А. Я. Белов, О многообразиях, порожденных кольцом, конечномерным над центроидом, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 2(374), 171–172

О многообразиях, порожденных кольцом, конечномерным над центроидом

А. Я. Белов

Известно, что многообразия ассоциативных алгебр над бесконечным полем локально порождаются конечномерной алгеброй [1]. Тем не менее уже для алгебр над конечным полем это неверно. Простейшим примером служит многообразие, порожденное полупрямым произведением конечного поля k и кольца многочленов $k[x]$. Более интересный пример – многообразие, порожденное матрицами вида $\begin{pmatrix} P & * \\ 0 & P^q \end{pmatrix}$, где $P \in k[x]$, поле k удовлетворяет тождеству $z^q = z$. Тем не менее любое многообразие ассоциативных алгебр над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом Φ порождается подалгеброй алгебры, конечномерной над центром [2]. Основная теорема данной работы такова:

Теорема 1. *Идеал тождеств многообразия $\mathfrak{M}$ алгебр произвольной сигнатуры, которое порождается алгеброй, конечномерной над центроидом, есть пересечение идеалов тождеств конечной алгебры и однородного многообразия.*

Если многообразие $\mathfrak{M}$ унитарно замкнуто, то оно порождается алгеброй, конечномерной над центром.

Определение 1. Многообразие $\mathfrak{M}$ называется *однородным*, если каждое тождество выполняется в $\mathfrak{M}$ вместе со всеми своими компонентами, однородными по каждой переменной.

Однородные многообразия – это в точности те многообразия, которые устойчивы относительно центральных расширений:

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ – однородное многообразие алгебр, не обязательно ассоциативных. $B \in \mathfrak{M}$, C – ассоциативно-коммутативное кольцо. Тогда алгебра $B \otimes C$ принадлежит $\mathfrak{M}$.*

Для многообразий, порожденных конечно порожденными ассоциативными кольцами, справедливо и обратное утверждение.

Мы рассматриваем кольца и алгебры над нётеровым ассоциативно-коммутативным кольцом Φ. Поскольку n-кратное сложение любого элемента с самим собой определено, можно считать, что Φ содержит 1 и, следовательно, содержит $\mathbb{Z}_n$.

Назовем *модулем существенного кручения* подмодуль $\mathrm{Tor}_{\mathrm{Ess}}(M) \subseteq M$, состоящий из элементов, аннуляторы которых не содержатся в радикале Джекобсона $J(R)$. Через $\mathrm{Tor}_\Phi(M)$ будем обозначать модуль кручения для кольца Φ (подмодуль в M).

Предложение 2. а) *Пусть M – нётеров модуль над первичным нётеровым кольцом R, $\mathrm{Tor}(M)$ – подмодуль кручения. Тогда M вкладывается в прямую сумму своих факторов $M/I \cdot M \oplus M/\mathrm{Tor}(M)$ для некоторого собственного идеала I кольца R.*

б) *Если при этом $R = \Phi \otimes R_0$ есть тензорное произведение нётеровых первичных колец с единицей, то M вкладывается в прямую сумму своих факторов $M/I \cdot M \oplus M/\mathrm{Tor}_\Phi(M)$ для некоторого собственного идеала I кольца Φ.*

в) *В условиях п.* а) *пусть R – нётерово кольцо без идеалов с нулевым пересечением, так что его фактор по радикалу Джекобсона $\overline{R} = R/J(R)$ первичен. Тогда M вкладывается в прямую сумму своих факторов $M/I \cdot M \oplus M/\mathrm{Tor}_{\mathrm{Ess}}(M)$ для некоторого собственного идеала I кольца R.*

г) *В условиях п.* а) *пусть R – произвольное нётерово кольцо, $\overline{R}_i$ – первичные кольца и $R/J(R) = \bigoplus \overline{R}_i$, $R_i = \pi^{-1}(\overline{R}_i)$. Тогда M вкладывается в прямую сумму своих факторов $M/R_i^k M$ для некоторого натурального k.*

Лемма 1. *Пусть для некоторых элементов e_i из Φ-модуля M и некоторых $\lambda_{ij} \in \Phi$ выполняется система уравнений $\sum_{i=1}^n \lambda_{ij} e_i = 0$, $j = 1, \dots, n$.*

Тогда при всех i верно, что $e_i \Delta = 0$, где $\Delta = \det((\lambda_{ij}))$.

Доказательство. Пусть M_{ij} – минор матрицы $\Lambda = (\lambda_{ij})$, $M = (M_{ij})$. Тогда $\Lambda M = \Delta E$, или $\sum_j M_{ij}\lambda_{jk} = \Delta\delta_{ik}$ ($\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$ и $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$.) Поэтому $0 = \sum_{jk} M_{ij}\lambda_{jk}e_k = \Delta e_i$.

Предложение 3. а) *Однородная компонента тождества f по переменной x обращается в нуль при умножении на любое значение определителя Вандермонда, составленного из любых элементов кольца Φ и имеющего порядок, равный степени тождества f по x.*

б) *Пусть кольцо $\overline{\Phi}$ бесконечно. Тогда полиоднородные (т.е. однородные по каждой переменной) компоненты тождеств из Φ-алгебры A имеют существенное кручение.*

в) *Пусть кольцо Φ для любого n содержит обратный элемент к некоторому значению определителя Вандермонда порядка n. Тогда любое тождество равносильно набору своих полиоднородных компонент и любое многообразие Φ-алгебр однородно.*

Доказательство. Пункты б) и в) следуют из п. а). Докажем п. а).

Пусть $f = \sum_{i=0}^n f_i$, f_i – компонента f степени однородности i относительно переменной x. Результат подстановки $\lambda^k x \to x$ в f есть тождество $\sum_{i=0}^n \lambda^{ki} f_i$, являющееся следствием тождества f. Поэтому п. а) следует из леммы 1.

Лемма 2. *Пусть кольцо Φ содержит несколько идеалов $I_\alpha \ni E_\alpha$, где E_α – семейство ортогональных идемпотентов, в сумме дающих единицу. Тогда любой Φ-модуль (любая Φ-алгебра) разлагается в прямую сумму Φ/I_α-модулей (алгебр), являющихся его факторами.*

Предложение 4. *Любая конечномерная R-алгебра над бесконечным кольцом R, не имеющая R-кручения (тем самым R – первичное кольцо), порождает однородное многообразие.*

Доказательство теоремы 1. Пусть A – алгебра, вкладывающаяся в конечномерную R-алгебру. Воспользовавшись предложением 2, мы можем считать алгебру A прямой суммой R_i-алгебр A_i, причем каждая A_i не имеет R_i-кручения. В силу предложения 4 при бесконечных R_i алгебра A_i порождает однородное многообразие, и теорема 1 доказана.

Пусть $A \subseteq \widetilde{A}$, $\widetilde{A}$ – алгебра, вкладывающаяся в конечномерную R-алгебру. Тогда если многообразие $\mathrm{Var}(A)$ однородно, то центральное расширение $A[R]$ подалгебры A конечномерно как R-алгебра и порождает то же многообразие, что и A. Таким образом, из локальной представимости ассоциативных относительно свободных колец [2] вытекает

Теорема 2. *Пусть в каждом подмногообразии $\mathfrak{M}$ произвольной сигнатуры относительно свободная алгебра представима (т.е. вкладывается в конечномерную над центром). Тогда любое однородное подмногообразие $\mathfrak{M}$ локально порождается алгеброй, конечномерной над центроидом.*

Следствие 1. *Пусть фактор по любому максимальному идеалу кольца Φ бесконечен. Тогда любое многообразие Φ-алгебр однородно и локально порождается алгебрами, конечномерными над центроидом.*

Список литературы

[**1**] А. Р. Кемер, “Тождества конечно порожденных алгебр над бесконечным полем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:4 (1990), 726–753. [**2**] А. Я. Белов, *Дисс. ... докт. физ.-матем. наук*, МГУ, М., 2002.

А. Я. Белов (A. Ya. Belov)
Московский институт открытого образования;
Hebrew University of Jerusalem
E-mail: kanel@mccme.ru

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
12.03.2007