

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

**НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
С ПОМОЩЬЮ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

В.И.Машуков

Анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности системы выработок в горном массиве требует эффективного метода решения задач теории упругости для многосвязных областей с произвольной формой границы области деформирования. Аналогичная ситуация возникает при расчетах упругих закрученных стержней с многосвязным сечением. В математической постановке решение указанных задач сводится к решению краевых задач для би-гармонического уравнения и уравнения Лапласа.

Многосвязность области деформирования и произвольная форма граничных контуров значительно осложняют использование метода конечных элементов и разностных методов для решения указанных эллиптических уравнений. Более эффективными оказались методы численного решения, основанные на интегральных уравнениях.

Использование ЭВМ для численного решения задач кручения и плоской деформации наложило определенные ограничения на интегральные уравнения. Во-первых, уравнение должно было допускать решение методом последовательных приближений, во-вторых, оператор уравнения должен был быть простым, то есть вычисляться

с возможно меньшими затратами машинного времени.

Автором были сделаны попытки использовать различные, опубликованные в печати, интегральные уравнения. Наиболее подходящими оказались сингулярные интегральные уравнения, предложенные Купрадзе В.Д. [1], для плоской деформации и Мусхелишвили Н.И. [2] для кручения.

Алгоритмы численного решения задачи кручения и задачи плоской деформации реализованы на ЭВМ. Программы написаны на входном языке ФОРТРАН-IV. Отладка программ и вычисления выполнены на ЭВМ БЭСМ-6.

В статье приводятся примеры расчетов.

1. Кручение.

Исследование напряженно-деформированного состояния закрученного упругого стержня в постановке Сен-Венана [2] сводится к определению напряжений τ_{xz} , τ_{yz} и смещения w (депланации поперечного сечения).

В дальнейшем область деформирования, в частности, сечение стержня плоскостью, ортогональной образующей стержня, предполагается многосвязной. При этом граница Γ области деформирования D :

$$\Gamma = \bigcup_{i=0}^m \Gamma_i$$

Γ_i — простые замкнутые контуры. Γ_0 охватывает другие Γ_i .

Ось z предполагается параллельной образующей стержня.

Искомые функции могут быть представлены через аналитическую функцию $F(z)$ [2]

$$\tau_{yz} + i\tau_{xz} = \mu \cdot q \cdot (\bar{z} + F'(z)),$$

$$w(x, y) = \text{Im}(F(z)),$$

$$\text{Dep}(x, y) = q \cdot \Psi(x, y) + C,$$

$$G = \iint_D (\tau_{yz} \cdot x - \tau_{xz} \cdot y) dx dy = \int_L \mu (-x^2 y dx + y^2 x dy - \\ - x \cdot \Psi(x, y) dx - y \cdot \Psi(x, y) dy).$$

μ - константа Ляме (модуль сдвига).

C - действительная константа,

$\text{Dep}(x, y)$ - депланация поперечного сечения стержня,

G - жесткость на кручение.

Для определения функции $F(z)$ Н.И. Мусхелишвили была поставлена видоизмененная задача Дирихле [2]:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - z} \quad (I)$$

$$g(t) = \text{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - t} \right) = |t|^2 + H(t).$$

$g(t)$ - действительная функция.

$H(t)$ - действительная функция, принимающая постоянные значения на Γ_i , $i = 0, I, \dots, m$ возможно различные на различных Γ_i

Уравнение:

$$g(t) - PAg(t) = P|t|^2, \quad (2)$$

однозначно разрешимо в пространстве функций $PC(\Gamma)$ [3], где:

$$P : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma),$$

$$Pf(t) = f(t) - H_1(t),$$

$$H_1(t) = f(t_i),$$

$$g(t) \in PC(\Gamma) \rightarrow Pg(t) = g(t),$$

$$Ag(t) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - t} \right)$$

где t_i фиксированная точка на Γ_i .

Решение уравнения (2) дает следующий итерационный процесс:

$$g_0(t) = 0,$$

(3)

$$g_{i+1}(t) = \frac{1}{2}(f(t) + PAg_i(t) + g_i(t)).$$

При вычислениях граничные контуры задавались поточечно. Если t_j^i точка с номером j на контуре с номером i , а g_j^i - значение функции $g(t)$ в этой точке, тогда основные вычислительные формулы имеют вид [3]:

$$\left(\frac{d}{ds_1} g(t) \right)_j^i = \frac{N_i}{6} (g_{j+1}^i - g_{j-1}^i - (g_{j+2}^i - g_{j-2}^i)),$$

$$\int_{\Gamma} g(\tau) d\mu(\tau) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{2N_i} \sum_{j=1}^{N_i} g_j^i \left(\frac{d}{ds_1} \mu(t) \right)_j^i,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - t_k^1} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^m \frac{1}{2N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{(g_j^i - g_k^1) \cdot \left(\frac{d}{ds_1} t \right)_j^i}{t_j^i - t_k^1} + \\ &+ \frac{1}{4\pi i} \frac{\left(\frac{d}{ds_1} g(t) \right)_k^1}{N_1} - \frac{1}{2} g_k^1. \end{aligned}$$

N_i - число точек, заданных на контуре с номером i . Штрих над знаком суммирования означает, что выброшено слагаемое, у которого $(j, i) = (k, 1)$.

Итерационный процесс (3) заканчивался, если:

$$\max_{k=0, \dots, m} \sqrt{\frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} |\varepsilon_{i+1}(t_j^k) - \varepsilon_i(t_j^k)|} < \delta \cdot \max_{k=0, \dots, m} \sqrt{\frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} |\varepsilon_{i+1}(t_j^k)|} \quad (4)$$

δ — наперед заданная положительная константа.

На рисунках 1, 2 показаны изолинии интенсивности касательных напряжений $\sqrt{\tau_{kz}^2 + \tau_{yz}^2}$ и деформации поперечного сечения w .

Расчеты проведены для $\mu = 1$, $q = 1$, $\delta = 0.0001$. На каждом граничном контуре было задано по 40 равномерно распределенных точек.

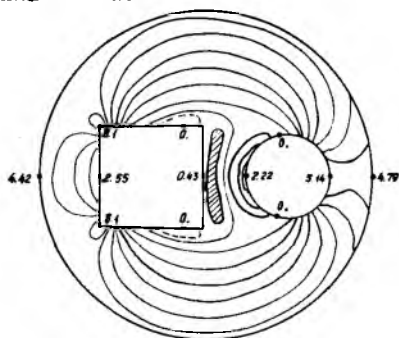


Рис.1

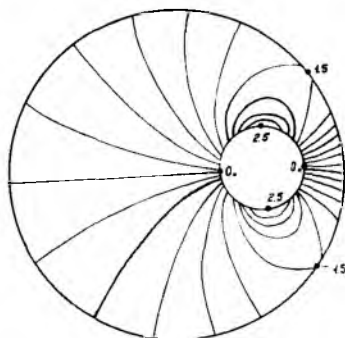


Рис.2

2. Плоская деформация.

В задаче плоской деформации при заданном на границе векторе усилий смещения могут быть представлены в виде потенциала простого слоя [1]:

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} (a \ln|t(\sigma) - z| \cdot \varphi(\sigma) - b \cdot \frac{\operatorname{Re}((z - t(\sigma)) \cdot \varphi(\sigma))}{z - t(\sigma)}) d\sigma, \quad (5)$$

$$a = (\lambda + 3\mu) / (2\mu(\lambda + 2\mu)), \quad b = (\lambda + \mu) / (2\mu(\lambda + 2\mu)).$$

Вектор усилий $T(s)$ на границе области деформирования выражается через плотность $\varphi(s)$ (5) следующим образом [1] :

$$-\frac{1}{2}\varphi(s) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(c \frac{\overline{t'(s)} \cdot \varphi(\sigma)}{t(s) - \overline{t(\sigma)}} + d \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{t'(s)}{t(s) - t(\sigma)} \right) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{Re} \left(\frac{\varphi'(\sigma)}{t(s) - t(\sigma)} \right) \cdot (t(s) - t(\sigma)) \right) ds = T(s), \quad (6)$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot \mu / (\lambda + 2\mu), \quad d = 2 \cdot (\lambda + \mu) / (\lambda + 2\mu).$$

Если обозначить оператор в уравнении (6) через A , получится следующее уравнение:

$$-\frac{1}{2}\varphi(s) - A\varphi(s) = T(s),$$

решение которого, в случае бесконечной области деформирования (Γ_0 отсутствует), дает следующий итерационный процесс [1] :

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_{i+1}(s) = -T(s) - A\varphi_i(s) + \frac{1}{2}\varphi_i(s).$$

В случае конечной области деформирования [4] :

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_{i+1}(s) = -PT(s) - PA\varphi_i(s) + \frac{1}{2}\varphi_i(s),$$

где $P: L_p(\Gamma) \rightarrow L_p(\Gamma)$ оператор проектирования:

$$P\varphi(s) = \begin{cases} \varphi(s) - c_1 \frac{\overline{t'(s)}}{t(s) - \overline{t_0}} - c_2 \frac{\overline{t'(s)}}{(t(s) - \overline{t_0})^2}, & t(s) \in \Gamma_0 \\ \varphi(s), & t(s) \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(s) ds, \quad c_2 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{\Gamma} \overline{t(s)} \cdot \varphi(s) ds.$$

Итерационный процесс заканчивался по условию (4).

По плотности $\varphi(s)$ напряжения в области вычисляются по следующим формулам:

$$P_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{ic \cdot \varphi(s)}{z - \bar{t}(s)} - d \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z - t(s)} \right) \cdot \operatorname{Re}(\varphi(s)) \times \right. \\ \left. \times (z - t(s)) \right) / (z - t(s)) ds, \quad (7)$$

$$P_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(\frac{c \cdot \varphi(s)}{z - \bar{t}(s)} + d \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z - t(s)} \right) \cdot \operatorname{Re}(\varphi(s)) \times \right. \\ \left. \times (z - t(s)) \right) / (z - t(s)) ds,$$

$$\sigma_x(z) = \operatorname{Re}(P_1), \quad \sigma_y(z) = \operatorname{Im}(P_2), \quad \tau_{xy}(z) = \operatorname{Im}(P_1).$$

Деформации вычисляются по закону Гука.

Предельные значения напряжений на границе области деформирования вычисляются следующим образом:

$$T_1(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(c \cdot i \frac{\overline{t'(s)} \cdot \varphi(\sigma)}{t(s) - \bar{t}(\sigma)} - d \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{t'(s)}{t(s) - t(\sigma)} \right) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{Re} \left(\frac{\varphi(\sigma)}{t(s) - t(\sigma)} \right) \times (t(s) - t(\sigma)) \right) d\sigma - 0.5 \cdot (i \cdot \varphi(s) + \\ + d \cdot t'(s) \cdot \operatorname{Im}(\varphi(s)/t'(s))), \quad (8)$$

$$\sigma_x = -(\operatorname{Re}(T(s)) \cdot \operatorname{Im}(t'(s)) + \operatorname{Re}(T_1(s)) \cdot \operatorname{Re}(t'(s))),$$

$$\sigma_y = \operatorname{Im}(T(s)) \cdot \operatorname{Re}(t'(s)) - \operatorname{Im}(T_1(s)) \cdot \operatorname{Im}(t'(s)),$$

$$\tau_{xy} = \operatorname{Re}(T(s)) \cdot \operatorname{Re}(t'(s)) - \operatorname{Re}(T_1(s)) \cdot \operatorname{Im}(t'(s)).$$

Для составления вычислительного алгоритма интегралы, содержащие особенности, преобразуются к интегралам без особенностей [4]. Интеграл из (6) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(c \frac{\overline{t'(s)} - \overline{t'(\sigma)}}{t(s) - \overline{t(\sigma)}} \varphi(\sigma) + d \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{t'(s) - t'(\sigma)}{t(s) - t(\sigma)} \right) \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{\varphi(\sigma)}{t(s) - t(\sigma)} \right) \right) \times \\ & \times (t(s) - t(\sigma)) d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(c \frac{\overline{t'(\sigma)}}{t(s) - \overline{t(\sigma)}} (\varphi(\sigma) - \varphi(s)) + \right. \\ & \left. + d \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{t'(\sigma)}{t(s) - t(\sigma)} \right) \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{\varphi(\sigma) - \varphi(s)}{t(s) - t(\sigma)} \right) \cdot (t(s) - t(\sigma)) \right) d\sigma + \\ & + K \cdot \varphi(s). \end{aligned} \quad (9)$$

$K = 0.5$, если область деформирования конечна, $K = -0.5$ в противном случае.

Интеграл из (5) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=\beta}^m \left(\int_{\Gamma_i} \ln \frac{|t(\sigma) - t(s)|}{(\sigma - s) \cdot (S_i + s - \sigma)} \varphi(\sigma) d\sigma + \int_{\Gamma_i} \ln((\sigma - s)(S_i + s - \sigma)) \times \right. \\ & \left. \times (\varphi(\sigma) - \varphi(s)) d\sigma + 2 \cdot (S_i \cdot \ln S_i - S_i) \cdot \varphi(s) \right). \end{aligned}$$

$\beta = 0$, если область деформирования конечна, $\beta = 1$ в противном случае. S_1 — длина контура Γ_1 . Отсчет дуговой координаты σ начинается от значения S .

Ввиду громоздкости вычислительных формул ниже приведена формула вычисления одного интеграла (9) [4]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{i=\beta}^m \frac{1}{2N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \left(c \frac{\overline{t_k^e - t_j^i}}{t_k^e - t_j^i} \varphi_j^i + d \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{t_k^e - t_j^i}{t_k^e - t_j^i} \right) \times \right. \\ & \times \operatorname{Re} \left(\frac{\varphi_j^i}{t_k^e - t_j^i} \right) \cdot (t_k^e - t_j^i) + c \cdot \frac{\overline{t_j^i}}{t_k^e - t_j^i} \times (\varphi_j^i - \varphi_k^e) + d \times \\ & \times \operatorname{Im} \left(\frac{t_j^i}{t_k^e - t_j^i} \right) \times \operatorname{Re} \left(\frac{\varphi_j^i - \varphi_k^e}{t_k^e - t_j^i} \right) \cdot (t_k^e - t_j^i) \cdot |t_j^i| + K \cdot \varphi_k^e + \\ & + \frac{1}{2\pi} \left(c \frac{\overline{t_k^e}}{t_k^e} \varphi_k^e + d \cdot \operatorname{Im} \left(\frac{t_k^e}{t_k^e} \right) \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{\varphi_k^e}{t_k^e} \right) \cdot t_k^e - \right. \\ & \left. - c \cdot \varphi_k^e \cdot |t_k^e| \right). \end{aligned}$$

Штрих над знаком суммирования означает, что из суммы выброшено слагаемое, у которого $(k, l) = (i, j)$. Штрих над функцией означает производную:

$$\varphi_j^i = \left(\frac{d}{ds_1} \varphi(s) \right)_j^i / \left| \frac{d}{ds_1} t(s) \right|_j^i.$$

На рисунках 3, 4 показаны изолинии интенсивности касательных напряжений $\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2}$ и среднего давления

$(\sigma_x + \sigma_y)/2$, вычисленные при следующих предположениях: исходное напряженное состояние (в нетронутом массиве):

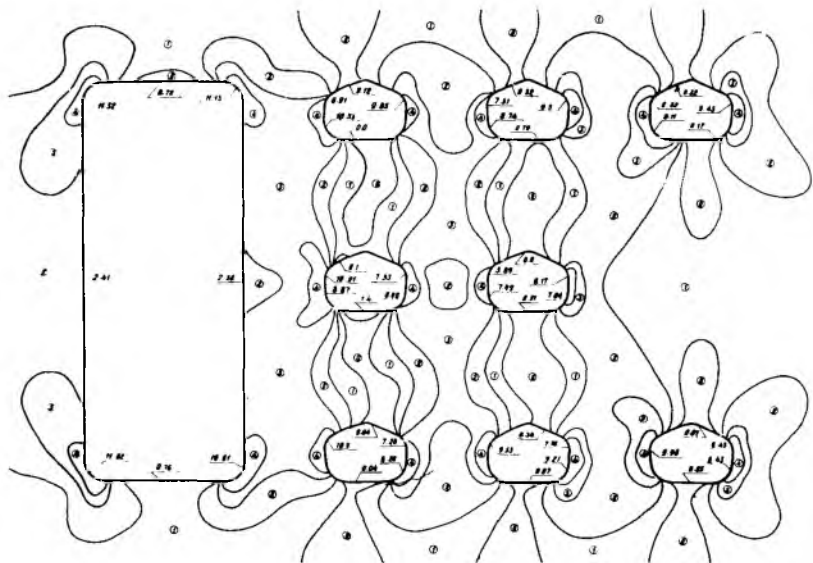


Рис.3. Интенсивность касательных напряжений.

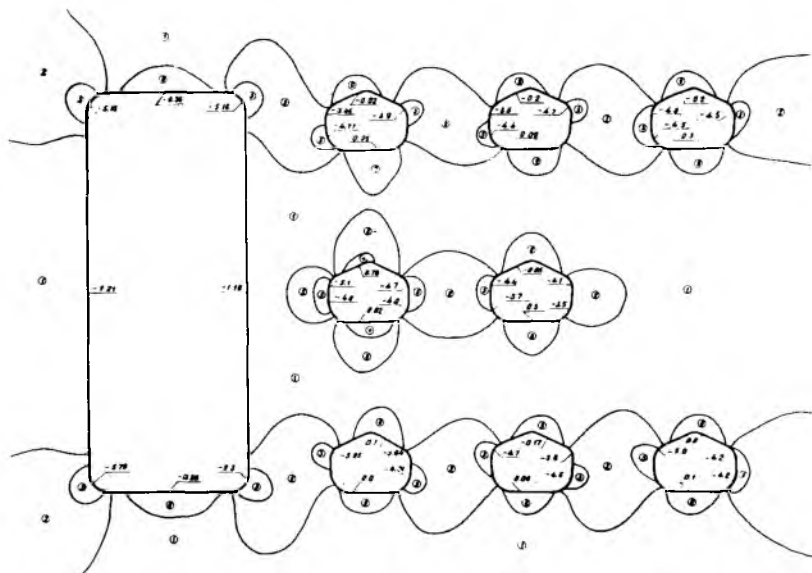


Рис.4. Среднее давление.

$$\sigma_x = -12,5 - 0,025 (800 - y),$$

$$\sigma_y = -0,025 (800 - y),$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

Величины напряжений даны в мега Паскалях, единица длины — метр. На рисунках указаны цифрами десятки МПа, изолинии проведены с шагом 10 МПа, отмечены экстремальные значения величин на границе.

3. Обсуждение результатов.

Методы численного решения задачи кручения цилиндрических упругих стержней и плоской задачи теории упругости для однородных изотропных сред с помощью сингулярных интегральных уравнений оказались более эффективными, чем разностные методы или метод конечных элементов. Возможность решения интегральных уравнений методом последовательных приближений позволила построить вычислительный алгоритм, очень удобный для реализации на ЭВМ.

Автор благодарит члена-корреспондента АН СССР Е.И.Шемакина за внимание к данной работе и полезное обсуждение результатов.

Л и т е р а т у р а

1. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости: М.: Физматгиз, 1963.
2. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения, граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. — М.—Л., 1962.
3. Машуков В.И. Численное решение задачи о кручении упругого цилиндрического стержня с помощью интегрального уравнения. — Рукопись деп. в ВИНТИ, М., № 3694—78 Деп.
4. Машуков В.И. Численное решение плоской задачи теории упругости в напряжениях с помощью интегрального уравнения. — Рукопись деп. в ВИНТИ, М., № 3848—78 Деп.