**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ В СИСТЕМЕ ЛОРЕНЦА**

**В.М.Буданов 1**

1*НИИ механики МГУимени М.В.Ломоносова,Москва*

vlbudanov@gmail.com

**Аннотация.** Представлены результаты аналитического построения периодических решений в системе Лоренца при таких значениях параметров, когда динамический хаос еще не возникает. Эти периодические решения имеют седловой тип, поэтому даже численное их нахождение представляет определенные проблемы. Аналитически построены уравнения первого приближения, исследование которых сведено к решению квадратного уравнения. Получены оценки бифуркационных значений параметров, согласующиеся с результатами известных численных исследований. Построены приближения высших порядков до четвертого, приведено сравнение с численными решениями при больших амплитудах колебаний.

**Введение**

Система Лоренца (1963 год) является первым примером, возникшим из физической задачи, в котором проявились свойства динамического хаоса. Система состоит из трех уравнений с тремя неизвестными и тремя параметрами. При изменении параметров происходят качественные изменения структуры фазового потока от единственного стока до странного аттрактора. Мы будем рассматривать промежуточную ситуацию, когда все особые точки неустойчивы и существуют периодические решения. Эти периодические решения имеют седловой тип, поэтому даже численное их нахождение представляет определенные проблемы. Здесь мы строим последовательные приближения этих периодических траекторий аналитически.

**Уравнения и первое приближение**

Имеем систему трех уравнений относительно трех неизвестных  с тремя положительными параметрами 

 (1)

Ищем периодическое решение с неизвестной частотой . Для краткости будем использовать обозначение . В качестве начального приближения положим

 (2)

Подставляем (2) в правую часть (1). Непериодические составляющие полагаем равными нулю

 (3)

а оставшиеся периодические члены интегрируем, полагая константы интегрирования равными 

 (4)

Приравниваем коэффициенты при первых гармониках в (4) и (2) и получаем еще шесть соотношений

 (5)

Соотношения (3) и (5) образуют систему девяти нелинейных алгебраических уравнений относительно девяти неизвестных . Исключая неизвестные  , а затем  , получаем соотношения



Получили четыре уравнения с четырьмя неизвестными ., причем последние три уравнения являются линейными, что позволяет выразить любые три неизвестные через оставшуюся и при подстановке в первое получить квадратное уравнение.

Анализ получающихся квадратных уравнений в общем виде затруднителен. Приведем здесь два из них при фиксированных значениях 



Когда свободные члены этих уравнений обращаются в ноль, соответствующая переменная также обращается в ноль и это может свидетельствовать о бифуркациях. Приведем эти решения



Содержательными являются два значения: при  происходит рождение периодической траектории из гомоклинической траектории, при  происходит бифуркация Андронова-Хопфа, при этом периодическая траектория сливается с особой точкой и исчезает при увеличении параметра.

После нахождения решения квадратного уравнения, например для  , все остальные параметры вычисляются последовательно. Полученные выражения, символьные и численные, полностью соответствуют известным в литературе критическим значениям , получаемым анализом устойчивости особых точек системы Лоренца [1,2].

Окончательно решение первого приближения (4) приобретает вид

 (6)

**Построение высших приближений**

Следующие приближения получаем, подставляя предыдущее в правую часть уравнений (1) и повторяя процедуру построения первого приближения. При этом в последующих решениях появляются дополнительные гармоники и нелинейные добавки в свободных членах и в коэффициентах первых гармоник. Заметим, что в силу линейности первого уравнения (1) всегда будут возникать одинаковые условия 

 С учетом этого уравнения второго приближения для свободных членов и первых гармоник последних двух уравнений (1), после подстановки (6) в правую часть, запишутся в виде



Это система второго приближения относительно неизвестных . От системы первого приближения (3,5) эта система отличается наличием членов третьего порядка в последних четырех уравнениях, что не позволяет продвинуться в аналитическом исследовании решений системы. При заданных значениях параметров решение может быть найдено численно, после чего получаем решение второго приближения.



Аналогично строятся следующие приближения. Приведем здесь результаты сравнения численного интегрирования с аналитическими приближениями при значениях параметров . На рисунке 1 слева приведен результат численного интегрирования, а далее результаты первого и четвертого приближений с соответствующими пометками. Видно, что четвертое приближение достаточно точно воспроизводит численное решение как по форме, так и по периоду колебаний, и существенно лучше первого. При этом колебания имеют большую амплитуду и выраженный нелинейный характер

 

x

y

z

4

1

 а б в

Рис. 1. Периодическое решение: численное (а), первое (б) и четвертое (в) приближения.

**Заключение**

Аналитически построены уравнения первого приближения, исследование которых сведено к решению квадратного уравнения. Получены оценки бифуркационных значений параметров, согласующиеся с результатами известных численных исследований.

Построены приближения высших порядков до четвертого, подтверждающие работоспособность предлагаемого метода на периодических траекториях седлового типа с сильно выраженным нелинейным характером.

**Литература**

1. Дж.Гукенхеймер, Ф.Холмс. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. –Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
2. Н.А.Магницкий Н. А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М., Едиториал УРСС, 2004. 320 с.

**ANALUTICAL CONSTRUCTION OF PERIODIC SOLUTIONS FOR THE LORENZ SYSTEM**

**Vladimir Mikhailovich Budanov1**

1*Institute for Mechanics of the Lomonossov State University, Moscow*

vlbudanov@gmail.com

**Abstract.** The results of analytical construction of periodic solutions in the Lorentz system are presented for such parameter values, when dynamic chaos does not yet occur. These periodic solutions are of saddle type, so even their numerical finding presents certain problems. The equations of the first approximation are constructed analytically, their study is reduced to the solution of the square equation. Estimates of bifurcation values of the parameters consistent with the results of known numerical studies are obtained. Higher-order approximations up to the fourth order are constructed, a comparison with numerical solutions for large oscillation amplitudes is given.

Владимир Михайлович Буданов

НИИ механики МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва

Доклад представлен на подсекцию:

Подсекция 1-3. Колебания механических систем.