



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
КАЗАХСТАНСКИЙ ФИЛИАЛ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Токтаганов Адиль Нурланулы

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
бакалавра

**ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И
ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИЛЬНО
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Научный руководитель:
Романов Максим Сергеевич

Москва
2018

Содержание

Введение	2
§1 Определение сильно эллиптической системы уравнений	3
§2 Связь сильной эллиптичности с положительной определенностью главной самосопряженной части системы	5
§3 Существование и единственность обобщенных решений 1-ой краевой задачи.	10
§4 Эллиптические по Вишику системы с граничными условиями типа Неймана.	12
Заключение	14
Список литературы	15

Введение

В рамках данной работы исследуются первая и вторая краевые задачи для систем сильно эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. В частности, рассматривается система из двух уравнений второго порядка в двумерном пространстве. Доказывается существование и единственность решений для первой и второй краевых задач для сильно эллиптических систем.

Изложим вкратце содержание данной работы.

В §1 дается определение сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений и доказывается, что из условия сильной эллиптичности системы следует условие эллиптичности в смысле И. Г. Петровского.

В §2 устанавливается связь между алгебраическим условием сильной эллиптичности и положительной определенностью главной самосопряженной части Cu сильно эллиптической системы второго порядка.

В §3 доказывается существование и единственность обобщенных решений первой краевой задачи в Соболевом пространстве.

В §4 рассматривается вопрос о единственности решения для эллиптических систем по Вишику с граничными условиями типа Неймана.

§1 Определение сильно эллиптической системы уравнений

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$L_i u = (-1)^m \sum_{j=1}^N \sum_k a_{ij}^{(k_1 \dots k_{2m})}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^{2m} u_j(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{2m}}} + T_i u = f_1(x_1, \dots, x_n) \quad (1.1)$$

где суммирование производится по различным системам индексов $k = (k_1, \dots, k_{2m})$, k_i принимает значения от 1 до n . Систему можно короче записать в матричном виде:

$$Lu = (-1)^m \sum_k A^{(k_1 \dots k_{2m})}(x) \frac{\partial^{2m} u(x)}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{2m}}} + Tu = f(x) \quad (1.2)$$

В нашей работе рассматривается система из двух уравнений второго порядка в 2-мерном пространстве:

$$\begin{cases} a_1 u_{xx} + b_1 u_{xy} + c_1 u_{yy} + d_1 v_{xx} + e_1 v_{xy} + g_1 v_{yy} = f_1(x, y) \\ a_2 u_{xx} + b_2 u_{xy} + c_2 u_{yy} + d_2 v_{xx} + e_2 v_{xy} + g_2 v_{yy} = f_2(x, y) \end{cases} \quad (1.3)$$

Представим каждую из матриц $A^{(k_1 \dots k_{2m})}(x)$ в виде суммы *симметрической* и *кососимметрической* матриц:

$$A^{(k_1 \dots k_{2m})}(x) = C^{(k_1 \dots k_{2m})}(x) + K^{(k_1 \dots k_{2m})}(x),$$

где очевидно, $C = \frac{1}{2}(A + A^*)$ и $K = \frac{1}{2}(A - A^*)$.

В нашем случае матрицы примут следующий вид

$$A^{11} = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{a_2+d_1}{2} \\ \frac{a_2+d_1}{2} & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{-a_2+d_1}{2} \\ \frac{a_2-d_1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{12} + A^{21} = \begin{pmatrix} b_1 & e_1 \\ b_2 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & \frac{b_2+e_1}{2} \\ \frac{b_2+e_1}{2} & e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b_2+e_1}{2} \\ \frac{b_2-e_1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{22} = \begin{pmatrix} c_1 & g_1 \\ c_2 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & \frac{c_2+g_1}{2} \\ \frac{c_2+g_1}{2} & g_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{-c_2+g_1}{2} \\ \frac{c_2-g_1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Определение 1. Система (1) называется *сильно эллиптической по Вишику* в точке $x = (x, y)$, если матрица

$$\sum_2 C^{(k_1, k_2)}(x) \xi_{k_1} \xi_{k_2}, \quad (1.4)$$

является *положительно определенной* для любых действительных чисел ξ_1, ξ_2 , не обращающихся одновременно в нуль.

Лемма 1. Пусть $A = A_{ij}^{kl}$ задает сильно эллиптическую по Вишику систему. Тогда существует α_0 , т.ч. $\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}^2$:

$$\sum A_{ij}^{kl} \xi_k \xi_l x_i x_j \geq \alpha |\bar{x}|^2 |\bar{\xi}|^2,$$

причем равенство достигается при некоторых ненулевых $\bar{x}, \bar{\xi}$ и α называется константой эллиптичности.

Доказательство. Мы знаем, что по свойству положительно определенной матрицы, что всякая положительно определенная матрица больше, чем единичная матрица, умноженная на какую-то положительную константу. Отсюда следует, что для всякого y есть такая константа $C(y)$, что $\sum A^{ij} y^i y^j > C(y)I$. А наше множество $\{C(y) : |y| = 1\}$ отделено от нуля, т.е. у шара есть точная нижняя грань и это будет искомым числом α .

$$(Lu)^i = - \sum A_{ij}^{kl} u_{x_k x_l}^j$$

$$A^{kl} = C^{kl} + K^{kl}$$

$$\forall \bar{\xi}, \exists \alpha : X^T \left(\sum C^{kl} \xi_k \xi_l \right) X \geq \alpha |x|^2$$

$$\Leftrightarrow \forall \bar{\xi}, \exists \alpha : \sum C_{ij}^{kl} \xi_k \xi_l x_i x_j \geq \alpha |x|^2; \Leftrightarrow$$

$$\exists \alpha_0 \forall \bar{\xi} : \sum C_{ij}^{kl} \xi_k \xi_l x_i x_j \geq \alpha |x|^2 |\bar{\xi}|^2, \alpha_0 = \min_{|\xi|=1} \alpha(\xi)$$

$$\sum A_{ij}^{kl} \xi_k \xi_l x_i x_j = \sum C_{ij}^{kl} \xi_k \xi_l x_i x_j + \sum K_{ij}^{kl} \xi_k \xi_l x_i x_j;$$

Так как в кососимметрической матрице диагональ состоит из нулей, и $K_{ij}^{kl} = -K_{ji}^{kl}$. То $\sum K_{ij}^{kl} \xi_k \xi_l x_i x_j = x^T \left(\sum K_{ij}^{kl} \xi_k \xi_l \right) x = 0$.

А для матрицы C верно: $\sum C_{ij}^{kl} \xi_k \xi_l x_i x_j \geq \alpha |x|^2 |\bar{\xi}|^2$. А значит и верно наше неравенство. $\square$

Определение 2. Система уравнений (1) называется *сильно эллиптической в области D* 2-мерного евклидова пространства, если она сильно эллиптическая в каждой точке $x \in D$ и константа эллиптичности не зависит от x .

В случае одного уравнения, очевидно, $K^{(k_1, k_2)}(x) = 0$, и условие сильной эллиптичности совпадает с обычным условием эллиптичности.

Лемма 2. Система (1.3), эллиптическая по Вишику, является эллиптической по Петровскому, то есть при всех $\xi^2 + \xi^2 \neq 0$ следующий определитель не равен нулю:

$$\left| \sum_2 A^{(k_1, k_2)}(x) \xi_{k_1} \xi_{k_2} \right| \neq 0$$

Доказательство. Действительно, предположим, что матрица (2) - положительно определенная. Так как матрица $\sum_2 K^{(k_1, k_2)}(x) \xi_{k_1} \xi_{k_2}$ - кососимметрическая, то квадратичная форма

$$\begin{aligned} & \left(\left(\sum_2 A^{(k_1, k_2)}(x) \xi_{k_1} \xi_{k_2} \right) \bar{\zeta}, \bar{\zeta} \right) = \\ & \left(\left(\sum_2 [C^{(k_1, k_2)}(x) + K^{(k_1, k_2)}(x)] \xi_{k_1} \xi_{k_2} \right) \bar{\zeta}, \bar{\zeta} \right) = \\ & \left(\left(\sum_2 C^{(k_1, k_2)}(x) \xi_{k_1} \xi_{k_2} \right) \bar{\zeta}, \bar{\zeta} \right) > 0 \end{aligned}$$

при $\xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0$; $\bar{\zeta}$ - произвольный ненулевой вектор; большими круглыми скобками обозначено обычное скалярное произведение векторов этого пространства. Так как квадратичная форма, соответствующая матрице $\sum_2 A^{(k_1, k_2)}(x) \xi_{k_1} \xi_{k_2}$, отлична от нуля для любого ненулевого вектора $\bar{\zeta}$, то ее определитель отличен от нуля, что и требовалось доказать. $\square$

§2 Связь сильной эллиптичности с положительной определенностью главной самосопряженной части системы

1. Рассмотрим случай постоянных матриц $C^{(k_1, k_2)}$. Под *главной самосопряженной частью* системы (1.2) в этом случае мы понимаем дифферен-

циальный оператор

$$Cu = - \sum_2 C^{(k_1, k_2)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}}, \quad (2.1)$$

где $C^{(k_1, k_2)}$ - симметрическая часть матрицы $A^{(k_1, k_2)}(x)$ и $u(x)$ - вектор-функция $(u_1(x), u_2(x))$.

$$\begin{cases} a_1 u_{xx} + b_1 u_{xy} + c_1 u_{yy} + \frac{a_2+d_1}{2} v_{xx} + \frac{b_2+e_1}{2} v_{xy} + \frac{c_2+g_1}{2} v_{yy} = f_{11}(x, y) \\ \frac{a_2+d_1}{2} u_{xx} + \frac{b_2+e_1}{2} u_{xy} + \frac{c_2+g_1}{2} u_{yy} + d_2 v_{xx} + e_2 v_{xy} + g_2 v_{yy} = f_{21}(x, y) \end{cases} \quad (2.2)$$

Условимся относительно некоторых обозначений.

Обозначим через $C_0^\infty(D)$ множество комплексных вектор-функций $u^0(x) = (u_1^0(x), u_2^0(x))$, каждая из компонент которых имеет непрерывные частные производные любого порядка в области D и обращается в нуль в некоторой окрестности границы области D .

Введем в рассмотрение пространство $L_2(D)$ комплексных вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$, все компоненты которых суммируемы в квадрате по D . Скалярное произведение векторов u и v пространства $L_2(D)$ задается формулой:

$$[u, v]_{L_2} = \int_D (u_1(x) \overline{v_1(x)} + u_2(x) \overline{v_2(x)}) dx = \int_D (u, v) dx, \quad (3.2)$$

черта обозначает переход к комплексно-сопряженным величинам.

Оператор Cu , рассматриваемый на функциях из $C_0^\infty(D)$, является симметрическим, т.е.

$$[Cu^0, v^0] = [u^0, Cv^0], \quad (4.2)$$

где $u^0, v^0 \in C_0^\infty(D)$. Равенство (4.2) проверяется непосредственно интегрированием по частям. Действительно у нас

$$Cu = \sum_{i,j=1}^2 A^{ij} u_{x_i x_j},$$

где u - вектор функция $(u_1(x), u_2(x))$; при этом следует воспользоваться симметричностью матриц $C^{(k_1, k_2)}$, обращением в нуль в некоторой окрестности границы функций u^0 и v^0 :

$$\begin{aligned} [Cu, v] &= \int_D A^{ij} u_{x_i x_j} v dx = \int_{\partial D} A^{ij} u_{x_i} n_j v ds - \int_D A^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx = \\ &= - \int_D A^{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx = - \int_D A^{ij} v_{x_i} u_{x_j} dx = \int_D A^{ij} v_{x_i x_j} u dx = [u, Cv]. \end{aligned}$$

Теорема 1. Если матрицы $C^{(k_1, k_2)}$ для сильно эллиптической системы (2.1) постоянны, то существует такое положительное число μ , что выполнено неравенство

$$[Cu^0, u^0] \geq \mu[-\Delta u^0, u^0], \quad (5.2)$$

где $u^0(x) = (u_1^0(x), u_2^0(x))$ - произвольная функция из $C_0^\infty(D)$, μ - постоянная не зависящая от $u^0(x)$, а $\Delta u = \sum_{(2)} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2}$.

В случае произвольной размерности эта теорема доказана в статье Вишика [1]. Для частного случая, мы приведем альтернативное доказательство которое, однако, может быть применено не только для первой, но и для других краевых задач.

Доказательство. Пусть $L \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u_{xx} + u_{yy} + 4v_{xy} \\ 4u_{xy} + v_{xx} + 4u_{yy} \end{pmatrix}$;

$$\begin{aligned} [-Lu, u] &= - \int_{\Omega} A_{kl}^{ij} u_{x_i x_j}^k u^l dx = - \int_{\partial\Omega} A_{kl}^{ij} u_{x_i}^k n_j u^l ds + \int_{\Omega} A_{kl}^{ij} u_{x_j}^k u_{x_i}^l dx = \\ &= \int_{\Omega} A_{kl}^{ij} u_{x_i}^k u_{x_j}^l dx, \end{aligned}$$

Необходимо доказать, что $\int_{\Omega} A_{kl}^{ij} u_{x_i}^k u_{x_j}^l dx \geq \int_{\Omega} \alpha |\nabla u|^2 dx$;

Если мы докажем, что

$$A_{kl}^{ij} u_{x_i}^k u_{x_j}^l \geq \alpha |\nabla u|^2, \quad (6.2)$$

теорема доказана.

Однако, неравенство (6.2) не всегда верно. Например можно найти такую матрицу A , что у нее есть отрицательное собственное значение, но $\forall x, y : A_{kl}^{ij} x_i x_j y^k y^l > 0$.

Пример 1. $A_{ij}^{kl} = \begin{pmatrix} A_{11}^{11} & A_{12}^{11} & A_{11}^{12} & A_{12}^{12} \\ A_{21}^{11} & A_{22}^{11} & A_{21}^{12} & A_{22}^{12} \\ A_{11}^{21} & A_{12}^{21} & A_{11}^{22} & A_{12}^{22} \\ A_{21}^{21} & A_{22}^{21} & A_{21}^{22} & A_{22}^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Найдем ее собственные значения: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 - \lambda \end{pmatrix} =$

$$(4 - \lambda)^2((1 - \lambda)^2 - 9) - ((1 - \lambda)^2 - 9) = (-2 - \lambda)(4 - \lambda)(3 - \lambda)(5 - \lambda) = 0;$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 5.$$

Проверим на сильную эллиптичность:

$$\sum A_{ij}^{kl} x_i x_j y_k y_l = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} = 4(x_1 y_1)^2 +$$

$$4(x_2 y_2)^2 + 8x_1 y_1 x_2 y_2 + (x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2 = 4(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2 \geq$$

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 y_1)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 y_2)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 y_2)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 y_1)^2\right)^2 + \frac{1}{2}((x_1 y_1)^2 + (x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2)^2 + (x_2 y_1)^2) \geq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2).$$

Лемма 3. Если симметричные матрицы A и B задают один тот же оператор, то они связаны следующим образом:

$$B = A + \gamma F = A + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}$$

Доказательство. Мы знаем, что один оператор может задаваться разными наборами матриц. Пусть оператор

$$(Lu)^i = \sum A_{ij}^{kl} u_{x_k x_l}^j = \sum B_{ij}^{kl} u_{x_k x_l}^j$$

задается матрицами A и B . Если от первого отнимем второе, то получим:

$$\forall i, \sum (A_{ij}^{kl} - B_{ij}^{kl}) u_{x_k x_l}^j = 0.$$

откуда следует

$$(B_{ij}^{12} - A_{ij}^{12}) + (B_{ij}^{21} - A_{ij}^{21}) = 0.$$

Тогда из последнего равенства

$$B - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & B_{12}^{12} - A_{12}^{12} \\ 0 & 0 & B_{12}^{21} - A_{12}^{21} & 0 \\ 0 & B_{12}^{21} - A_{12}^{21} & 0 & 0 \\ B_{12}^{12} - A_{12}^{12} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & B_{12}^{12} - A_{12}^{12} \\ 0 & 0 & -(B_{12}^{12} - A_{12}^{12}) & 0 \\ 0 & -(B_{12}^{12} - A_{12}^{12}) & 0 & 0 \\ B_{12}^{12} - A_{12}^{12} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (B_{12}^{12} - A_{12}^{12}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Отсюда можно увидеть как связаны эти матрицы. Теперь можно получить общий вид:

$$B = A + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Пусть $\Lambda(\gamma)$ — минимальное собственное значение при данном γ . Если бы $\Lambda(\gamma_0)$ было константой Вишика, то нашелся бы вектор:

$$\vec{v} = (x_1 y_1, x_1 y_2, x_2 y_1, x_2 y_2) \text{ т.ч. } v^T (A + \gamma_0 F) v = \Lambda(\gamma_0) |v|^2;$$

Если v — элемент из собственного подпространства и $v^T F v = 0$, то

$$\Lambda(\gamma_0) |v|^2 = v^T B v = \sum B_{ij}^{kl} v_k^i v_l^j = \sum B_{ij}^{kl} x_k x_l y^i y^j \geq \alpha |x|^2 |y|^2 = \alpha |v|^2;$$

Предъявим такое γ_0 , что в собственном подпространстве, $\Lambda(\gamma_0)$ существует элемент $v : v^T F v = 0$.

Тогда $\det(A + \gamma F - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & 0 & 1 + \gamma \\ 0 & 1 - \lambda & 3 - \gamma & 0 \\ 0 & 3 - \gamma & 1 - \lambda & 0 \\ 1 + \gamma & 0 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda - \gamma)(5 - \lambda + \gamma)(-2 - \lambda + \gamma)(4 - \lambda - \gamma) = 0$; ($\lambda_1 = 3 - \gamma, \lambda_2 = 5 + \gamma, \lambda_3 = -2 + \gamma, \lambda_4 = 4 - \gamma$); откуда следует что максимальное значение $\Lambda(\gamma)$, будет когда $\lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{5}{2}$;

При $\gamma_0 = \frac{5}{2}$ наша матрица будет равна $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

и у нее положительные собственные значения ($\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{3}{2}, \lambda_4 = \frac{15}{2}$)

Найдем ее собственные векторы, при $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$Bv = \lambda v \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{7}{2} & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = 0;$$

Здесь видно что $z_1 = -z_4, z_2 = -z_3$. Теперь ее можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_2 \\ -z_1 \end{pmatrix}, \text{ при } x_1 = y_1 = y_2 = 1, x_2 = -1 \text{ наш вектор будет равен}$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow v^T F v = 0;$$

Отсюда следует, что оператор, задаваемый матрицей А из примера 1, можно задать матрицей В, так что

$$B_{ij}^{kl} u_i^k u_j^l \geq \alpha |\nabla u|^2.$$

Таким образом (6.2) выполнено и теорема доказана. □

Следствие 1. Так как $C_0^\infty(D)$ плотны в $\overset{o}{W}_2^1$, то неравенство (5.2) верно, для любого $u \in \overset{o}{W}_2^1$.

§3 Существование и единственность обобщенных решений 1-й краевой задачи.

Рассмотрим задачу вида:

$$\begin{cases} Lu = f \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \quad (3.1)$$

Определение 3. Обобщенное решение $u(x)$ задачи Дирихле (3.1) для уравнения (1.1) определяется как функция, принадлежащая W_2^1 , удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \sum A_{kl}^{ij} u_{x_i}^k v_{x_j}^l dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad (3.2)$$

при всех $v \in \overset{o}{W}_2^1$; граничное условие понимается в следующем смысле:
 $\varphi \in W_2^1(\Omega)$, $u - \varphi \in \overset{o}{W}_2^1(\Omega)$.

Теорема 2. *О единственности обобщенных решений для 1-й краевой задачи.*

Пусть u_1, u_2 — решения задачи (3.1). Тогда $u_1 = u_2$

Доказательство. Возьмем $v = u_1 - u_2$;

Тогда

$$\begin{cases} Lv = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Отсюда скалярное произведение: $[-Lv, v] = 0$. Однако, по теореме 1:

$$[-Lv, v] \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

Из этого следует что правая часть последнего неравенства не больше нуля. А значит $\nabla v = 0 \Rightarrow v|_{\Omega} = \text{const}$. В случае краевого условия Дирихле эта постоянная может быть только нулем. $\square$

Теорема 3. *О существовании обобщенных решений для 1-й краевой задачи:*

Пусть $f \in L_2(\Omega)$ и $\varphi = 0$, тогда существует $u \in \overset{o}{W}_2^1$, являющиеся обобщенным решением(3.1).

Доказательство. Введем в $\overset{o}{W}_2^1$ билинейную форму:

$$[u, v]_{\overset{o}{W}_2^1} = \int_{\Omega} \sum A_{kl}^{ij} u_{x_i}^k v_{x_j}^l dx$$

Можно увидеть что она симметрична и положительно определена. Тогда согласно теореме про билинейную форму в $\overset{o}{W}_2^1$ (теорема 6, глава 3, Михайлова[2]), наша билинейная форма задает скалярное произведение в $\overset{o}{W}_2^1$, эквивалентное обычному скалярному произведению.

В связи с этим тождеству (3.2) можно придать вид

$$[u, v]_{\overset{o}{W}_2^1} = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (3.3)$$

При фиксированном f из $L_2(\Omega)$ выражение $(f, v)_{L_2(\Omega)}$ является линейным и непрерывным функционалом, от аргумента $v \in \overset{o}{W}_2^1$.

Согласно теореме Рисса в $\overset{o}{W}_2^1$ найдется функция F , для которой $(f, v)_{L_2(\Omega)} = (F, v)_{\overset{o}{W}_2^1}$ при всех $v \in \overset{o}{W}_2^1$. Следовательно, в $\overset{o}{W}_2^1$ существует единственная функция $u = F$, удовлетворяющая тождеству (3.3). $\square$

§4 Эллиптические по Вишику системы с граничными условиями типа Неймана.

Рассмотрим задачу вида:

$$\begin{cases} Lu = f \\ A_{kl}^{ij} u_{x_i}^k n_j |_{\partial\Omega} = \varphi_l \end{cases} \quad (4.1)$$

Определение 4. Обобщенное решение $u(x)$ задачи (4.1) для уравнения (1.1) определяется как функция, принадлежащая $\overset{o}{W}_2^1$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \sum A_{kl}^{ij} u_{x_i}^k v_{x_j}^l dx = - \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\partial\Omega} \varphi_l \cdot v^l ds; \quad (4.2)$$

при всех $v \in \overset{o}{W}_2^1$.

Теорема 4. Пусть матрица A_{kl}^{ij} удовлетворяет неравенству (6.2) и u_1, u_2 — решения задачи (4.1). Тогда $u_1 - u_2 = \text{const}$. Если кроме того, $\int_{\Omega} u_1 dx = \int_{\Omega} u_2 dx$, то $u_1 = u_2$.

Доказательство. Возьмем $v = u_1 - u_2$;

Тогда

$$\begin{cases} Lv = 0 \\ v |_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Отсюда скалярное произведение: $[-Lv, v] = 0$. Однако, по теореме 1:

$$[-Lv, v] \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx.$$

Из этого следует что правая часть последнего неравенства не больше нуля. А значит $\nabla v = 0$, граничные условия дают, что $v = \text{const}$ в Ω . $\Rightarrow u_1 - u_2 = \text{const} \Rightarrow$ решение единственно с точностью до постоянной. $\square$

Теорема 5. Пусть матрица A_{kl}^{ij} задана как в примере 1. Тогда существует и — решение однородной задачи, такое что $u \neq \text{const}$.

Доказательство. Для нашей матрицы не выполняется оценка (6.2), тогда покажем что существует непостоянное решение.

Найдем такую γ из леммы 3, чтобы у нашей матрицы было нулевое собственное значение и найдем для него собственный вектор. Покажем что этот вектор будет градиентом нужного решения.

$$\text{При } \lambda = 2 : \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это значит $u_x = 0, u_y = 1, v_x = -1, v_y = 0$.

Тогда

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} (4u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + 3v_y^2 + 3u_x v_y + u_y v_x + v_x u_y + 3v_y u_x) dx = 0.$$

Теперь проверим граничное условие:

$$A_{kl}^{ij} u_{x_i}^k n_j |_{\partial\Omega} = (u_y n_x + u_y n_x + v_x n_x + v_x n_x) = 0,$$

значит наш собственный вектор удовлетворяет граничному условию. Откуда следует, что u будет решением нашей задачи. То есть через другую матрицу нашего оператора можно найти непостоянное решение.

□

Заключение

В результате исследований приведено альтернативное доказательство для теоремы 1, которое может быть применено и для первой и для второй краевых задач.

Далее, для первой краевой задачи с помощью теоремы 1 мы доказали существование и единственность обобщенных решений.

Для второй краевой задачи было показано, что если оценка (6.2) выполняется, то все решения этой задачи постоянны. Если же данная оценка не выполняется, то для некоторой матрицы A существуют непостоянные решения и приведен пример такого решения.

Список литературы

- [1] Вишик М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. // Математический сборник. -Т. 29 (71), N. 3. -1951.
- [2] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. -М.: «Наука», 1976.