н.

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

В технической литературе, несмотря на большое количество проведенных экспериментальных и теоретических исследований, до сих пор не существует общепризнанной универсальной расчетной модели стенок многоячейковых силосных корпусов, особенно, так называемых «сотовых» силосных корпусов. В настоящей работе предложена достаточно простая для практического применения инженерная расчетная модель стенок многоячейковых силосных корпусов с прямоугольной и квадратной формой ячеек в плане для определения величин усилий в стенках от горизонтального и вертикального давления сыпучих материалов. Предлагаемая расчетная модель стенок может быть применима также и для расчета стенок отдельно стоящих силосов (с одной-тремя ячейками) с прямоугольной и квадратной формой ячеек в плане.

Ключевые слова: силос, стенка ячейки, сыпучие материалы, давление, усилие

1. Введение

При производстве строительных материалов, сборных бетонных и железобетонных конструкций, в дорожном строительстве широкое применение находят хранилища для сыпучих материалов (бункера, силосы) для временного хранения строительных материалов (цемента, песка, щебня, гравия и т.п.). В пищевой отрасли, в сельском хозяйстве силосы активно применяют для хранения зерна, муки, комбикормов. Возводятся как отдельные силосы, так и группы силосов – многоячейковые силосные корпуса.

Стенки силосных корпусов для хранения сыпучих материалов находятся в сложном напряженном состоянии: они растянуты в горизонтальном и сжаты в вертикальном направлениях, они испытывают местный изгиб в двух направлениях. Нагрузка на стенки от сыпучих материалов, в общем случае, распределяется неравномерно по высоте и периметру поперечного сечения силоса. Стенки ячеек испытывают также действие изгибающих моментов при загрузке и выгрузке сыпучего материала из ячеек, вследствие неравномерного распределения давления по периметру стенок, испытывают температурные напряжения и усадку.

Принимая во внимание большую номенклатуру форм, размеров ячеек (банок) и большое количество ячеек в продольном и в поперечном рядах многоячейковых силосных корпусов, при расчете их стенок (на горизонтальное давление) за расчетные модели стенок предлагается принимать горизонтальные «многопролетные многоэтажные» рамы. При этом стены силоса разбиваются по высоте на отдельные полосы «единичной ширины», которые рассчитываются на внецентренное растяжение от максимального горизонтального давления в пределах этой полосы. Распределение горизонтального давления по высоте выбранной полосы и периметру поперечного сечения ячейки принимается равномерно распределенным. Предлагаемая расчетная модель стенок силосов не учитывает динамический характер давления от сыпучей массы на стенки силоса.

Существенным, как показывает анализ технической литературы по этому вопросу, является тот факт, что загружение ячеек, удаленных от рассматриваемой ячейки, на величины усилий в стенках последней оказывает очень незначительное влияние [1 ÷ 6]. Соответственно, в предлагаемой расчетной модели стенок многоячейковых силосов учитывается упомянутое обстоятельство.

2. Расчетная модель

В настоящей статье, основой которой стала выполненная работа по обследованию эксплуатируемого монолитного железобетонного силосного корпуса, рассматриваются многоячейковые железобетонные монолитные силосные корпуса с прямоугольными и квадратными в плане ячейками. В качестве расчетных моделей стенок таких силосных корпусов, как в продольном, так и в поперечном рядах, предлагается принимать горизонтальные трехячейковые рамы [6] (рис. 1). Расчетные усилия в стенках условной трехячейковой рамы при различных вариантах загружения ячеек определяются с использованием формул из таблицы 3.148, разработанных для расчета замкнутых прямоугольных труб, как горизонтально, так и вертикально расположенных [1]. Сопряжения элементов (стенок) между собой в таких рамах принимаются жесткими. Пространственная работа рам не учитывается. Предлагаемая расчетная модель распространяется и на рамы с большим, чем 3, количеством ячеек, так что все стенки промежуточных ячеек (при их количестве 2 и более) условно считаются работающими как стены средних ячеек трехячейковой рамы.

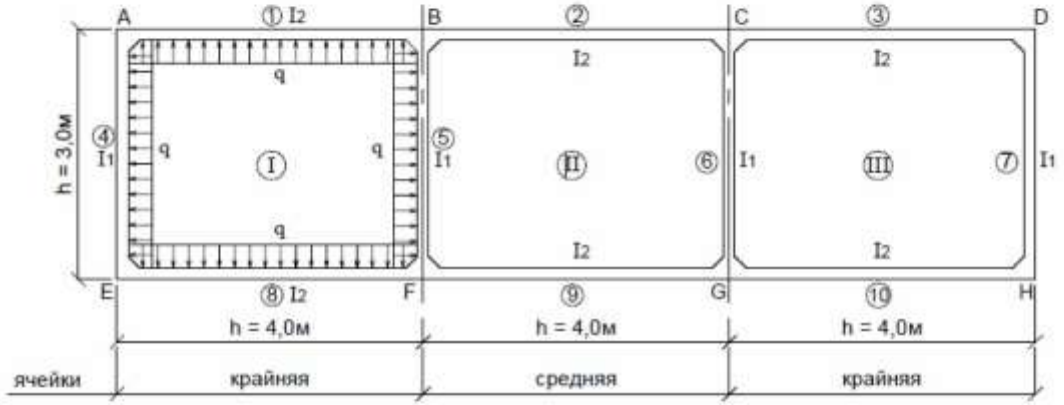


Рис.1. Расчетная схема многоячейковых силосных корпусов
(I, II, III – номера ячеек (одновременно номера используются еще и как варианты загружения); 1 ÷ 9 – номера стенок ячеек; I_1, I_2 – моменты инерции стенок)

Параметры k, n и m определяются по формулам [1]:

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l};$$
$$n = 5k^2 + 5k + 1; \qquad (1)$$
$$m = 9k^2 + 7k + 1.$$

Величины опорных (узловых) изгибающих моментов в стенках условной трехячейковой рамы «единичной» ширины (по высоте) при загружении сыпучим материалом только крайней левой ячейки, что соответствует варианту загружения I (рис. 1), будут определяться по следующим формулам [1], [6]:

$$\begin{matrix} M_A = M_E \\ M_D = M_H \end{matrix} = \frac{q}{24}\left[\frac{l^2(4k+1) + h^2k(5k+1)}{n} \pm \frac{l^2(6k+1)) + h^2k(9k+1)}{m}\right];$$
$$\begin{matrix} M_{B1} = M_{F8} \\ M_{C3} = M_{G10} \end{matrix} = \frac{q}{24}\left[\frac{l^2(3k+1)(k+1) + h^2k(2k+1)}{n} \pm \frac{l^2(9k^2+6k+1) + h^2k}{m}\right]; \qquad (2)$$

$$\begin{matrix} M_{B5} = M_{F5} \\ M_{C6} = M_{G6} \end{matrix} = \frac{q}{24}\left[\frac{l^2(3k+1)+h^2k(5k+2)}{n} \pm \frac{l^2(6k^2+5k+1)+h^2k(3k+2)}{m}\right];$$

$$\begin{matrix} M_{B2} = M_{F9} \\ M_{C2} = M_{G9} \end{matrix} = \frac{q}{24}[(l^2-h^2)k(3k+1)] \cdot \left[\frac{1}{n} \pm \frac{1}{m}\right],$$

где q - горизонтальное давление сыпучего материала на стенки силосов.

Аналогичным образом выводятся формулы для других вариантов загружения ячеек силосного корпуса. С целью экономии места формулы не приводятся.

3. Результаты расчета

В расчетах условной трехячейковой рамы предполагается одинаковая толщина всех стенок ячеек, так что моменты инерции стенок $I_1 = I_2$. Для прямоугольных в плане ячеек при $h = 3{,}0\ м$; $l = 4{,}0\ м$ (см. формулы 1)

$$k = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{h}{l} = \frac{I_2}{I_1} \cdot \frac{3{,}0}{4{,}0} = 0{,}75;$$
$$n = 5k^2 + 5k + 1 = 5 \cdot 0{,}75^2 + 5 \cdot 0{,}75 + 1 = 7{,}563; \qquad (3)$$
$$m = 9k^2 + 7k + 1 = 9 \cdot 0{,}75^2 + 7 \cdot 0{,}75 + 1 = 11{,}313.$$

Ниже (в таблице 1) с использованием формулы (2) и ее аналогов для других возможных вариантов загружения ячеек определены величины опорных и пролетных значений моментов в стенках условной трехячейковой рамы «единичной» ширины (по высоте) [6]. Номера I, II, III в таблице 1 соответствуют загружениям ячеек с этими номерами. В таблице 1 приведены величины опорных и пролетных моментов во всех характерных сечениях такой рамы. Определены только максимальные пролетные изгибающие моменты $M_{pr\,i}$ и $M_{pr\,j}$ в стенках нагруженных ячеек при найденных опорных моментах с использованием известных формул строительной механики; цифра в нижнем индексе обозначает номер стенки ячейки (рис. 1).

Из таблицы 1 видно, что расчетные усилия в стенках рассматриваемой ячейки определяются в основном загружением этой ячейки и мало зависят от загружения других (особенно удаленных) ячеек. Хотя расчетные формулы [1] не обладают высокой точностью вычислений применительно к стенкам незагруженных ячеек, они дают вполне приемлемые результаты расчетных усилий для такого рода инженерных задач.

Таблица 1. Величины узловых и пролетных изгибающих моментов в стенках ячеек при разных вариантах загружения

M в узле	Варианты загружения ячеек (рис. 1)				
	I	II	I + III	I + II	I + II + III
M_A	1,05q	-0,06q	1,06q	0,99q	q
M_D	0,01q	-0,06q	1,06q	-0,05q	q
M_H	0,01q	-0,06q	1,06q	-0,05q	q
M_E	1,05q	-0,06q	1,06q	0,99q	q
M_{B1}	1,24q	0,25q	1,19q	1,49q	1,43q
M_{B2}	0,16q	1,19q	-0.19 q	1,34q	1,37q
M_{B5}	1,09q	-0,94q	q	0,15q	0,06q
M_{C2}	0,03q	1,19q	-0.19 q	1,22q	1,37q

M_{C3}	-0,05 q	0,25q	1,19q	0,19q	1,43q
M_{C6}	-0,08 q	-0,94q	q	-1,03q	0,06q
M_{F5}	1,09q	-0,94q	q	0,15q	0,06q
M_{F8}	1,24q	0,25q	1,19q	1,49q	1,43q
M_{F9}	0,16q	1,19q	-0.19 q	1,34q	1,37q
M_{G6}	-0,08 q	-0,94q	q	-1,03q	0,06q
M_{G9}	0,03q	1,19q	-0.19 q	1,22q	1,37q
M_{G10}	-0,05q	0,25q	1,19q	0,19q	1,43q
	M_{pr1} = -0,86q	M_{pr2} = -0,81q	M_{pr1} = -0,88q	M_{pr1} = -0,76q	M_{pr1} = -0,79q
	M_{pr8} = -0,86q	M_{pr9} = -0,81q	M_{pr8} = -0,88q	M_{pr2} = -0,72q	M_{pr2} = -0,63q
	M_{pr4} =-0,08q	M_{pr5} = 0,19q	M_{pr4} =-0,07q	M_{pr4} =-0,14q	M_{pr4} =-0,13q
	M_{pr5} =-0,04q	M_{pr6} = 0,19q	M_{pr5} =-0,07q	M_{pr6} = 0,1q	M_{pr5} = 0,06q

В соответствии с предлагаемой расчетной моделью стенок силосов были произведены расчеты нагрузок и усилий в стенках многоячейкового силосного корпуса с размерами ячеек $h \cdot l =$ 3,0 × 4,0 м, заполненных щебнем средних фракций. Основные характеристики сыпучего материала:

- нормативная величина объемного веса щебня – $\gamma = 2000$ кг/м^2;
- угол естественного откоса (угол внутреннего трения) – $\varphi = 30°$;
- коэффициент трения щебня по поверхности бетона – $f = 0{,}5$.

Величина расчетного давления сыпучего материала на стенки силоса при полном (доверху) его загружении сыпучим материалом определяется по формуле Янсена-Кенена на глубине z, равной [2], [4]

$$z = 23{,}0 - 3{,}8 = 19{,}2\ м, \qquad (4)$$

где 23,0 м – высота верха засыпки; 3,8 м – отметка верха конического днища силоса (рис. 2).

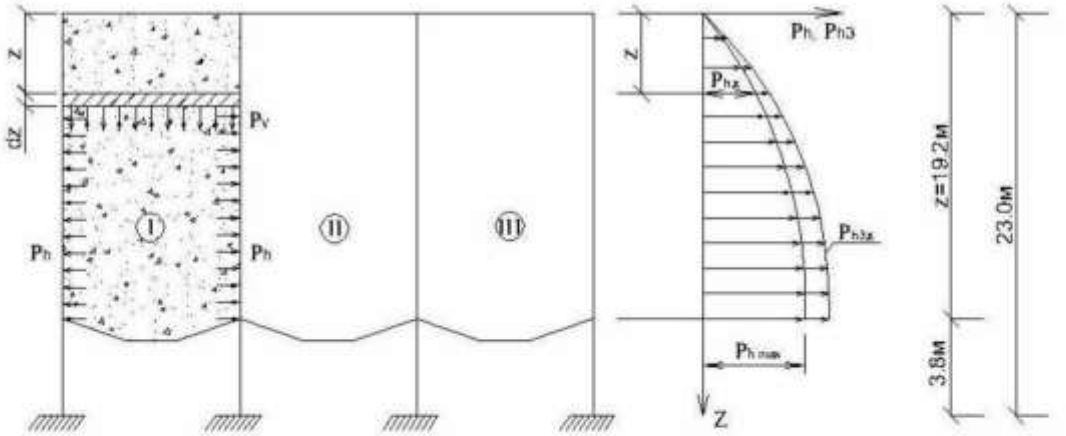


Рис. 2. Распределение горизонтального давления сыпучего материала на стенки силоса p_h (по формуле Янсена-Кенена) и горизонтального полосового давления p_{h3}

Коэффициент бокового давления [2], [4]

$$k = \frac{p_h}{p_v} = tg^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) = tg^2\left(45^0 - \frac{30^0}{2}\right) = 0{,}333. \quad (5)$$

Гидравлический радиус поперечного сечения одной прямоугольной в плане ячейки

$$r_h = \frac{A}{U} = \frac{9{,}36}{12{,}4} = 0{,}75\,, \quad (6)$$

где A – площадь поперечного сечения ячейки в свету, U – периметр поперечного сечения стен силоса (по внутренним поверхностям стен).

Параметры ξ и A_i определяются по формулам [2], [4]:

$$\xi = \frac{fkz}{r_h} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}333 \cdot 19{,}2}{0{,}75} = 4{,}262. \quad (7)$$

$$A_i = 1 - e^{-\xi} = 1 - e^{-fkz/r_h} = 1 - 2{,}71828^{-4{,}262} = 0{,}986, \quad (8)$$

где e – основание натурального логарифма.

Величины расчетных давлений сыпучих материалов на стены [2], [3], [4] на глубине $z = 19{,}2\ м$:

- расчетное вертикальное давление при коэффициенте надежности по нагрузке $\gamma_f = 1{,}3$

$$p_v = \left(\frac{\gamma r_h}{fk}\right) \cdot A_i \gamma_f = \left(\frac{2{,}0 \cdot 0{,}75}{0{,}5 \cdot 0{,}333}\right) \cdot 0{,}986 \cdot 1{,}3 = 11{,}548\ т/м^2, \quad (9)$$

- расчетное горизонтальное давление при коэффициенте надежности по нагрузке $\gamma_f = 1{,}3$

$$p_h = \left(\frac{\gamma r_h}{f}\right) \cdot A_i \gamma_f = \left(\frac{2{,}0 \cdot 0{,}75}{0{,}5}\right) \cdot 0{,}986 \cdot 1{,}3 = 3{,}845\ т/м^2. \quad (10)$$

То же, с учетом коэффициента зависания сыпучего материала j:

$$j = \frac{\left(1 - e^{-\xi}\right)}{\xi} = \frac{1 - e^{-4{,}262}}{4{,}262} \approx 0{,}231, \quad (11)$$

- расчетное вертикальное давление при коэффициенте надежности по нагрузке $\gamma_f = 1{,}3$

$$p_v = j\gamma z\gamma_f = 0{,}231 \cdot 2{,}0 \cdot 19{,}2 \cdot 1{,}3 = 11{,}549 \frac{т}{м^2} \quad (12)$$

- расчетное горизонтальное давление при коэффициенте надежности по нагрузке $\gamma_f = 1{,}3$

$$p_h = kj\gamma z\gamma_f = 0{,}333 \cdot 0{,}231 \cdot 2{,}0 \cdot 19{,}2 \cdot 1{,}3 = 3{,}840\ т/м^2 \quad (13)$$

Помимо горизонтального давления p_h на стенки ячеек квадратных и прямоугольных силосов во время заполнения и опорожнения емкостей, а также в процессе хранения сыпучих материалов дополнительно действует еще полосовое горизонтальное давление p_{h3} [4]. Нормативное значение полосового давления вычисляют по формуле

$$p_{h3}^n = a_3 p_h^n \quad (14)$$

где a_3 – коэффициент местного повышения давления сыпучего материала, равномерно распределенного по всему периметру квадратного, прямоугольного силоса в любом их месте по высоте. Для квадратных и прямоугольных силосов со стороной 3 ÷ 4 м коэффициент a_3 принимается равным 0,2.

Тогда, расчетная нагрузка от горизонтального давления сыпучего материала на стенки силосов составит [4]:

$$q = (p_h + p_{h3}) = (3{,}845 + 0{,}769) = 4{,}614\ т/м^2 \quad (15)$$

Величины внутренних усилий на единицу высоты стенок ячеек от расчетного горизонтального давления $q = 4{,}614\ т/м^2$ составят (таблица 2):

Таблица 2. Максимальные внутренние усилия на единицу высоты стенок ячеек

№ п/п	Усилие	Формула	Величина усилия, (т·м, т)
1.	Моменты в узлах А и Е при варианте загружении ячеек (I + III)	$M_{max} = 1{,}06q$	4,891
2.	Моменты в узлах В1 и F8 при варианте загружении ячеек (I + II)	$M_{max} = 1{,}49q$	6,875

3.	Пролетные моменты для середин стенок 1 и 8 при варианте загружения ячеек (I + III)	$M_{pr\,max} = -0{,}88q$	−4,06
4.	Растягивающее усилие в стенке при загружении только одной ячейки	$N = \frac{1}{\gamma_c}(p_h + p_{h3})\frac{l}{2}$	4,614
5.	Растягивающее усилие в средней стенке при загружении двух соседних ячеек	$N = \frac{1}{\gamma_c}(p_h + p_{h3})l$	9,228

Проверка прочности стенок ячеек, подбор рабочей арматуры в стенках производится с учетом работы их как внецентренно нагруженных элементов при заполнении сыпучим материалом только этой ячейки. Все промежуточные (смежные) стенки при загружении двух соседних ячеек силоса рассчитываются как условно центрально растянутые элементы.

Величины пролетных изгибающих моментов в наружных стенках ячеек, в зависимости от номера стенки и варианта загружения для данной конкретной задачи, в 1,20 ÷ 2,27 раза меньше опорных (узловых) моментов.

Выводы

Проведенное в настоящей статье и работе [6] численное исследование предлагаемой расчетной модели стенок силосных корпусов с прямоугольными в плане ячейками позволили сделать следующие выводы:

1. Величины усилий в стенках ячеек, удаленных от загружаемой ячейки, будут очень малыми, по сравнению с расчетными усилиями, возникающими в стенках непосредственно загружаемой ячейки. Принимая во внимание это обстоятельство, при исследовании поведения многоячейкового силосного корпуса выбор его трехячейковой расчетной модели вполне оправдан таким количеством ячеек, как по продольным, так и по поперечным рядам.

2. Расчетные (в том числе, максимальные) значения внутренних усилий в характерных сечениях стенок многоячейкового корпуса могут быть найдены с использованием предлагаемой расчетной модели при разных вариантах загружения ячеек (см. таблицу 1).

3. Расчетные формулы для изгибающих моментов из [1] обладают приемлемой точностью вычислений и дают хорошие результаты расчетных усилий при рассмотрении инженерных задач. Расчеты легко выполняются «вручную», без применения сложных программных комплексов на ЭВМ.

Список использованной литературы

1. Улицкий И.И., Ривкин С.А., Самолетов М.В., Дыховичный А.А. Железобетонные конструкции (расчет и конструирование) // Киев, Гос. изд-во техн. лит-ры УССР, 1958. – 876 с.

2. Латышев Б.В. Практические методы расчета железобетонных силосных корпусов / Б.В. Латышев // Л., Стройиздат, 1973. – 112 с.

3. Липницкий М.Е., Абрамович Ж.Р. Проектирование железобетонных бункеров и силосов / М.Е. Липницкий, Ж.Р. Абрамович // Л.-М., Гос. изд-во лит-ры по стр-ву, арх-ре и стр-ным мат-лам, 1960. – 288 с.

4. СП 108.13330.2012. Предприятия, здания и сооружения по хранению и переработке зерна. Актуализированная редакция СНиП 2.10.05-85 (с Изменением №1) // М.: 2013.

5. Маркович А.С., Панкратова Ж.Е. Исследование расчетных моделей стен силосных сооружений // Строительная механика инженерных конструкций и ссоружений. 2011, №3, с. 15-23. – М., Издание РУДН.

6. Panin A.N. A design model for multi-cell silo block walls // Proceeding of 10th International Conference Contemporary Problem of Architecture and Construction / September 20th – 26st , 2018, China – Beijing (in print).

About One Simple Method of Determining the Efforts in the Walls of the Silo Blocks with a Large Number of Cells

Panin A.
Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering

In the technical literature, despite the large number of experimental and theoretical studies, there is still no generally recognized universal computational model of the walls of multi-cell silo buildings, especially the so-called "cellular" silo buildings. In this paper we propose a simple enough for practical application engineering design model of the walls of multi-cell silo buildings with rectangular and square shape of cells in terms to determine the magnitude of the forces in the walls of the horizontal and vertical pressure of bulk materials. The proposed calculation model of the walls can also be used to calculate the walls of separate silos (with one or three cells) with a rectangular and square shape of the cells in the plan.

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ЛАЗЕРНО-УДАРНО-ВОЛНОВОЙ ОБРАБОТКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА СОБСТВЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Сахвадзе Г.Ж.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова
Российской академии наук, г. Москва, Россия

Аннотация. *Лазерно-ударно-волновая обработка (ЛУВО) материалов является эффективной современной технологией обработки металлических материалов, при которой в приповерхностной области генерируются значительные сжимающие остаточные напряжения (СОН), которые способствуют повышению их прочностных, трибологических и эксплуатационных характеристик. В настоящей работе проведено конечноэлементное моделирование технологии ЛУВО с использованием метода собственных деформаций.*

Ключевые слова. *Лазерно-ударно-волновая обработка материалов, остаточные напряжения, прочностные характеристики материалов, метод собственных деформаций*

Анализ современного состояния вопроса. Общая методология технологии лазерно-ударно-волновой обработки (ЛУВО) материалов состоит в следующем: обрабатываемую поверхность (рис. 1*а*, позиция 5) покрывают непрозрачным для лазерного излучения слоем с низкой температурой испарения: черной краской, металлической фольгой или лентой (3). Сверху находится прозрачный слой (2), роль которого наиболее часто выполняет вода. Энергия лазерного импульса (1) поглощается непрозрачным слоем, что приводит к его нагреву, испарению и формированию высокотемпературной плазмы, ограниченной с одной стороны поверхностью исследуемого материала, а с другой – прозрачным слоем, сдерживающим распространение плазмы. Вследствие ограниченности объема, давление резко возрастает до высоких значений и быстро распространяется в материал в виде ударной волны (4), которая способствует появлению в материале сжимающих остаточных напряжений. Если эти напряжения превосходят упругий предел Гюгонио, то материал деформируется пластически [1]. Параметры процесса, необходимые для реализации технологии ЛУВО, таковы: нужен короткий (в диапазоне 3-30 нс) и интенсивный (> 1 ГВт/см^2) лазерный импульс, перпендикулярно направленный на поверхность исследуемого материала. Поверхностный слой при этом мгновенно испаряются (явление абляции) и образуется приповерхностная плазма (6) с высокими температурой (приблизительно 10000 K) и давлением (> 2 ГПа). Плазма, расширяясь (в сопровождении быстропротекающих физико-химических процессов и фазовых превращений), излучает ударные волны (4), и они распространяются как в среде, так и в твердом теле.

Главным практическим результатом применения технологии ЛУВО является создание в приповерхностный области полей мощных сжимающих остаточных напряжений (СОН), которые благоприятно влияют на такие фундаментальные механические характеристики материалов, как их прочность, долговечность, износо- и корозионостойксть. Основными пользователями технологии ЛУВО (первоначально она была довольно дорогой) являются крупные промышленные, военные и космические корпорации (Airbus, Boeing,

General Electric, Rolls-Royce, Pratt & Whitney и другие). Кроме того, корпорация Toshiba применила ЛУВО-технологии для повышения безопасности атомных реакторов. В последнее время данная технология широко стали применяться и в машиностроении [2].

В настоящей работе численно исследуется плоский образец из ВТ-6 при его обработке по технологии ЛУВО. Хотя ЛУВО может быть успешно применен и для обработки больших и криволинейных поверхностей. Если для таких поверхностей использовать классическую модель ЛУВО [3-4], то возникают значительные вычислительные трудности, но, используя метод собственных деформаций, их можно избегать.

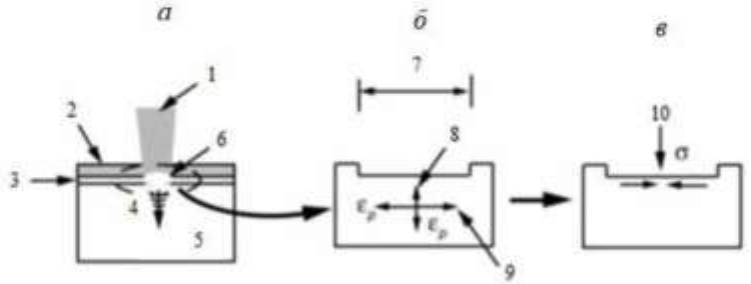


Рис.1. Схематическое представление протекающих в материале процессов при применении технологии ЛУВО и механизма возникновения остаточных напряжений: а) принципиальная схема технологии ЛУВО; б) возникновение пластических деформаций в приповерхностной области во время действия лазерного излучения – явная динамическая задача - моделируется в конечноэлементом пакете LS-DYNA; в) возникновение остаточных напряжений после окончания лазерного воздействия – неявная статическая задача, как упругий отклик на введенные в систему собственные деформаций - моделируется в конечноэлементом пакете ANSYS:
1 – лазерный импульс; 2- прозрачный слой; 3 – непрозрачный слой; 4 – ударная волна; 5 – исследуемый материал; 6- плазма; 7 – область воздействия лазерного импульса; 8 - сжатый в вертикальной плоскости материал (сжимающие пластические деформаций); 9 - растянутый в горизонтальной плоскости материал (растягивающие пластические деформаций); 10 – релаксация деформируемого материла, вызывающей создание поля сжимающих остаточных напряжений в поверхностном слое

Концепция метода собственных деформаций. Сначала необходимо создание наглядной физической модели, объясняющей механизм возникновения пластических деформаций, и, соответственно, остаточных напряжений, возникающих при ЛУВО. После этого следует выбрать адекватные численные методы для реализации данной физической модели.

При однократном ЛУВО (рис.1а) во время и в области воздействия лазерного излучения поверхностный слой испытывает растягивающие пластические деформации в горизонтальной плоскости и сжимающие пластические деформации - в вертикальной плоскости (рисунок 1 б). После прекращения воздействия лазерного импульса наступает период релаксации напряжений, во время которой деформированная часть материала подвергается сжатию со стороны окружающий ее недеформированной части материала (рисунок 1 в). Таким образом, пластические деформации, вызванные ударной волной, созданной при ЛУВО, генерируют в материале поле сжимающих остаточных напряжений (СОН). Отклик материала можно считать упругим, т.к. считаем, что к моменту начала процесса релаксации пластические деформации уже полностью сформированы и они стабильны. Поэтому имеем все основания считать, что поле СОН, сформированных при ЛУВО, является статическим упругим откликом материала на начальную ударную волну в случае, если предварительно там введены уже сформированные стабилизированные

пластические деформации (т.н. «собственные деформации»).

В настоящей работе предлагается практическая реализация в конечноэлементных пакетах LS-DYNA и ANSYS сравнительно нового подхода для решения задач определения остаточных напряжений при ЛУВО. Данный подход основан на концепцию собственных деформаций. Термин «собственные деформации» впервые ввел Рейснер (*Reissner*) в 1931 году [5]. Под этим термином он понимал неупругие деформации, соответствующие самоуравновешенным остаточным напряжениям. В 1991 году Мура (*Mura*) [6] предложил более общее определение собственной деформации (*eigenstrain*), принятое в современной научной литературе. В рамках геометрически линейной теории это могут быть неупругие деформации любой природы (температурные, пьезоэлектрические, пластические, ростовые, фазовые и др.). Использование термина собственной деформации позволяет исследователю абстрагироваться от природы возникновения той или иной пластической деформации [7].

Деформаций будем считать малыми и аддитивными, в этом случае тензор малой деформации ε можно представить суммой упругой ε_e и собственной ε^* деформаций:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon^*.$$

В большинстве случаях наличие в теле собственных деформаций (ε^*), для удовлетворения условиям совместности деформаций, требует наличия и упругих деформации (т.е., в таких задачах собственные деформации выступают в роли своего рода источника несовместности деформации [8]). Важно заметить, что эти упругие деформаций должны удовлетворять обобщенному закону Гука, устанавливающему линейную зависимость между упругими деформациями и упругими напряжениями. Если внешних воздействий на тело нет, то вышеупомянутые поля представляют собой поле упругих остаточных деформаций (именно такой термин введен в работе [8]) и поле остаточных напряжений, соответственно.

Метод собственных деформаций в настоявшее время широко применяется для моделирования остаточных напряжений на разных масштабных уровнях, сильно сократив при этом время на вычисления [8-10].

В случае отсутствия собственных деформаций любое упругое тело свободно от остаточных напряжений. Продолжая аналогию, можно заключить, что случай наличия остаточных напряжений может быть представлено как некое распределение по исследуемому объему полей собственных деформаций (это обстоятельство следует обязательно учитывать как при конечноэлементом моделировании, так и аналитических исследованиях).

Таким образом, метод собственных деформации представляет собой реальный мощный механизм, с помощью которого, после определения собственных деформаций, можно восстанавливать полное поле распределения остаточных напряжений в материале посредством только упругого анализа.

Результаты проведенных исследований показывают [11-17], что стабилизированные пластические деформации, возникающие при ЛУВО, зависят только от параметров лазерного импульса, и мало зависят от геометрии образца (правда, при условии, что площадь обработанной части поверхности образца достаточно велика, чтобы пренебречь влиянием краевых эффектов, и что волны напряжений, отраженные от поверхностей границ, не вызывают дополнительных пластических деформаций), т.е. они являются практически геометрической независимыми.

После того, как определено распределение собственных деформаций, вызванное одним конкретным лазерным импульсом, оно может быть распространено для оценки остаточных напряжений, вызванных тем же импульсом в других местах образца (в виду

геометрической независимости), постепенно получая картину распределения ОН в целом образце.

Следует заметить, что остаточные напряжения даже в экспериментах нельзя измерить напрямую, они, как правило, определяются из измеренных остаточных упругих деформаций (обычно, с помощью методов рентгеновской или нейтронной дифракции, методом отверстий или спекл-интерферометрии) с использованием соответствующей формы закона Гука. Эти остаточные упругие деформаций измеряются только в конечном числе мест, и, соответственно, определение полного поля остаточных напряжений из этих измерений (т.е. определение шести непрерывно изменяющихся составляющих напряжений, которые удовлетворяют условиям равновесия, совместности деформации и граничным условиям) является чрезвычайно сложной задачей.

Подход, основанный на собственных деформациях, предлагает удобный способ решения этой проблемы. Путем моделирования собственных деформаций, вызванных технологией ЛУВО для ряда параметров лазерного импульса (т.е., создавая некую базу данных), и сопоставляя эти данные с экспериментально измеренными остаточными деформациями, полученными, например, методом наименьших квадратов, можно определить репрезентативное распределение собственных деформации для данного образца. Эти данные в дальнейшем могут быть использованы для прогнозирования (или экспресс-оценки) полей остаточных напряжений во всем образце, который будут удовлетворять условиям равновесия и совместности деформаций.

А.М. Корсунский предложил общий метод собственных деформаций [8], который нашел множество приложений, в частности, в задачах сварки, дробеструйного упрочнения, лазерной формовки [9-10]. Другие исследователи также успешно применили разработанный метод в задачах ЛУВО [18].

В настоящей работе применяется метод, разработанный Де Волдом и Хиллом [19]: предполагается, что полные остаточные напряжения ($\sigma_{полн}$), возникающие при ЛУВО, являются суперпозицией остаточных напряжении, возникающих непосредственно при ЛУВО ($\sigma_{ЛУВО}$), и остаточных напряжений, генерируемых материалом на внешнее воздействие, необходимых для удовлетворения условий равновесия, формально названные «остаточными напряжениями равновесия» ($\sigma_{равн}$):

$$\sigma_{полн} = \sigma_{ЛУВО} + \sigma_{равн} \ . \quad (1)$$

Полные остаточные напряжения в обрабатываемой ЛУВО области материала ($\sigma_{полн}$) являются тензором второго порядка с пространственным изменением во всех трех направлениях (в общем случае). Они ($\sigma_{полн}$) представляют наибольший интерес с точки зрения оценки рабочих характеристик материала образца, так как именно они присутствует в образце непосредственно после ЛУВО. Однако, остаточные напряжения, непосредственно вызванные технологией ЛУВО ($\sigma_{ЛУВО}$), как известно, является геометрически независимыми [18], в то время как остаточные напряжения равновесия ($\sigma_{равн}$) являются остаточными напряжениями, призванными удовлетворять уравнениям равновесия, обязательно являются геометрически зависимыми.

Остаточные напряжения, непосредственно вызванные технологией ЛУВО ($\sigma_{ЛУВО}$), можно определить из (1):

$$\sigma_{ЛУВО} = \sigma_{полн} - \sigma_{равн} \ . \quad (2)$$

Рассматривая важный частный случай двухосного распределения напряжений в облучаемой ЛУВО области (xy), из уравнения (2) получим:

$$\begin{cases} \sigma_{\text{ЛУВО},xx}(z) = \sigma_{\text{полн},xx}(z) - \sigma_{\text{равн},xx}(z) \\ \sigma_{\text{ЛУВО},yy}(z) = \sigma_{\text{полн},yy}(z) - \sigma_{\text{равн},yy}(z) \\ \sigma_{\text{ЛУВО},zz}(z) = 0 \end{cases} .$$

Известно [9], что собственные деформации можно рассматривать как упругие деформации. Таким образом, собственные деформаций, вызванные технологией ЛУВО, можно определить следующими линейными уравнениями Гука:

$$\varepsilon^*_{\text{ЛУВО}} = \begin{bmatrix} \varepsilon^*_{\text{ЛУВО},xx}(z) \\ \varepsilon^*_{\text{ЛУВО},yy}(z) \\ \varepsilon^*_{\text{ЛУВО},zz}(z) \end{bmatrix} = -\frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_{\text{ЛУВО},xx}(z) \\ \sigma_{\text{ЛУВО},yy}(z) \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (3)$$

где E - модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Таким образом, мы получаем по три компонента собственных деформаций на каждом шаге, постепенно продвигаясь от поверхности вглубь материала образца. Далее, в общем случае (для образцов со сложной геометрией), процедура решения состоит из трех шагов (в нашем случае имеем только первые 2 шага): 1) вычисляются все собственные деформаций, вызванные с применением технологии ЛУВО ($\varepsilon^*_{\text{ЛУВО}}$); 2) вычисленные собственные деформаций ($\varepsilon^*_{\text{ЛУВО}}$) вводятся как начальные распределения деформаций для решения упругой задачи и вычисляются полные остаточные напряжения $\sigma_{\text{ЛУВО}}$; 3) полученные полные остаточные напряжения для части образца с простой геометрией распространяются на любые новые участки образца с любой сложной геометрией.

Еще раз подчеркнем практическую важность полученного результата, что, если определены собственные деформаций, создаваемые технологией ЛУВО для образцов с простой геометрией, их можно распространять и на более сложные геометрии. Заметим, что этот принцип был впервые введен А.М. Корсунским [8] и назван им «Принципом переносимости собственных деформаций» («Principle of Transferability of Eigenstrain»).



Рис. 2. Стратегия численного моделирования.

Стратегия численного моделирования. Предложенная стратегия реализации технологии ЛУВО в конечноэлементной модели для нашего случая, как было сказано выше, состоит из двух шагов: 1) вычисление собственных деформаций, вызванных с применением технологии ЛУВО, решая явную задачу динамического анализа посредством

МКЭ-пакета LS-DYNA (номер лицензии 10312012); 2) далее решается неявная задача ANSYS (номер лицензии 660578), где полученные на шаге 1 собственные деформации вводятся в качестве входных данных, и проводится упругое моделирование задачи для определения полных остаточных напряжений, вызванных технологией ЛУВО (рис. 2).

Приложение ударной нагрузки. Согласно проведенным исследованиям [3], если считать, что профиль ударной волны имеет Гауссовскую форму, то пространственно-неоднородное давление p на расстоянии r от центра лазерного пятна будет равно

$$p(r,t) = p(t)\exp\left(-\frac{r^2}{2R^2}\right),$$

где R –радиус лазерного пятна.

Для выбора оптимальной формы импульса и для упрощения численного анализа лучше полагаться на экспериментальные данные, а они показывают [4], что сначала следует резкое повышение давления, а потом - более слабое падение. В связи с этим, ряд исследователей справедливо аппроксимировали изменение давления треугольным импульсом. На рис. 3 показаны некоторые возможные варианты простых треугольных приближений: *а*) пиковое давление (p_{max}) приходиться в центре импульса, имеющий продолжительность T_p; *б*) быстрое увеличение давления с последующим более постепенным падением; *с*) похоже на вариант *а*, но имеет определенный горизонтальный участок при p_{max} ; *г*) похоже на вариант *б* но с билинейной формой падения давления. Поскольку в настоящей работе основное внимание уделяется физическому моделированию процесса возникновения остаточных напряжений при ЛУВО, целесообразно выбрать относительно простую форму, в качестве которой взят треугольная форма импульса (рис. 3 *а*), который характеризуется только двумя параметрами (p_{max} и T_p), и при этом находиться в удовлетворительной сходимости с экспериментальными данными [4].

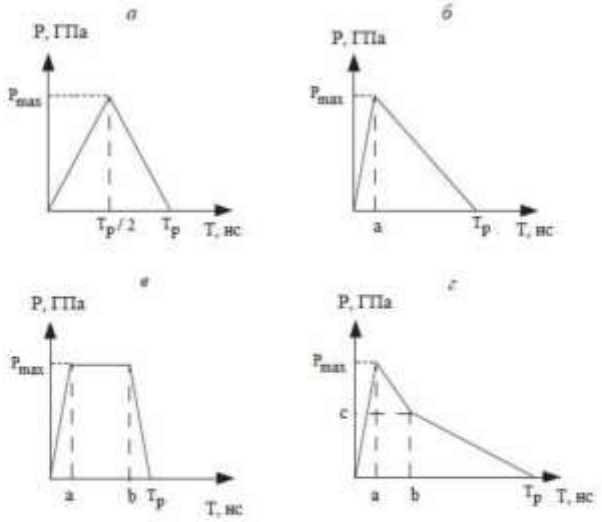


Рис. 3. Профили давлений P в ударной волне в простейшей треугольной аппроксимации: *а* – 2 неизвестных (p_{max}, T_p) ; *б* - 3 неизвестных (p_{max}, T_p, *a*); *в* – 4 неизвестных (p_{max}, T_p, *a, b*); *г* – 5 неизвестных (p_{max}, T_p, *a, b, c*)

Конечноэлементное моделирование. Вычисление собственных деформаций, вызванных с применением технологии ЛУВО (явная задача). В качестве исследуемого

материала выбран титановый сплав ВТ6. Считаем, что лазерный импульс падает на поверхность, покрывая квадратный участок с размером 3х3мм (зона 1 на рис. 4). Симметричность задачи позволяет рассмотреть только четвертую часть исследуемого образца.

Для вычисления собственных деформаций, вызванных с применением технологии ЛУВО, сначала решается явная задача в LS-DYNA по распространению ударной волны в твердом материале со специфическим рассмотрением упруго-пластического поведения материала. При ЛУВО из-за воздействия большого по величине и кратковременного по времени давления скорости деформации в исследуемом материале достигают величин 10^6 c^{-1} и более, поэтому при расчетах напряженно-деформированного состояния в качестве определяющего соотношения используется модель пластического деформирования материала Джонсона-Кука [17]:

$$\sigma = \left(A + B\bar{\varepsilon}^{n}\right)\left(1 + C\dot{\bar{\varepsilon}}^{*}\right)[1 - (T^{*})^{m}], \quad (4)$$

где σ – эквивалентное напряжение по Мизесу, $\bar{\varepsilon}$ – эквивалентная пластическая деформация, $\dot{\bar{\varepsilon}}^{*} = \dot{\bar{\varepsilon}}/\dot{\bar{\varepsilon}}_0$ – безразмерная эквивалентная скорость деформации ($\dot{\bar{\varepsilon}}_0$=1.0 c^{-1}), T^{*} - гомологическая температура, связь которой с абсолютной температурой T определяется следующим образом:

$$T^{*} = (T - T_0)/(T_m - T_0),$$

где T_0 – комнатная температура, T_m – температура плавления материала образца.

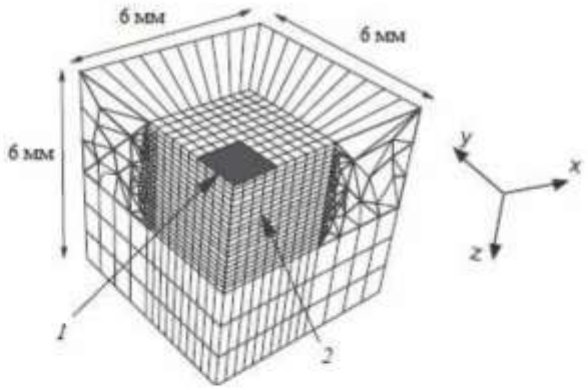


Рис. 4. Конечноэлементная модель четвертой части образца из титанового сплава ВТ6 с размерами 12х12х6 (мм):
1- зона ЛУВО с площадью 1,5мм х1,5мм; *2* – густая конечноэлементная сетка вокруг зоны ЛУВО

Уравнение (4) содержит пять материальных констант, которые определяются эмпирическим путем: A - статический предел текучести, B - модуль деформационного упрочнения, n - показатель степени в законе деформационного упрочнения, C - коэффициент скорости деформаций, m - показатель степени в законе температурного разупрочнения. Модель Джонсона-Кука предполагает независимость относительного влияния деформационного упрочнения, скорости пластической деформации и повышения температуры при всех скоростях и температурах пластической деформации.

В наших исследованиях расчеты проводятся для титанового сплава ВТ-6. Его

механические характеристики приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Механические характеристики титанового сплава ВТ-6

Характеристика	Значение	Размерность
Плотность, ρ	4500	Кг/м^3
Коэффициент Пуассона, ν	0,342	-
Модуль упругости, E	110	ГПа
Предел упругости Гюгонио, σ_{HEL}	2,8	ГПа
A	1098	МПа
B	1092	МПа
C	0,93	-
n	0,014	-

Большое количество элементов в конечноэлементной модели, особенно в явной задаче, ведет к очень долгим вычислительным процедурам. Однако эти вычислительные трудности могут быть легко преодолены при использовании моделирования собственных деформаций. Т.к. остаточные напряжения, вызванные технологией ЛУВО, геометрически независимы, можно рассматривать только маленькую часть исследуемого образца с относительно простой геометрией (в случае наличия образцов со сложной геометрией), и получить распределение полных остаточных напряжений по глубине. Имея такой профиль распределения, формулами (3) легко получаем собственные деформаций, вызванные с использованием технологии ЛУВО.

Упругое моделирование (неявная задача). После определения собственных деформаций, вызванных с использованием технологии ЛУВО (шаг 1), они используются в качестве входа для упругого моделирования (шаг 2), что позволяет определять полные остаточные напряжения, вызванные ЛУВО для всего исследуемого образца, а не только для его участка с простой геометрией (как в нашем случае).

Полученные собственные деформаций вводятся как анизотропные коэффициенты теплового расширения α_{ij}, путем ввода их в соответствующей подпрограмме ANSYS [18]:

$$\alpha_{ij} = \varepsilon^{*}_{\text{ЛУВО},ij} .$$

Т.к. α_{ij} включает в себя 6 независимых компонентов, процедура счета позволяет описать любые возможные сочетания собственных деформаций. После этого запускается неявный решатель ANSYS с температурной вариацией $\Delta T = 1$ и решается прямая термоупругая задача. Исследуемый образец упруго деформируется согласно (5)

$$\varepsilon_{\text{упр. } ij} = \alpha_{ij}\Delta T \ , \qquad (5)$$

и получаем распределение полных остаточных напряжений для всего образца на каждом шаге. В конечноэлементом анализе используются тетраэдральный элемент C3D4T (с линейными смещением и температурой в узлах, которых вводятся температурные деформации).

Как было отмечено выше, собственные деформации – это смесь всех неупругих деформации различного происхождения без возможности их разделения на компоненты. Поэтому представление при моделировании собственных деформаций в виде термических деформаций вполне корректно и дает те же результаты.

Полученные результаты и их обсуждение. Рассмотрим детально процесс

вычисления остаточных напряжений, возникшие в материале в результате его обработки по технологии ЛУВО, используя метод собственных деформаций.

На рис. 5 показаны распределения остаточных напряжений по глубине (рис. 5*а*) и по поверхности исследуемого материала (рис. 5*б*), полученных по вышеописанной процедуре. На рис. 5*а* показано распределение остаточных напряжений $\sigma_{ЛУВО,xx}$ в центре лазерного импульса (x=y=0) по глубине материала z. Видно, что зона сжатия (сжимающие остаточные напряжения - СОН) расположена до глубины около 1,26 мм под импульсом, ниже которой располагаются уравновешивающие СОН - растягивающие остаточные напряжения (РОН). Следует отметить интересную закономерность, что сжимающее остаточные напряжение, наблюдаемые на поверхности (около 510 МПа), незначительно меняется при углублении (находиться в пределах 490-520 МПа) вплоть до глубины 0,77 мм. После этого СОН довольно быстро уменьшаются и они становятся РОН на интервале 1,26 мм<z<4,1 мм. Пиковое растягивающее напряжение равно 180 МПа и оно расположено на глубине около 2 мм.

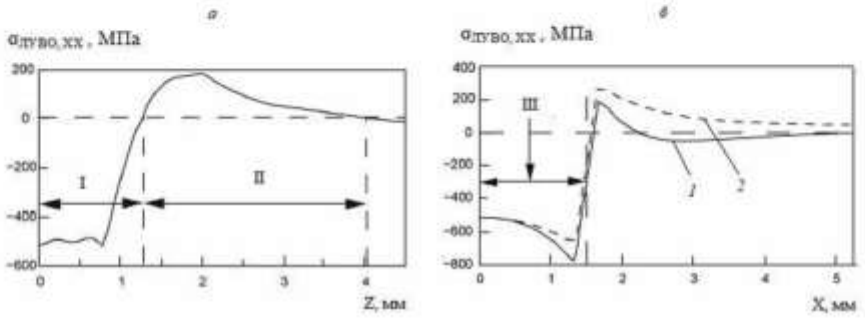


Рис. 5. а) Характер распределения остаточных напряжений $\sigma_{ЛУВО,xx}$ в центре лазерного импульса (x=y=0) по глубине материала z: I –зона сжатая, II – зона растяжения. *б*) Характер распределения остаточных напряжений $\sigma_{ЛУВО,xx}$ по поверхности материала: 1- по оси x , 2 – по оси y. III – зона воздействия лазерного импульса (зона ЛУВО, ширина импульса)

На рис. 5*б* показано изменение $\sigma_{ЛУВО,xx}$ на поверхности вдоль осей x и y. Видно, что СОН остаются почти однородными в центре импульса (занимая примерно 2/3 от общей площади зоны воздействия лазерного импульса). Наблюдается острый пик в распределении СОН на краю зоны ЛУВО (зоны III), после чего следует быстрое падение. Очевидно, что характер распределения СОН на краю зоны ЛУВО сильно зависит от распределения собственных деформаций в этой области. Следует отметить, что расхождение между полученными данными и данными экспериментальных исследований, приведенных в [18], не превышает 6 %.

На рисунке 6*а* показан характер распределения стабилизированных собственных деформаций ($\varepsilon^*_{ЛУВО,xx}$) в центре лазерного импульса (x=y=0) по глубине материала z. Они сгенерированы при разных плотностях мощности лазерного излучения: I = 6 ГВт/см^2 (1) и I = 9 ГВт/см^2 (2). Видно, что, несмотря на наличие краевых эффектов, генерируются почти одинаковые распределения собственных деформации. Результаты показывают, что $\varepsilon^*_{ЛУВО,xx}$ в приповерхностной области почти одинаковы как при I = 6 ГВт/см^2, так и при I= 9 ГВт/см^2. Однако глубина зоны с максимальной пластической деформацией (т.е., где $\varepsilon^*_{ЛУВО,xx}$ ≈ 0,006, увеличивается с 0,88 мм до 1,1 мм при увеличении интенсивности лазерного излучения от 6 ГВт/см^2 до 9 ГВт/см^2. Аналогично, полная глубина пластически

деформированной зоны увеличивается от 2 до 2,45 мм.

На рисунке 6*б* показано распределение остаточных напряжений $\sigma_{ЛУВО,xx}$ в центре лазерного импульса (x=y=0) по глубине материала z при разных режимах нагружения лазерными импульсами. Видно, что для каждого случая зона сжатия создается непосредственно под зоной действия ЛУВО, после чего следует зона растяжения. Глубина зоны сжатия заметно увеличивается (от 1,25 мм до 1,8 мм) при увеличении интенсивности лазерного излучения от 6 ГВт/см^2 до 9 ГВт/см^2. Во всех случаях пиковые растягивающие остаточные напряжения почти одинаковые (≈ 120-160 МПа) и они достигаются в местах, где собственные деформации исчезают (т.е. примерно на глубине 2 мм и 2,45 мм ниже поверхности для I = 6 ГВт/см^2 и 9 ГВт/см^2, соответственно).

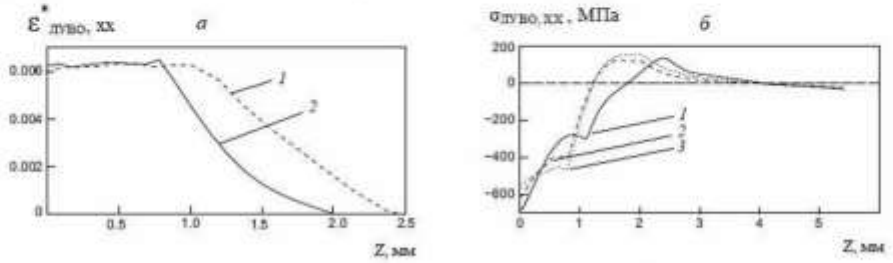


Рис. 6. *а*) характер распределения собственных деформаций ($\varepsilon^*_{ЛУВО,xx}$), сгенерированных при разных плотностях мощности лазерного излучения: I = 6 ГВт/см^2 (1) и I = 9 ГВт/см^2 (2); *б*) характер распределения остаточных напряжений $\sigma_{ЛУВО,xx}$ по поверхности материала при плотностях мощности лазерного излучения: I = 9 ГВт/см^2, зона ЛУВО – 2мм х 2 мм (1), I = 6 ГВт/см^2, зона ЛУВО – 2 мм х 2 мм (2); I = 6 ГВт/см^2, зона ЛУВО - 2,5 мм х 2,5 мм (3).

Отметим некоторые специфические моменты численного счета. В явной конечноэлементной модели технология многократного применения ЛУВО может быть смоделирована путем прикладывания на поверхности нескольких импульсов давления через определенные промежутки времени. Интервал между импульсами определяется необходимостью получения распределения стабилизированных пластических деформаций от предыдущего импульса. Это достигается путем численного «включения» демпфирования материала после каждого импульса, и после окончательного распределения пластических деформации, его «выключения» до нанесения следующего импульса. Для третьего, четвёртого т.д. импульсов процедура получения картины распределения пластических деформаций аналогична.

Стабилизированные пластические деформаций, полученные после каждого импульса (вычисленные с помощью пакета LS-DYNA), передаются для статического анализа в конечноэлементом пакете ANSYS, где определяются распределения соответствующих полей ОН (согласно стратегии численного моделирования - рис. 2). Здесь рассмотрен случай, когда лазерные импульсы падают на одно и то же место (т.е., имеем т.н. «100%-ое перекрытие импульсов»). Заметим, что этот метод также может быть успешно использован для анализа более комплексных перекрывающихся моделей лазерных импульсов (для 30%, 40%, 50% и т.д. перекрытий), хотя в этом случае в процедуре использования метода собственных деформации должны быть внесены коррективы [20-24].

Выводы. В данной работе представлены особенности использования численной конечноэлементной модели процесса лазерно-ударно-волновой обработки материалов (ЛУВО) с использованием метода собственных деформации. Модель реализует все

основные физические процессы, протекающие при прохождении ударной волны в реальных трехмерных объектах при использовании технологии ЛУВО.

Показано, что использование метода собственных деформации имеет ряд преимуществ. Во-первых, явная задача динамического моделирования с использованием метода конечных элементов, после приложения ударной нагрузки может быть остановлено сразу после того, как только в материале сформировано поле стабилизированных пластических деформации. Это означает, что нет необходимости ждать, пока упругие колебания в материале образца погаснут, или брать материал с искусственно завышенным коэффициентом демпфирования для того, чтобы ускорить этот процесс. Следовательно, требуется гораздо меньшее время для численного анализа динамической фазы модели.

Показано, что параметры технологии ЛУВО (плотность мощности лазерного излучения, продолжительность импульса) непосредственно влияют на характер распределения собственных пластических деформаций, и что они приблизительно равномерно распределены по площади импульса и изменяется только по глубине. Таким образом, с использованием метода собственных деформаций может быть легко исследован эффект от многократного применения технологии ЛУВО.

Еще одним большим преимуществом использования метода собственных деформаций являются то, что полученные остаточные напряжения являются практически геометрически независимыми. Это означает, что этот подход в будущем может быть использован для проведения экспресс-оценки полей остаточных напряжений в материалах со сложной геометрией, вызванных разными упрочняющими технологиями, путем численного решения обратной задачи: зная результаты (например, экспериментальные или численные) пластических деформаций всего в нескольких точках, можно будет реконструировать соответствующие им поля остаточных напряжений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы», Соглашение о предоставлении субсидии №14.607.21.0191 от 26.09.2017 г., проект RFMEFI60717X0191.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Peyre P., Fabbro R., Merrien P., Lieurade H.P. Laser shock processing of aluminium alloys. Application to high cycle fatigue behavior // *Mat. Sci. Eng. A – Struct*. 1996. V.210 (1–2). P. 102–113.
2. Peyre P., Berthe L., Vignal V., Popa I., Baudin T. Analysis of laser shock waves and resulting surface deformations in an Al–Cu–Li aluminum alloy // *J. Phys. D Appl. Phys*. 2012. V.45. P. 35-42.
3. Peyre P., Chaieb I., Braham C. FEM calculations of residual stresses induced by laser shock processing in stainless steels // *Model. Simul. Mater. Sci. Eng*. 2007. V.15. P. 205–221.
4. Morales M., Ocaña J.L., Molpeceres C., Porro J.A., Garcia-Beltrán A. Model based optimization criteria for the generation of deep compressive residual stress fields in high elastic limit metallic alloys by ns-laser shock processing // *Surf. Coat. Tech*. 2008. V. 202(11). P. 2257–2262.
5. Reissner H. Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen // *Z. Angew. Math. Mech*. 1931. V. 11. P. 1–8.
6. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids / *2nd ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher*. 1991. P. 587.
7. Лохов В.А., Туктамышев В.С. Исследование условий отсутствия механических напряжений в системах с собственными деформациями // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2013. № 2 (26). С. 198–207.
8. Korsunsky A.M. Residual elastic strain due to laser shock peening: modelling by eigenstrain distribution // *J. Strain Anal. Eng. Des.* 2006. V. 41 (3). P 195–204.
9. Korsunsky A.M. Residual elastic strains in autofrettaged tubes: elastic-ideally plastic model analysis // *J. Eng. Mater. Technol*. 2007. Trans. ASME. V. 129 (1). P. 77–81.
10. Jun T.S., Korsunsky A.M. Evaluation of residual stresses and strains using the eigenstrain reconstruction

method // *Int. J. Solids Struct*. 2010. V.47 (13). P 1678–1686.
11. Сахвадзе Г.Ж., Гаврилина Л.В. Лазерно-ударно-волновая обработка материалов при однократных и многократных импульсных воздействиях // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2015. № 6. С. 75-80.
12. Сахвадзе Г.Ж., Гаврилина Л.В., Киквидзе О.Г. Влияние эффекта перекрытия лазерных пятен на остаточные напряжения при лазерно-ударно-волновой обработке материалов // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2016. № 3. С. 77-84.
13. Сахвадзе Г.Ж., Булекбаева Г.Ж., Киквидзе О.Г. Исследование качества поверхностных слоев, упрочненных лазерно-ударно-волновой технологией при различных степенях перекрытия лазерных пятен // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. 2016. № 2. С. 132-141.
14. Сахвадзе Г.Ж., Булекбаева Г.Ж., Киквидзе О.Г. Особенности применения технологии двухсторонней лазерно-ударно-волновой обработки материалов для тонкостенных конструкций // *Проблемы машиностроения и автоматизации*. 2016. № 3. С. 127-138.
15. Сахвадзе Г.Ж., Пугачев М.С., Киквидзе О.Г. Особенности упрочнения материалов технологией лазерно-ударно-волновой обработки // *Упрочняющие технологии и покрытия*. 2016. № 9(141). С. 20-25.
16. Сахвадзе Г.Ж., Пугачев М.С., Киквидзе О.Г. Технология двухсторонней лазерно-ударно-волновой обработки материалов // *Вестник машиностроения*. 2016. № 10. С. 71-76.
17. Sakhvadze G., Shokhin A, Kikvidze O. Residual Stresses distribution in Ti–6Al–4V titanium alloys during Laser Shock Processing // *Vibroengineering PROCEDIA*. 2016. V. 8. P. 422-427.
18. Achintha M., Nowell D., Shapiro K., Withers P.J. Eigenstrain modelling of residual stresses generated by arrays of laser peening shots and determination of the complete stress field using limited strain measurements // *J. Surf. & Coating Tech*. 2013. V.216. P 68-77.
19. DeWald A.T., Hill M.R. Eigenstrain-based model for prediction of laser peening residual stresses in arbitrary three-dimensional bodies Part 1: model description // *J. Strain Anal. Eng. Des*. 2009. V. 44. P. 1–11.
20. Попович В.А., Сахвадзе Г.Ж. Комбинированная лазерно-водородная технология упрочнения поверхностей деталей из металлов и сплавов // *Патент РФ на изобретение № 2660485*. Опубликовано: 06.07.2018. Бюл. № 19. Заявка № 2016150665 от 22.12.2016. Патентообладатель: ИМАШ РАН.
21. Воронин Н.А., Сахвадзе Г.Ж. Способ определения физико-механических характеристик модифицированного поверхностного слоя материала изделия и устройство для его осуществления // *Патент РФ на изобретение № 2646442* от 05.03.2018. Бюл. № 7. Заявка № 2016139028 от 04.10.2016. Патентообладатель: ИМАШ РАН.
22. Sakhvadze G.Zh. Features of Finite Element Modeling of Residual Stresses Arising in Material under Laser Shock-Wave Processing Using the Intrinsic Deformations Method // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2018, Vol. 47, No. 4, pp. 373–379. DOI: 10.3103/S105261881804012X.
23. Sakhvadze G.Zh. Finite element modeling of the technology of multiple laser shock processing of materials with use of the eigenstrains method // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2018, Vol. 47, No. 5, pp. 469–474. DOI: 10.3103/S1052618818050114.
24. Sakhvadze G. Zh., Kavtaradze R.Z., Nikabadze M.U. Eigenstrain Modeling of Laser–Shock Processing of Materials // *Russian Engineering Research*. - 2018. - Vol. 38. № 10. pp. 755–760. DOI: 10.3103/S1068798X18100143.

FINITE ELEMENT MODELING OF MATERIAL STRETCHING DURING LASER SHOCK PROCESSING, USING THE METHOD OF EIGENSTRAINS

Sakhvadze G.Zh.
Institute of Machine Sciences named after A.A. Blagonravov
of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. *Laser shock processing (LSP) of materials is an effective modern technology for processing metallic materials, in which significant compressive residual stresses (CRS) are generated in the near-surface region, which contribute to increasing their strength, tribological and operational characteristics. In the present work, finite element modeling of the LSP technology using the method of eigenstrain is carried out. Specificity of its use consists in the following: first the dynamic problem is solved on the impact of the shock load, the distribution of the stabilized plastic deformations (the so-called "eigenstrain") is determined, after which the static problem is solved, like the elastic response of the system to the introduced intrinsic deformations.*

დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის მეორე სასაზღვრო ამოცანის ელიფსურ არეში ეფექტურად ამოხნის ერთი ხერხის შესახებ

კოსტა სვანაძე
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,
ქუთაისი, საქართველო
kostasvanadze@yahoo.com

შრომაში დრეკად ნარევთა წრფივი თეორიის სტატიკის ერთგვაროვანი განტოლებისათვის, ორგანზომილებიან მარტივადბმული სასრული არეს შემთხვევაში, მეორე სასაზღვრო ამოცანის (როცა საზღვარზე მოცემულია ძაბვის ვექტორი) ამონახსნის გამოყენებით იგივე ამოცანის ამონახსნი, როცა არეს საზღვარი ელიფსია მიღებულია აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი მწკრივის სახით, რომელიც ერთადერთია ნებისმიერი ხისტი გადაადგილების ვექტორის სიზუსტით.

საკვანძო სიტყვები: დრეკადნარევთა თეორიის სტატიკის მეორე სასაზღვრო ამოცანა, ფრედჰოლმის ტიპის ინტეგრალური განტოლება, კოლოსოვ-მუსხელიშვილის სახის განზოგადებული ფორმულები, ელიფსით შემოსაზღვრული სასრული არე.

1^0. დრეკად ნარევთა წრფივი თეორიის სტატიკის ერთგვაროვანი განტოლება კომპლექსური ფორმით ასე ჩაიწერება [3]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + K\frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial \bar{z}^2} = 0, \qquad U = \left(u_1 + iu_2, u_3 + iu_4\right)^T, \tag{1}$$

სადაც $u' = (u_1, u_2)^T$ და $u'' = (u_3, u_4)^T$ კერძო გადაადგილებებია $z = x_1 + ix_2$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \qquad K = -\frac{1}{2}em^{-1}, \qquad e = \begin{bmatrix} e_4 & e_5 \\ e_5 & e_6 \end{bmatrix},$$

$$m^{-1} = \frac{1}{\Delta_0}\begin{bmatrix} m_3 & -m_2 \\ -m_2 & m_1 \end{bmatrix}, \qquad \Delta_0 = m_1 m_3 - m_2^2 > 0,$$

$$m_k = e_k + \frac{1}{2}e_{3+k}, \qquad k = 1,2,3, \qquad e_1 = a_2/d_2, \qquad e_2 = -c/d_2, \qquad e_3 = a_1/d_2,$$

$$d_2 = a_1 a_2 - c^2 > 0, \; a_1 = \mu_1 - \lambda_5, \; a_2 = \mu_2 - \lambda_5, \; c = \mu_3 + \lambda_5,$$

$$e_1 + e_4 = \frac{a_2 + b_2}{d_1}, \qquad e_2 + e_5 = -\frac{c+d}{d_1}, \qquad e_3 + e_6 = \frac{a_1 + b_1}{d_1},$$

$$d_1 = \left(a_1 + b_1\right)\left(a_2 + b_2\right) - \left(c + d\right)^2 > 0, \quad b_1 = \mu_1 + \lambda_1 + \lambda_5 - \alpha_2\frac{\rho_2}{\rho},$$

$$b_2 = \mu_2 + \lambda_2 + \lambda_5 + \alpha_2\frac{\rho_1}{\rho},$$

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \alpha_2 = \lambda_3 - \lambda_4, \quad d = \mu_2 + \lambda_3 - \lambda_5 - \alpha_2\frac{\rho_1}{\rho} = \mu_3 + \lambda_4 - \lambda_5 + \alpha_2\frac{\rho_2}{\rho}.$$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3,$ $\lambda_p,$ $p=\overline{1,5}$ დრეკადი მუდმივებია, ხოლო ρ_1 და ρ_2 მუდმივებს აქვთ სიმკვრივის განზომილება. აღნიშნული მუდმივები აკმაყოფილებენ კონკრეტულ პირობებს [1].

მ. ბაშელეიშვილის მიერ შრომაში [3] მიღებულია კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ანლოგიური ფორმულები:

$$U=\begin{pmatrix} u_1+iu_2 \\ u_3+iu_4 \end{pmatrix}=m\varphi(z)+\frac{1}{2}ez\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)},\ z=x_1+ix_2 \qquad (2)$$

$$TU=\begin{pmatrix} (Tu)_2-i(Tu)_1 \\ (Tu)_4-i(Tu)_3 \end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial S(x)}\left[(A-2E)\varphi(z)+Bz\overline{\varphi'(z)}+2\mu\overline{\psi(z)}\right] \qquad (3)$$

სადაც $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)^T$ და $\psi=(\psi_1,\psi_2)^T$ ნებისმიერი ანალიზური ვექტორ-ფუნქციებია, $(Tu)_p,$ $p=\overline{1,4}$ ძაბვის ვექტორის კომპონენტებია [1],

$\frac{\partial}{\partial S(x)}=n_1\frac{\partial}{\partial x_2}-n_2\frac{\partial}{\partial x_1},$ $\bar{n}=(n_1,n_2)^T$ გარე ნორმალის მგეზავია

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}=2\mu m, \qquad B=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}=\mu e, \qquad \mu=\begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_3 \\ \mu_3 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$m=\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{bmatrix}, \qquad E=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Delta_0=\det|m|>0,$$

$\Delta_1=\det|\mu|>0,$ $\Delta_2=\det|A-2E|>0.$

2^0. დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის მეორე ბრტყელი შიგა სასაზღვრო ამოცანა შემდეგი შინაარსისაა: $S\in C^{K+\beta},$ $k=1,2,$ $0<\beta\le 1$ შეკრული მარტივი წირით შემოსაზღვრული ორგანზომილებიან D^+ სასრულ არეში, რომელიც $z=0$ წერტილს შეიცავს, ვიპოვოთ (1) განტოლების ისეთი $C^2(D^+)\cap C^{1,\alpha}(D^+\cup S),$ $0<\alpha<\beta\le 1$ კლასის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$(TU(t))^+=f(t),$ $t\in S,$ $t=t_1+it_2,$ $(II)_f^+$ ამოცანა, სადაც $f=(f_1,f_2)^T$ საზღვარზე მოცემული $C^{1,\alpha}$ კლასის კომპლექსური ვექტორ-ფუნქციაა და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\int_S f\,dS=0, \qquad \mathrm{Re}\int_S \bar{t}(f_1+f_2)\,dS=0 \qquad (4)$$

(4) ფორმულებში პირველი და მეორე ტოლობები შესაბამისად გამოსახავს მთავარი ვექტორის და მთავარი მომენტის ნულის ტოლობის პირობას.

შრომაში [3] დამტკიცებულია, რომ ხისტი გადაადგილების $a^0+i\varepsilon\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}z$ ვექტორის სიზუსტით $(II)_f^+$ ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი მოიცემა ფომრულით

$$U(x)=\frac{m(A-2E)^{-1}}{2\pi i}\int_S \ln(z-\varsigma)g(y)d_yS-$$

$$-\frac{\mu^{-1}}{4\pi i}\int_S \ln(\bar{z}-\bar{\varsigma})g(y)d_yS-\frac{e(A-2E)^{-1}}{4\pi i}\int\frac{z-\varsigma}{\bar{z}-\bar{\varsigma}}\overline{g(y)}d_yS,$$

სადაც $a^0=(a_1^0,a_2^0)^T$ ნებისმიერი მუდმივი კომპლექსური ვექტორია, ε ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივია, $z=x_1+ix_2$, $\varsigma=y_1+iy_2$, $x=(x_1,x_2)\in D^+$ $y=(y_1,y_2)\in S$ 7 ხოლო $g=(g_1,g_2)^T$ უცნობი კომპლექსური ვექტორია და წარმოადგენს ფრედჰოლმის ტიპის შემდეგი ინტეგრალური განტოლების

$$-g(t)+\frac{1}{2\pi}\int_S\frac{\partial}{\partial S(t)}\ln\frac{t-\varsigma}{\bar{t}-\bar{\varsigma}}g(y)d_yS-\frac{H}{2\pi i}\int_S\frac{\partial}{\partial S(t)}\frac{t-\varsigma}{\bar{t}-\bar{\varsigma}}\overline{g(y)}d_yS=f(t)\text{ 7}\quad(6)$$

ამონახსენს, $t=(t_1,t_2)\in S$ 8

$$H=\begin{bmatrix}H_1 & H_2\\ H_3 & H_4\end{bmatrix}=B(A-2E)^{-1}\text{ 8}\qquad(7)$$

3^0. ვთქვთ S კონტური ელიფსია a და b ($a>b$) ნახევარი ღერძებით. მოცემულ შემთხვევაში ელიფსის $t=t_1+it_2$ და $\varsigma=y_1+iy_2$ წერტილებისათვის დავწერთ

$$y_1=a\cos\theta_0,\qquad y_2=b\sin\theta_0,\qquad 0\le\theta_0\le 2\pi,$$

$$t_1=a\cos\theta,\qquad t_z=b\sin\theta,\qquad 0\le\theta\le 2\pi,$$

$$d_yS=\sqrt{a^2\sin^2\theta_0+b^2\cos^2\theta_0}\,d\theta_0,\qquad d_tS=\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta\text{ 8}$$

გარდა ამისა შევნიშნოთ,რომ ამ ფორმულების გამოყენებით მარტივად მივიღებთ:

$$\frac{t-\varsigma}{\bar{t}-\bar{\varsigma}}=-\frac{1-\lambda e^{-i(\theta+\theta_0)}}{1-\lambda e^{i(\theta+\theta_0)}}e^{i(\theta+\theta_0)},\qquad\lambda=\frac{a-b}{a+b},\quad 0<\lambda<1,$$

$$\frac{\partial}{\partial S(t)}\frac{t-\varsigma}{\bar{t}-\bar{\varsigma}}dyS=-i\frac{(1-\lambda^2)e^{i(\theta+\theta_0)}\sqrt{a^2\sin^2\theta_0+b^2\cos^2\theta_0}}{\left(1-\lambda e^{i(\theta+\theta_0)}\right)^2\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}d\theta_0=$$

$$=i(\lambda-\lambda^{-1})\frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta_0+b^2\cos^2\theta_0}}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}\sum_{n=1}^{\infty}n\lambda^n e^{in(\theta+\theta_0)}d\theta_0,\qquad(8)$$

$$\frac{\partial}{\partial S(t)}\ln\frac{t-\varsigma}{\bar{t}-\bar{\varsigma}}dyS=i\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\left[e^{in(\theta+\theta_0)}+e^{-in(\theta+\theta_0)}\right]\right\}*$$

$$*\frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta_0+b^2\cos^2\theta_0}}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}d\theta_0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$h(\gamma)=g(\gamma)\sqrt{a^2\sin^2\gamma+b^2\cos^2\gamma},\qquad\overline{h(\gamma)}=\overline{g(\gamma)}\sqrt{a^2\sin^2\gamma+b^2\cos^2\gamma},$$

$$F(\gamma)=f(\gamma)\sqrt{a^2\sin^2\gamma+b^2\cos^2\gamma},\qquad 0\le\gamma\le 2\pi,\qquad(9)$$

$$h_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\gamma)d\gamma,\qquad h_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\gamma)e^{in\gamma}d\gamma$$

$$h_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\gamma)e^{-in\gamma}d\gamma,\qquad \overline{h_{-n}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{h(\gamma)}e^{in\gamma}d\gamma.$$

(10)

(8), (9) და (10) ფორმულების გათვალისწინებით (6) ინტეგრალური განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$h_0-h(\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\left(h_ne^{in\theta}+h_{-n}e^{-in\theta}\right)-H\left(\lambda-\lambda^{-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}n\lambda^n\overline{h_{-n}}e^{in\theta}=F(\theta)\text{ 8}\qquad(11)$$

ელემენტარული გამოთვლებით (11)-დან h_0, h_n, h_{-n} და $\overline{h_{-n}}$ კოეფიციენტების მიმართ მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$\begin{aligned}&h_0-h_0=F_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\theta)d\theta,\\&\lambda^nh_{-n}-h_n=F_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\theta)e^{in\theta}d\theta,\end{aligned}\qquad(12)$$

$$\lambda^nh_n-h_{-n}+n\lambda^{n-1}\left(1-\lambda^2\right)H\overline{h_{-n}}=F_{-n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\theta)e^{-in\theta}d\theta\text{ 8}\qquad(13)$$

(12) დან გამომდინარეობს, რომ როცა მთავარი ვექტორი (იხ. (4)-ს პირველი ფორმულა) ნულის ტოლია, მაშინ h_0 ანუ g_0 (იხ. (9)-ის პირველი ფორმულა) ნებისმიერი მუდმივი ვექტორია და ძაბვის მნიშვნელობაზე გავლენას არ ახდენს.

(13) სისტემიდან h_n -ის გამორიცხვის შედეგად h_{-n} და $\overline{h_{-n}}$ მიმართ მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$\begin{aligned}&\left(1-\lambda^{2n}\right)h_{-n}-n\lambda^{n-1}\left(1-\lambda^2\right)H\overline{h_{-n}}=P_n=-\lambda^nF_n-F_{-n},\\&n\lambda^{n-1}\left(1-\lambda^2\right)Hh_{-n}-\left(1-\lambda^{2n}\right)\overline{h_{-n}}=-\overline{P_n}=\lambda^n\overline{F_n}+\overline{F_{-n}},\end{aligned}\qquad(14)$$

ახლა (14) სისტემის ამოხსნადობის შესწავლისათვის გავნიხილოთ შემდეგი ორი სისტემა

$$\begin{aligned}&\left(1-\lambda^{2n}\right)\overset{(j)}{R}_{-n}-n\lambda^{n-1}\left(1-\lambda^2\right)\left(H_1+X_jH_3\right)\overline{\overset{(j)}{R}_{-n}}=\begin{pmatrix}1\\X_j\end{pmatrix}P_n,\\&n\lambda^{n-1}\left(1-\lambda^2\right)\left(H_1+X_jH_3\right)\overset{(j)}{R}_{-n}-\left(1-\lambda^{2n}\right)\overline{\overset{(j)}{R}_{-n}}=-\begin{pmatrix}1\\X_j\end{pmatrix}\overline{P_n}\end{aligned}\qquad\overset{(j)}{(15)}_n$$

სადაც $j=1,2;$ H_1,H_2,H_3 და H_4 (7) მატრიცის ელემენტებია, $\overset{(j)}{R}_{-n}=\left(h_{-n}\right)_1+X_j\left(h_{-n}\right)_2,\quad j=1,2$ ხოლო X_1 და X_2

$$H_3X^2-\left(H_1-H_4\right)X-H_2=0$$

განტოლების ფესვებია

ამას გარდა შევნიშნოთ, რომ [3]

$$H_1+H_3=H_2+H_4=1,\quad H_1-H_2\neq 1,\quad X_1=1,\quad X_2=-\frac{H_2}{H_3}\neq 1. \qquad (16)$$

$\overset{(1)}{D}_n$-ით და $\overset{(2)}{D}_n$-ით აღვნიშნოთ შესაბამისად $\overset{(1)}{(15)}_n$ და $\overset{(2)}{(15)}_n$ სისტემის დეტერმინანტი. მარტივად მივიღებთ:

$$\overset{(1)}{D}_n=\left(1-\lambda^{2n}\right)^2-n^2\left(1-\lambda^2\right)^2\lambda^{2(n-1)} \quad 7 \qquad \sim!*`$$

$$\overset{(2)}{D}_n=\left(1-\lambda^{2n}\right)^2-n^2\left(1-\lambda^2\right)^2\left(H_1-H_2\right)^2\lambda^{2(n-1)}\ 8 \qquad \sim!(`$$

ახლა (17) და (18)-ში, თუ გავითვალისწინებთ (16)-ს, მაშინ ელემენტარული გამოთვლებით მივიღებთ:

$$D_1^{(1)}=0,\qquad D_n^{(1)}\neq 0\ 7\ \texttt{hjwf}\ \ n\geq 2\ 7\quad D_n^{(2)}\neq 0,\quad \texttt{hjwf}\ \ n\geq 1$$

ამრიგად, გამომდინარე აღნიშნულიდან მარტივად დავასკვნით, რომ $\overset{(1)}{(15)}_n$ სისტემა ცალსახად ამოხსნადია, როცა $n\geq 2$ ხოლო $\overset{(2)}{(15)}_n$ სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, როცა $n\geq 1$. ამასთან ერთად შევნიშნოთ, რომ (4)-ს მეორე ტოლობის თანახმად $\overset{(1)}{(15)}_1$ სისტემა

$$\left(1-\lambda^2\right)\left(\overset{(1)}{R}_{-1}-\overline{\overset{(1)}{R}}_{-1}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}P_1,$$

$$\left(1-\lambda^2\right)\left(\overset{(1)}{R}_{-1}-\overline{\overset{(1)}{R}}_{-1}\right)=-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\overline{P_1},$$

თავსებადია და დავწერთ

$$\overset{(1)}{R}_{-1}-\overline{\overset{(1)}{R}}_{-1}=\frac{1}{1-\lambda^2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}P_1\ 8 \qquad (19)$$

ამრიგად, ჩატარებული მსჯელობის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ h_n, h_{-n} და $\overline{h_{-n}}$ კოეფიციენტები ცალსახად განისაზღვრება, როცა $n\geq 2\ 7$ ხოლო $\mathrm{Re}\left[\left(h_{-1}\right)_1+\left(h_{-1}\right)_2\right]$ მნიშვნელობის სიზუსტით, როცა $n=1$ (იხ. (19))

სახელდობრ, როცა $n\geq 2$ მაშინ გვაქვს:

$$h_n=\frac{\lambda^n}{X_2-1}\begin{pmatrix}X_2q_n-\delta_n\\ \delta_n-q_n\end{pmatrix}-F_n,\qquad h_{-n}=\frac{1}{X_2-1}\begin{pmatrix}X_2q_n-\delta_n\\ \delta_n-q_n\end{pmatrix},$$

$$\overline{h_{-n}}=\frac{1}{X_2-1}\begin{pmatrix}X_2\overline{q_n}-\overline{\delta_n}\\ \overline{\delta_n}-\overline{q_n}\end{pmatrix}, \qquad (20)$$

$$q_n=\frac{1}{D_{(n)}^{(1)}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Big[\left(\lambda^{2n}-1\right)P_n+n\lambda^{n-1}\left(\lambda^2-1\right)\overline{P_n}\Big],$$

$$\delta_n=\frac{1}{D_{(n)}^{(2)}}\begin{pmatrix}1\\X_2\end{pmatrix}\Big[\left(\lambda^{2n}-1\right)P_n+n\lambda^{n-1}\left(\lambda^2-1\right)\left(H_1-H_2\right)\overline{P_n}\Big],$$

$$P_n=-\lambda^n F_n-F_{-n},\quad F_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\theta_0\right)e^{in\theta_0}\sqrt{a^2\sin^2\theta_0+b^2\cos^2\theta_0}\,d\theta_0\ 8$$

n=1 მნიშვნელობისათვის $\mathrm{Re}\Big[\left(h_{-1}\right)_1+\left(h_{-1}\right)_2\Big]=0$ სიზუსტით ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$h_1=\frac{\lambda}{X_2-1}\begin{pmatrix}X_2\nu_1-\nu_2\\ \nu_2-\nu_1\end{pmatrix}-F_1,$$

$$h_{-1}=\frac{1}{X_2-1}\begin{pmatrix}X_2\nu_1-\nu_2\\ \nu_2-\nu_1\end{pmatrix},\qquad \overline{h}_{-1}=\frac{1}{X_2-1}\begin{pmatrix}X_2\overline{\nu_1}-\overline{\nu_2}\\ \overline{\nu_2}-\overline{\nu_1}\end{pmatrix}\ 7 \tag{21}$$

$$\nu_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\frac{P_1}{2\left(1-\lambda^2\right)},\qquad \nu_2=\begin{pmatrix}1\\X_2\end{pmatrix}\frac{P_1+\left(H_1-H_2\right)\overline{P}_1}{\left(\lambda^2-1\right)\Big[\left(H_1-H_2\right)^2-1\Big]}$$

აგრეთვე შევნიშნოთ რომ (იხ. (4)-ს პირველი ტოლობა და (12))

$$h_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h\left(\theta_0\right)d\theta_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g\left(\theta_0\right)\sqrt{a^2\sin^2\theta_0+b^2\cos^2\theta_0}\,d\theta_0=C\ 7\qquad\text{~@@`}$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივი კომპლექსური ვექტორია.

4^0. ახლა (5) გამოვსახოთ h_n, h_{-n} და $\overline{h_{-n}}$ $\left(n\ge 0\right)$ კოეფიციენტების საშუალებით. ვისარგებლოთ ელიფსის პარამეტრული განტოლებით $y_1=a\cos\theta_0,\qquad y_2=b\cos\theta_0,$ და შემდეგი ცნობილი ფორმულებით (იხ. [2])

$$\eta_1=\frac{z+\sqrt{z^2-a^2+b^2}}{a+b},\qquad \eta_2=\frac{z-\sqrt{z^2-a^2+b^2}}{a+b},$$

$$\eta_1\cdot\eta_2=\frac{a-b}{a+b}=\lambda,\qquad z\in D^+,\qquad |\eta_1|<1,\qquad |\eta_2|<1.$$

აღნიშნული ფორმულების გამოყენებით და ელემენტარული გამოთვლების ჩატარებით მივიღებთ:

$$\ln\left(z-\varsigma\right)=\ln\frac{a+b}{2}+i\left(\pi+\theta_0\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_1^n+\eta_2^n}{n}e^{-in\theta_0},$$

$$\ln\left(\overline{z}-\overline{\varsigma}\right)=\ln\frac{a+b}{2}-i\left(\pi+\theta_0\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\eta_1^n}+\overline{\eta_2^n}}{n}e^{in\theta_0}, \tag{23}$$

$$\frac{z-\varsigma}{\overline{z-\varsigma}}=\lambda^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_0\overline{\eta_1^n}+B_0\overline{\eta_2^n}\right)e^{in\theta_0},$$

სადაც

$$A_0=\frac{\left(1-\eta_1\bar{\eta}_1\right)\left(\bar{\eta}_1^{-1}-\eta_2\right)}{\bar{\eta}_1-\bar{\eta}_2},\qquad B_0=\frac{\left(1-\eta_2\bar{\eta}_2\right)\left(\eta_1-\bar{\eta}_2^{-1}\right)}{\bar{\eta}_1-\bar{\eta}_2},\quad A_0+B_0=\lambda-\lambda^{-1}.$$

(10), (22) და (23) ფორმულების გათვალისწინებით დავწერთ

$$U(x)=C^0+\frac{\mu^{-1}}{4\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\eta}_1^n+\bar{\eta}_2^n}{n}h_n-\frac{m\left(A-2E\right)^{-1}}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_1^n+\eta_2^n}{n}h_{-n}-$$
$$-\frac{e\left(A-2E\right)^{-1}}{4\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_0\bar{\eta}_1^n+B_0\bar{\eta}_2^n\right)\bar{h}_{-n},\qquad(24)$$

სადაც C^0 ნებისმიერი მუდმივი კომპლექსური ვექტორია.

ახლა შევნიშნოთ, რომ (20) და (21) ფორმულების და $|\eta_1|<1,\quad |\eta_2|<1,\quad f\in C^{1,\alpha}(S)$ პირობების საფუძველზე, როცა $\alpha>\frac{1}{2}$ (24) მწკრივი აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადია.

ამრიგად, ელიფსურ D^+ არეში სტატიკის მეორე სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა მოიცემა შემდეგი აბსოლუტურად და თანაბრად მწკრივის

$$U_0(x)=\frac{\mu^{-1}}{4\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\bar{\eta}_1^n+\bar{\eta}_2^n}{n}h_n-A\left(A-2E\right)^{-1}\frac{\eta_1^n+\eta_2^n}{n}h_{-n}-\right.$$
$$\left.-H\left(A_0\bar{\eta}_1^n+B_0\bar{\eta}_2^n\right)\bar{h}_{-n}\right]$$

სახით, რომელიც ერთადერთია ხისტი გადაადგილების ვექტორის სიზუსტით.

შენიშვნა 1. შრომაში [2] მოცემულია განსხვავებული მეთოდი ელიფსურ არეში სტატიკის ძირითადი ამოცანების ამოხნისათვის

ლიტერატურა

1. M.O. Basheleishvili, Two-dimensional boundary value problems of statics of the theory of elastic mixtures. Mem. Differential Equations Math. Phys. 6(1995), 59-105.
2. M.O. Bashelesivili, Solutions of the basic boundary value problems of elastic mixtures for the interior and exterior elliptic domains. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics Vol. 14, N2, 1999, 3-6.
3. M.O. Basheleishvili and K. N. Svanadze, A new method of solving the basic plane boundary value problems of statics of the elastic mixture theory. Georgian J 8, N3. 2001, 427-446.

On one way of effective solution of the second boundary value problem of statics of the theory of elastic mixture in an elliptic domain.

Kosta Svanadze
Akaki Tsereteli State university
Kutaisi, Georgia
kostasvanadzew@yahoo.com

Owing to solution of second boundary value problem (when on the boundary is given a stress vector) of statics of the linear theory of elastic mixture for a finite two-dimensional simply connected domain (see [3]), we obtain a solution of the problem for elliptic domain by absolutely and uniformly convergent series, which is defined modulo an arbitrary rigid of displecement vector.

ანალიზის მონათესავე საკითხები

Related Problems of Analysis

სამშენებლო დარგის მეცნიერების განვითარების პროცესები საქართველოში

ბედიაშვილი მ.*, ყიფიანი გ.**, სულაშვილი ვ.**
*საქართველოს საინჟინრო აკადემია;
**საქართელოს საავიაციო უნივერსიტეტი

საქართველო საუკუნეების განმავლობაში განიცდიდა სტიქიის შემოტევას. შემორჩენილია VIII-IX საუკუნეების მონაცემები კატასტროფული ზარზმის მიწისძვრის შესახებ, თმოგვის, მცხეთის და ა.შ. ჩვენი წინაპრები ჯერ კიდევ ჩვენს წელთაღრიცხვამდე ქმნიდნენ სეისმომედეგი შენობების კონსტრუქციებს და მეთოდებს, ისეთებს, რომლებსაც ჩვენი კოლეგები XX საუკუნეშიც იყენებდნენ. გადმოცემულია ანტისეისმოიზოლაციის გამოყენება ნაგებობებში და ასევე მშენებლობაში დაშვებული შეცდომების გამოსწორების გზები

საკვანძო სიტყვები: *მიწისძვრა; სეისმომედეგი შენობა; კონსტრუქცია; დაპროექტება.*

ცნობილია, რომ მსოფლიოში ცნობილმა მეცნიერმა კირიაკ ზავრიევმა ჯერ კიდევ 1927 წელს განავრცო იაპონელი მეცნიერის ნ. მონონობეს 1920 წელს წარმოდგენილი რეზონანსული რხევითი თეორია. ამას მოყვა საქართველოში სეისმური მოვლენების და სეისმომედეგობის მეცნიერული შესწავლის სპეციალისტთა მთელი გუნდის ჩამოყალიბება.

საბჭოთა კავშირში მშენებლობის ინდუსტრიალიზაციის ტემპების გასაძლიერებლად, ადამიანთა საცხოვრისის, საზოგადოებრივი დაწესებულებებით დაკმაყოფილების, სოფლად კულტურული დონის ამაღლების მიზნით, მთავრობის დადგენილებით 11 ყოფილ სეისმოაქტიურ საბჭოთა რესპუბლიკაში გამოცხადდა 1962-1967 წლებში სოფლად და ქალაქად კონკურსები, იმ პერიოდისათვის ყველაზე უფრო პროგრესული, ეკონომიური და რაც მთავარია, სეისმომედეგი კონსტრუქციების და მათ საფუძველზე სათანდო პროექტების შესაქმნელად.

ამ კონკურსებში გაიმარჯვეს ქართველმა სპეციალიტებმა. კონკრეტულად "საქსოფლმშენსახპროექტმა" და თბილისის ზონალურმა სამეცნიერო-საკვლევმა ტიპობრივი და ექსპერიმენტალური პროექტირების ინსტიტუტმა (თბილზნიიეპი). და აი მომდევნო 30 წლის განმავლობაში სავალდებულო წესით ინერგებოდა ამ კონსტრუქციებით ნაგები 6, 7, 8 და 9 ბალიან სეისმურ რაიონებში, ერთიდან 18 სართულამდე შენობები და გამოიყენებოდა მათი ამგები კონსტრუქციები.

ეს კარკასული ელემენტები ინერგებოდა აგრეთვე მრავალსართულიან სამრეწველო ნაგებობებში 2,5 ტონამდე კვ. მ. სასარგებლო დატვირთვებისათვის. მრავალსართულიან შენობებში სეისმურ რაიონებში გამოყენებული იქნა ჩარჩო-კავშირიანი სისტემები სიხისტის დიაფრაგმები უკვე, როგორც ტიპობრივი კონსტრუქციები. დაინერგა პროფესორ ჟეჟელის ე.წ. იუგოსლავური სისტემით, წინასწარ დაძაბული კარკასული ნაგებობები არმატურის დაძაბვით მშენებლობის პირობებში, რომლებიც გამოირჩეოდნენ მაღალი სეისმომედეგობით და ეკონომიურობით.

ავითვისეთ "მონოლითმშენი"-ს წინადადებით დამუშავებული 16 სართულიანი საცხოვრებელი სახლები მონოლითურ რკინაბეტონში ინდუსტრიალური მეთოდების გამოყენებით. სისტემატურად მიმდინარეობდა ექსპერიმენტლური მუშაობა "თბილზნიიეპის", საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის სამშენებლო მექანიკის და სეისმომედეგობის ლილოს ბაზებში, აგრეთვე ჰიდროტექნიკის სამეცნიერო-

საკვლევ ინსტიტუტებში და საშენ მასალათა ინსტიტუტში. დამუშავდა და დაინერგა სეისმურ ზემოქმედებაზე გაანგარიშებული მზიდი კონსტრუქციების კვანძები. მიღებული გვქონდა ასამდე საავტორო მოწმობა.

ერთერთი მათგანის, რ/ბეტონის ჩარჩოს კვანძის კოლონების და რიგელების ჭდობის გაძლიერება, ჩვენი მეთოდით, რომ შესრულებულიყო, ამ სურათზე აღბეჭდილი კატასტროფა არ მოხდებოდა, ეს კვანძი გათვლილი და დაკონსტრუირებული უნდა ყოფილიყო ნიშანცვლად სეისმურ მომენტებზე.

დიდი მუშაობა მიმდინარეობდა ლითონკონსტრუქციების დახვეწაზე, მათ გამოყენებაზე სამრეწველო და საზოგადოებრივ მშენებლობაში. გამოყენებული იყო წინასწარდაძაბული წერტილოვანი საძირკვლები, ხიდების და სხვა დანიშნულების ობიექტების კონსტრუქციები და ა.შ. არ შეიძლება არ აღვნიშნოთ, რომ ჩვენი კონსტრუქციები ზოგიერთ, იმ ხანად სოციალისტურ ქვეყნებშიც, დაინერგა. განსაკუთრებით გამახარა 2007 წელს ჩემი იაპონიაში ყოფნის დროს "მშობლიური", ზედა ზონაში გაშიშვლებული რიგელების ხილვა, რომლებსაც იაპონელები 60 სართულიანი შენობის მონტაჟის დროს იყენებდნენ.

ჩვენს მიერ დანერგილი კარკასული კონსტრუქციები იის-04 სერიის, იმითაც იყვნენ ორიგინალური, რომ ისინი უნიფიცირებული იყვნენ, ანუ მათი გამოყენება ფორმების შეუცვლელად შეიძლებოდა სხვადასხვა დატვირთვის და გაბარიტების, სხვადასხვა სეისმური ზემოქმედების დროს. ამან ხელი შეუწყო ინდუსტრიული ბაზების შრომის ნაყოფიერების ზრდას, წარმოების ეფექტურობას. ჩვენში 10-მდე ქარხანა და სახლმშენებელი კომბინატი აშენდა ამ კონსტრუქციების საწარმოებლად. აშენდა ინდუსტრიალური რკინაბეტონის მწარმოებელი ქარხნები ყველა სეისმოაქტიურ რესპუბლიკაში.

ყველაფრის დამაგვირგვინებელი იყო უნიკალური 271 მ სიმაღლის კაშხალი ენგურზე.

სეისმომედეგ კვლევებს, მეცნიერული პრობლემების გადაწყვეტას, პროექტირებას, მშენებლობას საქართველოში სათავეში ედგა კ. ზავრიევის სახელობის მეცნიერებათა აკადემიის სამშენებლო მექანიკის და სეისმომედეგობის, თბილისის ზონალური სამეცნიერო-საკვლევი და ექსპერიმენტალური პროექტირების, ჰიდროტექნიკური ნაგებობების, საშენ მასალათა ინსტიტუტები. მშენებლობას და კოორდინირებას აწარმოებდა საქართველოს მშნებლობის სამინისტრო.

ჩვენი სპეციალისტები მრავალჯერ დაჯილდოვდნენ საბჭოთა კავშირის და საქართველოს სახელმწიფო პრემიის ლაურეატის წოდებით. ვმონაწილეობდით მსოფლიოს მრავალი ქვეყნის სამეცნიერო კონფერენციებში მოხსენებებით და ა.შ. უნდა ხაზგასმით აღვნიშნო, რომ საბჭოთა კავშირის მშენებლობის მინისტრის გიორგი კარავაევის ბრძანებით მალხაზ ბედიაშვილი გახლდათ საბჭოთა კავშირის ყველა 11 სეისმურ რესპუბლიკის მაშტაბით კარკასულ პანელური მრავალსართულიანი საცხოვრებელი, საზოგადოებრივი და სამრეწველო ექსპერიმენტალური საპროექტო და სამშენებლო საქმიანობის საკოორდუნაციო საბჭოს თავმჯდომარე 1977 წლიდან.

დამუშავებული გვაქვს საკავშირო და რეგიონალური-ყველა რესპუბლიკისათვის, სამრეწველო ნაკეთობების კატალოგები. ვაწვდიდით ინფორმაციას და კონსულტაციას ვუწევდით და ვთანამშრომლობდით 400-მდე საპროექტო ორგანიზაციასთან და მშენებელობის სამინისტროსთან, 130 სამშენებლო ტრესტთან და 80-ზე მეტ რკინაბეტონის ქარხანასთან სსრკ მთელ ტერიტორიაზე. ნაყოფიერად ვთანამშრომლობდით და ვუწევდით დახმარებას მიწისძვრით დაზარალებულ რეგიონებს დაღესტანში, სომხეთში, უზბეკეთში, თბილისში, საჩხერეში და ა.შ.

პირველ რიგში უნდა შევეხო ჩვენთვის ყველაზე მტკივნეულ საკითხს, მეცნიერული კვლევის, ექსპერიმენტალური მუშაობის, ექსპერიმენტალური მშენებლობის, ახლის ძიების არარსებობას.

გაუქმდა კ. ზავრიევის სახელობის მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის სამშენებლო მექანიკის და სეისმომედეგობის, თბილისის ზონალური სამეცნიერო-საკვლევი, ტიპობრივი და ექსპერიმენტალური პროექტირების ინსტიტუტები, ჰიდროტექნიკური ნაგებობების, საშენ მასალათა და სხვა ინსტიტუტები. მოკლედ აღარ გვაქვს სამეცნიერო-საკვლევი ინსტიტუტები. და უფრო მეტი: განადგურდა წლობით, რუდუნებით შექმნილი სამეცნიერო-ექსპერიმენტალური ბაზები, სადაც იქმნებოდა ახალი სამშენებლო-ექსპერიმენტალური სისტემები საზოგადოებრივი, საცხოვრებელი და მსოფლიოში ცნობილი ჰიდროტექნიკური ნაგებობებისათვის, ახალი მასალები და ა.შ. გაუქმდა და გაიყიდა ინდუსტრიალური ქარხნები. ახლა იქ ნაყინის ბრიკეტებს ამზადებენ. გაიფანტა ცნობილი სამეცნიერო კადრები. ახალგაზრდები უხალისოდ ეკიდებიან ჩვენს "არაპრესტიჟულ" სპეციალობას-მშენებლობას.

მაშინ, როცა წინა წლებში შევქმენით და დავნერგეთ ექვსი ახალი სამშენებლო სისტემა, ბოლო თითქმის 30 წლის განმავლობაში არც ერთი არ შექმნილა. "შექმნას" თავი დავანებოთ – არც ერთ სხვა ქვეყანაში ახალი და პროგრესული გადაწყვეტა არ გადმოღებულა და არ დანერგილა. საქართველოს მშენებელთა ფედერაციამ, ევროპის მშენებელ ინჟინერთა საზოგადოებამ, არაერთხელ მიმართა როგორც ქვეყნის მთავრობის თავმჯდომარეს, საქართველოს ეკონომიკის და მდგრადი განვითარების სამინისტროს, პარლამენტის თავმჯდომარეს, ქ. თბილისის მერიის ხელმძღვანელობას, მაგრამ მშენებლები დღემდე არიან ყურადღების გარეშე.

მშენებლები, რომელთა წილადაც საერთო სახალხო პროდუქციის 25% მოდიოდა, ახლა ათკაციან ჯგუფის ხელმძღვანელობის იმედად არიან. არა გვაქვს მშენებლობის მაკოორდინირებელი, ხელმძღვანელი სამინისტრო. არა და მსოფლიოს თითქმის ყველა ქვეყანაში სხვდასხვა სახით ასეთი სამინისტროები არსებობენ. "ზემდგომები" ჩვენს, მშენებელების წინადადებებს ეცნობოდნენ, მაგრამ არ რეაგირებდნენ. (რადგან არავინ არ არის მშენებელი და მშენებელთა პრობლემებს არ იცნობენ). მაშინ, როცა წინა წლებში საქართველოში ჩამოდიოდნენ საბჭოთა კავშირში შემავალი, სეისმოაქტიური რესპუბლიკების სპეციალისტები გამოცდილების გასაზიარე-ბლად, ახლა ჩვენ ჩავდივართ სეისმომედეგი სისტემების გასაცნობად და დასანერგად, ჩვენ ვცდილობთ გავეცნოთ იმ "ახალს", რომელიც ჩვენს მეზობელ რესპუბლიკებში შეიქმნა და დაინერგა.

ქვეყნის ხელმძღვანელ ინსტანციებში არც ერთი მშენებელი ან არქიტექტორი არ არის რაოდენ საკვირველიც არ უნდა იყოს – არც პარლამენტშია ვინმე. ჩვენ ძველები, რომლებმაც ავაშენეთ ეს ქვეყანა, რასაკვირველია არ ვისვენებთ. ჩვენს წინადადებებს ვაგზავნით მთავრობაში, მაგრამ ყველაფერი ძველებურად მთავრდება: უფროსი მოადგილეს დააწერს, მოადგილე დეპარტამენტის ხელმძღვანელს, ის განყოფილების უფროსს, ის კი "მეისრეს", რიგით მუშაკს. მას კი სახელმწიფო საქმეების გადაწყვეტა არ ძალუძს.

ვინაიდან სამეცნიერო-საძიებო მუშაობის საშუალება მოგვისპეს, გავიხედეთ ქვეყნის გარეთ. აღმოჩნდა, რომ მსოფლიოს ყველა ქვეყანა გამალებული მუშაობს ნაგებობათა, სახალხო დოვლათის გადასარჩენათ კატასტროფული მიწისძვრებისაგან. გავეცანით იაპონიის, იტალიის, სომხეთის, რუსეთის, აშშ, საფრანგეთის სამეცნიერო შრომებს და პრაქტიკულ მაგალითებს.

ცნობილია, რომ საანგარიშო მიწისძვრის შედეგად ნაგებობაში ჩნდება სხვადსხვა სიდიდის ბზარები. შემდგომი განმეორებითი ბიძგების დროს ბზარების რაოდენობა იზრდება, ამავდროულად შენობის სიხისტე მცირდება და შედეგად მცირდება სეისმური დატვირთვის სიდიდეც. მაგრამ, თუ ვიცით, რომ შენობის სიხისტის შემცირებით

შეგვიძლია შევამციროთ მასზე მოსული სეისმური ზეგავლენაც, მაშასადამე უნდა ვიფიქროთ, როგორ შეიძლება ამ გზით გადავარჩინოთ ნაგებობა.

სწორედ ამ გარემოებამ უბიძგა მეცნიერებს დაეწყოთ სეისმური ზემოქმედებისაგან დაცვის სისტემების ძიება. უკანასკნელი სამი ათეული წლის განმავლობაში შეიქმნა რამოდენიმე პრაქტიკაში დანერგილი მეთოდი: სეისმოიზოლაციური სისტემები, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება ყველა სეისმურ რაიონში, საქართველოს გარდა.

ამიტომ ევროპის სამოქალაქო ინჟინერთა საზოგადოების საქართველოს სამოქალაქო ინჟინერთა საზოგადოებამ, რომელიც შეიქმნა 2011 წელს, დაიწყო გზების ძებნა, თუ როგორ შეიძლება ამ უახლესი, უკვე საზღვარგარეთ გამოცდილი და ათვისებული სისტემის გაცნობა და დანერგვა ჩვენს ქვეყანაში [1-4].

სეისმოიზოლაციური სისტემების გამოყენების მიზანშეწონილობა, განპირობებულია იმით, რომ ის უზრუნველყოფს მიწისძვრისაგან გამოწვეული ძალვების შემცირებას 1-2 ბალით, რაც პირდაპირპროპორციულ დამოკიდებულებაშია განივკვეთის ზომების, ბეტონის და არმატურის ხარჯის შემცირებასთან, ზოგადად, მშენებლობის გაიაფებასთან.

ამ შემთხვევაში შენობის შიდა ტიხრები, კომუნიკაციები, ავეჯი არ განიცდის ნგრევას, დეფორმაციას და მოსპობას. სეისმოიზოლაციური მეთოდების გამოყენება შესაძლებელია ყველა სახის სამშენებლო სისტემაში. სომეხი სპეციალიტების გამოცდილებას თუ გავიზიარებთ, იზოლაციური სისტემების გამოყენება შესაძლებელია უკვე აშენებულ შენობებშიც.

სეისმოიზოლატორების განთავსება ძირითადად ხდება საძირკვლებსა და შენობის კარკასს შორის, სპეციალურად დატოვებულ ღრეჩოებში. სეისმოიზოლატორების საძირკვლებში განთავსების დროს ძირეულად იცვლება შენობის საანგარიშო სქემა. თუ ჩვეულებრივი მრავალსართულიანი შენობა N–ჯერ სტატიკურად ურკვევია, სეისმოიზოლატორიანი შენობის საანგარიშო სქემა არის ორჯერ სტატიკურად ურკვევი, რომლის გაანგარიშებაც ბევრად უფრო მარტივია. ერთ მასას წარმოადგენს სეისმოიზოლატორი და განთავსებული ხისტი გადახურვა, რომელსაც ეყრდნობა შენობის მიწისზედა ნაწილი. ხოლო მეორე მასა არის მიწისზედა ნაწილის მთლიანი მასა. ანუ, მიწისძვრის დროს დეფორმაციას განიცდის სეისმოიზოლატორი (გრუნტის აჩქარების გამო), ხოლო მიწისზედა ნაწილი გადაადგილდება ხისტ ფილასთან ერთად, როგორც მთლიანი მასა, მყარი ტანი. ამდენად დეფორმაცია მზიდ კონსტრუქციებში არის ძვრის დეფორმაცია და ძალზედ მცირეა, რომლის აღდგენაც ადვილია.

ჩამოყალიბდა სეისმომედეგობაზე გაანგარიშების სპექტრალური თეორია, სხვადასხვა მოდიფიკაციით. ნორმატიულ მასალებში მსოფლიოს თითქმის ყველა ქვეყანაში აქტიურად იყენებენ სეისმომედეგობაზე გაანგარიშებისას სპექტრალურ მეთოდს. მშენებლობის ნორმების ძირითადი დებულებები-ეს არის დასაგეგმარებელი შენობა-ნაგებობის ქცევის ჩვენი დღევანდელი პროგნოზი მომავალი მიწისძვრის დროს. დღეს სეისმოლოგების წინაშე დგას პრობლემა, რომელიც ეხება არა მარტო მოსალოდნელი მიწისძვრის ზუსტად პროგნოზირებას, არამედ მიწისძვრის დროს ნაგებობის ქცევის პროგნოზირებაც.

მთავარია გვახსოვდეს, რომ ადამიანები უშუალოდ მიწისძვრით კი არ იღუპებიან, არამედ მიწისძვრისს შედეგად შენობა-ნაგებობის ნგრევის გამო. ამიტომ მეცნიერთა და დამპროექტებელთა მიზანი შენობა-ნაგებობების დაპროექტებისა და აგების ისეთი პრინციპის შემუშავებაა, რომლის განხორციელებისას გარანტირებული იქნებოდა ადამიანთა სიცოცხლის უსაფრთხოება, აღჭურვილობისა და ქონების შენარჩუნება ანტისეისმურ ღონისძიებებზე მინიმალური დანახარჯებით, სეისმური რისკის მინიმუმამდე დაყვანა.

ამჟამად ასამდე პატენტია გაცემული სეისმოიზოლატორების ნაირსახეობაზე. არსებობს სეისმოდაცვის რამოდენიმე სისტემა, მათ შორის აქტიური და პასიური სეისმოდამცავი სისტემები. ჩვენ, ამ ეტაპზე უპირატესობას პასიურ სეისმოდაცვის სისტემას ვანიჭებთ, რომელშიც შედის სეისმოჩამხშობი და სეისმოსაიზოლაციო საშუალებები.

სეისმოჩამხშობი სისტემები შეიცავენ დემპფერებს და დინამიკურ დამხშობს, რომლებშიც მექანიკური ენერგია გარდაიქმნება სხვა სახის ენერგიად, რაც იწვევს რხევის დემპფერირებას ან გადანაწილებას დასაცავ კონსტრუქციაში დახშობამდე.

სეისმოიზოლაციური სისტემები განსხვავდებიან უბრალო ფორმით, მონტაჟის ტექნოლოგიური სიმარტივით, შედარებით დაბალი ღირებულებით და მაღალი საიმედოობით. მათი გამოყენება საშუალებას გვაძლევს შევამციროთ სეისმური დატვირთვა 1,5-2 ჯერ, გრუნტული პირობებიდან და კონსტრუქციული სისტემებიდან გამომდინარე. ჩვენ დღეისათვის უპირატესობა მივანიჭეთ რეზინლითონის საყრდენებს-იზოლატორებს.

მათი გამოყენებით ხდება ინერციული ძალების შემცირება, რის შედეგადაც მცირდება მიწისძვრის დროს კონსტრუქციული ელემენტების რღვევის სიხშირე, მცირდება გადაადგილება. ამ დროს შეზღუდულია გადახურვის გადაადგილება, რომელიც გამორიცხავს არაკონსტრუქციული ელემენტების დაზიანებას და საშუალებას იძლევა გამოვიყენოთ შენობა ძლიერი მიწისძვრის შემდეგაც.

ისმება კითხვა-თუ ასეთი დადებითი შედეგები მოსდევს სეისმოიზოლაციური სისტემების გამოყენებას და მასიურ დანერგვას, თუ ასეთი მეთოდები გამოიყენება მსოფლიოს ყველა სეისმოაქტიურ ქვეყნებში და წარმატებითაც, მაშინ რატომაა საქართველო ერთადერთი ქვეყანა, სადაც ეს უაღრესად პროგრესული სისტემა აქამდე არ გამოიყენება. 2007 წელს გავეცანით რა სეისმოიზოლაციურ სისტემებს იაპონიაში, მათ გაანგარიშებებს, კონსტრუირებასა და მშენებლობაში დანერგვის მაგალითებს, გამოვაქვეყნე შესაბამისი სტატია პრესაში, სათანადო რეკომენდაციებით ჩვენში უცილობლად დასანარგად.

სტატია და ახსნა განმარტება გადავეცი მაშინდელ ვიცე მერს . . . და აი 11 წელია, მე და ჩემი კოლეგები ვებრძვით ბიუროკრატიას და უცოდინაროზას ამ სფეროში. მალხაზ ბედიაშვილის მიერ პირადად გადაცემული იყო ქალაქ თბილისის მერის და ეკონომიკის და მდგრადი განვითარების მინისტრის მიერ ხელმოწერილი წერილები-ვალდებულებები ამ მეთოდის დანერგვაში ხელშეწყობის შესახებ, ნეაპოლში და მადრიდში გამართულ ევროპის საბჭოს სამოქალაქო ინჟინერთა საზოგადოების პრეზიდიუმს, გენერალურ ასამბლეაზე. მხარდაჭერა სრული იყო! დახმარებაც სრულფასოვანი იყო. ასევე მხარს გვიჭერდნენ და გვიჭერენ სომეხი კოლეგები. მაგრამ ამ 11 წლის განმავლობაში დაპირების გარდა ჩვენი ხელისუფლების მიერ არაფერი არ გაკეთებულა.

არიან პიროვნებები, რომლებიც აქტიურად ებრძვიან საქართველოში და კერძოდ თბილისში მაღლივ მშენებლობას! წერენ პრესაში და გამოდიან ტელევიზიით: 12 სართულზე მეტის მშენებლობა სეისმურ რაიონებში არ დაიშვებაო . . . საინტერესო ის არის, რომ ჩემს გარდა პასუხის გამცემი არც მეცნიერთა, არც დამპროექტებელთა, არც ეკონომიკის და მდგრადი განვითარების სამინისტროს მიერ არავინ არ გამოჩნდა!
არა და გადახედეთ თბილისს-აქ მხოლოდ მაღლივი შენობები შენდება.

გვჯერა, რომ ჩვენი დღევანდელი საერთაშორისო კონფერენცია, რომელშიც მსოფლიოს ცნობილი სპეციალისტები მონაწილეობენ, სტიმულს მისცემს ჩვენს მთავრობას გადადგას ეს მეტად საჭირო ნაბიჯი, რათა თავიდან ავიცილოთ საანგარიშო მიწისძვრით მიყენებული მილიარდობით დოლარის ზარალი.
ერთი მაიმედებს-როგორც იქნა საქართველოს მთავრობას სათავეში ჩაუდგა ინჟინერი, პროფესორი. იქნებ მშენებლობისადმი ინჟინრულმა მიდგომამ გადაგვარჩინოს.

ამას აგრეთვე ხელს შეუწყობს ჩვენს მიერ ბატონ გელა ყიფიანთან ერთად გამოშვებული წიგნი "მიწისძვრისაგან დაცვის სეისმოსაიზოლაციო საშუალებები და დანერგვის პერსპექტივები საქართველოში". სეისმოიზოლაციური სისტემების მუშაობის, გაანგარიშების და მშენებლობაში გამოყენების შესახებ, რომელიც ცოტა ხანში გამოვა.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] Kipiani Gela, BliadzeSeit. Calculation of ribbed shell by a finite element method. *Annual meeting of the Georgian Mechanical union. 27.09-29.09. 2017. Tbilisi.*

[2] ბედიაშვილი მ., ყიფიანი გ.. თოდუა მ. ნაგებობათა ანტისეისმური ღონისძიებები და მიწისძვრისაგან დაცვის ზოგიერთი ასპექტი. *მეცნიერება და ტექნოლოგიები. № 2(725) "ტექნიკური უნივერისიტეტი", თბილისი, 2017, გვ. 18-30*

[3] ბედიაშვილი მ., ყიფიანი გ. თანამედროვე გამოწვევები სეისმომედეგობაში და მისი აქტუალური პრობლემები. *საერთაშორისო სამეცნიერო-პრაქტიკული კონფერენციის "თანამედროვე გამოწვევები, მეცნიერების აქტუალური პრობლემები და ევროინტეგრაცია", მოხსენებათა მასალები. თბილისის სასწავლო უნივერსიტეტი, 22-23 ნოემბერი, 2017, თბილისი, გვ. 74-78*

[4] Bediashvili M., Kipiani G., Todua M. Methods to reduce the losses at catastrophic earthquake. *Problems of Mechanics N 3(68) Tbilisi 2015. pp. 77-82*

PROCESSES OF DEVELOPMENT OF CONSTRUCTION FIELD SCIENCE IN GEORGIA

Malkhaz Bediashvili* Gela Kipiani**, Vazha Sulashvili**
*Engineering Academy of Georgia; **Georgian Aviation University

Abstract: Georgia during the centuries was undergoing the natural disasters. Are remained the data from the VIII-IX centuries the catastrophic zarzma earthquake, as well as Tmogvi, Mtskheta and so on earthquakees. Our ancestors were constructed up to BC centuries the seismic resistant structures and methods that our colleagues are still used in the XX century. Are stated the application of antiseismic insulation in buildings and ways to improve the errors at construction

ბიზნეს-პროექტების განხორციელების მიზანმიმართული ფუნქციონირების ფორმალიზებული მოდელი

ქურდაძე მ., გარდაფხაძე თ., გარდაფხაძე მ.
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ნაშრომში განხილულია ბიზნეს-პროექტების ეფექტური ფუნქციონირების ამოცანები, მისი შემდგომი განვითარების საკითხების ანალიზი და კვლევის პროცესი. მოთითებულია რეკომენდაციები მიზანმიმართული ფუნქციონირების მოდელის ძირითად ასპექტებზე. გამოკვლეულია რაციონალური გადაწყვეტილების გზები, სადაც ხაზგასმულია გარემოდან მოქმედი ფაქტორების ზეგავლენა, მათი უარყოფითი (ხელის შემშლელი) და ხელის შემწყობი გავლენის დადგენის მიზნობრიობა. პარალელურად გაკეთებულია ბიზნეს-საქმიანობის შიდა მახასიათებლების ანალიზი, რათა დადგენილიყო როგორ შეძლებენ ისინი გაუმკლავდნენ გარემოდან მოსალოდნელ „საფრთხეს“, ან რაციონალურად გამოიყენონ შესაძლო „დახმარებები“. ასეთი ანალიზის ჩატარების მიზნით ნაშრომში განხილულია გარემოდან ზემოქმედი ფაქტორების განსხვავებული ჯგუფები: ეკონომიკური ფაქტორები, პოლიტიკური ფაქტორები, საბაზრო ფაქტორები, კონკურენტული ფაქტორები, ტექნოლოგიური ფაქტორები, სოციალური ფაქტორები, საერთაშორისო ფაქტორები. თითოეული მათგანი ცალკე მოიცავს შესაბამის კომპონენტებს, რომლებიც სხვადასხვა სახის ზემოქმედებას ახდენენ ბიზნესზე. ანალოგიური სახით – რგოლებად და შემადგენელ კომპონენტებად წარმოდგენილია ბიზნესის შიდა მახასიათებლების რამოდენიმე ასპექტი.

ნაშრომში ყურადღება დათმობილია ბიზნესის მართვის სტრუქტურის სრულყოფის ერთ-ერთ მიმართულებაზე. ჩვეულებრივ არსებული მართვის ხაზოვან-ფუნქციონალური სტრუქტურის შეცვლას მიზნობრივი ჯგუფით, რომელიც იქმნება ბიზნეს-კომპანიების ძალებით და განახორციელებს არასასურველი მოულოდნელობით გამოწვეული პრობლემის მართვას, რის შემდეგაც დაიშლება. მოცემულია ასეთი სისტემის სტრუქტურული სქემა, შესაბამისი ფუნქციონირების მექანიზმი და მათი მათემატიკური მოდელის ბაზური ვარიანტი. განხილულია და მიღებულია შედეგი, რომელიც ეხება პრობლემის თავიდან აცილების მიზნით, მიზნობრივი ჯგუფის შექმნის შესაძლებლობას და ასეთი სტრუქტურის და ფუნქციონირების მექანიზმის მათემატიკურ მოდელს. აღნიშნულია, რომ კრიზისული სიტუაცია არ არის ცალკე არსებული, დამოუკიდებელი პრობლემა. ის ბიზნესის ფუნქციონირების ერთ - ერთი საკმაოდ რთული მახასიათებელია. მისი სირთულე პირველ რიგში პრობლემის წარმოქმნაში მონაწილე, შიდა თუ გარე ფაქტორების შესაძლო კომბინაციების სიმრავლეში და ანალიზის სირთულეში გამოიხატება. მეორე რიგში კი არასასურველი ზემოქმედებით შექმნილი პრობლემა საქმიანობის ძირითადი მიზნის გარკვეული ქცევაზეა. მისი რეგულირება და მართვა აუცილებლად მიზანმიმართულად, მართვის საშუალო დონეზე უნდა ხდებოდეს. ეფექტობა მიზანშეწონილი იქნება, პრობლემის მართვის მთლიანი პროცესი, განახორციელოს ბიზნეს-კომპანიონების ძალებით შექმნილმა პრობლემურ-მიზნობრივმა ჯგუფმა, რაც სიტუაციის სისტემური ანალიზის კვლევის რაციონალური მიდგომა იქნება. ამ მიზნით ნაშრომში განხილულია პრობლემურ-მიზნობრივი სტრუქტურის და ფუნქციონირების მექანიზმის მათემატიკური მოდელი, ელემენტების გარკვეული ინფორმირებულობის შემთხვევაში (ბაზური მოდელი). მართალია ეს მართვის ორგანიზაციული სტრუქტურის გარკვეულ ცვლილებებს გამოიწვევს, მაგრამ მიღებული პრობლემურ-მიზნობრივი მართვის სტრუქტურები, წარმატებით „მუშაობს“ საბაზრო გარემოს ფუნქციონირებად სივრცეში და საკმაოდ სწრაფად ინერგება.

ბიზნეს-პროექტების განხორციელებისათვის საქმიანობის მართვის სტუქტურების და ფუნქციონირების მექანიზმების თანმიმდევრული ფორმირების პროცესი მოითხოვს სიახლეთა კვლევის, დამუშავების, დანერგვის და მათი რეალიზების ერთიანი, სისტემური მეთოდების გამოყენებას. ფუნქციონირების მექანიზმში არსებული ან მოსალოდნელი დაბრკოლებები (კრიზისული სიტუაციები), განპირობებული ბიზნესზე მოქმედი მრავალი შიდა თუ გარე ფაქტორით, დიდი მოცულობის საჭირო

დრო (ti) განისაზღვრება ისე, რომ უზრუნველყოფილი იყოს მიზნის შესრულება. ამ დროს გამოიყოფა დროის ინტერვალი, სადაც მიმდინარეობს მიზნის მიღწევისათვის ყველა აუცილებელი საქმიანობა.

რამდენიმე სიტყვით შევეხოთ ბიზნესის შემადგენელი ქვერგოლების, როგორც ერთი მთლიანის სისტემის პოტენციალის ცნებას, რომელიც არ ითვლება ბაზურ მახასიათებლად, მაგრამ არის ძალზე მნიშვნელოვანი.

კარგად ორგანიზებულ ბიზნესში A რგოლის სტრუქტურული ელემენტების $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ურთიერთქმედება ურთიერთშეთანხმებულია, მიზანმიმართულია და სინქრონიზებულია ძირითადი მიზნის მიღწევაზე. ასეთი სისტემის P პოტენციალი განსაზღვრული პარამეტრის მიხედვით (მაგალითად, სამეცნიერო ეკონომიკური და ა.შ) მეტია ყველა შემადგენელი ქვერგოლის პოტენციალთა ჯამზე.

$$P(A) > [P(a_1) + ... + P(a_n)]$$

რაც უფრო მეტია რგოლში ფუნქციონალური ქმედებები, მით მეტია ბიზნესში ორგანიზებულობა და მით მეტად აჭარბებს საქმიანობის პოტენციალი შემადგენელი რგოლების პოტენციალების ჯამს.

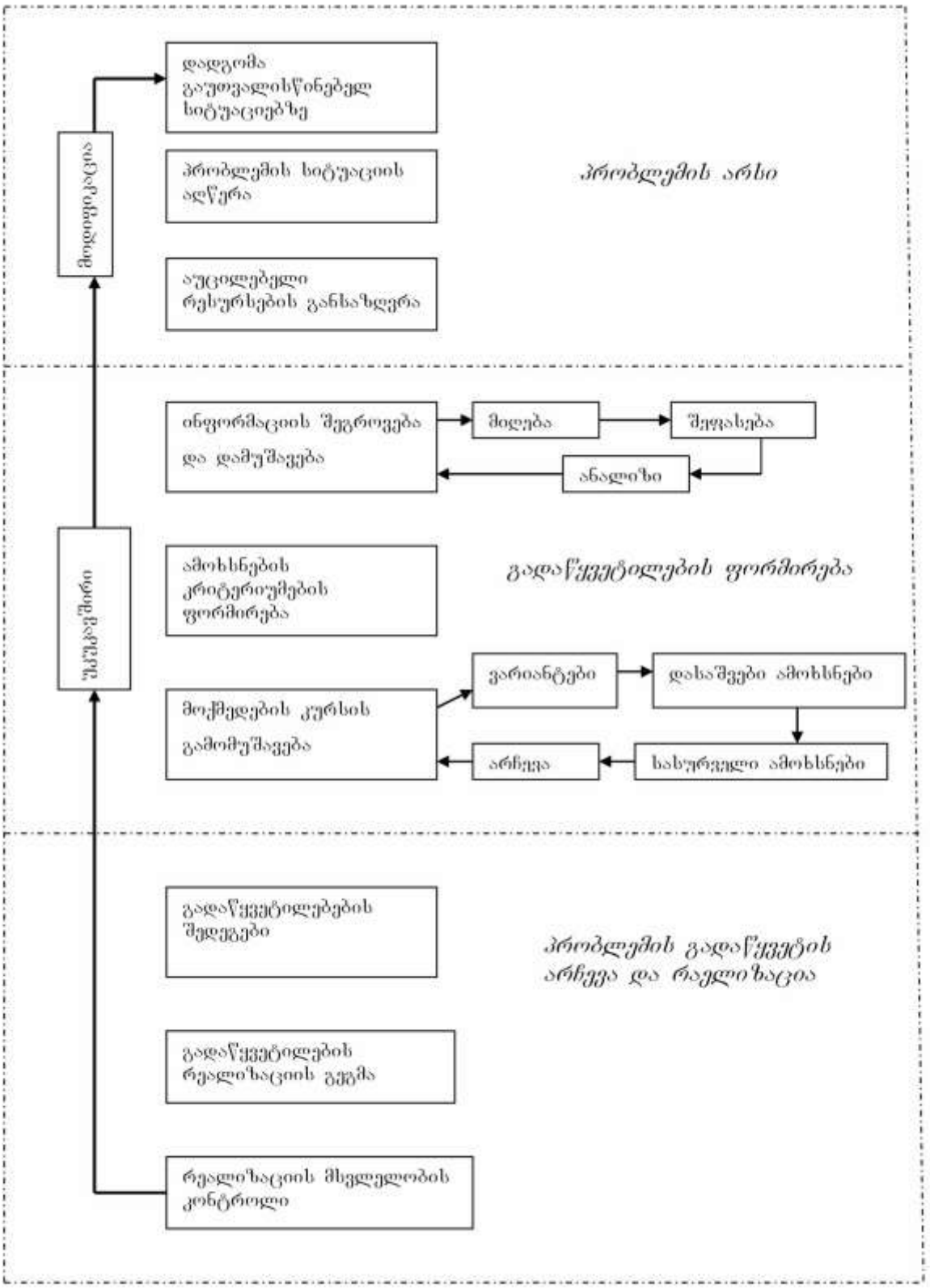
როცა ბიზნესში ორგანიზებულობის ხარისხი არ არის მაღალი ან ბიზნესის შემადგენელი რგოლების შეუთანხმებლობის და არამიზანმიმართულობის გამო დაბალიც კი არის, მაშინ:

$$P(A) \le [P(a_1) + ... + P(a_n)]$$

ამ დროს ქრება ფუნქციონალური რგოლის ინტეგრაციულობის თვისება და ამიტომ ის მკაცრი გაგებით, არ არსებობს.

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ მაღალი პოტენციალის მისაღწევად, მიზნობრივ რგოლში აუცილებელია გამოკვეთილი მიზნის დადგენა და შემადგენელი რგოლების ურთიერთშეთანხმებული ქმედებების ორგანიზება. სხვა შემთხვევაში არ იარსებებს ბიზნესში ინტეგრაციულობის თვისება და ხშირად ერთი მთლიანი რგოლიც.

ქვემო სქემაზე მოცემულია სტრატეგიული ბიზნესშესაძლებლობების უფრო დეტალური, მიზანმიმართულ განხილვა და ანალიზი.



ამ სქემას ვუწოდე სტრატეგიული შესაძლებლობების ოთხმხრივი ანალიზი. ის ძირითადში ნიშნავს იმას, რომ ბიზნეს კომპანიონებმა

ფუნქციონირების დაწყებამდე, შეიძლება ბიზნეს-გეგმის შემუშავების ეტაპზეც კი, მოახდინოს შიდა ცვლადების და გარემოდან ზემოქმედი ფაქტორების კლასიფიკაცია და მათი შემდგომი ერთობლივი ანალიზი, ეს პროცედურა აუცილებელია მარკეტინგის მიზნებისთვის და მთლიანად ბიზნესის სწორი სტრატეგიის არჩევისთვისაც.

იგულისხმება, რომ ბიზნესში დასახულია ძირითადი მიზანი და ყველა პრობლემა რომელიც არსებობს ან იარსებებს ფუნქციონირების პროცესში, თვით კრიზისული პრობლემის ჩათვლით, ძირითადი მიზნის ქვემიზანია და მართვის რომელიმე დონეზეა გადასაწყვეტი, ეს კი აუცილებლად ძირითად მიზანთან მიმართებაში უნდა განიხილებოდეს.

როცა შემთხვევითი ფაქტორები ან მართვაში შემთხვევითი არასასურველი სიტუაციის დადგომის წინა პირობები წარმოიქმნება ან როდესაც ბიზნესის ფუნქციონირების სუსტ შიდა მახასიათებლებს (შიდა საქმიანობის ცვლილებები), ემატება გარემოდან მოქმედი ორგანიზაციისთვის არასასურველი ფაქტორები და ამ ყველაფერს აღვნიშნავთ B-თი, ხოლო შიდა საქმიანობის მახასიათებლების სიმრავლეს A-თი მაშინ, $C = A \times B$ წარმოადგენს გარემო ფაქტორების და შიდა ცვლადების ყველა შესაძლო თანადობების სიმრავლეს. ამ შემთხვევაში განიხილება მხოლოდ ერთიკვადრატი, სადაც ბიზნესში (ფირმა, კორპორაცია) შედარებით არა ძლიერი, არამყარი და არაეფექტური მახასიათებლები და გარემოდან არასასურველი ფაქტორები იკვეთებიან.

აღვნიშნოთ A^1- ბიზნესის ძლიერი მახასიათებლების სიმრავლე, ($A^1 \subset A$), ხოლო A^2- ით ბიზნესის სუსტი მახასიათებლები ($A^2 \subset A$), მაშინ $A = A^1 \cup A^2$.

ცხადია თვითონ A^1-ც და A^2- ც შედგება კონკრეტული შესაბამისი საქმიანობისაგან $A^1 = \{a_1^1, a_2^1, ..., a_n^1\}$. $a_i^1 \in A^1$, $i = \overline{1,n}$. $A^2 = \{a_1^2, a_2^2, ...a_m^2\}$, $a_j^2 \in A^2$; $j = \overline{1,m}$

მაგალითად: შიდა მახასიათებლების რაოდენობას თუ აღვნიშნავთ A-თი, მაშინ ის შედგება რამოდენიმე გამსხვილებული საქმიანობისაგან (ქვესიმრავლისგან); $A = \{A_{11}, A_{12}, a_{13}...\}$ და ა.შ.

გარემოდან მოქმედი ფაქტორების სიმრავლე აღვნიშნოთ B- თი; ისინი შეიძლება იყოს ბიზნესისათვის სასურველი, B^1, ან საშიში ფაქტორები - B^2.

$B^1 = \{b_1^1, b_2^1, ...b_k^1\}$, $b_i^1 \in B^1$ $i = \overline{1,k}$

$B^2 = \{b_1^2, b_2^2, ...b_e^2\}$ $b_j^2 \in B^2$ $j = \overline{1,e}$

ცხადია $B = B^1 \cup B^2$;

მიღებული აღნიშვნების საფუძველზე სქემა ასეთია

გარემოს ფაქტორები (B) / რგოლის მახასიათებლები (A)	ბიზნესისათვის სასურველი გარემო პირობები (B_1)	ბიზნესისათვის საშიში გარემო პირობები (B_2)
ძლიერი მხარეები (A_1)	რგოლის უპირატესობების გამოვლენა. მათი შემდგომი განვითარება $A_1 \times B_1 = C_{11}$	არასასურველი სიტუაციების აცილებისთვის მომზადება $A_1 \times B_2 = C_{12}$
სუსტი მხარეები (A_2)	რგოლის ნაკლოვანებების გამოვლენა. მათი აღმოფხვრის პროცესი $A_2 \times B_1 = C_{21}$	გაუთვალისწინებელი მდგომარეობის შესაძლებლობები $A_2 \times B_2 = C_{22}$

ინტერესი $C_{12} = A_1 \times B_2$ შემთხვევით შემოიფარგლება, რაც გაუთვალისწინებელი სიტუაციის დადგომის წინაპირობების და გამომწვევი ფაქტორების ანალიზს ნიშნავს. თუმცა A და B ერთიანი მთლიანი დავყავით ქვერგოლებად, მაგრამ არასასურველი სიტუაციის წარმოქმნაში, მათ შემადგენელ ყველა რგოლს შეუძლია მიიღოს მონაწილეობა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ გარემო (B სიმრავლე) სხვადასხვა გამსხვილებული ფაქტორით წარმოვადგინეთ, ხოლო შიდა მახასიათებლები რამოდენიმე ფუნქციონალურ ზონად დავყავით (A), რომელთაგან თითოეული ცალკე შედგება რგოლებისაგან, მაშინ ცხადია მათი შესაძლო საკმაოდ ბევრი კომბინაციაა მოსალოდნელი და განსახილველი. თუმცა ასეთი კომბინაციები სასრული იქნება იმიტომ, რომ თვითონ A და B სიმრავლეებია სასრული.

მოდელისათვის საჭიროა მივყვეთ შემდეგ მსჯელობას-ეკონომიკურ სისტემებში ეფექტურობის კრიტერიუმის რანგში გამოდის, როგორც წესი ეკონომიკური მაჩვენებლები (წარმოების მოცულობა, მოგება, ცხოვრების მატერიალური დონე და ა.შ), ხოლო შეზღუდვებს წარმოადგენს ეკოლოგიური მოთხოვნები (ბუნებრივი რესურსების შენარჩუნება, დაბინძურების დასაშვები დონე გარემოში და ა.შ) და სხვადასხვა სახის ბალანსური თანადობები.

ჩავთვალოთ, რომ სისტემის მდგრადობა წარმოადგენს ქვესისტემების მდგომარეობის ერთობლიობას $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ და ცალმხრივად განისაზღვრება ცენტრის მმართველი პარამეტრებით u და ქვესისტემების მართვის პარამეტრების ვექტორით $\upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2, ...\upsilon_n)$. ვთქვათ X არის სისტემის ჰომეოსტაზის არე, მაშინ E_0- ის კოორდინაციის ამოცანა ქვესისტემების საქმიანობაზე მდგომარეობს ნებისმიერი მდგრადი მდგომარეობის მიღწევაში $x \in X$ კოორდინირებულობის პირობას ყველა მართვის პარამეტრისთვის აქვს სახე:

$$(u, \upsilon) \in \Omega \qquad (1)$$

სადაც Ω- არის სიმრავლე ისეთი მართვებისა, რომლებსაც სისტემა გადაყავს X სიმრავლის რომელიმე მდგომარეობაში.

(1) პირობა აუცილებელია E_0- სთვის და არა ქვესისტემებისთვის. მაგრამ რადგანაც υ -ს არჩევა ხდება ქვესისტემის მიერ, ამიტომ მისი უზრუნველყოფა შეიძლება მხოლოდ ზოგიერთი დაშვების შემდეგ, სისტემის ყველა აქტიური ელემენტის ქცევების და ინფორმირებულობის შესახებ.

ჩავთვალოთ, რომ მოცემულია E_0- ის ეფექტურობის ერთიანი კრიტერიუმი $M_0(u,\upsilon)$, რომელიც ამავე დროს სისტემის ფუნქციონირების ეფექტურობის კრიტერიუმსაც წარმოადგენს. მოითხოვება მისი მაქსიმიზაცია.

ოპტიმიზაციის ამოცანის დასმა იერარქიულ სისტემებში, არ გამომდინარეობს ჩვეულებრივი ოპტიმიზაციის თეორიიდან. გადაწყვეტილების მიღების პროცედურა იერარქიულ სისტემაში წარმოადგენს რიგი აქტიური ელემენტების ურთიერთქმედების პროცესს. ისინი მოქმედებენ საკუთარი ინტერესების შესაბამისად. ანხილულ მოდელებში ეს პორცედურა განისაზღვრება E_0-დან მართვის საშუალებით, რომელიც მდგომარეობს მართვის სახეობის არჩევაში და მასზე ქვესისტემებისთვის ინფორმაციის გადაცემაში. ასევე მხარეების ქცევებზე და ინფორმირებულობის შესახებ დაშვებებში.

თუ E_0 გამოიყენებს მართვას უკუკავშირის გარეშე მაშინ ქვესისტემებისთვის ცნობილი ოთხი წესის გამოყენების დროს, მათი რეაქცია იქნება:

$$R_i(u) = Arg\max_{\upsilon_i \in V_i(u)} M_i(u,\upsilon) = \{\upsilon_i \in V_i(u) / M_i(u,\upsilon_i) \geq M_i(u,z_i).\forall z_i \in V_i(u)\}$$

სიმრავლე $R(u) = \prod_{i=1}^{n} R_i(u)$ წარმოადგენს E_0-სთვის განუსაზღვრელობების არეს.

E_0-ის დასაშვები (კოორდინირებული) მართვების სიმრავლის ქვესიმრავლეს ვუწოდებთ

$U^0 = \{u \in U / R(u) \neq \varnothing, R(u) \subseteq \Omega(u)\}$;

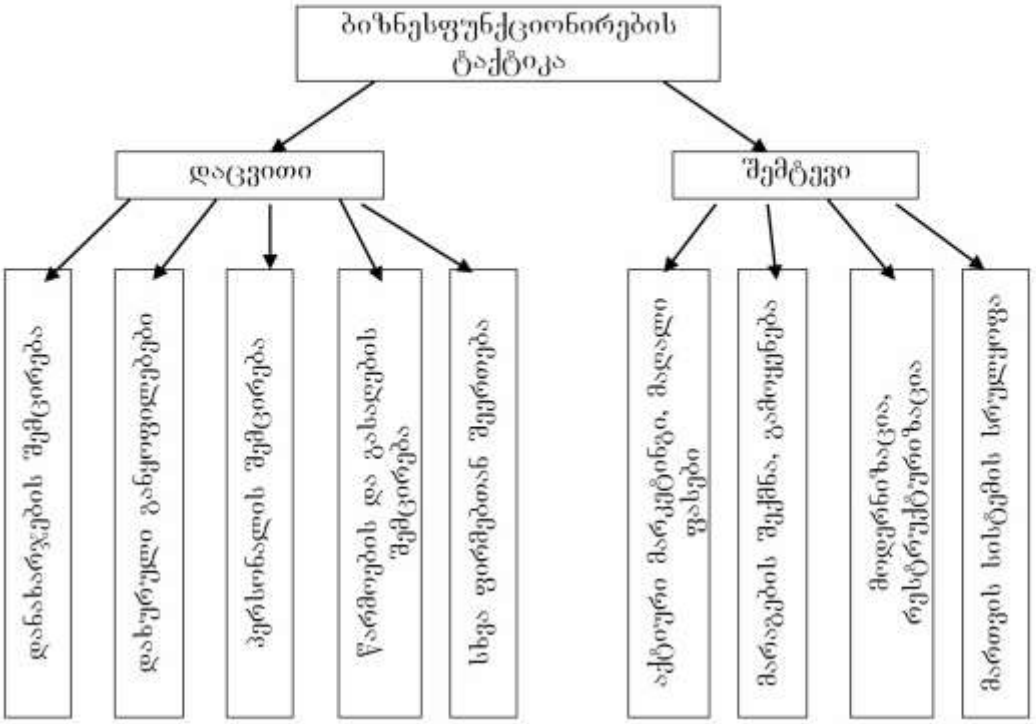
სადაც $\Omega(u) = \{\upsilon /(u,\upsilon) \in \Omega\}$ U^0- სიმრავლე შეიძლება იყოს ცარიელიც. ეს აღნიშნავს, რომ მართვა სისტემაში არ შეიძლება იყოს კოორდინირებული ქვესისტემების მოცემული ინტერესების და შესაძლებლობების შემთხვევაში. ამით U^0 სიმრავლის სიცარიელის საკითხი, ქვესისტემების ფართო შესაძლებლობების დროს წარმოადგენს მათი ინტერესების შეთანხმებულობის მაჩვენებელს. ვამბობთ, რომ ქვესისტემების ინტერესები შეთანხმებულია თუ $U^0 \neq \varnothing$.

როგორც ვიცით ოპტიმალური გარანტირებული მართვა ეწოდება ისეთ $u^0 \in U^0$, რომ

$$\inf_{\upsilon \in R(u^o)} M_0(U^0,\upsilon) = M_0^0 = \sup_{u \in U^0} \inf_{\upsilon \in R(u)} M_0(u,\upsilon) \qquad (2)$$

სიდიდე M_0^0 წარმოადგენს E_0- ის მაქსიმალურ გარანტირებულ შედეგს. (2) სახის ამოცანას ვუწოდოთ E_0-ის ოპტიმალური მართვის ამოცანა იერარქიულ სისტემაში. მისი დასმა ასევე შეიძლება ბიზნესის მართვის სხვა რთული მიდგომებისათვის, თუ მას, როგორც სისტემას განვიხილავთ და

ელემენტებს კი მის შემადგენელ რგოლებს, თავისი გაუთვალისწინებელი ხელშეშლებით (აქ შესაძლებელია ალბათური მახასიათებლებით უკვე სხვა მოდელი მივიღოთ)



ამ სქემაზე მოცემულია ფუნქციების მართვის ტაქტიკის ორი სახე:

პირველი – ეს არის დაცვითი სახის ტაქტიკური პროგრამა, რომელიც დაფუძნებულია დამზოგი ღონისძიებების გატარებაზე და ითვალისწინებს ყველა გასაელის შემცირებას, რომლებიც დაკავშირებულია საქმიანობასთან, ბიზნესინტერესებთან, ძირითადი ფონდების და პერსონალის შემადგენლობასთან. ამას ცხადია მივყავართ ბიზნესში ფუნქციების შემცირებისკენ, მაგრამ მისი გამოყენება აუცილებელი ხდება არასახარბიელო გარემო პირობების გამო.

დაცვითი ტაქტიკის გამოყენება შეზღუდულია არსებული ოპერატიული ღონისძიებებიდან გამომდინარე და მოიცავს შემდეგ მეთოდებს: ხარჯების შეზღუდვა, გასაელების შემცირება, შიდა რეზერვების გამოვლენა, საკადრო გადაადგილებები, დისციპლინის განმტკიცება, კრედიტორებთან და მომწოდებლებთან საქმეების მოწესრიგება (ვალის გაზრდა) და სხვა ღონისძიებები.

უფრო ეფექტურია შემტევი ტაქტიკის გამოყენება და შესაბამისად არა ოპერატიული, არამედ სტრატეგიული მიზნებისთვის. ამ შემთხვევაში ეკონომიკური, ნედლეულდამზოგი ღონისძიებების გვერდით მიმდინარეობს აქტიური მატკეტინგი, გასაღების ახალი ბაზრების შესწავლა და დაკავება, შედარებით მაღალი ფასების დაფიქსირება, წარმოების მიდერნიზაციით მისი სრულყოფისთვის ხარჯების გაზრდა, ძირითადი ფონდების განახლება, პერსპექტიული ტექნოლოგიების დანერგვა.

ამასთან ერთად მიმდინარეობს მართვის მთლიანი სისტემის სრულყოფა, ხდება კონკრეტული სიტუაციის შეფასება და მისი სისტემური ანალიზი. თუ საჭირო გახდა შესაძლებელია მისიის შეცვლაც ანუ ბიზნესსაქმიანობის ძირითადი პრინციპების კორექტირებაც, ამ დროს იცვლება სტრატეგიაც.

სტრატეგიის შესაბამისად ხდება მიზნის (მიზნების) კორექტირება, მთლიანად სისტემისთვის და მართვის შესაბამისი დონეებისთვისაც. განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება მართვის ორგანიზაციული სტრუქტურის ფორმირებას. ხაზოვან - ფუნქციონალური სტრუქტურების პარალელურად ინერგება დივიზიონალური, მიზნობრივი, პროგრამული მართვის სტრუქტურები და კოორდინაციის მეთოდები.

ბიზნესის მართვის თვალსაზრისით გაუთვალისწინებელი შემთხვევებით გამომწვევი ფაქტორების ანალიზი საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ რესურსები (მათ შორის დროითი), რომელთა ხარჯვასთანაც არის დაკავშირებული პრობლემის გადაწყვეტა.

მნიშვნელოვანია პრობლემის საზღვრების მასშტაბების დონის შეფასება, შეზღუდვების დადგენა გამომწვევ ფაქტორებზე. ასეთი შეფასების გაკეთება ძალიან რთული და შრომატევადია, ის ყოველი ნებისმიერი ბიზნესისთვის სპეციფიკურია და კონკრეტულ სიტუაციებიდან უნდა გამომდინარეობდეს. ძირითადში კი ქვეყნის კანონმდებლობით, საგადასახადო, საბაჟო, საპატენტო, ანტიმონოპოლიური, სამეწარმეო კანონმდებლობით დადგენილ საზღვრებში უნდა მიმდინარეობდეს მართვის მთელი პროცესი.

მნიშვნელოვანია სხვადასხვა სიტუაციების მოსალოდნელი შედეგების და რეალიზების შეფასება. ამისთვის გამოიყენება სხვადასხვა კრიტერიუმები.

არასასურველი, გაუთვალისწინებელი სიტუაციით შექმნილი პრობლემის მართვის მნიშვნელოვან ეტაპს წარმოადგენს პრობლემის გადაწყვეტის ტაქტიკის ფორმირება, იმ ტაქტიკურ სვლებზე გადაწყვეტილების მიღება, რომლის რეალიზებით იხსნება დასმული პრობლემა. აქვე არსანიშნავია, რომ გარემო ფაქტორების და საქმიანობის ძლიერი და სუსტი მხარეების ანალიზი ერთმანეთთან კავშირში, მათი თანადობის სხვადასხვა კომბინაციის განხილვა (ზემოთ მოცემული სქემა), წარმოადგენს ბიზნესში დასახული ძირითადი მიზნის ეფექტური რეალიზების მნიშვნელოვან გარანტს. სასურველია თუ ასეთი საქმიანობა ჩატარდება ბიზნეს გეგმის დამუშავების ეტაპზე და შედეგები შევა ბიზნეს გეგმაში.

ლიტერატურა

1. ბიზნესის კონკურენტუნარიანობა და ადმინისტრირება. ე. ბარათაშვილი, ლ. თაკალანძე, ნ. გრძელიშვილი. თბ. 2010 წ. 393 გვ.
2. Конкуренция и Конкурентоспособность. Т.Г. Философова В.А. Выков МОСКВА 2007 „ЮНИТИ'' 271ст.
3. ბიზნესის (ფირმის) ფუნქციონირების ძირითადი ასპექტები. გულნაზ ერქომაიშვილი. თბილისი. 2010. გვ.364
4. Martin Gorrod. (2004). Risk Management Systems. Process, Technology and Trends. PALGRAVE MACMILLAN. Houndmills, Basingstoke, Hampshire RG21 6XS and 175 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10010. Companies and representatives throughout the world. 63. Пустовалова Т.А. (2010).
5. Построение модели оценки кредитного риска кре-дитного портфеля коммерческого банка (на основе методологии VAR). Научные доклады, № 2 (R)–2010. СПб.: ВШМ СПбГУ
6. Bolch G., Greiner S., De Meer H., Trivedi K. (1998). Queueing Networks and Markov Chains, Modeling and Performance Evaluation with Computer Science Application. John Wiley & Sons. USA.
7. Jensen K., Kristensen M.L., Wells L. (2007). Coloured Petri Nets and CPN Tools for Modelling and Validation of Concurrent Systems. University of Aarhus. Denmark

Formalized model of purposeful functioning of business projects

Kurdadze M .; Gardabhadze T, Gardabkhadze M
Georgian Technical University

The work deals with the tasks of effective functioning of business projects, analysis of subsequent development and research process. The recommendations are based on the basic aspects of the purposeful functioning. The ways of rational solutions are examined, which reflects the impact of environmental factors, the purpose of determining their negative (interference) and contributing effects. At the same time analyzing the internal characteristics of business activities to determine how they can deal with the threat posed by the environment, or rationally use possible "assistance". In order to conduct such an analysis, the paper discusses a different group of environmental factors: economic factors, political factors, market factors, competitive factors, technological factors, social factors, and international factors. Each of them separately involves relevant components that affect various types of business. In the same way - a number of aspects of the internal characteristics of business are presented as components and component components.

The work is focused on one of the directions of improvement of business management structure. In particular, the completion of the linear-functional structure of the current management with a target group that is created by the business of companies and the management of the problem caused by unexpected surprise, after which it will fall apart. The structural scheme of such a system, the mechanism of proper functioning and the base option of their mathematical model is given. The results are discussed and the results are - the possibility of creating a target group for the purpose of preventing the problem and the mathematical model of such structure and functioning mechanism. It is noted that the crisis situation is not a separate, independent problem. It is one of the most difficult features of business functioning. Its complexity is primarily expressed in the complexity of the combination of possible combinations of internal and external factors participating in the problem. Secondly, the problem with the unwanted impact is the activity of the main objective. Its regulation and management must be intentionally managed at a moderate level of management. I think it is advisable to have a problem-solving process to carry out the problem-targeted group created by business-companies, which will be a rational approach to systematic analysis of the situation. To this end, the paper deals with a mathematical model of problem-targeting structure and functioning mechanism, in case of certain information (baseline). While this may lead to some changes in the organizational structure of the management, but the problematic-target management structures that have been successful are successfully working in the functioning space of the market environment and are rapidly introduced.

ავარიულ–დეფორმირებული ნაგებობების აღდგენა–რეკონსტრუქციის პროექტირების ორგანიზაციის გაუმჯობესების პრობლემები და დაპროექტების მეთოდოლოგია ქ. თბილისის მაგალითზე

ლაშა სამხარაძე
თბილისის მუნიციპალური ლაბორატორია

ნაშრომში გადმოცემულია ავარიულ-დეფორმირებული საცხოვრებელი შენობების აღდგენა-რეკონსტრუქციის პროექტირების ორგანიზაციის გაუმჯობესების პრობლემები, ავარიულ-დეფორმირებული ნაგებობების გამოკვლევა და მათი ტექნიკურ-ეკონომიკური მაჩვენებლების კლასიფიკაცია ქალაქ თბილისის მაგალითზე. ასევე ავარიულ-დეფორმირებული ნაგებობების დაპროექტების მეთოდოლოგია.

საკვანძო სიტყვები: *ავარიული ნაგებობა; აღდგენა; რეკონსტრუქცია; დაპროექტება.*

მიუხედავად ბოლო ხანებში გატარებული ღონისძიებებისა, თბილისის საცხოვრებელი შენობების დიდი ნაწილის ტექნიკური მდგომარეობა მდგრადობის თვალსაზრისით კვლავ უკიდურესად არადამაკმაყოფილებელია. ამ ნაგებობათა სიძველის, აგრეთვე პროექტირებასა და მშენებლობაში დაშვებული წუნისა და შეცდომების გამო, შენობა-ნაგებობათა მნიშვნელოვანი ნაწილი იმდენად ავარიულია, რომ მოსალოდნელია მზიდი კონსტრუქციული ელემენტების უეცარი დაშლა. ბოლო ხანებში ქ. თბილისში დაფიქსირებულია რიგი ფაქტები საცხოვრებელი შენობების უეცარი ჩამოქცევისა, მათ შორის ადამიანთა მსხვერპლითაც კი.

საცხოვრებელი შენობა-ნაგებობების ტექნიკური გამოკვლევების მონაცემებით თბილისში აღრიცხულია ათასზე მეტი დრომოჭმული და მთლიანად ამორტიზებული საცხოვრებელი სახლი, რომლებიც აღდგენას აღარ ექვემდებარება, რის გამოც გათვალისწინებულია მეთი დაშლა. გარდა ამისა, აღრიცხულია ავარიულობის სხვადასხვა სტადიაში მყოფი ორი ათასამდე საცხოვრებელი სახლი, რომელთა შორის ასზე მეტი იმდენად ავარიულია, რომ მათსი ცხოვრება დაუშვებელია მოსალოდნელი საფრთხის გამო. ტექნიკური მდგომარეობის თვალსაზრისით ექსტრემალური ზომების გატარებას ითხოვს უმეტეს შემთხვევაში მრავალსართულიანი საცხოვრებელი სახლისები, რომლებმაც დეფორმაციის დასაშვებ ნორმებს უკვე კარგა ხანია გადააჭარბეს. დღეისათვის, მარტო ვარკეთილის მასივის ტერიტორიაზე 123-ზე მეტი საცხოვრებელი კორპუსი იმყოფება ავარიულობის სხვადასხვა სტადიაში, მათგან 36-ში ძირითადი კონსტრუქციული ელემენტები იმდენად დაზიანებულია, რომ მოსალოდნელია მათი უეცარი წაქცევა.

საბურთალოს რაიონშიც შედარებით გვიან გაშენებული სახლებია, მაგრამ მიუხედავად ამისა ისინი მაინც მასიურად არიან დაზიანებული. ზოგიერთი მათგანის დეფორმაციები გამოწვეულია მეტროპოლიტენის გვირაბის ვიბრაციებითა და ფუზე-საძირკვლების გაწყლიანებით.

რაც შეხება ჩუღურეთის რაიონს, აქ სახლების უმეტესი ნაწილი ძველია და დრომოჭმული. ამასთან ზოგიერთის ფიზიკური ცვეთა იმდენად დიდია, რომ აღდგენას არ ექვემდებარება.

ნაძალადევის რაიონში სერიოზულად დაზიანებულია მზიდი კონსტრუქციული ელემენტები მრავალსართულიან შენობებში, სადაც ფუძე-საძირკვლების შესველების გამო შენობებმა განიცადა არათანაბარი ჯდენები, რის შედეგადაც კედლებში დარღვეულია შეჭიდულობა და მდგრადობა.

ანალოგიური საშიში მდგომარეობაა კრწანისის რაიონში. დაშლის პირასაა მისული მრავალი საცხოვრებელი შენობა. ქუჩის და ეზოების წყალგამტარი კომუნიკაციების უვარგისობა ბევრად აჩქარებს მათი დაშლის პროცესს. ამავე მიზეზით საშიშ მდგომარეობაშია მთაწმინდის რაიონის მრავალი შენობა. მთაწმინდის და კრწანისის რაიონებში თითქმის არც ერთი სახლი არ არის, მათ შორის ისტორიული მნიშვნელობისაც, რომ არ ჰქონდეს ბზარები და დეფორმაციის ნიშნები. ყველა სახლი საჭიროებს დროულ პროფიალქტიკურ რეკონსტრუქციას, რათა არ გახდეს ავარიული.

ფუძე-საძირკვლების დასველების ერთ-ერთი მიზეზია აგრეთვე საკანალიზაციო ქსელი, რომლის უმეტესი ნაწილი ამორტიზებულია, განსაკუთრებით კი საცხოვრებელი სახლების ეზოებში. ახალი განაშენიანების რაიონებშიც კანალიზაციის ქსელები ეწყობოდა დიდი ხარვეზებითა და სამშენებლო ნორმებისა და წესების უხეში დარღვევით. გარდა ამისა, მდ. მტკვარზე ჯებირებისა და თბილისის ზღვის წყაკლსაცავის მოწყობისას მღელი რიგი ფაქტორების გაუთვალისწინებლობის გამო ქალაქში გრუნტის წყლების დონემ მნიშვნელოვნად აიწია, რაც იწვევს სარდაფების დიდი რაოდენობით დატბორვისა და ფუძე-საძირკვლების დასველებას. გასაგებია, რომ წყალგამტარი კომუნიკაციების წესრიგში მოყვანის გარეშე ავარიულობის სალიკვიდაციო ღონისძიებების გატარება არაეფექტურია და იგი დროებით ხასიათს ატარებს.

ავარიულ-დეფორმირებული საცხოვრებელი შენობების აღდგენა-რეკონსტრუქციის საქმეში არსებულ სირთულეებს ემატება პრობლემაც, რომელიც წარმოიშვა ამ ათიოდე წლის წინ საცხოვრებელ შენობებზე ლოჯიების მასობრივად მიშენება-დაშენების შედეგად. საქმე იმაშია, რომ აღნიშნული სახის მშებნებლობა ხშირ შემთხვევაში ხორციელდებოდა (უპროექტოდაც კი) არაკომპეტენტური პიროვნებებისა და ორგანიზაციების მიერ. ამიტომ მშენებლობის დროს უგულველყოფილი იყო სამშენებლო ნორმებითა და წესებით განსაზღვრული მოთხოვნები. ამსი შედეგად, გარდა იმისა, რომ დამახინჯდა არსებულ შენობა-ნაგებობათა ფასადები, შეიქმნა საშიშროება მათი ჩამონგრევისა. კომპეტენტურ სპეციალისტთა ჯგუფის დასკვნით მშენებარე ლოჯიების 95% ავარიულია. მათ შორის 70% საერთოდ არ ექვემდებარება გამაგრებას და საჭიროებს დაშლას.

ამრიგად დეფორმირებული საცხოვრებელი შენობების გამოკვლევა და მათი ავარიულობის ტექნიკურ-ეკონომიკური მაჩვენებლების შესწავლა გვიჩვენებს, რომ აღდგენა-რეაბილიტაციის პროექტირების ორგანიზაციის გაუმჯობესებას მრავალმხრივი არაორდინალური მიდგომა ესაჭიროება. ასეი მიდგომების ერთ-ერთ გამოვლინებად შეიძლება ჩაითვალოს ავარიული სახლების გამაგრება-გაძლიერების სამუშაოების პრაქტიკაში ოპტიმალუტი საპროექტო გადაწყვეტილებების გამოვლენისატვის ტენდერის დანერგვა.

ქ. თბილისში აღდგენით-სარეკონსტრუქციო სამუშაოების შესრულების მიზნით შექმნილია სპეციალიზებული გაერთიანებები, მუნიციპალური ლაბორატორია და ფირმები. საცხოვრებელი შენობები აღდგენა-რეკონსტრუქციის პროექტირებასა და მათი განხორციელების გამოცდილების დაგროვებიასთან ერთად ასეთი ტიპის პროექტები გასაწყვეტის თვალსაზრისით სულ უფრო სრულყოფილი ხდება, მაღლდება აღდგენით-სამშენებლო სამუშაოების ინდუსტრიალიზაციის დონე. რეკონსტრუქციის ჩატარებისას სულ უფრო მეტად გამოიყენება ტიპიური ნაკეთობანი, რომლებსაც აწარმოებენ სამშენებლო ინდუსტრიის ქარხნები ახალი შენობებისათვის: გადახურვის რკინაბეტონის ტიპიური ანაკრები ფილები, მსხვილპანელიანი თაბასირ-ბეტონის ტიხრები, ინდუსტრიული ანაკრები ფირფიტოვანი ტიხრები ლითონის კარკასებისავის, ანაკრები სანიტარულ-ტექნიკური კაბინები, რომლებიც ქარხნული წესითაა დამზადებული, ანაკრები რკინაბეტონის ტიუბინგები ლიფტების შახტებისათვის, ტიპიური სადურგლო ნაკენაკეთობანი [1-4].

სარეაბილიტაციო-სამშენებლო წარმოების, როგორც სახალხო მეურნეობის დამოუკიდებელი დარგის ჩამოყალიბების პროცესი, მიმდინარეობს მისი ეფექტურობის ამაღლების გზების ძიებით არქიტექტურულ-კონსტრუქციული, სივრცულ-გეგმარებითი და ორგანიზაციულ-ტექნოლოგიურ გადაწყვეტათა სრულყოფის საფუძველზე . სპეციალისტები თანდათან მიდიან ამ დასკვნამდე, რომ ურთულეს განაშენიანებაში სამოქალაქო შენობების რეკონსტრუქცია-აღდგენა ცალკეული ნასგებობების სახით არ იძლევა საშუალებას განხორციელდეს სამშენებლო-სარემონტო სამუშაოები პროგრესული მეთჳდებით, ხელს უშლიან რაციონალურ ინჟინრულ გადაწყვეტილებებს და მშენებლობის წარმოების ორგანიზაციის თანამედროვე მეთოდებს.

პირველად სანქტ-პეტერბურგში განხორცლიედა საცხოვრებელი განაშენიანების რეკონსტრუქცია ჯგუფური მეთოდით, რომლის ეფექტურობას აქვს სამი ასპექტი: ქალაქმშენებლობის, სოციალური და ეკონომიკური.

ჯგუფური მეთოდით ქალაქმშენებლობის ასპექტის ეფექტურობა განპირობებულია იმით, რომ ნაკლებად ღირებული ნაგებობების დანგრევის მოცულობის გაზრდის გარეშე ეზოების რიცხვი იზრდება 2÷3-ჯერ, რაც საშუალებას იძლევა უზრუნველყოფილი იყოს სარეკონსტრუქციო შენობების ეზოებისაკენ მიმართული სათავსოების ნორმასთან დაახლოებული ბუნებრივი განათება. იმ მოსაზღვრე შენობების გეგმარებითი გაერთიანება, რომლებსაც აქვთ სართულების დაახლოებით ერთნაირი ნიშნულები და რომელიც მიღებულია ჯგუფური მეთოდის გამოყენებისას, საშუალებას იძლევა შევამციროთ იმ ბინების წილი 10÷15%-ით, რომლებიც ორიენტირებულია ჰორიზონტის არახელსაყრელ მხარეზე.

ჯგუფური მეთოდის სოციალური ასპექტის ეფექტურობა მდგომარეობს იმაში, რომ უმჯობესდებამსხვილი ქალაქმშენებლობითი ფორმირებების ინფრასტრუქტურე. ჩნდება იმისი შესაძლებლობა, რომ სარეკონსტრუქციო შენობების არასაცხოვრებელ სართულებზე განლაგდეს სავაჭრო, საზოგადოებრივი კვების და მოსახლეობის კულტურულ-საყოფაცხოვრებო მომსახურეობის ობიექტები. განაშენიანების სიმჭიდროვის შემცირების შედეგად იქმნება იმისა შესაძლებლობა, რომ სარეკონსტრუქციო კვარტალებში და მიკრორაიონებში აშენდეს სოციალურ-ყოფითი დანიშნულების ახალი შენობები.

ჯგუფური მეთოდით რეკონსტრუქციის ეკოპნომიკური ასპექტის ეფექტურობა ყალიბდება საქალაქო ტერიტორეიბის გამოყენების ინტენსიურობის გაზრდითა და მათი კონცენტრაციისგამო რესურსების ეკონომიით. რეკონსტრუქციის ჯგუფური მეთოდის გამოყენების დროს დაახლოებით 2.5-ჯერ მცირდება საინჟინრო კომუნიკაციების მიერთების რიცხვი მაგისტრალურ ქსელებთან, ჩნდება მათი ოპტიმალური ტრასირების, საქვაბეების რაციიონალლური განაწილებისა და სატრანსფორმატორო ქვესადგურების უკეთ მოწყობის შესაძლებლობა.

ხანგრძლივი დროის მანძილზე ჯგუფური მეთოდით რეკონსტრქუციის განხორციელების დროს იქმნება ერთიანი სამშენებლო მოედანი, რაც იმის საშუალებას იძლევა, რომ მივაღწიოთ მატერიალურ-ტექნიკური და ფინანსური რესურსების ეკონომიას დროებითი შენობა-ნაგებობების მოსაწყობად და მივიღოთ საუკეთესო ორგანიზაციულ-ტექნოლოგიური გადაწყვეტილებები. გარდა ამისა, ჯგუფური მეთოდის გამოყენებისას მნიშვნელოვნად მსაღლდება სამუშაოთა წარმოების უსაფრთხოება იმ ფართის დაახლოებით სამჯერ შემცირებით, რომელიც შეიძლება მოხვდეს საშიშ ზონაში.
ჯგუფური მეთოდით შენობების რეკონსტრუქცია წარმატებით განხორციელდა მოსკოვის, სანკტ-პეტერბურგის, კიევისა და ვოლგოგრადის მთელ რიგ რაიონებში.

ამ ჟამად არსებული საქალაქო სტრუქტურების შენარჩუნების საკითხი ადრე გაშენებული სახლების გაუმჯობესებასთან ერთად ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი საკითხია მრავალი ქვეყნის სამოქალაქო მშენებლობის პროგრამებში. ამ საკითხებს ეძღვნება მრავალრიცხოვანი საერთაშორისო კონფერენციები, სიმპოზიუმები და

სემინარები, რომელსაც ატარებს გაეროს ევროპის ეკონომიკური კომისიის კომიტეტი საცხოვრებელი პირობების, მშენებლობისა და ქალაქმშენებლობის საკითხებთან დაკავშირებით. ამ ღონისძიების შედეგად გამოვლენილია მრავალრიცხოვანი პრობლემები, რომლებიც დაკავშირებულია საცხოვრებელი და საზოგადოებრივი შენობების რეკონსტრუქციის განხორციელებასთან.

უკანასკნელ წლებში უფრო მეტად ვრცელდება არსებული შენობების პირველყოფილი სახით აღდგენის ტენდენცია. ეს ეხება არა მარტო არქიტექტურულ და ისტორიულ ძეგლებს, რომლებსაც აქვთ დიდი ღირებულება, არამედ ძველი განაშენიანების რიგით შენობებსაც, რომლებიც აშენებულია რა ტრადიციული წესით, წარმოადგენენ ქალაქის მნიშვნელოვან ელემენტებს [5].

საზღვარგარეთის ქვეყნებიდან შენობების რეკონსტრუქციის ყველაზე მეტი გამოცდილება დაგროვდა გერმანიაში.

გერმანიაში განხორციელებულ საქალაქო განაშენიანების სარეკონსტრუქციო ღონისძიებების მნიშვნელობა იმაშია, რომ ეს სამუშაოებითავიდანვე შემოფარგლული იყო არა ცალკეული შენობების კაპიტალური რემონტით, რეკონსტრუქციითა და რესტავრაციით, არამედ მოიცავდნენ ქალაქის მთელ რაიონებს. ძველი განაშენიანების კომპლექსური რესტავრაციისდ მაგალითად გამოდგება არმინპლაცის მოედანი ბერლინში. იმ ტექნიკური გადაწყვეტილებების მაგალითად, რომელიც ეფუძნა სამუშაოთა წარმოების ინდუსტრიული მეთოდების გამოყენებას, გამოდგება ქალაქ გრეისვალდის რეკონსტრუირებული ცენტრალური მოედანი, რომელიც აგებულია XII საუკუნეში. რეკონსტრუქციის გენერალური გეგმის დამუშავებისას რეკონსტრუქციის გენერალური გეგმის დამუშავებისას შესაძლებელი გახდა ახალი და ძველი განაშენიანების ჰარმონიული შერწყმა.

ანაკრები კონსტრუქციებით მშენებლობის წარმოების საკმაოდ მკაცრ პირობებში მიღწეული იყო განაშენიანების კარგი არქიტექტურული ხარისხი ფასადების ინდივიდუალური გადაწყვეტის ხარჯზე, მათი რაციონალური დაყოფა ვერტიკალისა და ჰორიზანტალის მიხედვით, ფასადების მოპირკეთება კერამიკული ნაკეთობებისა და წყალმედეგი საღებავების ფართოდ გამოყენებით. რეკონსტრუქციის შედეგები ცხადყოფენ, რომ გარკვეულ პირობებში შესაძლებელია ინდუსტრიული ტექნიკური გადაწყვეტილებების გამოყენება თანამედროვე გარემოს შესაქმნელად ძველი ქალაქების ისტორიულ ცენტრებში მათი გარეგნული იერსახის დარღვევის გარეშე [6].

სამოქალაქო შენობების გამორჩევით რეკონსტრქუციას ადგილი აქვს ავსტრიაში, ნიდერლანდებში, შვეიცარიაში, ბერლგიაში, საფრანგეთში და აშშ-ში.

პროექტირების სისტემის მნიშვნელოვანი ელემენტია ძირითადი საცხოვრებელი ფონდისს ყოველმხრივი შესწავლა, მისი სისტემატიზაცია და კლასიფიკაცია არქიტექტურული, კონსტრუქციული ქალაქმშენებლური თავისებურებების მიხედვით. ასეთი გამოკვლევები საშუალებას იძლევიან მივიღოთ საკმაოდ სრული საწყისი მასალა

საცხოვრებელი ფონდის კაპიტალური რემონტისა და რეკონსტრუქციის დაპროექტებისათვის რეგიონების, ქალაქების და რაიონების დონეზე [7-8].

საცხოვრებელი შენობების უწყვეტი გამოკვლევის ასეთი მონაცემები წარმოადგენს საინფორმაციო საფუძველს საცხოვრებელი ფონდის კაპიტალური რემონტისა და რეკონსტრუქციის დაგეგმვისათვის ხანგრძლივ პერსპექტივაში.

დასკვნა

საცხოვრებელი შენობის რეკონსტრუქციის პროქტირებისა და განხორციელების ჩვენი ქვეყნისა და საზღვარგარეთის გამოცდილების განზოგადება და ანალიზი გვიჩვენებს

საპროექტო და სარემონტო-სამშენებლო სამუშაოების მოცულობისა და სირთულის განუხრელ ზრდას. საცხოვრებელი შენობების რეკონსტრუქციის პროექტირების სისტემის მნიშვნელოვანი გაუმჯობესების აუცილებლობამ განაპირობა რესურსების დამზოგავი საპროექტო გადაწყვეტილებების ძიება.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] Колотилин В.Н. Долговечность жилых зданий. *МИСИ, Москва, 1965.*
[2] Кумуков В.Н. Реконструкция зданий. *Высшая школа, Москва, 1981.*
[3] Соколов В.К. Реконструкция жилых зданий. *Московский рабочий, Москва, 1982.*
[4] Шумилов М.С. Гражданские здания и их техническая эксплуатация. *Высшая школа, Москва, 1987.*
[5] ხმელიძე თამაზ, ყიფიანი გელა, ხმელიძე კახაბერ, ვანიშვილი თამუნა. ქართული ხუროთმოძღვრების ძეგლები. *გამომცემლობა „უნივერსალი", თბილისი, 2018.*
[6] ჭანტურია ა. მშენებლობის ორგანიზაცია, დაგეგმვა და მართვა. *განათლება, თბილისი, 1986*
[7] Мушечек В.В., Ройтман А.Г. Капитальный ремонт, модернизация и реконструкция жилых зданий. *СИ. Москва, 1987.*
[8] ბედიაშვილი მალხაზ, ყიფიანი გელა, მიწისძვრისაგან დაცვის სეისმოსაიზოლაციო საშუალებები და დანერგვის პერსპექტივები საქართველოში. *გამომცემლობა „უნივერსალი", თბილისი, 2018.*

Problems of improvement of restoration-reconstruction organization of planning of dangerous-deformed structures and planning methodology on example of Tbilisi city

Lasha Samkharadze
Tbilisi Municipal Laboratory

Abstract: The problem of improvement of restoration-reconstruction organization of planning of dangerous-deformed residential buildings, examination of mode of deformation of buildings and classification of their technical-economic indicators are stated on the example of Tbilisi city. As well as methodology for planning of damaged-deformed structures.

საქართველოს უნდა დავუბრუნოთ კუთვნილი ისტორია[1]

გურგენ კოხრეიძე
მხატვარი-გრაფიკოსი

სალაპარაკო ენა, დამწერლობა და რიცხვი ცივილიზებული კაცობრიობის არსებობის და მოღვაწეობის ერთერთი უმთავრესი მამოძრავებელია. ენა, დამწერლობა და რიცხვი, არა მარტო საურთიერთობო საშუალება იყო და არის, არამედ ადამიანის ისტორიის მეხსიერების დასასაბუთებელი საშუალებაა. ეს კომპონენტები განსაკუთრებულ ღირებულებას იძენს მანძილზე და დროში, მით უმეტეს, როცა ისტორიული თარიღის გარკვევაა საჭირო. თუ ენა, დამწერლობა და რიცხვი არ იარსებებდა, ისტორიაც მკვდარი იქნებოდა. კაცობრიობის ისტორიაში მრავალი ერი მხოლოდ წერილობითი ძეგლებით არის ცნობილი და შუმერული ცივილიზაციის უცოდინარობის შემთხვევაში, შეუძლებელია იმის წარმოდგენა, რა ღარიბი იქნებოდა კაცობრიობის კულტურული მონაპოვარი.

ქართველი ერი ცოცხალია და მისი ისტორიის რაღაც ნაწილიც სახეზეა, მაგრამ ეს, როგორც ამას მეცნიერის გონი ხედავს, დიდი ოკეანის წვეთიც კი არ არის. პავლე ინგოროყვამ სინანულით შენიშნა, რომ ყველაზე ცუდად ქართველებმა იციან თავისი ისტორია. სამწუხაროდ, სულ ცოტა - 50-60 წლის წინ, ის რაც ვიცოდით და გვქონდა, ისიც უსაზმნოდ და უკუღმა შემოვაბრუნეთ. აკადემიკოს ივანე ჯავახიშვილის დროს დადგენილი ქართული დამწერლობითი ნიშნების რიცხვითი მნიშვნელობები (ცხრილი 1 და 2) შეიცვალა (ცხრილი 3) და ამ მოქმედებამ ყირაზე დააყენა ისტორიული მეხსიერების დათარიღება. 1-ელ ორ ცხრილში ნაჩვენები მონაცემების გარდა არსებობს დამადასტურებელი მასალა ქართულ დამწერლობით ძეგლებში, მაგრამ ერთერთი მთავარი მტკიცება, იმისა რომ ქართული დამწერლობის ადრეული ცნობილი რიცხვითი მნიშვნელობები სწორია, ამ სადაო და საჭირბოროტო საკითხზე ამ სტატიის ავტორის მიერ გამოკვლეული იძლევა არა უბრალოდ წარმოდგენას, არამედ სრულფასოვან ახსნას. მიუხედავად იმისა, ზოგი ქართველი მეცნიერი აცხადებს, რომ იოანე ზოსიმეს წერილი გაშიფრულია, ძალზე რთულია დარწმუნებით იმის თქმა, თუ რა ჰქონდა მხედველობაში ქართველთა ამ დიდებულ ერთ-ერთ წინაპარს, მაგრამ ქართული დამწერლობის და საერთოდ, მსოფლიოს ხალხთა დამწერლობების (ახლა უკვე დარწმუნებით შეიძლება თქმა. მხედველობაშია კონსონანტური და ანბანური დამწერლობები): არმაზულის (21-ნიშნიანი), 29-ნიშნიანის, ფინიკიურის (22-ნიშნიანი), ქართული ასომთავრულის (37+1+1-ნიშნიანი) და სხვათა შექმნის საიდუმლო ამოიხსნა, შეიძლება დავუშვათ, რომ იოანე ზოსიმეს სხვა აზრთან ერთად, ქართული დამწერლობის შექმნის საიდუმლოც ჰქონდა მხედველობაში, რის შესახებ მოიარებით და კანტიკუნტად ბერძნული ისტორიული წყაროებიც მიუთითებენ, რომ კოლხებს დამწერლობა აქვთ და მას საიდუმლოდ ინახავენ.

ეს მწირი ცნობები საფუძველს არ ყოფილა მოკლებული და ამის დასტური არმაზული და ქართული ასომთავრული დამწერლობა აღმოჩნდა, რომელთა, აგრეთვე ფინიკიური და ხმელთაშუა ზღვის აუზის დამწერლობების საშუალებით ქართულ ორ

[1] კონფერენციის თავმჯდომარის წარდგენით კონფერენციის მონაწილეებმა დიდი ინტერესით მოისმინეს მხატვრის თვალით დანახული დამწერლობითი ნიშნების შექმნის, მათი რიცხვითი მნიშვნელობისა და სიტყვის შედგენის საიდუმლოს შესახებ მოხსენება, რომელიც მიუხედავად სრულიად განსხვავებული თემისა, იბეჭდება კონფერენციის მასალების კრებულში.

დამწერლობას (არმაზულს და ასომთავრულს) შორის არსებული კიდევ ერთი დიდი საფეხური, უცნობი 29-ნიშნიანი ანბანური დამწერლობა იქნა აღმოჩენილი და დადგენილი, რომელიც ლეონტი მროველის ცნობის და ამ სტატიის ავტორის მიერ გამოკვლეული ფაქტიური მასალის მიხედვით ძვ. წ. ა. 1812 წელს უნდა იყოს შექმნილი. ქართული დამწერლობითი ნიშნების ბოლო დროს აღრეული რიცხვითი მნიშვნელობების გამო, რამაც დათარიღებაში მრავალი აბსურდი გამოიწვია, ლეონტი მროველს, რომელმაც კეთილსინდისიერად და პასუხისმგებლობით მოიხადა ვალი ისტორიის და ქართველი ერის წინაშე, არასანდო რეპუტაციაც კი მიეკერა. იმედია, აი ეს - 29-ნიშნიანი დამწერლობა იქნება გრაკლიანის გორაზე ვახტანგ ლიჩელის მიერ აღმოჩენილი დამწერლობითი ნიშნები, აგრეთვე სამტრედიის რაიონში სოფ. დაბლაგომში აღმოჩენილი წერლობითი ნიშნები (სამწუხაროდ საშუალება არ გვაქვს ახლოს გავეცნოთ ამ ძეგლებს, რომ იქნებ დადგენილიყო ამ დამწერლობითი ნიშნების მნიშვნელობები).

სტატიის ავტორის მიერ მოძიებული მონაცემები, ხელახლა აღმოჩენილი კანონზომიერება და დამწერლობითი ნიშნების აღდგენილი ხაზულობები, იძლევა იმის საშუალებას, რომ ძვ. წ. ა. XI – X საუკუნით დათარიღებული გრაკლიანის და აგრეთვე, დაბლაგომის ძეგლის წერილობითი ნიშნები შეპირისპირდეს და დადასტურდეს, რომ აღმოჩენილი (როგორც ვ. ლიჩელი მიიჩნევს, აქ მოპოვებული ორი სხვადასხვა დამწერლობაა) მიეკუთვნება უფრო ადრეულ არმაზულ 21-ნიშნიან და არმაზულის შთამომავალ 29-ნიშნიან დამწერლობას.

მსოფლიოს 1-ელი საოცრება

როგორ არის შექმნილი რიცხვითი და დამწერლობითი ნიშნები?

ამ კითხვაზე პასუხი უკვე 10 წელზე მეტია არსებობს, მაგრამ აღმოჩენილის დაზუსტების და ყოველგვარი შეცდომის თავიდან აცილების მიზნით თავს ვიკავებდით. ახლა კი როცა დასმულ კითხვებზე პასუხი გაცემულია და ნათელი გახდა ის, რაც ადრე მცირედ მაინც იყო საეჭვო, შეიძლება საზოგადოება გაეცნოს მას და გამოთქვას აზრი.

როგორც მეცნიერულ სამყაროშია ცნობილი, დამწერლობითი ნიშნების შექმნა ფინიკიელებს მიეწერებათ და შექმნის მიახლოებით თარიღად ძვ. წ. ა. 2000 წელი ითვლება. მაგრამ როგორც გამოკვლევამ აჩვენა, ფინიკიელები არავითარ შემთხვევაში არ შეიძლება ჩაითვალოს იმ დამწერლობითი ნიშნების შემქმნელებად, რომლებითაც ისინი სარგებლობდნენ. მათ მხოლოდ და მხოლოდ გადაიღეს უკვე შექმნილი დამწერლობითი ნიშნები და იყენებდნენ თავისი ენის სპეციფიკის მიხედვით. ცნობილი ისტორიული ფაქტის თანახმად, პირველნი ბიბლები იყვნენ (ქალაქ გუბლის მცხოვრებნი), რომელთაც ეს დამწერლობითი ნიშნები გამოიყენეს სხვა დამწერლობითი სისტემის ნიშნებთან - (ამ სტატიის ავტორის მოსაზრებით) ეგვიპტურ იეროგლიფურ და კვიპროს-მიკენურ ხაზოვან ნიშნებთან ერთად და რომელიც ბიბლური მარცვლოვანი დამწერლობის სახელით არის ცნობილი. შემდეგ კი, როცა ფინიკიელები 22 დამწერლობით ნიშანს იყენებდნენ, ცნობილია ფინიკიური კონსონანტური დამწერლობის სახელით. ფინიკიური კონსონანტური დამწერლობის შემადგენელი 22-ნიშნიდან ბიბლურ მარცვლოვან დამწერლობაში 18 ნიშანია დადასტურებული, რომლებიც მორის დიუნანმა გამოყო ბიბლური დამწერლობითი სისტემის ნიშნებისგან. ე. ი. ბიბლურ დამწერლობაში უცნობია ფინიკიური დამწერლობის ოთხი, უფრო სწორად ხუთი ნიშანი. აი ეს ნიშნები ადგილის მიხედვით ფინიკიური დამწერლობის ნიშნების რიგში: მე-5, მე-8, მე-12 და მე-19 ნიშნის ორი გრაფიკული სახეობა.

ცხრილი 1 ქართული დამწერლობითი ნიშნების ადრე ცნობილი რიცხვითი მნიშვნელობები

ცხრილი 2. ქართული დამწერლობითი ნიშნების ადრე ცნობილი რიცხვითი მნიშვნელობები

	Славянское		Китайское			Греческое	Арабское	Грузинское	Египетское		Римское	Цифры племени Майя
	Кирилицей	Глаголицей	Старое	Коммерческое	Научное				Иероглифы	Иератическое		
0				○	○							
1	ѧ	✚	一	𠆢	𝍠	ᾱ	ا	ა	𓏺	𓏺	I	•
2	ѥ	ⰻ	二	𠆢𠆢	𝍠𝍠	β̄	ب	ბ	𓏺𓏺	𓏺𓏺	II	••
3	ѓ	ⰲ	三	𠆢𠆢𠆢	𝍠𝍠𝍠	γ̄	ج	გ	𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺	III	•••
4	ѧ̈	ⰴ	四	𝍠	𝍠𝍠𝍠𝍠	δ̄	د	დ	𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺	IV	••••
5	ѕ	ⰵ	五	𝍠	𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠	ε̄	ه	ე	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	V	—
6	ꙁ	ⰶ	六	𝍠	𝍠	ϛ̄	و	ვ	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	VI	— •
7	ꙁ́	ⰷ	七	𝍠	𝍠𝍠	ζ̄	ز	ზ	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	VII	— ••
8	ѩ	ⰸ	八	𝍠	𝍠𝍠𝍠	η̄	ح	ჱ	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	VIII	— •••
9	ѳ	ⰹ	九	𝍠	𝍠𝍠𝍠	θ̄	ط	თ	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	IX	— ••••
10	ї	ⰺ	十	𝍠	IO	ῑ	ي	ი	𓎆	𓎆	X	=
20	ќ	ⰸ	廿	𝍠	IIO	κ̄	ك	ჲ	𓎆𓎆	𓎆𓎆	XX	
30	ѯ	ⰾ	卅	𝍠	IIIO	λ̄	ل	ლ	𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆	XX :	
100	ҁ	ⰱ	百	𝍠	IOO	ρ̄	ق	რ	𓍢	𓆐	C	
1000	ѧ̀	ⰲ	千	𝍠	IOOO	͵α	غ	ს	𓆼	𓆼	M	

ზემოთ მოხსენებული აზრი იმის შესახებ, რომ „ფინიკიელები არავითარ შემთხვევაში არ შეიძლება ჩაითვალოს დამწერლობითი ნიშნების შემქმნელებად“ (როგორც პალეოგრაფიულმა მეცნიერებამ იცის - ამ დამწერლობითი ნიშნებით პირველები ბიბლები სარგებლობდნენ მარცვლოვან დამწერლობაში, ხოლო შემდეგ ფინიკიელები იყენებდნენ კონსონანტურ დამწერლობაში), ადასტურებს ერთი გარემოება და ყურადღება მივაქციოთ კერძოდ იმას, რომ - ფინიკიური დამწერლობის მე-19 ნიშნის ორი გრაფიკული სახეობა: 1) ადრეული ანუ ძვ .წ. ა. XV საუკუნიდან ცნობილი ნიშანი  ქოფ/qoph და 2) ძვ. წ. ა. X – IX საუკუნიდან ცნობილი ნიშანი  ქოფ/qoph არ გამოიყენებოდა ბიბლურ დამწერლობაში.

ცხრილი 3. ქართული დამწერლობითი ნიშნების ახლა ცნობილი რიცხვითი მნიშვნელობები

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
			a	1				s	200
			b	2				ṭ	300
			g	3				y	
			d	4				u	400
			e	5				p	500
			v	6				k	600
			z	7				ɣ	700
			e	8				ʒ	800
			t	9				ṡ	900
			i	10				ċ	1000
			ḳ	20				c	2000
			l	30				ǯ	3000
			m	40				ç	4000
			n	50				ǯ	5000
			j	60				x	6000
			o	70				q	7000
			p	80				ǯ	8000
			ż	90				h	9000
			r	100				ω	10000

ფინიკიური მე-19 ნიშანი, უფრო სწორად - ორი სხვადასხვა ნიშანი, რომლებიც ფინიკიურ დამწერლობაში ერთი მნიშვნელობით იხმარებოდა, სტატიის ავტორის მიერ აღდგენილი კანონზომიერების თანახმად, არავითარ შემთხვევაში არ უნდა იყოს დასმული მე-19 ადგილზე დამწერლობითი ნიშნების რიგში, იმიტომ რომ, როგორც ნათქვამი იყო, 1-ელი - ფინიკიურ დამწერლობაში ორი ნიშანი ერთი მნიშვნელობით ქოფ/qoph იხმარებოდა და მე-2 - ეს ე. წ. ფინიკიური მე-19 ნიშნის ორი გრაფიკული სახეობა ორ გრაფიკულ ნიშნად და ორი ბგერითი მნიშვნელობით: 1)  ქ/q და 2) ფ/ph არის გაყოფილი ხმელთაშუა ზღვის აუზის დამწერლობებში: ბერძნულში, პროტო-ტირენულში და ეტრუსკულში ანუ დაბრუნებული აქვთ თავდაპირველი ბგერითი მნიშვნელობები და ყურადღება უნდა მიექცეს იმასაც, რომ თვით ფინიკიურ დამწერლობაში ამ ორი ნიშნის სახელი ამოიკითხება მნიშვნელობით „ქ“-ო-„ფ“/„q“-ი-„ph“, რაც შესაძლოა შემთხვევითიც არ არის. ამავე ბგერითი მნიშვნელობით უნდა გამოყენებულიყო ეს ნიშნები 29-ნიშნიან ქართულ დამწერლობაში, მანამ სანამ ქართული ასომთავრული დამწერლობა შეიქმნებოდა (21-ნიშნიანი მარცვლოვანი დამწერლობა შეიცვალა 29-ნიშნიანი ანბანური დამწერლობით). 23-ე ნიშანს ფინიკიურში და ქართულ ასომთავრულში ცალ-ცალკე აქვთ გარდაქმნილი ხაზულობა, მაგრამ ძირითადი კონსტრუქცია ორივეგან შენარჩუნებულია. 24-ე ნიშანს აგებულება არ შეცვლია: ქართულ ასომთავრულში, ფინიკიურში და შემდეგ ბერძნულში, იგი მხოლოდ მომრგვალებულია. ამ ნიშანს არც ბგერითი მნიშვნელობა შეცვლია ქართულ ასომთავრულში და ბერძნულში.

ფინიკიური დამწერლობის ნიშნების რიგში, სადაც ორი ნიშანი ერთი მნიშვნელობით გამოიყენებოდა და საერთოდ, კანონზომიერად შექმნილი ნიშნების რიგის საწინააღმდეგოდ მე-19 ადგილზე იყო დასმული, ამ სტატიის ავტორის მიერ „ფინიკიური შეცდომა“ ეწოდა და მიუხედავად იმისა, რომ ხმელთაშუა ზღვის აუზის დამწერლობებში: ბერძნულში, პროტო-ტირენულში და ეტრუსკულში ფინიკიური მე-19 ნიშნის ორი სახეობა გაყოფილია ორად და დაბრუნებული აქვთ თავდაპირველი ბგერითი მნიშვნელობები, ბერძნულ კლასიკურ დამწერლობაში, სადაც უკვე დამწერლობით ნიშნებს მინიჭებული აქვთ რიცხვითი მნიშვნელობები, ნიშანი ფ/ph (ბერძნულ დამწერლობაში ფი/ph/φι) დასმულია 23-ე ადგილზე ნაცვლად 24-ე ადგილისა. ბერძნული ამ მოქმედებას „ბერძნული შეცდომა“ დაერქვა ავტორის მიერ.

ბერძნული რიცხვითი სისტემის 23-ე ნიშანი (ბერძნულ ენაში ბგერითი მნიშვნელობა ფი/ph/φι) გამოიყენებოდა რიცხვ 500 მნიშვნელობით. იგივე ნიშანი (ქართულ ენაში ბგერითი მნიშვნელობა ფარ/phar), რომელიც ქართულ ასომთავრულში 24-ე ადგილზე იდგა და რიცხვ 600 მნიშვნელობა ჰქონდა, ბოლო ხანს შეიცვალა რიცხვ 500 მნიშვნელობით, რაც ნაჩვენებია 1-ელ, მე-2 და მე-3 ცხრილში და დადასტურებულია სხვა ფაქტებითაც.

ქართულ პალეოგრაფიულ მეცნიერებაში ქართული ასომთავრულის 22-ე ნიშნის  ბგერითი უ/u (ულ/un) და რიცხვითი მნიშვნელობა 400 გადატანილ იქნა ლიგატურაზე, რომლისგანაც შემდეგ მხედრული დამწერლობის ნიშანი „უნი“ ჩამოყალიბდა  → → უ, ხოლო თვით 22-ე გრაფიკული ნიშანი უარყოფილ იქნა ზემოხსენებული მნიშვნელობებისთვის. ამავ დროს უარყოფილ იქნა 23-ე ნიშნის რიცხვითი მნიშვნელობა ჳ = 500, რაც 24-ე ნიშანზე გადაიწია და 22-ე და 23-ე ნიშანი ბგერა ვუჲ/vuy-ს მნიშვნელობით გაიგივდა. ე. ი. ამ ორმა ნიშანმა დაკარგა რიცხვითი მნიშვნელობები, ხოლო ამათგან 22-ე ნიშანმა ბგერითიც.

ამრიგად, ქართულ დამწერლობაში, სადაც უზადოდ არის შენახული პირველქმნილი ნიშნების რიგი, პირველადი რიცხვითი და ბგერითი მნიშვნელობები, ი. ჯავახიშვილის მოღვაწეობის პერიოდის შემდეგ დარღვეულ იქნა და აქედან კი ისტორიული ცნობების დათარიღებაში, რბილად რომ ვთქვათ, შეცდომები გამოიწვია.

ამ შეცდომის გამომწვევი მიზეზი ადრეულ პერიოდში, ასომთავრული დამწერლობის არსებობის დროიდან დაიწყო, მაშინ როცა ნამდვილი 22-ე ნიშნის უნის ბგერითი და რიცხვითი მნიშვნელობა ლიგატურაზე თანდათან გადავიდა, მაგრამ რიცხვითი მნიშვნელობების ხელოვნურ შეცვლას სხვა მიზეზიც აქვს და ეს არის ქართული დამწერლობითი ნიშნების რიცხვითი მნიშვნელობების უკანასკნელ ხანს მცდარ ბერძნულ რიცხვით მნიშვნელობებზე დაქვემდებარება, მაშინ როცა, სინამდვილეში, ქართული დამწერლობიდან გადაიტანეს ბერძნებმა რიცხვითი მნიშვნელობები, ისიც მცდარად. ამრიგად, ქართული დამწერლობის 23-ე რიცხვ 500 ნიშანი, იმ ბგერითი და რიცხვითი მნიშვნელობით, რომლითაც ქართულ ენაში და დამწერლობაში გამოიყენებოდა და იგი ბოლო დრომდე შემოინახა, ადრეულ ბერძნულ დამწერლობაში გამოიყენებოდა ბგერა შეცვლილი κοππα/კოპა-ს მნიშვნელობით. გარდა ამისა, ნიშანი κοππα/კოპა ადრე ბერძნულ დამწერლობების სახეობებში ფინიკიურიდან გადატანილი ფინიკიური მე-19 ნიშნის გასწვრივ არის დასმული და შემდეგ არის შეცვლილი ამ ნიშნით რიცხვ 90 გვიანი ქართული ასომთავრულის მე-18 რიცხვ 90 ნიშნის იდენტური ბერძნული მე-18 რიცხვ 90 ნიშნით ანუ ფინიკიური მე-19 ნიშნის ერთი სახეობა გადატანილია ბერძნულ რიცხვითი ნიშნების რიგში მე-18 ადგილზე, როგორც ჩანს ბერძნული κοππα/კოპა-ს ქართული ასომთავრულის რიცხვ 90 ნიშანთან გრაფიკული მსგავსების გამო და იმის გამოც, რომ ფინიკიური მე-18 ნიშან cade/ცადე-ს ბგერა ზოგ ბერძნულ დამწერლობებში საერთოდ არ იხმარებოდა, ზოგან კი ბგერა ϛαν/სან-ით იყო შეცვლილი, ამასთანავე მხედველობაში უნდა იქნას მიღებული ისიც, რომ ბერძნულ დამწერლობაში (ფინიკიურ დამწერლობასთან შედარებით) ბგერა-ნიშნებია დამატებული და არ ემთხვევა ფინიკიური ნიშნების რიგს, თანაც ფინიკიური მე-19 ნიშნის ორი სახეობა გაყოფილია ორად. ამიტომ და სხვა მიზეზის გამო, როცა ბერძნული დამწერლობის ნიშნებს რიცხვითი მნიშვნელობები მიენიჭა, გამოტოვებულ იქნა ქართული 23-ე ნიშანი და მისი რიცხვითი მნიშვნელობა 500 გადაიწია 24-ე ნიშანზე, რომელიც ანუ 24-ე ნიშანი ბერძნული რიცხვითი ნიშნების რიგის 23-ე ადგილზე აღმოჩნდა.

კანონზომიერებაზე და მრავალ ფაქტზე დაყრდნობით კეთდება დასკვნა, რომ როგორც ფინიკიელები არ შეიძლება ჩაითვალოს დამწერლობითი ნიშნების შემქმნელებად, ასევე ბერძნები არ შეიძლება ჩაითვალოს დამწერლობით ნიშნებზე რიცხვითი მნიშვნელობის მიმნიჭებლად და დამწერლობაში ხმოვნების შემტანად ანუ ანბანური დამწერლობის შემქმნელებად. დამწერლობითი ნიშნები, როგორც რიცხვითი ნიშნები, დიდი ხნით ადრე იყო შექმნილი და ამავ დროს ანბანური დამწერლობა, ბევრად ადრე, ვიდრე მის გამოყენებას დაიწყებდნენ ბერძნები.

ამრიგად, იმ მცდარი ცვლილებების გამო, რაც ზემოთ იყო მოხსენებული, ქართული დამწერლობის ნამდვილ 24-ე ნიშნამდე ორი გრაფიკული ნიშნით შემცირდა ნიშნების საერთო რაოდენობა [24-ე ნიშანი ფ/ph (ფარ/phar) 25-ე ნიშანია ქართული ასომთავრულის დამწერლობითი ნიშნების რიგში, რადგან 22-ე და 23-ე ნიშანს შორის ლიგატურა იდგა ურიგოდ, რომელსაც არც რიცხვითი და არც ანბანური რიგის ბგერითი მნიშვნელობა ჰქონდა, და რომელიც ანბანურ რიგში სხვა დანიშნულებით არის ჩასმული] და რახან ბერძნულის გავლენით მცდარად გადაიწია დამწერლობითი ნიშნების რიცხვითი მნიშვნელობები, ამის გამო კი 24-ე ნიშანი 23-ე აღმოჩნდა, ასე გაგრძელდა მომდევნო ნიშნების რიცხვითი მნიშვნელობების შეცვლა რიგის მიხედვით 31-ე ნიშან ძ/dz (ძილ/dzil)-ის ჩათვლით და ნიშან ძ/dz (ძილ/dzil)-ს თვითნებურად მიენიჭა რიცხვითი მნიშვნელობა

3000, როცა მას, როგორც ზემოთ ნაჩვენები 1-ელი და მე-2 ცხრილი ადასტურებს, რიცხვითი მნიშვნელობა 1000 ჰქონდა პირველქმნილი კანონზომიერების მიხედვით.

ასეთი მსჯელობის შემდეგ ისმის კითხვა- რას ემყარება ეს მოსაზრებები? - ჯერ ერთი - ამ მსჯელობას მყარი საფუძველი აქვს, გარდა 1-ელ და მე-2 ცხრილში არსებული მონაცემებისა; მეორე - ამ სტატიის ავტორის მიერ დადგენილია დამწერლობის შექმნის სამი ფაზა (მხედველობაში არ არის ქართულ დამწერლობაში ცნობილი: ასომთავრული, ნუსხა-ხუცური და მხედრული), ამასთან ერთად, აღდგენილია პირველქმნილი დამწერლობითი ნიშნები, რასაც ავტორის მიერ „მსოფლიოს 1-ელი საოცრება“ ეწოდა. დადგენილი და დაზუსტებულია თუ როგორ შეიქმნა ქართული დამწერლობისგან: თანამედროვე არაბული, სომხური და ალბანური (აგვანური) დამწერლობა. დადგენილია აგრეთვე დამწერლობებში: ბერძნულში, ლათინურში და სლავურში გადატანილი ქართული დამწერლობითი ნიშნები. მეტ-ნაკლებად გამოკვლეულია სალაპარაკო ენის რიცხვითი შემადგენელი, აღდგენილია რიცხვითი სახელების შექმნის რამდენიმე რედაქცია და შედგენილი რიცხვითი სახელების ფორმები, რომელთა გავრცელების არეალი მოიცავს ევროპის და აზიის კონტინენტს. მეტ-ნაკლებად დადგენილია თუ როგორ გარდაიქმნა რიცხვითი სახელების პირველადი ფორმები სხვადასხვა ენების სხვადასხვა კატეგორიის სიტყვებში, მაგ. რიცხვით, თვეების და დღეების სახელებში; როგორ არის შედგენილი კალენდარი ქართული ასომთავრული დამწერლობის და რიცხვით ნიშნების შექმნასთან ერთად, რაც ქართველი საეკლესიო მოღვაწის და ისტორიკოსის ლეონტი მროველის ცნობის მიხედვით ძვ. წ. ა. III ს-ში ფარნავაზის მეფობის დროს მოხდა და რომელიც ანუ ფარნავაზ მეფის კალენდარი რომის პაპმა გრიგორი XIII მე-16 ს-ში გაავრცელა საყოველთაოდ. ე. ი. ფარნავაზ მეფის დროს შექმნილი ქართული კალენდარი ისევ შემობრუნდა საქართველოში, რომელიც ავტორის მიერ მოძიებული ცნობის თანახმად იულიუსის კალენდრით შეიცვალა (სავარაუდოდ) დავით აღმაშენებლის მეფობისას გიორგი მთაწმინდელის თაოსნობით.

ზემოთ მოხსენებული გამოკვლეულია კონკრეტულად და დამტკიცებულია გრაფიკული ნიშნების ფაქტებით, მეცნიერთა მოსაზრებებით და ისტორიული ცნობებით, ენათმეცნიერულ მონაცემებთან ერთად, ავტორის - გურგენ ვალერიანესძე კოხრეიძის ნაშრომში „ქართული ასომთავრული მოლაპარაკე ანბანი“.

რა თქმა უნდა, მცირე ზომის სტატიაში შეუძლებელია მრავალი გამოკვლეული მასალის ჩვენება და მეორე - დრომდე ტაბუ ექნება დადებული ავტორის მიერ ხელმეორედ აღმოჩენილი დამწერლობითი, იგივე რიცხვითი ნიშნების შექმნის და სიტყვის შედგენის საიდუმლოს.

შინაარსი

წინასიტყვაობა ____ 5
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი 85 წლისაა ____ 6
ავთანდილ თვალჭრელიძე ____ 9

სექცია: თხელ სხეულთა მექანიკა

სერგეი ლურიე, მიხეილ ნიქაბაძე, პეტრე ბელოვი.
სუპერთხელი სტრუქტურების ადგეზიური მოდელი. მექანიკური და დინამიური თვისებები. ____ 12
მიხეილ ნიქაბაძე.
ტენზორულ ბლოკებიანი მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობის ამოცანის გამოყენება მექანიკაში. ____ 21
სერგეი ლურიე, ოვიკ მატევოსიანი, მიხეილ ნიქაბაძე, არმინე ულუხანიანი.
მატერიალური ტენზორული ობიექტების საკუთრივი მნიშვნელობის ამოცანა და ტალღების გავრცელების სიჩქარეები. ____ 40
მიხეილ ნიქაბაძე.
თხელი სხეულების დეფორმაციის მათემატიკური მოდელირების შესახებ. ____ 57
მიხეილ ნიქაბაძე, არმინე ულუხანიანი, თამარ მოსეშვილი, ქეთევან ცხაკაია, ნოდარ მარდალეიშვილი, ზურაბ არქანია.
ხუთშრიანი თხელი პრიზმული სხეულების მოდელირების შესახებ. ____ 95
ბადრი ჭურჭელაური, ზვიად ჭურჭელაური, ალექსანდრე ტყეშელაშვილი.
დრეკად ფუძეზე მდებარე ფენოვანი თხელკედლიანი კონსტრუქციების გაანგარიშება. ____ 122

სექცია: მრავალშრიანი კონსტრუქციების მათემატიკური მოდელირება

ვოლფგანგ მიულერი, ელენა ვილჩევსკაია
მიკროპოლარული სითხეების თეორიის ახალი ასპექტები ____ 128
ნიკოლაი შამაროვი, ოლეგ სმოლიანოვი
ვეილის მეორე ქვანტიზაციის ჰამილტონიანი და ზომების ფესვები ____ 141
თემური მოდებაძე, ნინო გოგოლაძე
დისპერსიულ გარემოში არაწრფივი სითბური მიმოცვლის ოპტიმალური მართვა ____ 147
ქეთევანი კუთხაშვილი.
ერთგვაროვანი თხელი ფირფიტის ოპტიმალური დაჭრის მათემატიკური მოდელი ____ 157

ბიძინა აბესაძე
დრეკად–ბლანტი სხეულების თვისებების აღმწერი ოთხ ელემენტიანი განზოგადებული მოდელების შედარებითი ანალიზი. 160
გიორგი ოქროპირიძე.
საჰაერო ხომალდის ფრთის შემონაკერის კომპოზიციური მასალის მათემატიკური მოდელი მდგრადობასა და თერმოიზოლაციაზე. 167
ნინო ჩორხაული, ნატრული ხარჭავანიძე , ბელა წიქარაძე, ირინა ფარადაშვილი.
დამრეცი გარსების ერთმალიანი მრავალტალღიანი საფარის მათემატიკური მოდელი. 174

სექცია: უწყვეტ გარემოთა მექანიკის გამოყენებითი ამოცანები

ოვიკ მატევოსიანი, მიხეილ ნიქაბაძე, არმინე ულუხანიანი.
ბიჰარმონიული ამოცანები და მათი გამოყენება. 184
ჯორჯო ნორდო
ჩადგმის თეორემა ტოპოლოგიურ სივრცეებში. 194
თამარ მოსეშვილი,,ნოდარ მარდალეიშვილი,,ქეთევან ცხაკაია, დავით ძაძამია.
მრავალფენიანი მრავალფუნქციური ტექსტილური კომპოზიტების ფენების ფორიანობისა და მათში ტენის გადაადგილების კვლევა. 224
ბადრი ცუცქირიძე
სუსტად ელექტროგამტარი სითხის პულსაციური დინება. 232
ნათელა ზირაქაშვილი
დრეკადობის თეორიის შიგა სასაზღვრო ამოცანის ანალიზური ამოხსნა პარაბოლით შემოსაზღვრული არისათვის ნორმალური დატვირთვით. 244
დავით ლეკვეიშვილი, მანანა ჭუმბურიძე.
ძირითადი სასაზღვრო-კონტაქტური ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნების აგების ახალი მეთოდის შესახებ. 253
ემირ ბაკურაძე, ბადრი ზივზივაძე, თამარ მოსეშვილი, კახა ბაკურაძე.
ექსკალატორის სახელურების დამზადება ბაზალტის როვინგისაგან ფორმირებული ქსოვილის კომპოზიტისაგან. 258
ემირი ბაკურაძე , ბადრი ზივზივაძე, კახა ბაკურაძე.
საფეიქრო კომპოზიციური მასალებისაგან ელექტროსაკონტაქტო მილების დამზადების ახალი ინოვაციური ტექნოლოგიის დამუშავება. 264
რევაზ კახიძე
შედგენილი კონსტრუქციების გაანგარიშების მაგალითი ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით 273
თამაზ ხმელიძე, გელა ყიფიანი, ელინა ქრისტესიაშვილი.
კომპოზიტური სამშენებლო კონსტრუქციები და მათი გაანგარიშების თავისებურებანი ანიზოტროპიის გათვალისწინებით. 278
საღინაძე ივანე, ფხაკაძე მანანა.
გარემოსდაცვითი და გეომორფოლოგიური პრობლემები ქალაქ ფოთის შავი ზღვისპირა რეგიონში და მათი აღმოფხვრის გზები. 288

ცირა ბერაძე
იმიტაციური მოდელირება პროექტირების ეტაპზე და მისი პრაქტიკული რეალიზაცია. 292
ცირა ბერაძე
მობილური მანქანის საანგარიშო დინამიკური მოდელის შედგენის და დიაგნოსტიკაში გამოყენებული იმიტაციური მოდელირების პრინციპები. 299
მერაბ დათუაშვილი.
მრავალფენიანი ქსოვილური გარსების კუმშვისას დეფორმაციული პროცესების კვლევა. 306
ომარ კიკვიძე, გერონტი სახვაძე.
ლითონების არადრეკადი დეფორმირების მოდელირება და თერმო-დრეკად-ფაზური სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის მეთოდი. 313
ალექსანდრე პანინი.
მრავალუჯრედიანი სასილოსე კორპუსების კედლებზე ძალების გაანგარიშების ერთი მარტივი მეთოდიკის შესახებ. 318
გერონტი სახვაძე.
მასალების გამტკიცების სასრულე-ელემენტებიანი მოდელირება საკუთარი დეფორმაციების მეთოდის გამოყენებით დატყმითი ლაზერულ-ტალღური დამუშავებისას. 326
კოსტა სვანაძე
დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის მეორე სასაზღვრო ამოცანის ელიფსურ არეში ეფექტურად ამოხნის ერთი ხერხის შესახებ 338

სექცია: ანალიზის მონათესავე საკითხები

მალხაზ ბედიაშვილი, გელა ყიფიანი, ვაჟა სულაშვილი.
სამშენებლო დარგის მეცნიერების განვითარების პროცესები საქართველოში. 346
მარინა ქურდაძე, თამაზი გარდაფხაძე, მარინა გარდაფხაძე.
ბიზნეს-პროექტების განხორციელების მიზანმიმართული ფუნქციონირების ფორმალიზებული მოდელი. 352
ლაშა სამხარაძე.
ავარიულ-დეფორმირებული ნაგებობების აღდგენა რეკონსტრუქციის პროექტირების ორგანიზაციის გაუმჯობესების პრობლემები და დაპროექტების მეთოდოლოგია ქ. თბილისის მაგალითზე. 361

Content

Session: Mechanics of Thin Bodies

Sergei Lurie, Mikhail Nikabadze, Petr Belov.
Adhesion Model of Hyperfine Structures. Mechanical and Dynamical Properties. 12
Mikhail Nikabadze
Application of eigenvalue problems for tensor-block matrices in mechanics 21
Sergei Lurie, Hovik Matevossian, Mikhail Nikabadze, Armine Ulukhanyan
The Problem of Eigenvalues of Material Tensor Objectives and Velocities of Wave Propagation 40
Mikhail Nikabadze
On Mathematical Modeling of Thin Body Deformation. 57
Mikhail Nikabadze, Armine Ulukhanyan, Tamar Moseshvili, Ketevan Tskhakaia, Nodar Mardaleishvili, Zurab Arkania.
To the Modeling of Five-layer Thin Prismatic Bodies. 95
Maxim V. Shamolin
Oscillations During Spatial Deceleration of a Rigid Body in a Resisting Medium 114
Badri Churchelauri, Churchelauri Zviad, Tkeshelashvili Aleksandre.
Analysis of Located on Elastic Foundation Layered Thin-walled Structures. 122

Session: Mathematical Modeling of Multilayered Structures

Müller Wolfgang H.. Elena Vilchevskaya
New Aspects in Micropolar Fluid Theory. 128
Nikolai Shamarov, Oleg Smolyanov.
Hamiltonian Weyl Second Quantization and Roots of Measures 141
Temuri Modebadze, Nino Gogoladze.
Optimal Control of Non-Linear Heat Exchange in a Dispersion Medium 147
Ketevan Kutkhashvili
Mathematical Model of Optimal Cutting of a Homogeneous Thin Plate 157
Bidzina Abesadze
Comparative Analyses of the Four-element Generalized Models Describing of Elastic-viscous Bodies Properties. 160
Giorgi Okropirdze.
The Mathematical Modeling of the Structural Strength and Thermal Isolation of the Wing Skin of Airplane. 167
Nino Chorkhauli, Kharchavanidze Natruli, Tsikaradze Bela, Paradashvili Irina.
Mathematical Method of Single-span Depressed Shells Multi-wace Covering. 174

Session: Applied Problems of Continuum Mechanics

Hovik Matevossian, Mikhail Nikabadze, Armine Ulukhanyan
Some Biharmonic Problems and their Applications 184
Giorgio Nordo
An Embedding Theorem in Soft Topological Spaces. 194
Gerard R. Lemaitre, Pascal Vola, Eduard Muslimov.
Active optics in astronomy – Freeform mirror for the MESSIER telescope proposal 200
René Verreault, Thomas J. Goodey, Dimitrie Olenici,,Jean-Bernard Deloly.
Subtle properties of the anisotropic Foucault pendulum 207
Tokuei Sako
Correlated electron dynamics in field-induced time-dependent current in low-dimensional nanostructures 223
Tamar Moseshvili, Nodar Mardaleishvili, Ketevan Tskhakaia, David Dzadzamia.
Investigation of Porosity and Moisture Transportation Through Textiles in Multi Layer Textile Composites. 224
Badri Tsutskiridze
Pulsating Flow of Weakly Conductive Liquid with Heat Transfer. 232
Natela Zirakashvili.
Analytical Solution of Internal Boundary Value Problem of Elasticity for Domain Bounded by Parabola with Normal Load. 244
David Lekveishvili, Manana Chumburidze.
About the New Method to Construct of Approximate Solution of Boundary-contact Problem. 253
Emir Bakuradze, Badri Zivzivadze, Tamar Moseshvili, Kakha Bakuradze.
Using of Textile Composite Produced from Basalt Roving for Manufacturing of Subway's Escalators Sleeves. 258
Emiri Bakuradze, Badri Zivzivadze, Kakha Bakuradze.
Developing the Innovative Technology for Producing the Electro-contact Pipes from Textile Composite Materials. 264
Revaz Kakhidze
Example of Analysis of Compound Structures by Application of Variation Method. 273
Tamaz Khmelidze, Gela Kipiani, Elina Kristesiashvili.
Composite Building Structures and their Calculation Characteristics with Account for Anisotropy. 278
Ivane Saginadze, Manana Pkhakadze
Ecological and Geomorphological Problems of the Poti Black Sea Region and Ways of their Elimination 288
Tsira Beradze.
Simulation Modeling in the Design Stage and Its Practical Implementation. 292
Tsira Beradze
The Principles of Developing the Calculating Dynamic Model of Mobile Vehicle and Imitation Modeling Used in Diagnosis. 299

Merab Datuashvili.
Investigation of Deformation Processes in Multilayered Shells under Compression. 306
Kikvidze Omar, Sakhvadze Geronti.
Modeling of Inelastic Deformation Metals and Method Solutions of Thermoelastic Phase Boundary Problem. 313
Aleksandr Panin.
About One Simple Method of Determining the Efforts in the Walls of the Silo Blocks with a Large Number of Cells. 318
Geronti Sakhvadze.
Finite Element Modeling of Material Stretching During Laser Shock Processing, Using the Method of Eigenstrains 326
Kosta Svanadze
On one way of effective solution of the second boundary value problem of statics of the theory of elastic mixture in an elliptic domain. 338

Session: Related Problems of Analysis

Malkhaz Bediashvili, Gela Kipiani, Vazha Sulashvili.
Processes of Development of Construction Field Science in Georgia. 346
Marina Kurdadze, Tamaz Gardapkhadze, Marina Gardapkhadze.
Formalized Model of Purposeful Functioning of Business Projects. 352
Lasha Samkharadze.
Problems of Improvement of Restoration-reconstruction Organization of Planning of Dangerous-deformed Structures and Planning Methodology on Example of Tbilisi city. 362