

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Корчагина Антона Игоревича
«Асимптотические представления групп и их связь с векторными
расслоениями», представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.04 геометрия и
топология

Диссертация А.И.Корчагина посвящена исследованию ряда задач, стоящих на стыке топологии и функционального анализа. Одна из первых, если не самая первая, работа в этом направлении — это работа А.С.Мищенко 1974 года по бесконечномерным представлениям дискретных групп и высшим сигнатурам. Привлечение средств функционального анализа к топологическим задачам и наоборот — использование геометрических идей и методов к исследованию некоммутативных алгебр — привели к возникновению так называемой некоммутативной геометрии. Одна из самых знаменитых гипотез в этой области — гипотеза Баума–Конна, относящаяся к началу 1980-х годов. Для локально компактной группы со счетной базой, в частности для счетной дискретной группы, определен гомоморфизм μ из объекта геометрической природы — эквивариантных K -гомологий универсального пространства собственных действий группы, в K -теорию редуцированной C^* -алгебры этой группы, которая имеет аналитическое происхождение. Гипотеза Баума–Конна, в полной общности до сих пор не доказанная, утверждает, что этот гомоморфизм является изоморфизмом. Эта гипотеза крайне важна. Например, уже из рациональной инъективности гомоморфизма μ следует гипотеза Новикова о высших сигнатурах. Еще один пример: если на спинорном многообразии существует метрика положительной скалярной кривизны, то для этого многообразия ind -инвариант Розенберга, принимающий значения в KO -теории C^* -алгебры фундаментальной группы и обобщающий классический $\hat{A}$ -род, равен 0. Гипотеза Громова–Лоусона–Розенберга состоит в том, что обнуление ind -инварианта равносильно существованию метрики положительной скалярной кривизны на спинорном многообразии. Контрпример к этой гипотезе построил Т.Шик в 1998 году, используя C^* -алгебры. В современном варианте в гипотезе Громова–Лоусона–Розенберга идет речь о высших $\hat{A}$ -родах. Одна ее

часть — обнуление этих родов для многообразия, на котором имеется метрика положительной скалярной кривизны — вытекает из инъективности гомоморфизма μ .

Важно отметить, что хотя эти три упомянутые гипотезы в полной общности не доказаны, но для некоторых классов групп доказательства найдены. В этой связи исследования разнообразных свойств групповых C^* -алгебр и C^* -алгебр вообще, исследование их классов — актуальная задача. В частности, важен запас представлений C^* -алгебры. Так, например, конструкция Мищенко позволяет по почти представлению фундаментальной группы строить векторные расслоения над неодносвязным многообразием. Для дискретных групп из широкого класса запас асимптотических представлений достаточно велик; для таких групп конструкция Мищенко позволяет доказать гипотезу о высших сигнатурах.

В работе А.И.Корчагина исследуются классы групп, в определенном смысле имеющие достаточно много конечномерных асимптотических представлений.

В первой главе речь идет о классе MF -групп. В ней доказано, что этот класс групп замкнут относительно основных естественных операций над группами, а именно, по отношению к прямой сумме, свободному произведению и прямому пределу по вложениям. Доказано также, что если группа обладает непрерывным семейством бесконечномерных представлений, которое на одном конце точное, а на другом — в пределе квази-диагональное, то это MF -группа. Наиболее важным результатом первой главы, является Теорема 1.24 о том, что группа Баумслэга $\langle a, b : a^{a^b} = a^2 \rangle$ является MF -группой. Группа известна как хороший источник примеров и контрпримеров. В частности, у нее мало конечномерных представлений, а именно, их недостаточно для разделения элементов группы. Теорема 1.24 показывает, что асимптотические конечномерные представления разделяют элементы группы Баумслэга.

Во второй главе речь идет о C^* -алгебрах из RFD -класса. Эти алгебры допускают вложение в произведение матричных алгебр. Например, коммутативные C^* -алгебры относятся в RFD -классу. С другой стороны, RFD -свойство сильнее MF -свойства. Примером алгебры, обладающей RFD -свойством, но не обладающей MF -свойством, служит алгеб-

ра компактных операторов. Еще один пример такого рода — редуцированная C^* -алгебра свободной группы с двумя образующими. Основной результат главы — Теорема 2.2, согласно которой свободное амальгамированное произведение двух сепарабельных коммутативных алгебр над третьей обладает RFD -свойством.

Третья глава посвящена понятию топологической сложности, которое для C^* -алгебр совсем недавно ввел Мануйлов по аналогии с топологической сложностью для топологических пространств, определенной Фарбером в работе 2004 года. Автор вычислил топологическую сложность для ряда примеров, из которых важнейшим является доказательство того, что для четных алгебр Кунца топологическая сложность равна 1. Для нечетных алгебр Кунца вопрос остается открытым. Кроме того, в этой же главе автор показывает, что при умножении алгебры на алгебру комплексных матриц фиксированного размера топологическая сложность может упасть: соответствующее нестрогое неравенство было известно, а в работе строится явный пример, в котором неравенство строгое.

Перейдем к замечаниям. Обращает на себя внимание количество опечаток в тексте диссертации. Имеются небрежности в определениях и формулировках, которые, сразу отмечу, не искажают содержательной стороны, но несколько затрудняют чтение текста. Например:

- В определении 1.3 не написано, для чего определяется асимптотическое представление.
- В предложении 1.4 используется без объяснения обозначение $\sigma(u)$ для спектра матрицы u .
- На страницах 10 и 14 существенно используются MF -алгебры, но определяются они только на странице 27.
- В теореме 1.21 p_N — N -е по счету простое число, но ни в формулировке, ни в доказательстве мне не удалось обнаружить использования того факта, что это именно N -е простое число.
- На странице 25 имеется ссылка на работу [ManAlg], которой нет в списке литературы.

Кроме того, в главе 3 было бы полезно для удобства читателя сформулировать, для каких алгебр Мануйлов вычислил топологическую сложность.

Вместе с тем, упомянутые недочеты не влияют на общую положительную оценку диссертации.

Основные результаты диссертации получены автором самостоятельно, являются новыми, снабжены подробными доказательствами, опубликованы в рецензируемых научных журналах, индексируемых в Web of Science.

Автореферат соответствует диссертации, точно и полно отражает ее содержание и полученные автором результаты.

Полагаю, что диссертация удовлетворяет критериям, определенным пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология, оформлена согласно приложениям No 5, 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова», и ее автор Корчагин Антон Игоревич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

10.05.2019

Официальный оппонент
кандидат физико-математических наук
Попеленский Федор Юрьевич



Подпись К.ф.-м.н. Ф.Ю. Попеленского заверяю

