Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

На правах рукописи

Востриков Иван Васильевич

Эллипсоидальные методы в решении задач достижимости и синтеза управлений для систем с запаздыванием

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва

2016

Работа выполнена на кафедре системного анализа факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова».

Научный руководитель —	**Куржанский Александр Борисович**, доктор физико-математических наук, академик, заведующий кафедрой системного анализа факультета вычислительной математики и кибернетики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова».
Официальные оппоненты —	**Ананьевский Игорь Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского Российской академии наук»,
	Бортаковский Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».
Ведущая организация —	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Математический институт им. В.А.Стеклова Российской академии наук».

Защита состоится 25 мая 2016 года в 15:30 на заседании диссертационного совета Д 501.001.43 в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ имени М. В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, ауд. 685.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: 119192, Москва, Ломоносовский проспект, д. 27;
на сайте http://www.cs.msu.su.

Автореферат разослан ____________________ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

доктор физико-математических наук, профессор Е. В. Захаров

Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена эллипсоидальным методам в задачах управления для линейных управляемых систем с запаздыванием.

Актуальность темы

Исследование систем с запаздыванием обусловлено существованием процессов, законы развития которых включают в себя не только текущее состояние, но и предысторию. Подобные процессы возникают в механике, электродинамике, химии, биологии, медицине.

Возникает запаздывание в задачах управления по результатам наблюдений. Запаздывать могут как сами измерения, так и передача сигналов наблюдений.

В механике системами с запаздыванием описываются состояния напряженной деформации ряда материалов. Это задачи наследственной упругости или вязкоупругости. А также задачи аэроавтоупругости, изучающие движения тел с учетом взаимодействия с окружающей средой.

В биологии задачи с последействием возникают при описании эволюции различных биологических систем, в медицине - при описании функционировании систем жизнедеятельности организма (например кровообращения).

Активное изучение уравнений с запаздыванием началось в 50-е года 20-го века. Исследованием таких уравнений начали заниматься А.Д. Мышкис [36-38] и Б.С. Разумихин [32]. В этих работах текущее состояние системы рассматривалось только в конечномерном пространстве. Что существенно ограничивало круг решаемых задач.

Начало принципиально нового этапа развития теории дифференциальных уравнений с запаздыванием связано с именем Н.Н. Красовского [11-17]. Он первым предложил использовать функциональную структуру решений уравнений с запаздыванием [12]. Это позволило вывести теорию уравнений с запаздыванием на уровень с той же степенью детализации как у теории для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Дальнейшее изучение систем с запаздыванием продолжились в работах Р. Беллмана, К. Кука [4, 39], Дж. Хейла [35, 40]. Методы управления системами с запаздыванием развиты в работах С.Н. Шиманова [37], Ю.С. Осипова [29], А.Б. Куржанского [18-20], В.Б. Колмановского [2], Р.Ф. Габасова, Ф.М. Кирилловой [5], Н.В. Азбелева [1], Л.Э. Эльсгольца, С.Б. Норкина [38], Г.А. Каменского [8], А.М. Зверкина [6], А.В. Кима [9], Н.Ю. Лукоянова [22].

В подходе Н.Н. Красовского исследуемую систему можно рассматривать как эволюционное уравнение в функциональном пространстве, элементами которого являются значения функций с предысториями. Это позволяет воспользоваться методом динамического программирования, особенностью применения которого будет являться структура данного пространства.

Возникающие при этом уравнения, рассматривающиеся в функциональном пространстве, требуют введения обобщенных решений в данном пространстве и соответствующих функциональных производных. Различные подходы к введению этих производных можно посмотреть в [2, 9, 22].

Другой проблемой при рассмотрении данных задач является некорректность постановки задачи восстановления начального состояния. Подходы для решения данной проблемы хорошо известны для систем с распределенными параметрами - метод регуляризации А.Н. Тихонова [34], метод квазирешений В.К. Иванова [7], метод квазиобращения Ж.-Л. Лионса – Р. Латтеса [21] и др.

При обращении решения в системах с запаздыванием можно воспользоваться методом прямых [18], а также сведением к уравнению нейтрального типа [4]. В первом случае возникает система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая аппроксимирует исходную систему. Для нее при решении задач управления хорошо развит метод эллипсоидального оценивания [55-58]. С помощью эллипсоидов оцениваются множества достижимости и разрешимости. Это позволяет получать параллельные алгоритмы для нахождения искомых множеств и позволяет строить синтез управления в режиме реального времени. Известно множество алгоритмов для различных классов задач. Расширение границ применения данного метода для задач позволит решать более широкий класс задач, включая и задачи с запаздыванием.

Цель работы

Применить метод динамического программирования для задачи целевого управления. Построить требуемые функционалы цены и получить для них соответствующие уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана. Выписать принцип оптимальности.

Построить эллипсоидальные оценки множества достижимости для задач с запаздыванием.

Совмещая метод прямых и эллипсоидальное исчисление получить алгоритм вычисления синтеза для задач с запаздыванием. При этом исходная система с запаздыванием аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой строится синтез управления с помощью эллипсоидальных методов оценивания.

Научная новизна

Полученные результаты являются новыми.

Получены явный вид функционала цены и уравнение динамического программирования для линейной управляемой системы с постоянным запаздыванием. Рассмотрены случаи нахождения множеств достижимости и разрешимости.

Получены новые формулы исчерпывающих эллипсоидальных оценок для множества достижимости в конечномерном и функциональном пространствах.

С помощью эллипсоидального исчисления построен алгоритм вычисления синтеза управления в реальном времени для аппроксимирующей линейной управляемой системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит в основном теоретический характер. Методы, развитые в работе, позволяют получать оценки множеств, которые активно используются при решении задач управления. Каждая оценка считается независимо от другой, что позволяет активно пользоваться суперкомпьютерными вычислениями. Алгоритмы синтеза управления позволяют работать в реальном времени, что существенно при решении практических задач.

Методы исследования.

Использован метод динамического программирования для построения функционала цены и вывода уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана. С помощью методов выпуклого анализа получен аналитический вид искомого функционала. С помощью методов эллипсоидального исчисления получены формулы исчерпывающих эллипсоидальных оценок для множества достижимости и синтез управления для аппроксимирующей системы.

Апробация работы

Результаты работы докладывались на научном семинаре "Прикладные задачи системного анализа" под руководством академика А. Б. Куржанского на кафедре системного анализа факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, на международный семинаре "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби" (CGS'2005, Екатеринбург, 2005), на симпозиуме "Управление упругими колебаниями" (Переславль-Залесский, 2006), на конференции "Ломоносовские чтения-2013" (Москва, 2013), на XX Международной конференция по автоматическому управлению "Автоматика - 2013", (Николаев, Украина, 2013), на конференции "Ломоносовские чтения-2014" (Москва, 2014)

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 3-х работах [45-47], список которых приведен в конце автореферата. Все они опубликованы в журналах из перечня ВАК.

Работы [45, 47] подготовлены автором самостоятельно.

Работа [46] подготовлена совместно с А.Н. Дарьиным и А.Б Куржанским. Идея исследований принадлежит научному руководителю автора, академику А. Б. Куржанскому. Автором получены формулы эллипсоидальных оценок и эллипсоидального синтеза управлений. А.Н. Дарьин провел численное моделирование.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Содержание работы

Первая глава посвящена применению метода динамического программирования для задач, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Основное содержание данной главы опубликовано в работе [47].

Рассматривается линейная управляемая система с запаздыванием:

$$\dot{x}(\tau) = A_0(\tau)x(\tau) + A_1(\tau)x(\tau - h) + B(\tau)u(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1],$$

$$x_t(\tau) = x^*(\tau), \quad \tau \in [-h, 0].$$

с геометрическим ограничением на управление:

$$u(\tau) \in P(\tau) \text{ при } \tau \in [t_0, t_1]$$

где $P(\tau)$ – непрерывная по метрике Хаусдорфа функция, значениями которой являются выпуклые компакты в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Ставится задача целевого управления из заданного множества X_0 начальных состояний на множество $\mathcal{M}$.

Вводится понятие текущей позиции.

Определение 1. *Текущая позиция $\{t, x_t(\cdot)\}$ системы есть пара, состоящая из текущего момента времени t и функции $x_t(\cdot)$ – решения в текущий момент времени вместе с предысторией на интервале $[t - h, t)$.*

В силу функциональной природы текущего фазового состояния (для продолжения решения в текущий момент времени требуется знать предысторию на отрезке $[t-h,t]$) возможны две постановки - функциональная и конечномерная.

В первом случае требуется попасть в целевое множество $\mathcal{M}(\cdot)$ состояний, заданных в функциональном пространстве $H = L_2[-h,0] \times \mathbb{R}^n$: В частности, если требуется привести систему в состояние покоя, то необходимо удерживать систему в этом состоянии в пространстве $\mathbb{R}^n$ в течении всего отрезка времени длительностью h. В этом случае множество $\mathcal{M}(\cdot)$ состоит из нулевой функции из пространства H.

Во втором случае требуется попасть во множество $\mathcal{M}$ конечномерного пространства $\mathbb{R}^n$. Здесь отсутствует требование удержать систему в этом множестве после попадания в него. Возможны два класса управлений – программные $u(t)$ и синтезированные $U(t, x_t(\cdot))$.

Обе постановки подразумевают построение множеств достижимости $X_t[\cdot]$ и разрешимости $W_t[\cdot]$, являющимися, соответственно, множествами всевозможных состояний системы достижимых из начальной позиции системы и состояний, откуда можно попасть в целевое множество:

$$X_t[\cdot] = X_t(\cdot, t_0, X^0(\cdot)) = \bigcup \{x_t(\cdot, t_0, x_{t_0}(\cdot), u(\cdot))\},$$

$$W_t[\cdot] = \bigcup \{x^*(\cdot) \in H \mid \exists u(\cdot) \in U[t,t_1] : x_{t_1}(\cdot, t, x^*(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{M}(\cdot)\}.$$

Также рассматриваются конечномерная и функциональная постановки задачи целевого управления не в заданное время, а в течение некоторого интервала. В этой постановке требуется попадание траектории системы в требуемое множество не в фиксированный момент времени, а в любой момент времени в течении всего заданного отрезка. То есть, для задачи целевого управления во множество $\mathcal{M}(\cdot)$ требуется обеспечить условие $x_\tau(\cdot) \in \mathcal{M}(\cdot)$, при каком либо моменте времени $\tau \in [t_0, t_1]$. Особенностью данных задач будет, вообще говоря, невыпуклая структура множеств достижимости и разрешимости.

Ключевым понятием при нахождении введенных множеств является функционал цены $V(t, x_t(\cdot))$, зависящий от текущей позиции, и множествами уровня которого будет искомое множество. И для всех задач будет важным определение принципа оптимальности или полугруппового свойства как для функционалов, так и для множеств. Это дает возможность вычислять эти объекты рекуррентно, тем самым уменьшая объем вычислений.

Функционал цены $V(t, x^*(\cdot))$ вводится с помощью формул:

$$V(t, x^*(\cdot) \mid \tau, \varphi(\cdot)) = \min_{u(\cdot)\in U[t,\tau]} \{\varphi(x_\tau(\cdot, t, x^*(\cdot), u(\cdot))) \mid x_t(\cdot) = x^*(\cdot)\},$$

$$V(t, x^*(\cdot)) = V(t, x^*(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot)),$$

$$V(t_1, x^*(\cdot)) = d^2(x^*(\cdot), \mathcal{M}(\cdot)),\ x^*(\cdot) \in H.$$

Соответствующее отображение удовлетворяет полугрупповому свойству:

$$V(t, x^*(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot)) = V(t, x^*(\cdot) \mid \tau, V(\tau, \cdot \mid t_1, V(t_1, \cdot))),\ \text{при } t_0 \le t \le \tau \le t_1.$$

А множество разрешимости представляется в виде множества уровня:

$$W_t[\cdot] = \bigcup \{x^*(\cdot) \in H \mid V(t, x^*(\cdot)) \le 0\}.$$

Используя методы выпуклого анализа можно получено явное представление функционала цены $V(t, x_t(\cdot))$, задаваемое формулами

$$V(t, x^*(\cdot)) = \max_{l(\cdot)\in H} \ \varphi(t, x^*(\cdot), l(\cdot)).$$

Здесь

$$\varphi(t, x^*(\cdot), l(\cdot)) = \langle l(\cdot), x^*(\cdot)\rangle + \left\langle LS'_{t_1}(\cdot, t) l(\cdot), x(0)\right\rangle -$$
$$-\int_t^{t_1} \rho\left(-LB'(\tau)S'_{t_1}(\cdot,\tau)l(\cdot)\right| P(\tau)\Big)\, d\tau +$$
$$+\int_{t-h}^{t} \left\langle LA'_1(\tau+h)S'_{t_1}(\cdot, \tau+h)l(\cdot), x(\tau - t)\right\rangle d\tau - \rho\left(l(\cdot)\right| \mathcal{M}(\cdot)) - 1/4\left\langle l(\cdot), l(\cdot)\right\rangle,$$

$$La^*(\cdot) = a^*(0) + \int_{-h}^{0} a^*(\tau) d\tau,$$

$$x^*(\tau) = x(\tau + t_1 - t),\ \tau \in [-h, t - t_1), \quad x^*(\tau) = 0, \ \ \tau \in [t - t_1, 0].$$

В случае $t_1 \geq t + h$ функция $x^*(\tau) = 0$ при $\tau \in [-h, 0]$.

Доказано, что данный функционал цены удовлетворяет уравнения Гамильтона - Якоби - Беллмана:

$$\frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^0(\cdot)}, \frac{dx^0(\cdot)}{d\tau} \right\rangle +$$

$$+ \left\langle \frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^0}, A_0(t)x(0) + A_1(t)x(-h) \right\rangle - \rho \left(-B'(t)\frac{\partial V(t, x^*(\cdot))}{\partial x^0} \middle| P(t) \right) = 0,$$

с ограничением в момент времени t_1:

$$V(t_1, x^*(\cdot)) = d^2(x^*(\cdot), \mathcal{M}(\cdot)).$$

Случай конечномерного целевого множества является частным случаем задачи с бесконечномерным целевым множеством. Множество разрешимости и функционал цены находятся по вышеописанным формулам, которые сохраняют свой вид. Отличие проявится только в краевом условии, которое будет конечномерным.

С помощью уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана строится вообще говоря многозначный синтез управлений:

$$U(t, x_t(\cdot)) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in P(t)} \left\langle B'(t)\frac{\partial V(t, x_t(\cdot))}{\partial x^0}, u \right\rangle.$$

С помощью выражений

$$V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot) \mid \tau, \varphi(\cdot, \cdot)) = \min_{u(\cdot) \in U[t, \tau]} \{\varphi(x_\tau(\cdot, t, x_t(\cdot), u(\cdot)), z_{t_1}(\cdot))\}.$$

$$V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot)) = V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot) \mid t_1, V(t_1, \cdot, \cdot)),$$

$$V(t_1, x^*(\cdot), z^*(\cdot)) = d^2(x^*(\cdot), z^*(\cdot)),\ x^*(\cdot) \in H,\ z^*(\cdot) \in H.$$

вводится функционал цены $V(t, x_t(\cdot), z_{t_1}(\cdot))$ для нахождения множества достижимости. Для которого также выводятся принцип оптимальности и уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана. С помощью методов выпуклого анализа находится аналитическое выражение.

Для множеств достижимости и разрешимости в течение заданного промежутка времени получены выражения через соответствующие функционалы цены.

Вторая глава посвящена нахождению исчерпывающих эллипсоидальных внутренних и внешних оценок множества достижимости у линейной управляемой системы с запаздыванием при геометрических ограничениях на управление. Основное содержание данной главы опубликовано в работе [45].

Задается линейную управляемую систему с запаздыванием

$$\dot{x}(\tau) = A_0(\tau)x(\tau) + A_1(\tau)x(\tau - h) + B(\tau)u(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1],$$

$$x_t(\tau) = x^*(\tau), \quad \tau \in [-h, 0].$$

на отрезке $[t_0, t_1]$.

Решение системы рассматривается как в конечномерном пространстве, так и в бесконечномерном пространстве H.

Соответственно, получаются две постановки - конечномерная и функциональная.

На управление и начальные условия задаются эллипсоидальные ограничения:

$$u(\tau) \in \mathcal{E}(q(\tau), Q(\tau)) \text{ при } \tau \in [t_0, t_1],$$

$$x^0(\tau) \in \mathcal{E}(x_0(\tau), X_0(\tau)), \ \ \tau \in [t_0 - h, t_0].$$

Под $\mathcal{E}(q, Q)$, где $q \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q' = Q \geq 0$, будем понимать эллипсоид с центром q и матрицей Q, то есть выпуклое замкнутое множество определяемое опорной функцией

$$\rho\left(l \middle| \mathcal{E}(q, Q)\right) = \langle q, l\rangle + \langle l, Ql\rangle^{1/2}.$$

В этом случае конечномерное множество достижимости является суммой эллипсоида и интеграла от эллипсоида. Поэтому используя аппарат внутреннего эллипсоидального оценивания ([43], с.204) получаются явные исчерпывающие эллипсоидальные оценки. Множество достижимости $X[t]$ есть объединение эллипсоидов по всевозможным $T(\cdot)$, T_0, $T_0(\cdot)$:

$$X[t] = \bigcup \{\mathcal{E}(x^-(t), X^-(t)) | T(\cdot), T_0, T_0(\cdot)\}.$$

Где

$$X^-(t) = Q^*(t)' Q^*(t),$$

$$\dot{Q}^*(\tau) = Q^*(\tau)A_0'(\tau) + Q^*(\tau - h)A_1'(\tau) + T(\tau)Q^{1/2}(\tau)B'(\tau), \quad \tau \in [t_0, t],$$

при начальных условиях

$$Q^*(\tau) = T_0(\tau)X_0^{1/2}(\tau), \quad \tau \in [t_0 - h, t_0].$$

Выбором матриц $T_0(\cdot)$ и $T(\cdot)$ ([43], с.204) можно добиться совпадения опорных функций множества достижимости и внутренней оценки для любого заранее фиксированного вектора l из $\mathbb{R}^n$:

Аналогичные формулы получаются для внешних оценок.

Приведены графические иллюстрации построения внешних и внутренних оценок.

В функциональном случае также получается получить внутренние исчерпывающие оценки эллипсоидального типа, причем некоторые из них можно вычислять реккурентно.

В **третьей главе** рассмотрена аппроксимация системы с помощью метода прямых. Обобщен результат [18] на случай системы с управлением.

При нахождении приближенных решений возможны два подхода. Аппроксимация решений и аппроксимация самой постановки задачи. В данном случае используется второй подход. Необходимость регуляризации вызвана некорректностью задачи на поиск множества разрешимости, требуемого при поиске синтеза управления в режиме реального времени.

Рассматривается линейная управляемую система с запаздыванием

$$\dot{x}(\tau) = A_0(\tau)x(\tau) + A_1(\tau)x(\tau - h) + B(\tau)u(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_1],$$

$$x_t(\tau) = x^*(\tau), \quad \tau \in [-h, 0].$$

на отрезке $[t_0, t_1]$ с ограниченным начальным условием

$$\|x_0(\cdot)\| \le K_1.$$

Управление равномерно ограничивается для $\tau \in [t_0, t_1]$:

$$\|u(\tau)\| \le K_2, \text{ если } u(\tau) \in P(\tau),\ \tau \in [t_0, t_1]$$

Эта система можно аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}
\dot{y}_0(t) = A_0(t)y_0(t) + A_1(t)y_m(t) + B(t)u(t),\\
\dot{y}_1(t) = \tfrac{m}{h}(y_0(t) - y_1(t)),\\
\dots\\
\dot{y}_m(t) = \tfrac{m}{h}(y_{m-1}(t) - y_m(t)),
\end{gathered}$$

где $y_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $i = 0,\ 1,\ ..., m$.

Начальные условия примут следующий вид:

$$y_0(t_0) = x_0(0), \quad y_i(t_0) = \frac{m}{h} \int\limits_{-ih/m}^{(-i+1)h/m} x_0(\tau)d\tau,\ i = 1,\ 2, ..., m.$$

Доказывается следующая теорема:
Для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует число $M(\varepsilon, \delta)$ такое, что для любого $m > M(\varepsilon, \delta)$ равномерно по всем начальным функциям $x_0(\cdot)$ и управлениям $u(\cdot)$, удовлетворяющим начальным ограничениям будет выполняться соотношение

$$\|x(t - ih/m) - y_i(t)\|_{C[t_0+h+\delta, t_1]} < \varepsilon, i = 0,\ 1,\ ...,\ m.$$

Из которой следует, что если решить задачу синтеза для приближенной системы (при этом управление и начальное условие должно удовлетворять соответствующим ограничениям) и подставить найденный синтез в исходную систему, то в результате обеспечивается попадание на целевое множество с требуемой точностью.

Для системы с постоянными коэффициентами приведено доказательство сходимости метода прямых с помощью преобразования Лапласа.

В **четвертой главе** рассмотрены методы управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующей систему с запаздыванием. Основные методы и выражения, используемые в данной главе, опубликованы в работе [46].

Вводится функция цены

$$V(t,x) = \min_u d^2(x(t_1), \mathcal{M}).$$

Данная функция цены удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \min_{u \in P(t)} \left\langle \frac{\partial V(t,x}{\partial x}, A(t)x + B_0(t)u \right\rangle$$

$$V(t_1, x)t = d^2(x(t_1), \mathcal{M})$$

Требуемый синтез управления здесь состоит из минимизаторов u:

$$U(t,x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in P(t)} \left\langle B_0'(t) \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}, u \right\rangle.$$

Для упрощения вычислений функция цены выражается через множество разрешимости $W[t]$:

$$V(t,x) = d^2(X(t_1,t)x, X(t_1,t)W[t]).$$

$$\begin{gathered} V(t,x) = \max_l \{ \langle X'(t_1,t)l, x \rangle - \rho\left(X'(t_1,t)l \,|\, W[t] \right) - \frac{1}{4} \langle l, l \rangle \} = \\ = \max_l \{ \langle l, x \rangle - \rho\left(l \,|\, W[t] \right) - \frac{1}{4} \langle X'(t,t_1)l, X'(t,t_1)l \rangle \} \\ U(t,x) = \operatorname*{Arg\,min}_{u \in P(t)} \left\langle B_0'(t) l^0, u \right\rangle, \end{gathered}$$

где l^0- максимизатор в предыдущем выражении.

Но поскольку размерность системы велика, данные выражения, несмотря на свой явный вид, обладают большой вычислительной сложностью. Но если заменить точное множество $W[t]$ на его внутреннюю эллипсоидальную оценку $W_[t]$ то выражения существенно упростятся. При этом управление может быть найдено по тем же формулам, но с заменой точного множества $W[t]$ на его внутренюю оценку $Z[t]$.

При эллипсоидальных ограничениях на управление и целевое множество строятся внутренние эллипсоидальные оценки $\mathcal{E}(x_-(t), X_-(t))$. И на их основе получаются выражения для синтеза управлений.

$$U(t,x) = \underset{u \in \mathcal{E}(p(t),P(t))}{\operatorname{Arg\,min}} \left\langle B_0'(t) l^0, u \right\rangle,$$

В случае эллипсоидальной аппроксимации максимизатор l^0, необходимый для вычисления управления, может быть найден как

$$l^0 = 2\lambda(X_-(t) + \lambda F(t))^{-1}(x(t) - x_-(t)),$$
$$F(t) = X'(t,t_1)X(t,t_1),$$

где λ — единственный неотрицательный корень уравнения

$$\langle X_-(t) + \lambda F(t))^{-1}(x(t) - x_-(t)), X_-(t)(X_-(t) + \lambda F(t))^{-1}(x(t) - x_-(t)\rangle = 1,$$

или $l^0 = 0$, если неотрицательных решений нет.

Приведены графические иллюстрации построения внутренних оценок и синтеза управления.

В **заключении** кратко сформулированы основные результаты, полученные в диссертации, а также рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

Основные результаты

1. Получен явный вид для различных функционалов цены, используемых при нахождении множеств достижимости и разрешимости для линейной управляемой системы с запаздыванием.

2. Выведены уравнения типа Гамильтона-Якоби-Беллмана для систем с запаздыванием и доказано, что функционалы цены им удовлетворяют.

3. Получены исчерпывающие внутренние эллипсоидальные оценки для множеств достижимости для систем с запаздыванием в конечномерном и

функциональном пространствах, внешние оценки в конечномерном пространстве.

4. Проведена регуляризация задачи синтеза для систем с запаздыванием. С помощью аппроксимации исходной системы методом прямых получена схема построения эллипсоидального синтеза в режиме реального времени.

Полученные результаты позволяют строить синтез управлений в режиме реального времени для различных систем с запаздыванием, а также оценки множеств достижимости и разрешимости. Полученные схемы могут быть доведены до алгоритмов для расчета на ЭВМ. Причем, в схемах оценивания множеств достижимости и разрешимости каждая оценка считается независимо от других. Таким образом, алгоритмы могут быть распараллелены, тем самым позволяя осуществлять вычисления гораздо быстрее, и могут быть рекомендованы для расчета на суперкомпьютерах.

Дальнейшее развитие темы может включать в себя расширение круга рассматриваемых задач. Добавление измерений, ошибок и запаздывания в измерения. Добавление неопределенности в динамику системы. Рассмотрение группового управления для систем с запаздыванием. Все это носит весьма актуальный характер и предоставляет широкое поле для дальнейших исследований.

Автор благодарит своего научного руководителя академика Александра Борисовича Куржанского за постановку задачи, постоянное внимание к работе, ценные замечания и безграничное терпение.

Автор благодарит коллектив кафедры системного анализа, на которой он обучался и продолжает работать.

Работа выполнена при поддержке гранта государственной программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации № НШ-2692.2014.1, гранта РФФИ № 15-01-05950-а.

Список литературы

[1] Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. Функционально- дифференциальные уравнения // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. №5 С. 771-797.

[2] Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992.

[3] Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

[4] Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

[5] Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.

[6] Зверкин А.М. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // Пятая летняя математическая школа. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. С 307-399.

[7] Иванов В.К. О некорректно поставленных задачах // Математический сборник. 1963. Т. 61. № 2. С. 211-223.

[8] Каменский Г.А., Скубачевский А.Л. Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: МАИ, 1992.

[9] Ким, А.В. i-Гладкий анализ и функционалъно-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1996.

[10] Колмановский В.Б., Королева Н.И. О синтезе билинейных систем с запаздыванием в управлении // Прикладная математика и механика, 1989. Т.53. Вып.2. С. 238-243.

[11] Красовский, Н.Н. О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика, 1956. Т.20. Вып.3. С. 315-327.

[12] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

[13] Красовский, Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

[14] Красовский Н.Н., Куржанский А.Б. К вопросу о наблюдаемости систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения, 1966. Т.2. С. 298-308.

[15] Красовский, Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикладная математика и механика, 1996. Т.60. Вып.6. С. 885-900.

[16] Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Уравнения типа Гамильтона-Якоби в наследственных системах: минимаксные решения // Тр. Института математики и механики УрО РАН, 2000. Т.6. №1. С. 110-130.

[17] Красовский Н. Н., Осипов Ю. С. Линейные дифференциально-разностные игры // ДАН СССР. 1971. **197**. № 4. С. 777–780.

[18] Куржанский А. Б. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. // Дифференц. уравн. 1967. **3**. № 12. С. 2094–2107.

[19] Куржанский А. Б. О существовании решений уравнений с последействием // Дифференц. уравн. 1970. **6**. № 10. С. 1800–1809.

[20] Куржанский А.Б. Дифференциальные игры сближения в системах с запаздыванием // Дифференц. уравн. 1971. **VII**. № 8. С. 1398–1409.

[21] Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир. 1970.

[22] Лукоянов, Н.Ю. Минимаксное решение уравнений Гамильтона-Якоби для наследственных систем // Доклады РАН, 2000. Т.371. №2. С. 163-166.

[23] Лукоянов, Н.Ю. Об уравнении типа Гамильтона-Якоби в задачах управления с наследственной информацией // Прикладная математика и механика, 2000. Т.64. Вып.2. С. 252-263.

[24] Лукоянов Н. Ю. О вязкостном решении функциональных уравнений типа Гамильтона–Якоби для наследственных систем // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2007. **13**. № 2. С. 135–144.

[25] Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Гостехиздат, 1951.

[26] Мышкис А.Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / / Успехи матем. наук, 1977. Т.32. №2. С. 174-202.

[27] Мышкис А.Д., Эльсгольц Л.Э. Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / / Успехи матем. наук, 1967. Т.22. №2. С. 21-57.

[28] Осипов Ю.С. Стабилизация управляемых систем с запаздыванием / / Дифференц. уравнения, 1965. Т.1. №5. С. 463-473.

[29] Осипов Ю.С. Дифференциальные игры систем с последействием / / Доклады АН СССР, 1971. Т.196. №4. С. 779-782.

[30] Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальных игр / / Тр. МИАН им. В.А.Стеклова, 1985. Т.169. С. 119-157.

[31] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г, Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

[32] Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, No 4. С. 500-512.

[33] Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука, 1991.

[34] Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501-504.

[35] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

[36] Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.

[37] Шиманов С.Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием. ДУ, 1965, Т1, №1, С. 102-116

[38] Эльсгольц Л.Э. Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

[39] Bellman R., Cooke K.L. Differential-Difference Equations. New York: Academic Press, 1963.

[40] Hale J. Theory of Functional Differential Equations. New-York: Springer-Verlag, 1977.

[41] Kurzhanskiy A. A., Varaiya, P., Ellipsoidal Toolbox, 2006, http://code.google.com/p/ellipsoids

[42] Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhauser, 1997.

[43] Kurzhanski A.B., Varaiya P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis: internal approximation // System and Control Letters, 2000, V.41, P. 201-211.

[44] Kurzhanski A.B., Varaiya P. On Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis. Part I:External Approximations // Optimization methods and software, 2002, V. 17, No. 2, P. 177-206.

Публикации по теме диссертации

[45] Востриков И. В. Внутреннее эллипсоидальное оценивание множеств достижимости для линейных управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравн. 2003. **39**. № 8. С. 1030–1037.

[46] Востриков И.В., Дарьин А.Н., Куржанский А.Б. Успокоение многозвенной колебательной системы в условиях неопределенных возмущений // Дифференц. уравн. 2006. **42**, № 11, С. 1452-1463.

[47] Востриков И. В. О методе динамического программирования для линейных управляемых систем с запаздыванием // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика, 2012, № 2, С. 15-21.