БИБЛИОТЕКА
ЧЕБЫШЁВСКОГО
СБОРНИКА

Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории

Материалы
XVI Международной конференции,
посвященной 80-летию
со дня рождения
профессора Мишеля Деза

Библиотека Чебышевского сборника

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ ИСТОРИИ

Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза

Тула,
13–18 мая 2019 г.

Тула
ТГПУ им. Л. Н. Толстого
2019

ББК 22.132
УДК 511.6
А45

А45 **Алгебра,** теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.– Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. – 418 с.

ISBN 978-5-6042449-8-2

ББК 22.132
УДК 511.6

Конференция проводится при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-01-20049

ISBN 978-5-6042429-8-2

Выдающийся советский и французский математик,
доктор физико-математических наук, профессор
Мишель Деза
(27 апреля 1939 – 23 ноября 2016)

УДК 514.172.45+514.132+519.17

Теория семейств многогранников: фуллерены, 7-диск-фуллерены и многогранники А. В. Погорелова[1]

Н. Ю. Ероховец (Россия, г. Москва)
МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: erochovetsn@hotmail.com

Theory of families of polytopes: fullerenes, 7-disk-fullerenes and Pogorelov polytopes

N. Yu. Erokhovets (Russia, Moscow)
Lomonosov Moscow State University
e-mail: erochovetsn@hotmail.com

Многогранником мы называем класс комбинаторной эквивалентности 3-мерных выпуклых многогранников. Все операции и конструкции будут определены именно на таких многогранниках, хотя описываются геометрически. Многогранник называется *простым*, если каждая его вершина имеет валентность 3. Грани многогранника *смежны*, если имеют общее ребро.

Работа посвящена изучению семейств простых многогранников, определяемых условием *циклической рёберной k-связности (ck-связности).*

Определение 1. *Назовем k-поясом циклическую последовательность граней, в которой смежными являются последовательные грани и только они и никакие 3 грани не имеют общей вершины. Простой многогранник, отличный от симплекса Δ^3, является ck-связным, если у него нет l-поясов, $l < k$, и сильно ck-связным (c^*k-связным), если, кроме того, любой его k-пояс окружает грань. По определению Δ^3 является c^*3-связным, но не $c4$-связным.*

Понятие ck-связности можно извлечь из работ начала XX века по проблеме 4 красок. В работах середины XX века его определение использует циклические рёберные разрезы графа многогранника. Мы используем эквивалентное определение в терминах поясов. Простые многогранники (семейство $\mathcal{P}_s$) являются $c3$-связными. Получаем цепочку вложенных семейств:

$$\mathcal{P}_s \supset \mathcal{P}_{aflag} \supset \mathcal{P}_{flag} \supset \mathcal{P}_{aPog} \supset \mathcal{P}_{Pog} \supset \mathcal{P}_{Pog^*}$$

Семейство $c4$-связных многогранников совпадает с семейством $\mathcal{P}_{flag}$ *флаговых* многогранников, у которых любой набор попарно смежных граней имеет непустое пересечение. Каждая грань такого многогранника окружена поясом. Из формулы Эйлера вытекает, что каждый простой многогранник имеет 3-, 4- или 5-угольную грань, поэтому не может быть более чем c^*5-связным. Семейство c^*3-связных многогранников мы называем *почти флаговыми* многогранниками и обозначаем $\mathcal{P}_{aflag}$. Из результатов А.В. Погорелова [1] и Е.М. Андреева [2] следует, что $c5$-связные многогранники (семейство $\mathcal{P}_{Pog}$) являются в точности многогранниками, реализуемыми в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$ в виде ограниченных многогранников с прямыми двугранными углами. Такая реализация единственна с точностью до изометрии. Они получили название *многогранников Погорелова*, так как именно таким многогранникам посвящена работа [1]. Из работы [2] вытекает, что флаговые многогранники отвечают многогранникам в $\mathbb{L}^3$ с одинаковыми нетупыми двугранными углами. Пример многогранников Погорелова дают *k-бочки* B_k, $k \geqslant 5$, (*многогранники Лёбелля* в терминологии А.Ю. Веснина [3]), см. рис.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 17-01-00671-а и 18-51-50005-Яф-а

11a). Из результатов T. Dǒslić (1998, 2003) следует, что в семействе $\mathcal{P}_{Pog}$ лежит семейство *фуллеренов*, состоящее из всех простых многогранников только с 5- и 6-угольными гранями. Математические фуллерены моделируют сферические молекулы углерода, за открытие которых в 1996 году R. Curl, H. Kroto и R. Smalley получили Нобелевскую премию по химии. Они синтезировали *бакминстерфуллерен* C_{60} (см. рис. 11b), который имеет форму усеченного икосаэдра. W.P. Thurston (1998) построил параметризацию пространства фуллеренов, из которой следует, что число фуллеренов с n атомами углерода с ростом n растёт как n^9.

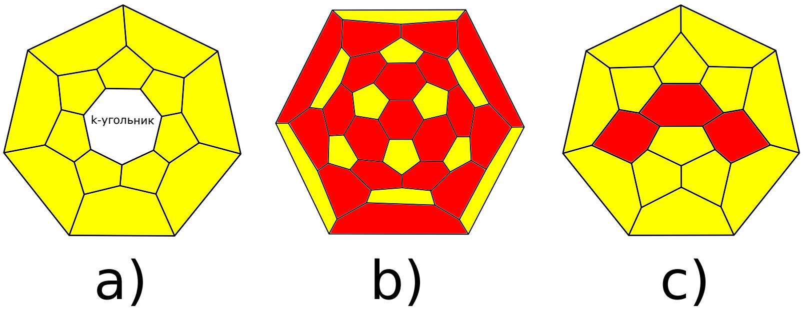

Рис. 11: a) k-бочка B_k; b) фуллерен C_{60}; c) 7-диск-фуллерен с наименьшим числом граней.

Семейство c^*4-связых многогранников $\mathcal{P}_{aPog}$ мы называем *почти погореловскими* многогранниками, а семейство c^*5-связных многогранников $\mathcal{P}_{Pog^*}$ – *сильно погореловскими.* Дж. Д. Биркгоф (1913) свёл проблему 4 красок к проблеме раскраски в 4 цвета граней многогранников из семейства, которое, как оказалось, совпадает с $\mathcal{P}_{Pog^*}$.

Определение 2. *Простой многогранник, у которого все грани, кроме n-угольника, являются 5- и 6-угольниками, мы называем n-диск-фуллереном (это понятие возникло в работе [4] и обозначало дополнение до n-угольника в поверхности такого многогранника). На рис. 11c) изображен 7-диск-фуллерен с минимальным числом граней.*

Утверждение 4 ([5, 6, 7]). *Любой 3-диск-фуллерен принадлежит семейству $\mathcal{P}_{aflag}$, 4-диск-фуллерен – семейству $\mathcal{P}_{aPog}$, а 7-диск-фуллерен – семейству $\mathcal{P}_{Pog}$. Для каждого $n \geqslant 8$ существует как n-диск-фуллерен, принадлежащий $\mathcal{P}_{Pog^*}$, так и не принадлежащий $\mathcal{P}_{aflag}$.*

Т. Е. Панов обратил внимание, что из результатов Е. М. Андреева [2, 8] должно следовать, что почти погореловские многогранники отвечают прямоугольным многогранникам конечного объема в $\mathbb{L}^3$. У таких многогранников могут быть 4-валентные вершины на абсолюте, в то время как остальные вершины имеют валентность 3.

Теорема 1 ([9]). *Срезка 4-валентных вершин устанавливает биекцию между комбинаторными типами прямоугольных многогранников конечного объема в $\mathbb{L}^3$ и почти погореловскими многогранниками, отличными от куба I^3 и 5-угольной призмы $M_5 \times I$.*

Мы развиваем теорию комбинаторного построения семейств многогранников, основной идеей которой является построение семейства при помощи набора операций из небольшого начального набора многогранников. Классический результат В. Эберхарда (1891) заключается в том, что любой простой многогранник комбинаторно получатся из симплекса Δ^3 срезками вершин, рёбер и пар смежных рёбер.

Утверждение 5 ([9]). *Простой многогранник принадлежит $\mathcal{P}_{aflag}$ тогда и только тогда, когда он получается из симплекса с не более чем двумя срезанными вершинами при помощи срезок вершин, рёбер и пар смежных рёбер, не эквивалентных срезке вершины 3-угольника, а также тогда и только тогда, когда он получается одновременной срезкой набора вершин симплекса Δ^3 или флагового многогранника, производящей все 3-угольники.*

Из результатов A. Kotzig (1969) следует, что простой многогранник является флаговым тогда и только тогда, когда он получается из куба срезками рёбер и срезками пар смежных рёбер граней по крайне мере с 6 сторонами.

Куб и 5-угольная призма принадлежат классу $\mathcal{P}_{aPog}$. Также этому классу принадлежит 3-мерный *многогранник Сташефа* As^3, представляющий собой куб с тремя срезанными попарно непересекающимися перпендикулярными рёбрами. Из результатов D. Barnette [10] следует, что простой многогранник принадлежит $\mathcal{P}_{aPog} \setminus \{I^3, M_5 \times I\}$ тогда и только тогда, когда он комбинаторно получается из As^3 при помощи срезок рёбер, не лежащих в 4-угольниках, и пар смежных рёбер граней по крайней мере с 6 сторонами.

В отличие от класса $\mathcal{P}_{flag}$, не любой 4-угольник многогранника из $\mathcal{P}_{aPog}$ получается срезкой ребра многогранника из того же класса. Однако, из результатов D. Barnette следует, что если в многограннике из $\mathcal{P}_{aPog}$ есть 4-угольники, то хотя бы один из них так получается.

Определение 3. *Паросочетанием графа называется набор его попарно непересекающихся рёбер. Мы называем паросочетанием многогранника паросочетание его рёберного графа. Паросочетание называется совершенным, если оно покрывает все вершины.*

Пусть P_8 – куб с двумя срезанными перпендикулярными непересекающимимся рёбрами.

Теорема 2. *[9] Любой почти погореловский многогранник $P \neq I^3, M_5 \times I$ получается срезкой паросочетания почти погореловского многогранника или многогранника P_8, производящей все 4-угольники.*

Многогранник в $\mathbb{L}^3$ называется *идеальным*, если все его вершины лежат на абсолюте. Идеальный многогранник имеет конечный объём.

Следствие 1 ([9]). *Любой идеальный прямоугольный многогранник P конечного объема в $\mathbb{L}^3$ получается из некоторого многогранника $Q \in \mathcal{P}_{aPog} \sqcup \{P_8\}$ стягиванием рёбер некоторого совершенного паросочетания, не содержащего противоположных рёбер никакого 4-угольника.*

В случае фуллеренов совершенные паросочетания соответствуют структурам Кекуле, обозначающим расстановку двойных связей в углеродной молекуле.

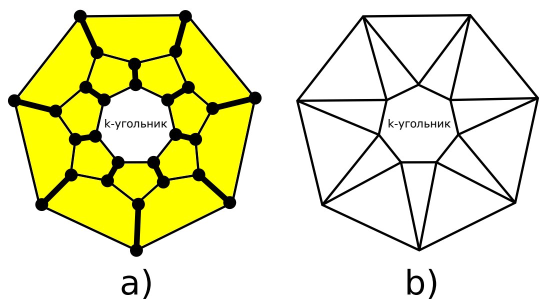

Рис. 12: a) каноническое паросочетание k-бочки; b) k-антипризма.

Пример 3. *k-бочка имеет каноническое совершенное паросочетание, см. рис. 12a). Соответствующий идеальный многогранник называется k-антипризмой (рис. 12b).*

Определение 4. *Операция скручивания рёбер изображена на рис. 13. Два ребра слева принадлежат одной грани многогранника и соединяют 4 различные вершины. Назовём скручивание крайним, если все 4 вершины следуют друг а другом при обходе границы грани.*

В обзоре А. Ю. Веснина [3] сопоставление результатов работ [11] об идеальных многогранниках и [12] о разбиениях сферы на 4-угольники привело к следующему результату. Любой идеальный прямоугольный многогранник в $\mathbb{L}^3$ получается из некоторой k-антипризмы, $k \geqslant 3$, при помощи конечного числа операций скручивания рёбер.

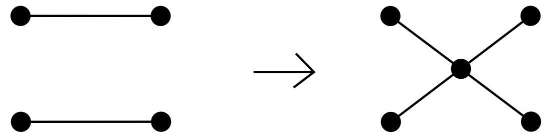

Рис. 13: Операция скручивания рёбер.

Теорема 3 ([9]). *Многогранник реализуется как идеальный прямоугольный многогранник тогда и только тогда, когда он либо является k-антипризмой, $k \geqslant 3$, либо получается из 4-антипризмы операциями крайнего скручивания ребер.*

Гипотеза 1. *Операция скручивания рёбер увеличивает объем многогранника в $\mathbb{L}^3$.*

В работе [9] приведены аргументы в пользу этой гипотезы на основе дифференциальной формулы Шлефли и характеризации И. Ривина [11] многогранников конечного объема в $\mathbb{L}^3$. Они обобщают поход T. Inoue [13].

Назовём совершенное паросочетание $\mathcal{M}_P$ многогранника $P \in \mathcal{P}_{aPog}$ *замечательным*, если каждый 4-угольник содержит ровно одно ребро в $\mathcal{M}_Q$. Бочка B_4 с точностью до симметрии имеет единственное замечательное паросочетание $\mathcal{M}_{B_4}$. Стягивание его рёбер дает 4-антипризму. Срезка s последовательных ребер k-угольной грани многогранника $P \in \mathcal{P}_{aPog}$ одной плоскостью даёт снова многогранник из $\mathcal{P}_{aPog}$ тогда и только тогда, когда $1 \leqslant s \leqslant k-3$ и срезка не эквивалента срезке ребра 4-угольника. При этом к графу многогранника P добавляется новое ребро, которое разбивает k-угольную грань на две грани: $(k-1)$-угольник и $(s+3)$-угольник. Для многогранника $P \in \mathcal{P}_{aPog}$ с замечательным паросочетанием $\mathcal{M}_P$ назовём такую срезку *допустимой*, если добавляемое ребро не пересекает рёбра из $\mathcal{M}_P$, каждая из последовательностей s рёбер и дополнительных $(k-s-2)$ рёбер пересекает не менее двух рёбер в $\mathcal{M}$ и хотя бы одна из них пересекает ровно два таких ребра. Результатом допустимой срезки является многогранник $Q \in \mathcal{P}_{aPog}$ с замечательным паросочетанием $\mathcal{M}_Q$, получаемым присоединением добавляемого ребра к $\mathcal{M}_P$. Связь между конструкцией D. Barnette почти погореловских многогранников и конструкцией идеальных многогранников описывается следующим результатом.

Теорема 4 ([9]). *Любой идеальный прямоугольный многогранник получается стягиванием рёбер замечательного совершенного паросочетания $\mathcal{M}_P$ многогранника $P \in \mathcal{P}_{aPog}$, где пара $(P, \mathcal{M}_P)$ получается из пары $(B_4, \mathcal{M}_{B_4})$ последовательностью допустимых срезок, каждая из которых отвечает крайнему скручиванию рёбер идеальных прямоугольных многогранников, полученных стягиванием рёбер паросочетаний.*

Легко видеть, что k-бочки, $k \geqslant 5$, принадлежат классу $\mathcal{P}_{Pog^*}$. Из результатов D. Barnette (1974,1977) и J. W. Butler (1974) и работы [6] следует, что отличный от них простой многогранник принадлежит классу $\mathcal{P}_{Pog}$ тогда и только тогда, когда он получается из 5- или 6-бочки срезками пар смежных рёбер граней по крайней мере с 6 сторонами и связными суммами с 5-бочкой (рис. 14), и классу $\mathcal{P}_{Pog^*}$ тогда и только тогда, когда он получается из 6-бочки срезками пар смежных рёбер граней по крайней мере с 6 сторонами. T. Inoue [13] показал, что обе операции увеличивают гиперболический объем, и перечислил первые 825 ограниченных прямоугольных многогранника в порядке возрастания объема (2015).

Для фуллеренов имеет место более сильный результат, чем для многогранников Погорелова. Имеется 1-параметрическая серия фуллеренов, которые получаются из 5-бочки связной суммой с 5-бочками вдоль 5-угольников, окруженных 5-угольниками. Она состоит из 5-бочки и так называемых $(5,0)$-*нанотрубок*. Из результатов F. Kardoš, R. Skrekovski (2008) и, независимо, K. Kutnar, D. Marušič (2008) следует, что остальные фуллерены принадлежат $\mathcal{P}_{Pog^*}$.

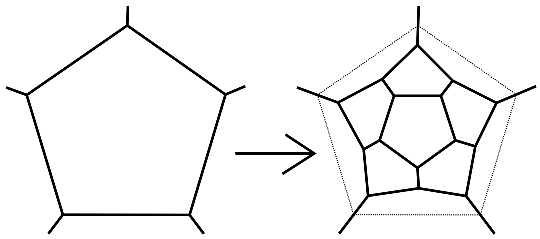

Рис. 14: Связная сумма с 5-бочкой.

Теорема 5 ([6]). *Любой фуллерен, отличный от 5-бочки и $(5,0)$-нанотрубок, получается из 6-бочки при помощи срезок пар смежных рёбер граней по крайней мере с 6 сторонами так, что промежуточные многогранники являются фуллеренами или 7-диск-фуллеренами, у которых 7-угольник смежен с 5-угольником.*

Трудность заключается в том, что конструкция многогранников из класса $\mathcal{P}_{Pog^*}$ не гарантирует того, что промежуточные многогранники будут близки к фуллеренам.

Теорема 6 ([7]). *7-диск-фуллерен не принадлежит классу $\mathcal{P}_{Pog^*}$ тогда и только тогда, когда он получается из фуллерена последовательностью связных сумм с 5-бочкой. Любой 7-диск-фуллерен из $\mathcal{P}_{Pog^*}$ получается из 6-бочки при помощи срезок пар смежных рёбер граней по крайней мере с 6 сторонами так, что промежуточные многогранники имеют 5-, 6- и не более чем две 7-угольные грани.*

Автор благодарен В. М. Бухштаберу и Т. Е. Панову за плодотворную совместную работу и А. Ю. Веснину и О. В. Шварцману за обсуждение аспектов гиперболической геометрии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Погорелов А.В. О правильном разбиении пространства Лобачевского// Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 1. С. 3–8.

2. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского// Матем. сб. 1970. Том 81 (123), № 3. С. 445–478.

3. Веснин А. Ю. Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия// УМН. 2017. Том 72, № 2(434). С. 147-190.

4. Деза М., Дютур Сикирич М., Штогрин М. И. Фуллерены и диск-фуллерены// УМН. 2013. Том 68, № 4(412). С. 69-128.

5. Buchstaber V. M., Erokhovets N. Yu. Fullerenes, Polytopes and Toric Topology. In Volume 35 Combinatorial and Toric Homotopy: Introductory Lectures of Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap.; World Sci. Publ.: River Edge, NJ, USA, 2017; P. 67–178, arXiv: math.CO/160902949.

6. Бухштабер В. М., Ероховец Н. Ю. Конструкции семейств трехмерных многогранников, характеристические фрагменты фуллеренов и многогранники Погорелова// Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Том 81, № 5. С. 15-91.

7. Erokhovets N. Construction of Fullerenes and Pogorelov Polytopes with 5-, 6- and one 7-Gonal Face// Symmetry. 2018. V. 10, № 3, 67.

8. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского// Матем. сб. 1970. Том 83 (125), № 2(10). С. 256-260.

9. Ероховец Н. Ю. Трехмерные прямоугольные многогранники конечного объема в пространстве Лобачевского: комбинаторика и конструкции// Тр. МИАН. 2019. Том 305. (в печати).

10. Barnette D. On generation of planar graphs// Discrete Mathematics. 1974. V. 7, № 3-4. P. 199–208.

11. Rivin I. A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space// Ann. of Math., Second Series. 1996. V. 143, № 1. P. 51-70.

12. Brinkmann G., Greenberg S., Greenhill C., McKay B.D., Thomas R., Wollan P. Generation of simple quadrangulations of the sphere// Discrete Mathematics. 2005, V. 305, P. 33–54.

13. Inoue T. Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra// Algebr. Geom. Topol. 2008. V. 8, № 3. P. 1523-1565.

УДК 519.145

Полуполевые проективные плоскости, допускающие подгруппу коллинеаций, изоморфную S_3 [1]

О. В. Кравцова (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: ol71@bk.ru
Т. В. Моисеенкова (Россия, г. Красноярск)
Сибирский федеральный университет
e-mail: tanya-mois11@yandex.ru

Semifield projective plane that admit collineation subgroup isomorphic to S_3

O. V. Kravtsova (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: ol71@bk.ru
T. V. Moiseenkova (Russia, Krasnoyarsk)
Siberian Federal University
e-mail: tanya-mois11@yandex.ru

Проективная плоскость называется полуполевой, если ее координатизирующее множество является полуполем (semifield). Известен способ задания полуполевой плоскости, как и всякой плоскости трансляций, с использованием линейного пространства и специального семейства линейных преобразований, так называемого регулярного множества. Матричное представление регулярного множества определяет геометрические свойства полуполевой плоскости, в том числе строение группы автоморфизмов (коллинеаций).

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-01-00566.