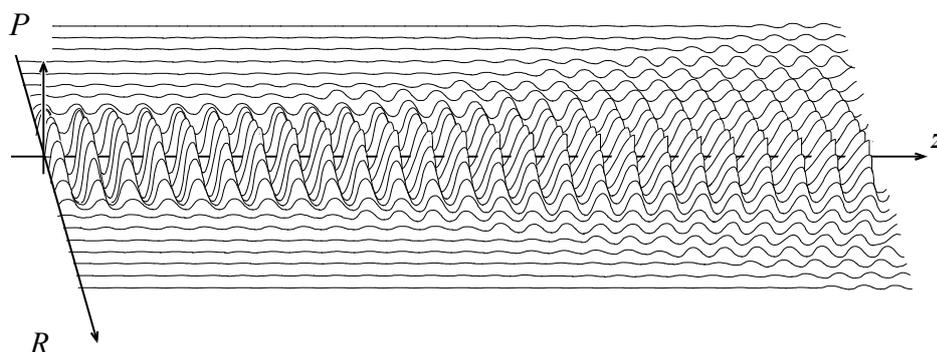


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В.А. Хохлова, О.А. Сапожников,  
А.Е. Пономарев, О.В. Руденко

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НЕЛИНЕЙНЫХ И ДИФРАКЦИОННЫХ  
ЭФФЕКТОВ В ЗВУКОВЫХ ПУЧКАХ**



Методическая разработка  
специального физического практикума  
кафедры акустики



Физический факультет МГУ  
2010

УДК 537.

Рецензенты:

профессор, доктор физ.-мат. наук В.А. Буров;  
доцент, кандидат физ.-мат. наук А.В. Шанин

Печатается по решению методической  
комиссии кафедры акустики

**Хохлова В.А., Сапожников О.А., Пономарев А.Е., Руденко О.В. Численное моделирование нелинейных и дифракционных эффектов в звуковых пучках.** Методическая разработка специального физического практикума кафедры акустики.— М.: Физический факультет МГУ, 2010, 32 с.

В задаче рассматриваются нелинейные и дифракционные явления в мощных акустических пучках. На основе компьютерного моделирования проводится изучение основных особенностей квазиплоских пучков, возбуждаемых в среде направленными источниками гармонических волн с гауссовским поперечным распределением амплитуды. Задача ориентирована на студентов старших курсов физического факультета.

© Хохлова В.А., Сапожников О.А., Пономарев А.Е., Руденко О.В., 2010 г.  
© Физический факультет МГУ, 2010 г.

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

<b>1. ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>2</b>
<b>2. ТЕОРИЯ</b>	<b>4</b>
<b>2.1. Уравнение Хохлова-Заболотской для нелинейных         дифрагирующих акустических пучков</b>	<b>4</b>
<b>2.2. Нелинейные эффекты при распространении         плоских волн в отсутствие дифракции</b>	<b>5</b>
<b>2.3. Дифракционные эффекты в линейных пучках.         Гауссовский пучок.</b>	<b>8</b>
<b>2.4. Запись уравнения Хохлова-Заболотской в безразмерных         переменных</b>	<b>12</b>
<b>2.5. Нелинейные и дифракционные эффекты в мощных         пучках. Плоский источник гармонических волн с         гауссовским поперечным распределением амплитуды.</b>	<b>13</b>
<b>2.6. Литература</b>	<b>19</b>
<b>3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА</b>	<b>20</b>
<b>3.1. Последовательность действий при выполнении задачи</b>	<b>20</b>
<b>3.2. Упражнения</b>	<b>21</b>
<b>3.3. Комментарии по интерфейсу программы</b>	<b>23</b>
<b>3.4. Контрольные вопросы</b>	<b>25</b>
<b>Приложение 1. Вывод уравнения Хохлова-Заболотской         из уравнений гидродинамики</b>	<b>25</b>
<b>Приложение 2. Численный алгоритм решения         уравнения Хохлова-Заболотской</b>	<b>29</b>

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных объектов в волновой физике является *волновой пучок*. Пучки создаются реальными источниками конечных размеров и характеризуются анизотропией характеристики направленности - выделенным направлением распространения волны. В волновом пучке существуют три характерных масштаба, на которых происходит изменение его характеристик – длина волны  $\lambda$ , поперечный размер пучка  $L_{\perp}$  и его продольный размер  $L_{\parallel}$ , причём  $L_{\parallel} \gg L_{\perp} \gg \lambda$  (рис. 1). Принципиальное отличие волнового пучка от плоской волны обусловлено конечностью размера излучателя и связано с явлением *дифракции*, приводящим к расходимости (уширению) пучка. Строгое решение задач теории дифракции связано с математическими сложностями. Поэтому важно использовать разумные упрощения волновых уравнений, основанные на наличии разных масштабов. Значительный прогресс в этом направлении достигнут благодаря использованию «параболического» (или «квазиоптического») приближения теории дифракции.

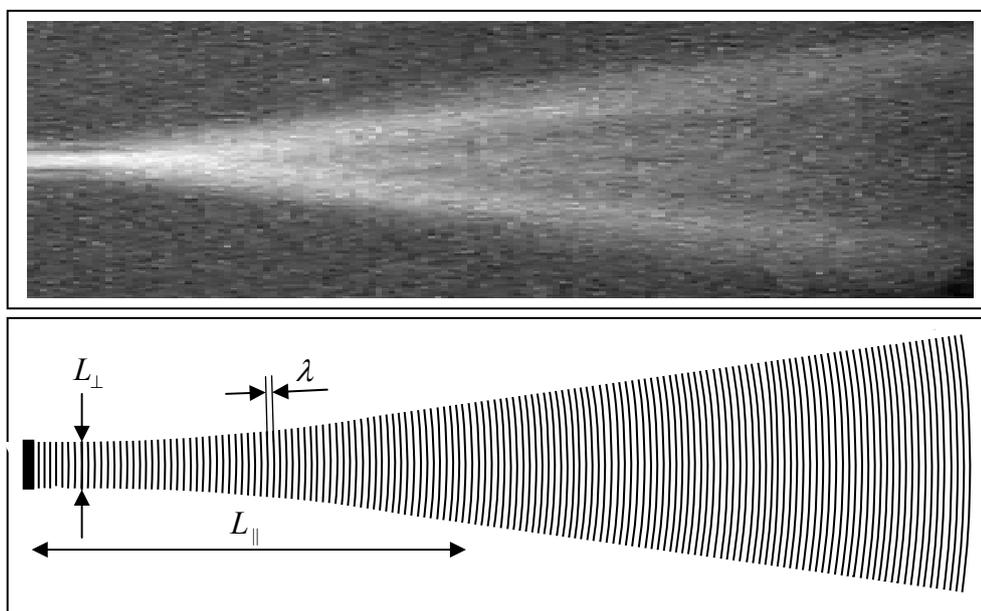


Рис. 1. *Волновой пучок*. На верхнем рисунке приведена фотография теневой картины, которую создаёт ультразвуковой пучок в воде. Более светлые области соответствуют более высокой интенсивности волны. На нижнем рисунке поясняется (**тонкая**) структура пучка. Излучатель ультразвука расположен слева, волна распространяется слева направо. Тонкими частыми линиями показаны волновые фронты внутри пучка. Поперечный размер пучка  $L_{\perp}$  много больше длины волны  $\lambda$ , а его характерный продольный размер  $L_{\parallel}$  намного превышает оба этих масштаба:  $L_{\parallel} \gg L_{\perp} \gg \lambda$ .

Широкий класс задач современной волновой физики связан с исследованием пучков большой интенсивности. В акустике это ультразвуковые пучки, создаваемые мощными пьезоэлектрическими излучателями. Интенсивные акустические пучки используются для подводной связи, промышленной ультразвуковой диагностики, для лечебного или хирургического воздействия ультразвука на биологическую ткань, безоперационного разрушения почечных камней, остановки кровотечений. Аналогичные задачи существуют в оптике, где мощные световые пучки создаются лазерами. Для решения прикладных задач требуется как понимание свойств самих пучков, так и умение предсказывать эффекты, которые они могут вызывать при распространении в различных средах. Поведение интенсивных пучков, наряду с дифракцией, определяется *нелинейными* эффектами, которые проявляются тем сильнее, чем больше амплитуда или интенсивность волны. Эти эффекты для акустических волн обусловлены нелинейностью уравнений гидродинамики, а также нелинейными свойствами среды, т.е. зависимостью отклика среды от амплитуды волны (см. Приложение 1).

Отметим, что учёт нелинейных эффектов требует решения нелинейных дифференциальных уравнений, что даже в случае плоских волн является непростой задачей. К тому же в акустике дисперсия скорости звука очень мала, поэтому все гармоники частотного спектра волны находятся в фазовом синхронизме и эффективно обмениваются энергией. Образование большого количества гармоник при нелинейном распространении акустических волн делает неудобным спектральное описание, широко используемое в нелинейной оптике. Необходимо использовать полевой подход, т.е. описывать поведение временного профиля волны, который за счёт нелинейных эффектов искажается, на нём образуются крутые участки - ударные фронты. Совместное действие нелинейных и дифракционных эффектов ещё более усложняет задачу.

К настоящему времени методы описания интенсивных акустических пучков хорошо разработаны. Базовым уравнением здесь является уравнение Хохлова-Заболотской (ХЗ). Поскольку возможности аналитических методов решения уравнения ХЗ очень ограничены, важную роль играют численные методы. Настоящая задача практикума посвящена знакомству с основными свойствами нелинейных акустических пучков и математическим аппаратом для их исследования.

## 2. ТЕОРИЯ

### 2.1. Уравнение Хохлова-Заболотской для нелинейных дифрагирующих акустических пучков

Последовательный вывод уравнения Хохлова-Заболотской из полной системы уравнений гидродинамики приведен в Приложении 1. Уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p'. \quad (1)$$

где  $p'$  - акустическое (избыточное) давление,  $c_0$  - скорость звука,  $\rho_0$  - плотность,  $\varepsilon$  - параметр акустической нелинейности среды. Предполагается, что ось пучка направлена вдоль оси  $Ox$ , т.е.  $x$  - координата в направлении распространения волны. Переменная  $\tau = t - x/c_0$  имеет смысл времени в «бегущей» в направлении  $x$  со скоростью звука  $c_0$  системе координат,  $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  - лапласиан по поперечным координатам  $y$  и  $z$ . Для важного случая аксиально-симметричных пучков, которые и будут рассматриваться далее в данной работе, поперечный лапласиан имеет вид:

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \text{ где } r = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Параметр  $\varepsilon$  является безразмерным и характеризует нелинейные свойства среды. Для газов, подчиняющихся адиабатическому уравнению состояния, нелинейный параметр равен  $\varepsilon = (\gamma + 1)/2$ ,  $\gamma = c_p/c_v$  - отношение удельной и объёмной теплоёмкостей. Таким образом, для воздуха (двухатомный газ) нелинейный параметр равен  $\varepsilon = 1.2$ . Для конденсированных сред величина  $\varepsilon$  обычно составляет 3 – 10. В структурно-неоднородных средах (газированная вода, твёрдое тело с трещинами) значения  $\varepsilon$  могут достигать  $10^3 - 10^4$ .

Правая часть уравнения (1) описывает дифракционные эффекты, второе слагаемое в левой части - нелинейные эффекты. Физически интересных точных решений уравнения (1) не найдено, поэтому для предсказания поведения нелинейных пучков приходится обращаться к численному моделированию. В некоторых случаях возможно получение приближённых аналитических решений. Рассмотрим вначале два предельных случая: распространение плоской нелинейной волны (когда отсутствует дифракция) и поведение линейного дифрагирующего пучка (когда отсутствует нелинейность).

## 2.2. Нелинейные эффекты при распространении плоских волн в отсутствие дифракции

Если пучок с равномерным поперечным распределением акустического давления имеет достаточно большие размеры, то в уравнении Хохлова-Заболотской (3) можно считать  $\Delta_{\perp} p' \approx 0$ , т.е. пренебречь эффектами дифракции. Этот случай соответствует приближению плоской волны, в которой акустическое давление не зависит от поперечных координат:  $p' = p'(x, \tau)$ . Интегрируя уравнение (1) с нулевой правой частью по времени, получим:  $\partial p' / \partial x - (\varepsilon / \rho_0 c_0^3) p' \partial p' / \partial \tau = C(x)$ , где константа интегрирования  $C$  не зависит от времени  $\tau$ . Поскольку статическое избыточное давление предполагается отсутствующим  $p'(\tau \rightarrow \pm \infty) = 0$ , то  $C(x) \equiv 0$ . Получившееся уравнение

$$\frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} = 0 \quad (2)$$

называется *уравнением простых* или *римановых волн*. Уравнение (2) имеет точное аналитическое решение:

$$p' = \Phi \left( \tau + \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p' x \right), \quad (3)$$

где функция  $\Phi(t) = p'(x=0, t=\tau)$  описывает временной профиль волны на входе в нелинейную среду. Это решение имеет неявный вид, поскольку искомое акустическое давление  $p' = p'(x, \tau)$  присутствует также в аргументе функции  $\Phi$ . Решение  $p' = p'(x, \tau)$  можно записать в явном виде  $\tau = \tau(x, p')$ . Как следует из решения (3):

$$\tau = \Phi^{-1}(p') - (\varepsilon / \rho_0 c_0^3) p' x, \quad (4)$$

где  $\Phi^{-1}$  - функция, обратная к функции  $\Phi$  (не путать с  $1/\Phi$ !). Для построения формы профиля волны в соответствии с решением (4) нужно просто сложить исходный профиль волны  $\tau = \Phi^{-1}(p')$  с линейной функцией  $\Delta \tau = -(\varepsilon / \rho_0 c_0^3) p' x$ . Указанное построение следует и из формулы (3): нелинейное искажение профиля происходит таким образом, что различные его участки испытывают различную задержку  $p' = \Phi[\tau - \Delta \tau(p')]$ . Это означает, что скорость распространения участка с локальным давлением  $p'$  отличается от скорости звука  $c_0$ : участки с более высоким положительным давлением распространяются быстрее, а участки с отрицательным давлением (области разрежения), наоборот, распространяются медленнее.

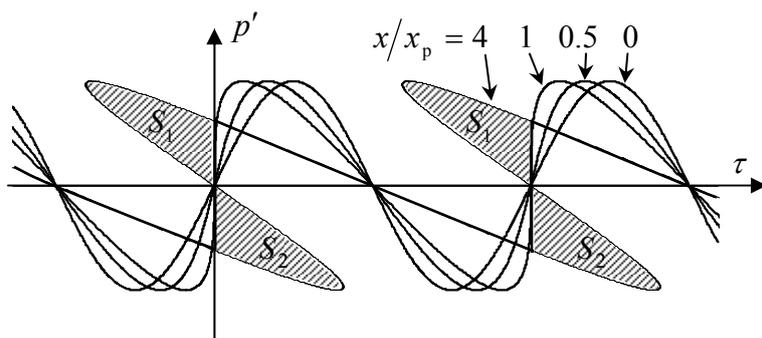


Рис. 2. Искажение исходной синусоидальной плоской волны при распространении в нелинейной среде. Показаны два периода волны на различных расстояниях  $x/x_p = 0, 0.5, 1$  и  $4$ .

На рис. 2 изображен процесс искажения волны, форма которой на входе в среду является синусоидальной:

$$\Phi(t) = p'(x = 0, t) = p_0 \sin(\omega_0 t). \quad (5)$$

По мере распространения участки с положительным давлением «набегают» на участки с отрицательным давлением, в результате чего участки с увеличивающимся давлением становятся более крутыми, а участки со спадающим давлением, напротив, более пологими. Согласно формуле (4), на расстоянии

$$x_p = \frac{\rho_0 c_0^3}{\varepsilon \omega_0 p_0}, \quad (6)$$

касательная к профилю в точках  $\tau = (2\pi/\omega_0) \cdot n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  становится вертикальной, а при дальнейшем увеличении расстояния возникает неоднозначность - «перехлест». На рис. 2 подобный профиль изображён для  $x = 4x_p$ . Такое неоднозначное решение физически не реализуемо, поскольку акустическое давление в заданный момент времени в заданной точке пространства должно иметь однозначно определённое значение. Это противоречие указывает на нарушение использованного приближения идеальной среды на крутых участках профиля волны. Более точный анализ с учётом диссипативных эффектов (вязкости и теплопроводности) показывает, что, начиная с расстояния  $x = x_p$ , профиль волны становится разрывным. Поэтому расстояние  $x_p$  называется *длиной образования разрыва*, или *нелинейной длиной*. Области разрывов (скачков давления) называют *ударными фронтами*, а волну называют *ударной волной*. Положение ударного фронта может быть найдено из закона сохранения импульса, который приводит к «правилу равных площадей»: разрыв проводится так, чтобы площади  $S_1$  и  $S_2$ , которые он отсекает от участков неоднозначности, были равны (на рис. 2 указанные площади заштрихованы). Отметим, что после образования разрыва начинается диссипация энергии волны.

Физически это связано с проявлением диссипативных эффектов на ударных переходах. Интересно, что диссипация энергии волны на разрывах не зависит от значений коэффициентов вязкости и теплопроводности при условии их достаточной малости. Поэтому такое поглощение называют *нелинейным поглощением*.

При  $x > x_p$  амплитуда разрыва возрастает от нуля (при  $x = x_p$ ) до максимального значения  $p_0$ , которое достигается на расстоянии  $x = (\pi/2)x_p$ , когда максимум исходно гармонической волны «набегает» на разрыв. При  $x > 2x_p$  волна приобретает пилообразную форму, периодические скачки давления в которой соединяются почти линейными участками (см. рис. 2, профиль при  $x = 4x_p$ ). Нетрудно показать, что амплитуда пилообразной волны уменьшается по закону:

$$p'_{\max} = p_0 \cdot \frac{\pi}{1 + x/x_p} \quad (7)$$

Заметим, что поскольку  $x/x_p \sim x \cdot p_0$ , то, согласно (7), амплитуда волны  $p'_{\max}$  уменьшается тем быстрее, чем больше исходная амплитуда  $p_0$ . Это и означает, что затухание пилообразной волны носит нелинейный характер.

Во многих случаях интерес представляет поведение спектра волны. Примечательно, что при граничном условии (5) спектр волны с профилем (3) может быть описан аналитически:

$$p' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega_0\tau, \quad (8)$$

$$\frac{A_n}{p_0} = \frac{2J_n(nx/x_p)}{nx/x_p} \quad (x < x_p), \quad (9)$$

где  $J_n$  - функции Бесселя порядка  $n$ . Решение (9) для спектральных амплитуд нелинейной волны называется *решением Бесселя-Фубини*. Оно не учитывает возможность образования разрывов и поэтому справедливо лишь при  $x < x_p$ . Из формулы (9) следует, что на малых по сравнению с нелинейной длиной расстояниях зависимость амплитуд гармоник от расстояния является степенной:

$$\frac{A_n}{p_0} = \frac{1}{n!} \left( \frac{nx}{2x_p} \right)^{n-1}, \quad x \ll x_p. \quad (10)$$

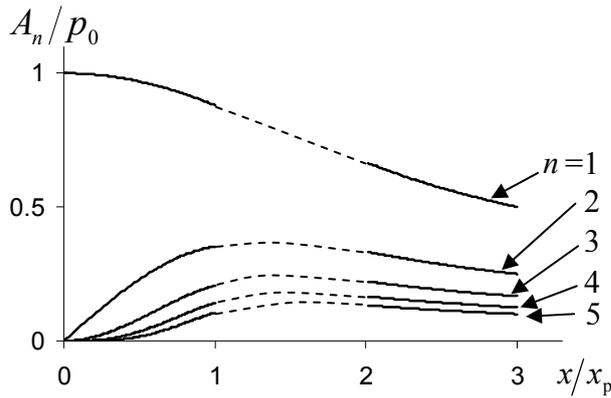


Рис. 3. Амплитуды первых пяти гармоник, нормированные на амплитуду исходной волны, в зависимости от расстояния. При  $x < x_p$  кривые соответствуют точному решению (9), а при  $x > 2x_p$  построены на основе асимптотики (11).

Таким образом, на малых расстояниях  $A_n \sim x^{n-1}$ , т.е. амплитуда гармоник возрастает тем быстрее, чем ниже её номер. Вторая гармоника растёт линейно с расстоянием, третья – квадратично, и т.д. При  $x \rightarrow x_p$  амплитуды разных гармоник уже становятся сравнимыми по величине, хотя более высокие гармоники по-прежнему имеют меньшую амплитуду (см. рис. 3). На расстояниях  $x \geq x_p$  решение также можно выразить через специальные функции, но эта форма записи менее удобна и проще получить решение численно. При  $x > 2x_p$ , как уже отмечалось, форма волны становится близкой к пилообразному профилю с линейными участками. На этом этапе спектр можно записать в следующем виде:

$$\frac{A_n}{p_0} \approx \frac{2}{n(1+x/x_p)} \quad (x > 2x_p), \quad (11)$$

т.е. спектр волны приобретает асимптотику «пилы»:  $A_n \sim A_p n^{-1}$ , для которой амплитуда гармоник пропорциональна амплитуде разрыва и обратно пропорциональна номеру гармоники. Зависимость амплитуд первых пяти гармоник от расстояния приведена на рис. 3.

Особенностью спектра нелинейно-искаженной плоской волны является отсутствие косинусных составляющих в выражении (8), что означает синфазность всех появляющихся в результате нелинейных взаимодействий гармоник. Это свойство является следствием того, что акустические волны разных частот распространяются с одинаковыми скоростями, т.е. не испытывают дисперсии.

### 2.3. Дифракционные эффекты в линейных пучках. Гауссовский пучок

В разделе (2.2) мы рассмотрели нелинейное распространение плоской волны в отсутствие дифракции. Другим интересным предельным случаем является дифракция пучков при отсутствии нелинейности, т.е. волн бесконечно малой амплитуды. Пренебрегая в уравнении Хохлова-Заболотской (1) нелинейным членом, получим

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial \tau \partial x} = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p'. \quad (12)$$

Поскольку уравнение (12) линейно, то его произвольное решение можно представить в виде суперпозиции невзаимодействующих гармонических волн. Поэтому достаточно рассмотреть решение для гармонического во времени сигнала

$$p' = A \cdot \sin(\omega_0 \tau + \varphi) = \operatorname{Re}(iC \cdot e^{-i\omega_0 \tau}), \quad (13)$$

где  $A(x, y, z)$  и  $\varphi(x, y, z)$  - амплитуда и фаза волны,  $C = A \cdot e^{-i\varphi}$  - комплексная амплитуда волны. Подставляя решение (13) в уравнение (12), получим следующее уравнение для комплексной амплитуды  $C = C(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial C}{\partial x} = i \frac{c_0}{2\omega_0} \Delta_{\perp} C. \quad (14)$$

Это уравнение называется *параболическим уравнением теории дифракции* и широко используется, например, при исследовании световых пучков и процессов в открытых резонаторах лазеров [Когельник Х., Ли Т. Резонаторы и световые пучки лазеров. – ТИИЭР, 1966, т.54, №10, с. 95-113].

Особый интерес представляют так называемые гауссовские пучки. Они создаются источниками, поперечное распределение амплитуды на которых имеет аксиально-симметричный колоколообразный вид, описываемый гауссовским распределением:

$$C(x=0, y, z) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a_0^2}\right) = p_0 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{a_0^2}\right). \quad (15)$$

Здесь  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  - поперечная координата, отсчитываемая от оси пучка,  $p_0$  - начальная амплитуда волны на оси пучка при  $r=0$ ,  $a_0$  - характерный поперечный размер пучка, называемый *радиусом пучка*. Решение параболического уравнения дифракции (14) при граничном условии (15) имеет следующий вид:

$$C = \frac{p_0}{1 + ix/x_d} \cdot \exp\left(-\frac{r^2/a_0^2}{(1 + ix/x_d)}\right), \quad (16)$$

где введено обозначение:

$$x_d = \frac{\omega_0 a_0^2}{2c_0}. \quad (17)$$

Как видно из решения (16), пространственный масштаб  $x_d$  характеризует расстояние, на котором дифракционные эффекты становятся заметными, поэтому он называется *дифракционной* или *френелевской длиной*.

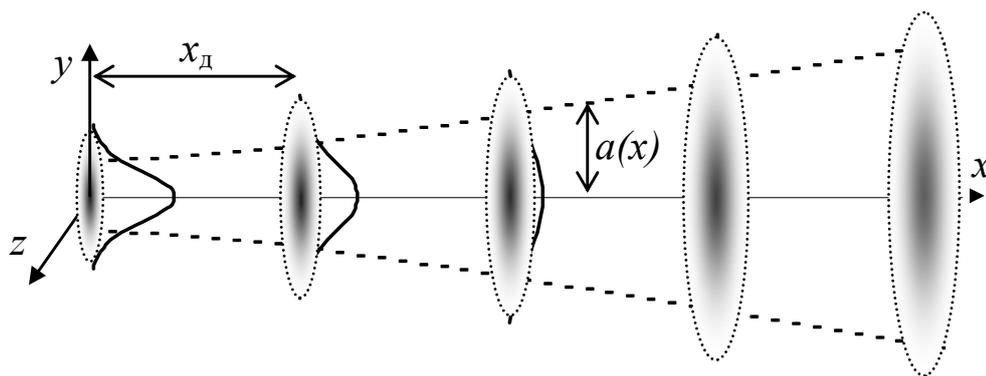


Рис. 4. Наглядное представление дифрагирующего гауссовского пучка.

Область  $x < x_d$  называется *ближней зоной* излучателя; используется также название *прожекторная зона*, отражающее слабую расходимость пучка на этих расстояниях. Область  $x \gg x_d$  называется *зоной дифракции Фраунгофера* или *дальней зоной* дифракции. Заметим, что согласно выражению (17) для  $x_d$  дифракционные искажения быстрее проявляются для более низких частот. В то же время важным является и размер источника: дифракционная длина пропорциональна квадрату его диаметра, т.е. чем меньше размер источника, тем на меньших расстояниях проявляется дифракция.

Учитывая соотношение (13), запишем решение линейной задачи дифракции для гармонического сигнала (16) в действительной форме:

$$p' = \frac{p_0}{\sqrt{1 + (x/x_d)^2}} \cdot \exp\left(-\frac{r^2/a_0^2}{1 + (x/x_d)^2}\right) \sin\left(\omega_0 \tau + \arctg\left(\frac{x}{x_d}\right) - \frac{r^2}{a_0^2} \frac{x/x_d}{1 + (x/x_d)^2}\right). \quad (18)$$

Как видно из решения (18), гауссовская поперечная структура пучка сохраняется, однако его характерные параметры изменяются по мере распространения волны.

Выпишем в явном виде выражения, описывающие изменение основных характеристик пучка с расстоянием:

$$A(x,0) = \frac{p_0}{\sqrt{1 + (x/x_d)^2}} \quad - \text{амплитуда волны на оси пучка}; \quad (19)$$

$$a(x) = a_0 \sqrt{1 + (x/x_d)^2} \quad - \text{радиус пучка}; \quad (20)$$

$$\varphi(0,x) = \arctg(x/x_d) \quad - \text{дифракционный набег фазы на оси пучка}; \quad (21)$$

$$R = x + \frac{x_d^2}{x} \quad - \text{радиус кривизны волнового фронта}. \quad (22)$$

Как видно из формул (19) – (22), все характеристики волны в гауссовском пучке зависят от координаты распространения  $x$ , причём характерные изменения происходят на масштабе  $x_d$ .

Отметим коротко основные особенности поведения пучка по сравнению с плоской волной. На малых расстояниях,  $x < x_d$ , в ближней зоне источника, амплитуда волны на оси пучка (19) почти не изменяется. При увеличении расстояния амплитуда начинает уменьшаться и на больших расстояниях,  $x \gg x_d$ , начинает спадать обратно пропорционально расстоянию, т.е. ведёт себя как амплитуда в сферически расходящейся волне. Поперечный радиус пучка (20) в ближней зоне также почти не изменяется, а на больших расстояниях возрастает линейно с расстоянием, т.е. граница пучка принимает вид конуса с углом раскрытия  $2a/x = 2a_0/x_d$ . Несколько необычным является поведение фазы волны на оси (21): в отличие от амплитуды и радиуса пучка, которые в ближней зоне почти постоянны, фаза волны на оси, напротив, заметно изменяется именно в ближней зоне. При выходе из ближней зоны ( $x = x_d$ ) волна приобретает фазовый сдвиг, равный  $\pi/4$ , а в дальней зоне ( $x \gg x_d$ ) - постоянный сдвиг, равный  $\pi/2$ . На малых расстояниях дополнительный набег фазы на оси растёт линейно с расстоянием  $\varphi(0, x) \approx x/x_d$ , т.е. фазовая скорость волны превышает величину  $c_0$ . Это дифракционное «ускорение» волны является частотно зависящим: низкие частоты распространяются вблизи источника быстрее, чем высокие частоты. Что касается радиуса кривизны волнового фронта (22), то он равен бесконечности на излучателе, где фазовый фронт является плоским, затем радиус начинает уменьшаться, при этом фазовый фронт становится выпуклым, и на больших расстояниях радиус вновь увеличивается, причём пропорционально расстоянию, как и должно быть в сферически расходящейся волне. Именно превращением плоского фронта в выпуклый в ближней зоне можно объяснить дифракционное ускорение фронта волны в приосевой области.

Напомним, что выписанные формулы описывают лишь медленно изменяющиеся в пространстве амплитудно-фазовые параметры. Полное же акустическое давление является осциллирующей во времени и в пространстве функцией и локально выглядит как плоская синусоидальная волна. Пучок по мере распространения расширяется, т.е. происходит его дифракционное расхождение.

Удобство гауссовского поперечного профиля заключается в том, что в линейном приближении пучок при своём распространении сохраняет гауссовский профиль. Благодаря этому свойству гауссовские пучки намного проще исследовать, чем пучки другой пространственной структуры. В оптике, кроме того, гауссовские пучки часто реализуются и в эксперименте, поскольку поле вида (15) соответствует так называемой нулевой поперечной моде лазерных резонаторов [А.М. Гончаренко Гауссовы пучки света. –

Минск: Наука и техника, 1977]. В акустике распределение давления на излучателе, как правило, отличается от гауссовского. Так, например, на поверхности пьезоэлектрических источников распределение амплитуды близко к равномерному («поршневые» излучатели). Из-за резких границ излучателя и возникающих краевых эффектов акустическое поле вблизи таких источников оказывается сильно осциллирующим и поэтому трудным для точного анализа. В то же время многие эффекты в реальных пучках и в гауссовских пучках происходят похожим образом, поскольку колоколообразное распределение правильно учитывает главную особенность в структуре пучка: его амплитуда максимальна вблизи оси и уменьшается на краях. В данной задаче практикума мы будем рассматривать именно гауссовские пучки.

Как отмечалось во Введении и использовалось при выводе уравнения ХЗ (Приложение 1), в пучке можно выделить три характерных масштаба – длину волны  $\lambda$ , поперечный размер пучка  $L_{\perp}$  и его продольный размер  $L_{\parallel}$ , причём  $L_{\parallel} \gg L_{\perp} \gg \lambda$ . С учётом сказанного выше можно количественно проверить справедливость этих предположений. Действительно, для гауссовского пучка  $L_{\perp} = 2a_0$  - это начальный диаметр пучка, а  $L_{\parallel} = x_d$  - длина дифракционной расходимости. Учитывая, что длина волны связана с частотой как  $\lambda = 2\pi c_0/\omega_0$ , получим:  $L_{\perp}/L_{\parallel} = (4/\pi)\lambda/L_{\perp} \approx \lambda/L_{\perp}$ , т.е. если диаметр источника намного превышает длину волны, то продольная протяжённость пучка будет намного превышать его диаметр.

#### 2.4. Запись уравнения Хохлова-Заболотской в безразмерных переменных

Выше было показано, что эффекты нелинейности и дифракции проявляются, соответственно, на масштабах  $x_p$  и  $x_d$  (см. (6) и (17)). От соотношения этих масштабов зависит, какой из указанных двух эффектов оказывает большее влияние на поведение акустического пучка. Это становится более понятным, если привести уравнение Хохлова-Заболотской к безразмерному виду. Разделим входящие в уравнение величины на их характерные значения: акустическое давление - на начальную амплитуду волны:  $V = p'/p_0$ , поперечную координату - на начальный радиус пучка:  $R = r/a_0$ , продольную координату – на дифракционную длину:  $z = x/x_d$ , время домножим на циклическую частоту:  $\theta = \omega_0\tau$ . Заметим, что для безразмерных координат здесь использованы те же обозначения  $z$  и  $R$ , что и выше, где они обозначали одну из поперечных координат и радиус кривизны волнового фронта. Это не должно вызвать недоразумений, поскольку последние две величины далее упоминаться не будут. В новых переменных уравнение Хохлова-Заболотской принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial V}{\partial z} - N \cdot V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{4} \Delta_{\perp} V, \quad (23)$$

где  $\Delta_{\perp} V = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial V}{\partial R} \right)$ , а единственный безразмерный параметр  $N$  равен отношению дифракционной и нелинейной длин:

$$N = \frac{x_d}{x_p} \quad (24)$$

Из записи уравнения Хохлова-Заболотской в виде (23) видно, что параметр  $N$ , пропорциональный амплитуде волны, характеризует относительный вклад нелинейных и дифракционных эффектов. Безразмерная запись уравнений оказывается особенно удобной при численном моделировании. В этом случае результат вычислений зависит лишь от величины  $N$ , а не от большого количества размерных параметров  $\rho_0, \omega_0, \rho_0, a_0, c_0$  и коэффициента нелинейности  $\varepsilon$ , совокупность которых определяют значение  $N$ . Иначе говоря, решение, полученное для одного значения  $N$ , соответствует не одному случаю, а целому набору физических ситуаций.

Отметим, что иногда продольную координату удобнее нормировать не на дифракционную длину, а на длину образования разрыва:  $\sigma = x/x_p$ , а безразмерный параметр ввести как  $N_1 = 1/N = x_p/x_d$  - параметр Хохлова. Тогда уравнение (23) можно записать в виде  $\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial V}{\partial \sigma} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] = \frac{N_1}{4} \Delta_{\perp} V$ . Здесь мы будем использовать обозначения (23) и (24).

## 2.5. Нелинейные и дифракционные эффекты в мощных пучках. Плоский источник гармонических волн с гауссовским поперечным распределением амплитуды

В мощном акустическом пучке проявляются многие особенности как нелинейной плоской волны, так и линейного дифрагирующего пучка; однако возникают и новые интересные волновые явления, обусловленные совместным действием нелинейности и дифракции. Для их анализа требуется решить уравнение Хохлова-Заболотской (23). Общее решение этого уравнения получить не удаётся, поэтому приходится обращаться к его численному моделированию, чему и посвящена практическая часть данной задачи практикума. Однако в некоторых предельных случаях можно получить приближённые аналитические решения, позволяющие сделать полезные качественные выводы. Рассмотрим применительно к пучку с исходно гауссовским поперечным профилем амплитуды и синусоидальной временной формой два таких случая: случай преобладания нелинейных

эффектов над дифракционными,  $N \gg 1$ , и обратный этому случай слабой нелинейности  $N \ll 1$ .

Если нелинейность существенно преобладает над дифракцией (т.е. широкий пучок, нелинейные искажения в котором происходят до того, как проявится дифракционная расходимость), то  $N \gg 1$ , и в пренебрежении правой частью уравнение (23) переходит в уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} - V \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0, \text{ где } \sigma = N \cdot z = x/x_p. \quad (25)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (25) представляет собой запись в безразмерном виде уравнения простых волн (2). Таким образом, в этом приближении решение будет зависеть от поперечной координаты  $R$  лишь как от параметра, т.е. всё происходит так, как если вдоль лучей, параллельных оси пучка, независимо распространяются нелинейные плоские волны с различными начальными амплитудами на различных лучах. В размерных переменных амплитуда волны меняется в зависимости от  $r$  как  $p_0 \exp(-r^2/a_0^2)$ , поэтому длина образования разрыва на различных лучах также будет зависеть от поперечной координаты:

$$x_p(r) = x_p(0) \cdot \exp(r^2/a_0^2), \quad (26)$$

где  $x_p(0) = \rho_0 c_0^3 / (\varepsilon \omega_0 p_0)$  (см. формулу (6)). Ниже вместо  $x_p(0)$  для краткости будем писать просто  $x_p$ , в соответствии с формулой (6). Как видно из (26), вблизи оси, где амплитуда волны максимальна, нелинейные эффекты проявляются на меньших расстояниях. По мере удаления от оси пучка амплитуда волны уменьшается, нелинейные эффекты ослабевают, и длина образования разрыва увеличивается. С этим обстоятельством связан ряд интересных нелинейных эффектов, таких как уменьшение поперечного размера пучков высших гармоник с ростом номера гармоники; более интенсивное затухание амплитуды волны вблизи оси пучка и связанное с этим явление выравнивания (изотропизации) поперечного распределения амплитуды волны по сравнению с линейным случаем. Рассмотрим эти эффекты более подробно.

*Уменьшение поперечных размеров пучков высших гармоник.* Амплитуды гармоник в точке с координатами  $(x, r)$  можно получить из формулы (9) с учётом выражения (26) для длины образования разрыва:

$$\frac{A_n}{p_0} = \frac{2J_n(\exp(-r^2/a_0^2) \cdot nx/x_p)}{nx/x_p}. \quad (27)$$

Как видно, зависимость амплитуд гармоник от поперечной координаты не является гауссовской, т.е. нелинейный пучок, в отличие от линейного, не сохраняет свою поперечную структуру. Свойство гауссовости выполняется

лишь на малых расстояниях, при  $x \ll x_p$ . Действительно, разлагая в (27) функции Бесселя при малых значениях  $x/x_p$ , получим:

$$\frac{A_n}{p_0} = \frac{1}{n!} \left( \frac{nx}{2x_p} \right)^{n-1} \cdot \exp(-nr^2/a_0^2), \quad (28)$$

(см. также (10)). Отсюда видно, что зависимость амплитуды  $n$ -й гармоники от поперечной координаты имеет вид  $A_n \sim \exp(-r^2/a_n^2)$ , где  $a_n = a_0/\sqrt{n}$ . Таким образом, при преобладании нелинейных эффектов  $N \gg 1$  структура пучка каждой из гармоник на малых расстояниях  $x \ll x_p$  является гауссовской, причём поперечный радиус пучка уменьшается с ростом номера гармоники как  $1/\sqrt{n}$ .

*Изотропизация (выравнивание) поперечного распределения амплитуды волны.* Этот эффект проявляется на этапе, когда заметным становится нелинейное затухание волны, т.е. после образования пилообразного профиля на расстояниях  $x/x_p > \pi/2$ . Поскольку вблизи оси пучка разрыв образуется на меньших расстояниях, чем на его периферии, то эффективное поглощение энергии на разрывах и быстрое уменьшение амплитуды волны также начинается раньше вблизи оси. Согласно (7) и (26), поперечное распределение амплитуды волны при  $x > 2x_p$  выглядит так:

$$p'_{\max} \approx p_0 \cdot \exp(-r^2/a_0^2) \cdot \frac{\pi}{1 + \exp(-r^2/a_0^2) \cdot x/x_p}. \quad (29)$$

Если обозначить  $V_{\max} = p'_{\max}/p_0$ , то в безразмерном виде формула (29) принимает вид

$$V_{\max} \approx \exp(-R^2) \cdot \frac{\pi}{1 + \sigma \cdot \exp(-R^2)}. \quad (30)$$

Распределение (30) показано на рис. 5 для трёх различных расстояний. Как видно из рисунка, с увеличением расстояния исходное колоколообразное

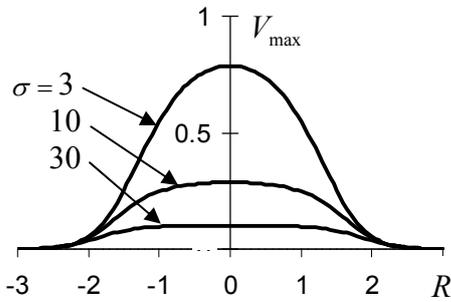


Рис. 5. Поперечное распределение амплитуды волны в нелинейном пучке на различных расстояниях  $\sigma = x/x_p$ .

распределение постепенно превращается в равномерное (П-образное). Эффект изотропизации наглядно проявляется на расстояниях  $x \gg x_p$ , когда  $V_{\max} \rightarrow \pi/\sigma$  независимо от  $R$ , и в пределах основной центральной части пучка амплитуда волны практически не зависит от поперечной координаты. При этом, как следует из (7) и (11), эффект изотропизации имеет место и для амплитуд гармоник. Как следствие, пучки всех гармоник с увеличением

расстояния приобретают примерно одинаковую структуру и ширину.

Рассмотрим теперь другой предельный случай малой нелинейности  $N \ll 1$ . В этом случае решение уравнения (23) можно искать методом последовательных приближений, используя разложение по малому параметру  $N$ :  $V = V_0 + N \cdot V_1 + N^2 \cdot V_2 + \dots$ . Подставляя это представление в уравнение (23) и приравнявая члены при одинаковых степенях  $N$ , получим бесконечную цепочку уравнений. Выпишем здесь лишь два первых уравнения этой цепочки, соответствующих нулевому и первому приближениям:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{4} \Delta_{\perp} V_0 = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{4} \Delta_{\perp} V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (V_0^2). \quad (32)$$

Граничное условие (15), соответствующее гауссовскому пучку, в безразмерных обозначениях будет выглядеть для  $V_0$  и  $V_1$  следующим образом:  $V_0(z=0, R, \theta) = \exp(-R^2) \sin \theta$ ,  $V_1(z=0, R, \theta) = 0$ . Уравнение нулевого приближения (31) есть безразмерная запись уравнения (12), т.е. согласно соотношениям (13) и (16) его решением является функция

$$V_0 = \frac{i}{2} \left\{ \frac{e^{-R^2/(1+iz)}}{1+iz} \cdot e^{-i\theta} - \frac{e^{-R^2/(1-iz)}}{1-iz} \cdot e^{i\theta} \right\}. \quad (33)$$

Уравнение (32) тогда принимает вид:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{4} \Delta_{\perp} V_1 = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{e^{-2R^2/(1+iz)}}{(1+iz)^2} \cdot e^{-2i\theta} + \frac{e^{-2R^2/(1-iz)}}{(1-iz)^2} \cdot e^{2i\theta} \right\}. \quad (34)$$

Источник в правой части (34) имеет удвоенную частоту, поэтому в первом приближении влияние нелинейности сводится к возникновению пучка второй гармоники. Решение естественно искать в виде, учитывающем структуру источника:  $V_1 = F(z) \cdot e^{-2R^2/(1+iz)} \cdot e^{-2i\theta} + F^*(z) \cdot e^{-2R^2/(1-iz)} \cdot e^{2i\theta}$ , где  $F$  - неизвестная функция,  $F^*$  - её комплексное сопряжение. Подставляя это выражение в уравнение (34), для функции  $F$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение  $dF/dz + i(1+iz)^{-1} F = (i/4)(1+iz)^{-2}$ , решение которого при граничном условии  $F(0) = 0$  легко находится:  $F = (1/4) \cdot \ln(1+iz) \cdot (1+iz)^{-1}$ . Таким образом, поправка 1-го приближения имеет следующий вид:

$$V_1 = \frac{\ln(1+iz) \cdot e^{-2R^2/(1+iz)}}{4(1+iz)} \cdot e^{-2i\theta} + \frac{\ln(1-iz) \cdot e^{-2R^2/(1-iz)}}{4(1-iz)} \cdot e^{2i\theta}. \quad (35)$$

При записи в действительном виде это выражение приобретает чуть более громоздкий вид:

$$V_1 = \frac{e^{-\frac{2R^2}{1+z^2}}}{2} \sqrt{\frac{\arctan^2 z + \frac{1}{4} \ln^2(1+z^2)}{1+z^2}} \times \sin \left\{ 2 \left[ \theta - \frac{R^2 z}{1+z^2} + \frac{1}{2} \arctan z + \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\ln(1+z^2)}{2 \arctan z} \right) \right] \right\} \quad (36)$$

Согласно (33), структура пучка первой гармоники выглядит следующим образом:

$$V_0 = \frac{e^{-\frac{R^2}{1+z^2}}}{\sqrt{1+z^2}} \cdot \sin \left\{ \theta - \frac{R^2 z}{1+z^2} + \arctan z \right\} \quad (37)$$

Сравнивая (36) и (37), можно заключить, что пучок второй гармоники также является гауссовским, причём его радиус в  $\sqrt{2}$  раз меньше радиуса пучка основной частоты. Можно показать, что в рассматриваемом приближении  $N \ll 1$  пучки остальных высших гармоник в первом неисчезающем приближении также являются гауссовскими, причём радиус пучка  $n$ -й гармоники в  $\sqrt{n}$  раз меньше радиуса пучка первой гармоники, т.е. пучки гармоник оказываются «вложенными» друг в друга:  $a_n = a_0 / \sqrt{n}$ . Заметим, что при этом эффективные дифракционные длины разных гармоник оказываются равными:  $x_d^{(n)} = n \omega_0 a_n^2 / (2c_0) = \omega_0 a_0^2 / (2c_0)$ . Казалось бы, из этого следует, что разные гармоники должны дифрагировать одинаково. Отчасти это так: например, из (36) и (37) можно показать, что радиус кривизны волнового фронта и угол дифракционной расходимости (эти параметры обсуждались выше при анализе линейного пучка) оказываются действительно одинаковыми для обеих гармоник.

В то же время фазовые сдвиги для различных гармоник оказываются разными. Как следует из (36) и (37), вторая гармоника отстаёт по времени от первой на величину  $\Delta t_{21} = \Delta \theta_{21} / \omega_0$ , где фазовая задержка равна:

$$\Delta \theta_{21} = \frac{1}{2} \arctan z - \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\ln(1+z^2)}{2 \arctan z} \right). \quad (38)$$

Согласно этому выражению, относительная задержка монотонно увеличивается в пределах всей ближней зоны, при  $z \approx 3.75$  достигает максимального значения  $\Delta \theta_{21} \approx 0.25$ , а затем начинает очень медленно стремиться к нулю. Амплитуда второй гармоники  $A_2$  на оси пучка, согласно (36), зависит от расстояния следующим образом:

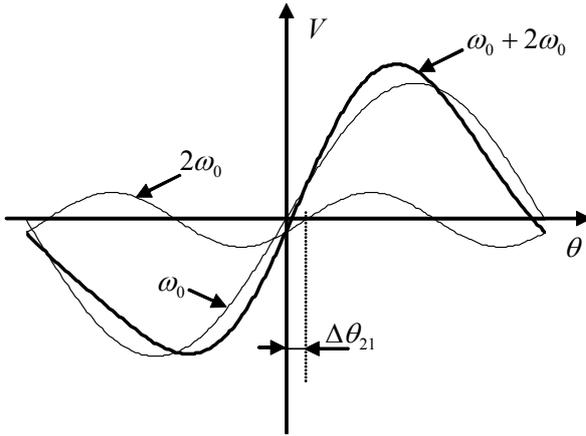


Рис. 6. Асимметричное искажение профиля нелинейной волны, вызванное отставанием второй гармоники от первой. Фазовый сдвиг  $\Delta\theta_{21}$  вызван дифракцией.

$$\frac{A_2}{p_0} = \frac{N}{2} \sqrt{\frac{\arctan^2 z + \frac{1}{4} \ln^2(1+z^2)}{1+z^2}}. \quad (39)$$

Как видно из (39), на малых расстояниях амплитуда  $A_2$  растёт линейно  $A_2/p_0 \approx Nz/2 = \sigma/2$ , как и в приближении плоской волны (см. (10)). Монотонный рост продолжается до  $z \approx 1.5$ , где амплитуда второй гармоники достигает величины  $A_2^{(\max)} \approx 0.32Np_0$ , а затем из-за расходимости пучка уменьшается приблизительно обратно пропорционально расстоянию.

Возникновение сдвига фаз между гармониками, приводящее к несимметричному искажению формы нелинейной волны – это принципиальный эффект, характерный для нелинейных дифрагирующих пучков. Фактически он означает появление дисперсии, обусловленной геометрией пучка и не связанной со свойствами среды. На рис. 6 построен профиль нелинейной волны, состоящей из первой и второй гармоник, между которыми имеется сдвиг фаз. Как видно, исходно синусоидальная волна искажается несимметрично: фаза сжатия ( $V > 0$ ) оказывается более короткой и имеет большее пиковое значение, чем фаза разрежения ( $V < 0$ ). Напомним, что в плоской волне все гармоники синфазны и поэтому фазы сжатия и разрежения искажаются одинаково.

Асимметричное искажение профиля, вызванное дифракцией, почти всегда наблюдается в экспериментах с нелинейными волнами. Типичная

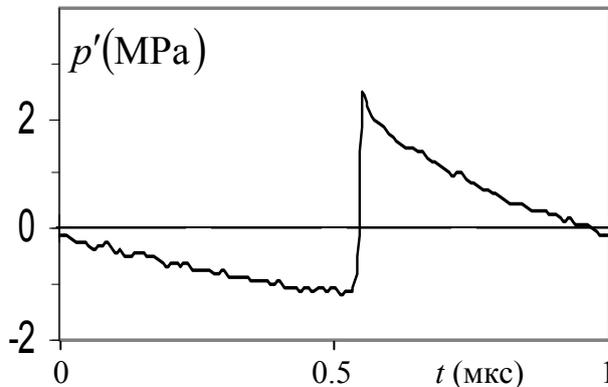


Рис. 7. Экспериментальная осциллограмма, иллюстрирующая асимметричное искажение профиля исходно гармонической волны на оси пучка. Показан один период волны.

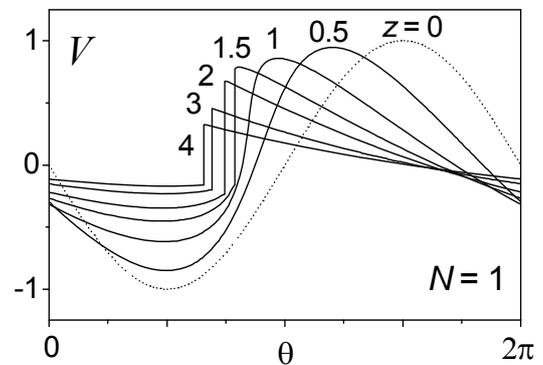


Рис. 8. Временные профили исходно гармонического сигнала на оси пучка ( $r=0$ ) на различных расстояниях  $z$ , рассчитанные численно для  $N=1$ .

осциллограмма сигнала акустического давления, создаваемого в воде мощным ультразвуковым источником, показана на рис. 7. В отличие от рис. 6, параметры пучка на рис. 7 соответствуют случаю сильной нелинейности, когда в профиле волны образуется разрыв. Однако наблюдаемая асимметрия профиля также обусловлена дифракционными фазовыми сдвигами между гармониками волны. Результаты численного моделирования в случае  $N=1$ , приведённые на рис. 8, подтверждают наблюдаемые особенности искажения профиля волны.

## 2.6. Литература

1. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. - М.: Наука, 1975.
2. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн (второе издание). – М.: Наука, 1990.
3. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. - М.: Наука, 1966.

### 3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

#### 3.1. Последовательность действий при выполнении задачи

Для выполнения упражнений следует запустить программу “physprak.exe”. В начале Вам будут предложено повторить основные формулы, приведенные в описании (основные уравнения, переменные, характеристики пучка). Для перехода на следующую страницу используйте кнопку «Далее».

После нескольких страниц введения появится диалоговое окно, в котором нужно ввести свою фамилию, номер группы, а так же номер Вашего варианта, который следует узнать у преподавателя перед началом выполнения работы. После ввода Вами всех данных, программа распечатает лист с основными формулами и параметрами того излучателя, который будет исследоваться в работе. После этого следует перейти к выполнению упражнений.

Перед каждым упражнением на экране монитора будет показано, что изучается в данном упражнении: вид излучателя, основное уравнение, изучаемые эффекты, а будет проведена также демонстрация изменения параметров волны при ее распространении. Для управления демонстрациями используйте следующие кнопки:  – «пуск», «пауза» и «стоп».

Далее необходимо сдать компьютерный допуск. Чтобы приступить к допуску, нажмите на соответствующую кнопку на текущей панели на мониторе. В появившемся диалоговом окне необходимо правильно ввести значения характерных пространственных масштабов, которые следует предварительно рассчитать. До тех пор, пока требуемые величины не будут вычислены правильно, невозможно продолжить выполнение упражнения. Проверенные в ходе допуска правильные величины необходимо вписать в распечатанный первый лист с параметрами задачи.

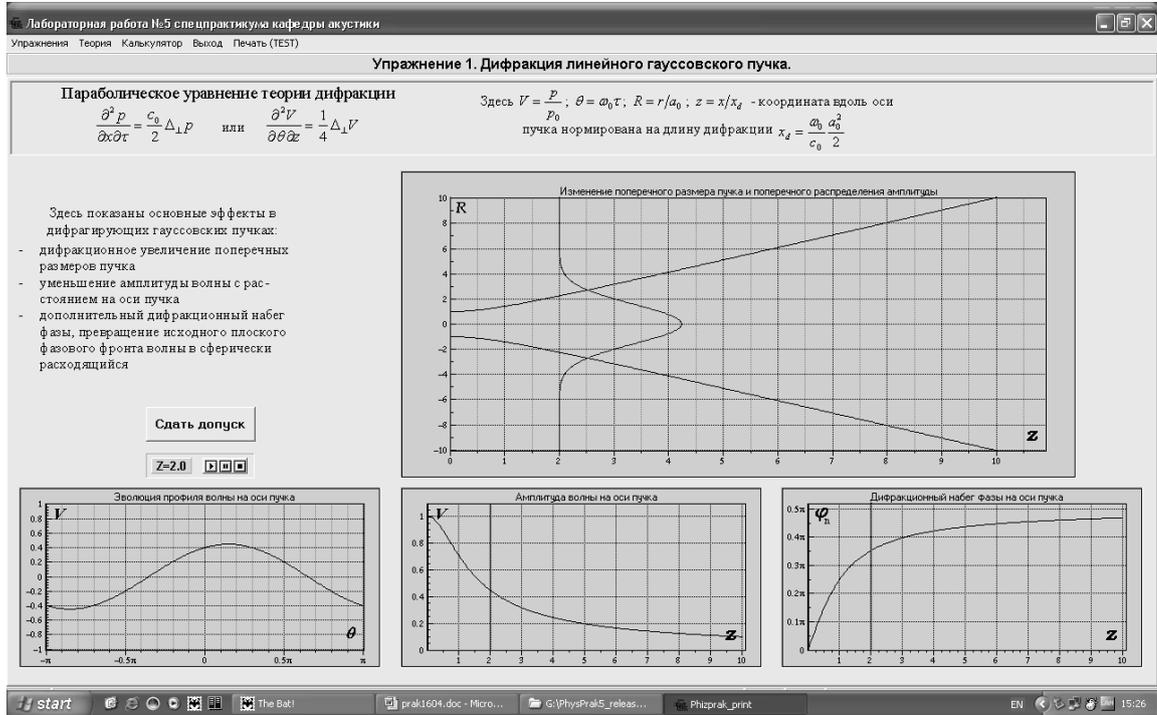
После сдачи допуска следует приступить к выполнению самого упражнения. Каждое упражнение состоит из одного или нескольких заданий. Внимательно прочитайте текст задания на экране и подпишите ко всем представленным графикам. После того как Вы выполните упражнение и вычислите все требуемые величины, введите их в поля для ввода ответов и нажмите кнопку «Проверить ответы». Будьте внимательны, не путайте безразмерные и размерные величины. Если Вы вычислили всё без ошибок, то Вас поздравят с выполненным упражнением, и будет распечатано домашнее задание по выполненному упражнению.

После выполнения всех упражнений у Вас должно быть 5 распечатанных листов: лист с параметрами Вашего излучателя и 4 листа, распечатанные после выполнения каждого из упражнений. С указанными пятью листами нужно подойти к преподавателю, чтобы он расписался на каждом из них. Для окончательной сдачи работы Вам необходимо выполнить все задания, указанные на этих листах.

### 3.2. Упражнения

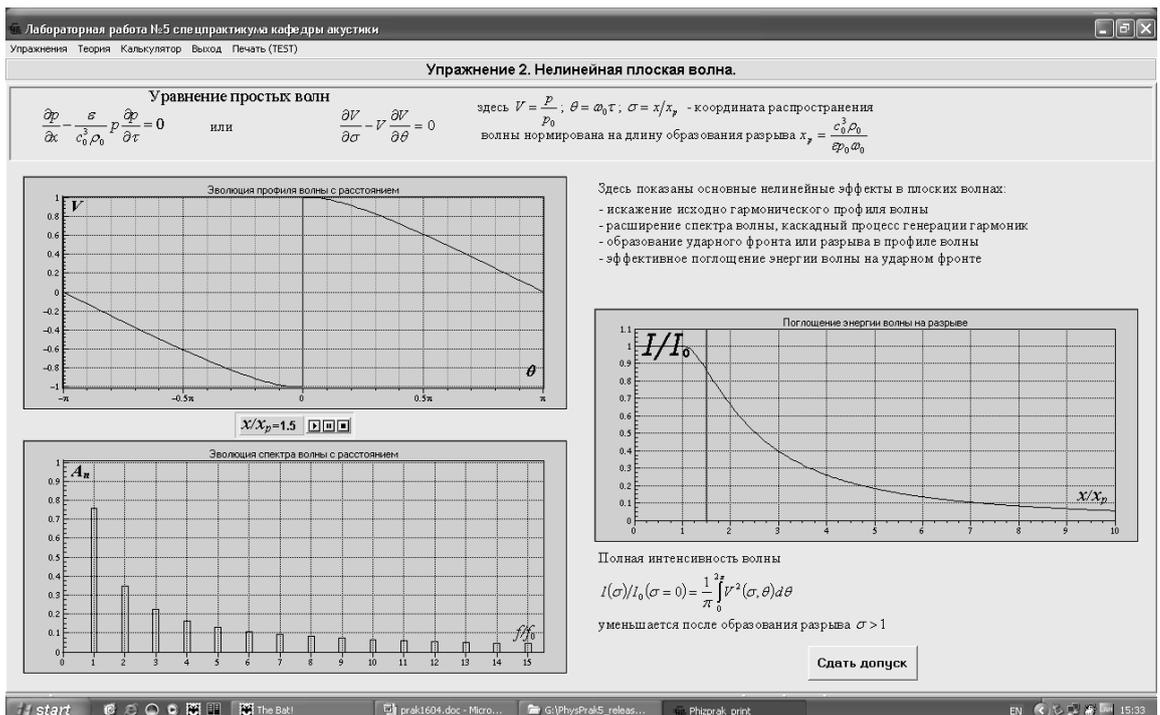
#### Упражнение 1. Дифракция линейного гауссовского пучка

В этом упражнении изучается дифракция пучка в отсутствие нелинейных эффектов (см. раздел 2.3).



#### Упражнение 2. Распространение плоской нелинейной волны

В этом упражнении изучаются нелинейные эффекты для плоских волн в отсутствие дифракционных эффектов (см. раздел 2.2).



### Упражнения 3 и 4. Дифракция нелинейного пучка

В этих упражнениях изучается совместное влияние нелинейных и дифракционных эффектов в пучках большой интенсивности. В отличие от первого и второго упражнений, в которых используются точные аналитические решения, задача об эволюции нелинейного пучка требует численного моделирования.

Лабораторная работа №5 спектракума кафедры акустики  
Упражнения Теория Калькулятор Выход Печать (TEST)

#### Упражнение 3. Дифракция нелинейного пучка.

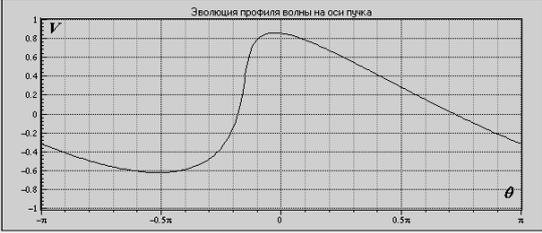
**Уравнение Хохлова-Заболотской**

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\sigma}{c_0^3 \rho_0} p \frac{\partial p}{\partial \tau} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial V}{\partial x} - NV \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{4} \Delta_{\perp} V$$

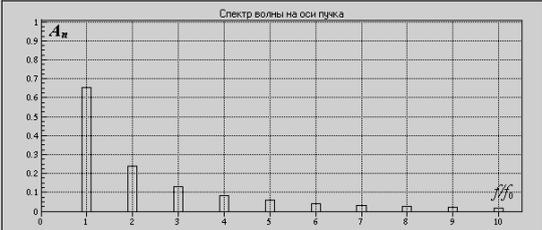
Здесь  $V = p/p_0$ ;  $\theta = \omega_0 \tau$ ;  $R = r/a_0$ ;  $z = x/x_d$  - координата вдоль оси пучка нормирована на длину дифракции;  $N = \chi_1/x_d$  - нелинейный параметр задачи, графики ниже приведены для  $M=1$ .

Здесь показаны основные нелинейно-дифракционные эффекты в ограниченных пучках:

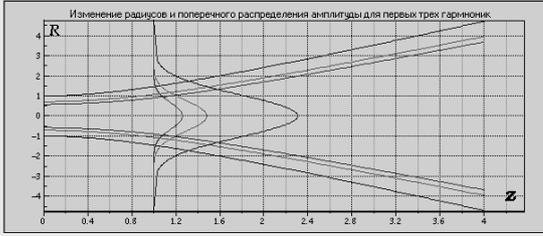
- несимметричное искажение профиля волны, увеличение положительного пикового значения давления и длительности фазы разрежения, уменьшение пикового отрицательного значения давления и длительности фазы сжатия
- сужение пространственной поперечной структуры образующихся гармоник



Эволюция профиля волны на оси пучка



Спектр волны на оси пучка



Изменение радиусов и поперечного распределения амплитуд для первых трех гармоник

З=1.0

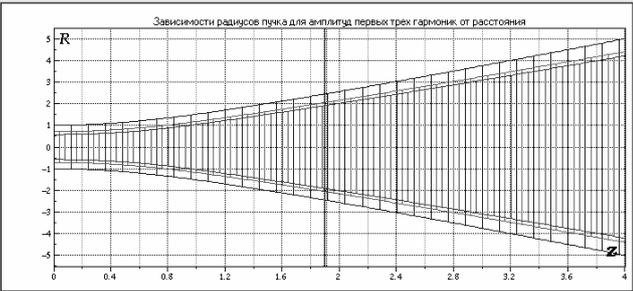
Сдать допуск

Лабораторная работа №5 спектракума кафедры акустики  
Упражнения Теория Калькулятор Выход Печать (TEST)

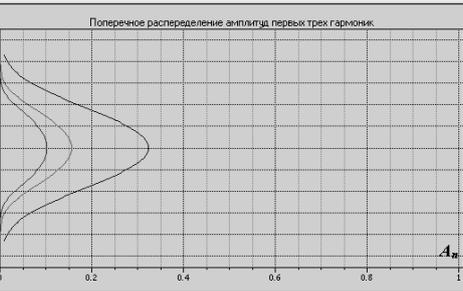
#### Упражнение 4. Исследование эволюции нелинейного пучка. Пространственная структура.

Допуск сдан

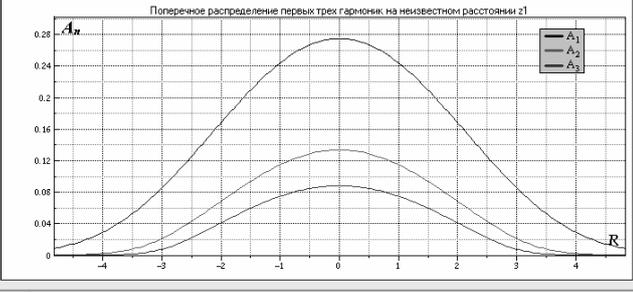
Зависимости радиусов пучка для амплитуд первых трех гармоник от расстояния



Поперечное распределение амплитуд первых трех гармоник



Поперечное распределение первых трех гармоник на известном расстоянии z1



Эволюция поперечного распределения амплитуд первых трех гармоник

z1=0

По приведенным на нижнем графике поперечным распределениям амплитуд первых трех гармоник найдите расстояние z1, на котором они измерены. Используйте зависимости для радиусов первых трех гармоник от расстояния в нелинейном пучке, изображенные на верхнем графике

Проверить ответ

### 3.3. Комментарии по интерфейсу программы

1. При движении курсора мыши над любым графиком в правом нижнем углу экрана появляются координаты положения мыши в системе координат соответствующего графика.
2. Для проведения вычислений используйте встроенный простейший калькулятор, вызываемый нажатием на кнопку рядом с каждым полем ввода, или воспользуйтесь стандартным калькулятором Windows, который можно запустить, используя меню «Калькулятор».
3. В меню «Теория» Вы можете посмотреть основные уравнения, безразмерные переменные и формулы для вычисления основных характеристик пучка.
4. Не закрывайте программу до завершения всех упражнений, **иначе Вам придётся все начинать заново!**

Удачной работы!

### Контрольные вопросы

1. Что такое волновой пучок?
2. Написать уравнение Хохлова-Заболотской. В каких предположениях оно получено?
3. Показать, в каком приближении из уравнения Хохлова-Заболотской получается уравнение простых волн.
4. Особенности эволюции нелинейной плоской волны. Что такое длина образования разрыва?
5. Как ведёт себя спектр нелинейной плоской волны?
6. Что такое пилообразная волна?
7. Что такое нелинейное поглощение?
8. Показать, в каком приближении из уравнения Хохлова-Заболотской получается параболическое уравнение теории дифракции.
9. Что такое гауссовский пучок? Какова структура акустического давления в гауссовском пучке (пояснить рисунком)?
10. Что такое длина дифракции и как она зависит от параметров источника (написать формулу)?
11. Нарисовать график зависимости от расстояния радиуса пучка и амплитуды волны на оси линейного гауссовского пучка.
12. Нарисовать график зависимости дифракционного сдвига фазы на оси гауссовского пучка. Ускорению или замедлению фазового фронта соответствует этот сдвиг? Как он зависит от частоты?
13. Запись уравнения Хохлова-Заболотской в безразмерном виде. На что нормируются параметры задачи? Чем определяется параметр подобия  $N$ ?

14. Качественное объяснение эффекта изотропизации (выравнивания) поперечного распределения в нелинейном пучке.
15. Генерация гармоник в слабонелинейном пучке. Как зависит радиус пучка  $n$ -й гармоники от номера  $n$ ? Пояснить качественно причину такой зависимости для второй гармоники. Как соотносятся длины дифракции для пучков разных гармоник?
16. Дифракционный фазовый сдвиг между гармониками. Отстаёт или опережает вторая гармоника первую? Как сказывается фазовый сдвиг между гармониками на форме нелинейной волны в пучке?

## Приложение 1. Вывод уравнения Хохлова-Заболотской из уравнений гидродинамики

При последовательном теоретическом описании нелинейных акустических волн следует исходить из системы уравнений гидродинамики [Б. К. Новиков, О. В. Руденко, В. И. Тимошенко. Нелинейная гидроакустика. - Л.: Судостроение, (1981)]. Для идеальной жидкой или газообразной среды эта система включает в себя уравнения Эйлера и уравнение состояния:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p, \quad (\text{п.1})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{п.2})$$

$$p = p(\rho). \quad (\text{п.3})$$

Здесь  $p$  - это давление,  $\mathbf{u}$  - скорость и  $\rho$  - плотность среды. Уравнение (п.1) – это закон изменения количества движения (2-й закон Ньютона), уравнение неразрывности (п.2) – закон сохранения массы. Конкретный вид уравнения состояния (п.3) зависит от типа среды. Например, для идеального газа это уравнение адиабаты  $p \sim \rho^\gamma$ . Как видно, все три уравнения системы (п.1)-(п.3) являются *нелинейными* по переменным  $\mathbf{u}$ ,  $\rho$  и  $p$ . Это означает, что акустические волны, которые описываются этими уравнениями, в общем случае имеют нелинейный характер.

Пусть исходное равновесное состояние среды характеризуется параметрами  $\mathbf{u} = 0$ ,  $\rho = \rho_0$  и  $p = p(\rho_0) = p_0$ . При наличии акустических волн среда приходит в движение и начинает сжиматься или растягиваться, т.е. изменяются все три указанных параметра  $\mathbf{u}$ ,  $\rho$  и  $p$ . Обозначим отклонения плотности и давления от равновесных значений как  $\rho'$  и  $p'$ :  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $p = p_0 + p'$ . Система уравнений гидродинамики с учётом этих обозначений будет иметь вид:

$$\nabla p' + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\rho' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \rho_0 (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \rho' (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \quad (\text{п.1a})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{u} = -\rho' \nabla \mathbf{u} - (\mathbf{u} \nabla) \rho', \quad (\text{п.2a})$$

$$p' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho' + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_0 \rho'^2 + \dots \quad (\text{п.3a})$$

В первых двух уравнениях линейные по возмущениям  $\mathbf{u}$ ,  $\rho'$  и  $p'$  члены собраны в левой части, а все нелинейные члены – в правой части уравнений.

Уравнение состояния представлено в виде разложения функции  $p(\rho)$  в ряд Тейлора; а соответствующие производные заданы при  $\rho = \rho_0$ . Введём следующие обозначения:

$$c_0^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0, \quad (\text{п.4})$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{\rho_0}{2c_0^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_0 \quad (\text{п.5})$$

Как будет показано ниже, величина  $c_0$  есть не что иное, как скорость звука. Безразмерный параметр  $\varepsilon$  характеризует нелинейные свойства среды и называется *коэффициентом акустической нелинейности*. Важной особенностью акустических волн является тот факт, что возмущения  $\mathbf{u}$ ,  $\rho'$  и  $p'$  обычно малы:  $|\mathbf{u}/c_0|$ ,  $|\rho'/\rho_0|$ ,  $|p'/p_0| \ll 1$ , поэтому линейные и нелинейные члены в уравнениях (п.1а - 3а) имеют разный порядок малости. Линейные члены являются главными, квадратично нелинейные члены имеют следующий порядок малости, а кубично нелинейные и, тем более, члены более высоких степеней играют несущественную роль. Поэтому для описания нелинейных эффектов можно ограничиться записью уравнений в квадратично нелинейном приближении. Исключая с помощью уравнения (п.3а) возмущения плотности, перепишем уравнения (п.1а) и (п.2а), сохраняя линейные и квадратичные по переменным  $\mathbf{u}$  и  $p'$  члены:

$$\nabla p' + \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \approx - \frac{p'}{c_0^2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \rho_0 (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \quad (\text{п.6})$$

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \mathbf{u} = \frac{(\varepsilon - 1)}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial}{\partial t} (p'^2) - \frac{p' \nabla \mathbf{u}}{c_0^2} - \frac{(\mathbf{u} \nabla) p'}{c_0^2}. \quad (\text{п.7})$$

Применим теперь к уравнению (п.6) оператор  $\nabla$ , а к уравнению (п.7) – оператор  $\partial/\partial t$ . Вычитая получившиеся уравнения одно из другого, придём к следующему уравнению:

$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = Q, \quad (\text{п.8})$$

в котором в правой части собраны все квадратично нелинейные члены:

$$Q = - \frac{1}{c_0^2} \nabla \left( p' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) - \rho_0 \nabla [(\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}] - \frac{(\varepsilon - 1)}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p'^2) + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (p' \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} ((\mathbf{u} \nabla) p'). \quad (\text{п.9})$$

Как видно, в линейном приближении  $Q = 0$  и уравнение (п.8) переходит в классическое волновое уравнение, решением которого являются волны, распространяющиеся в среде со скоростью  $c_0$ . В частности, таким решением является плоская волна вида  $p' = P(t - x/c_0)$ , где функция  $P(t)$

описывает временной профиль волны. При этом, как следует из (п.1а) и (п.2а),  $\mathbf{u} = (u_x, 0, 0)$  и  $u_x = P(t - x/c_0)/(\rho_0 c_0)$ . Если использовать указанные выражения для плоской волны в формуле (п.9) для плотности нелинейных источников  $Q$ , то получим более компактное выражение:  $Q = -\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (P^2)$ .

Если волна - не плоская, но близка к ней (волновой пучок), то формула для  $Q$  будет несколько отличаться от указанного выражения. Однако это отличие будет «поправкой к поправке», т.е. соответствующие эффекты будут более высокого порядка малости. Таким образом, при исследовании нелинейных квазиплоских акустических волн можно исходить из модельного волнового уравнения:

$$\Delta p' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (p'^2). \quad (\text{п.10})$$

Это уравнение часто называется уравнением Вестервельта (P. Westervelt, 1963). Из уравнения (п.10) становится ясным смысл введенного в (п.5) коэффициента акустической нелинейности  $\varepsilon$ : согласно (п.10), именно этот коэффициент характеризует совокупное действие нелинейных эффектов.

Волновое уравнение (п.10) является нелинейным дифференциальным уравнением 2-го порядка по всем пространственным координатам и времени. При выводе правой части этого уравнения учитывался квазиплоский характер распространения волны. Соответствующее преобразование и левой части уравнения позволяет получить нелинейное уравнение эволюционного типа с производной первого порядка по координате распространения (вдоль оси пучка).

Как уже отмечалось, в случае распространения линейной плоской волны решение (п.8) имеет вид  $p'(x, y, z, t) = P(t - x/c_0)$ , т.е. зависит лишь от величины  $\tau = t - x/c_0$ , имеющей смысл времени в «бегущей» в направлении  $x$  со скоростью  $c_0$  системе координат. В случае нелинейной квазиплоской волны (нелинейного пучка) это не так. Акустическое давление  $p'$  уже будет зависеть не только от времени в бегущей системе координат  $\tau$ , но и от пространственных переменных  $x, y, z$ . Однако, поскольку соответствующие эффекты малы, то зависимость  $p'$  от  $x, y, z$  оказывается гораздо более слабой, чем зависимость от задержанного времени  $\tau$ . Имея это в виду, перейдем в уравнении (п.10) от переменных  $x, y, z, t$  к новым переменным  $x, y, z, \tau$ :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{2}{c_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau \partial x} + \Delta_{\perp} p' = -\frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (p'^2), \quad (\text{п.11})$$

где введено обозначение для лапласиана по поперечным координатам:  $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ . Уравнение (п.11) тождественно (п.10), оно лишь записано в других переменных. Однако в таком виде уже удобно учесть квазиплоский характер волны и медленность изменения профиля волны. Как уже отмечалось во Введении, характерной особенностью пучков является тот факт, что масштаб изменения амплитуды волны в поперечном направлении гораздо меньше масштаба изменений в направлении распространения волны:  $L_{\perp} \ll L_{\parallel}$ . Поскольку быстрые пространственные осцилляции, происходящие на масштабе порядка длины волны, учтены переходом к задержанному времени  $\tau = t - x/c_0$ , то при оценке величины первого и третьего слагаемых в левой части уравнения (п.11) можно считать  $|\partial^2 p'/\partial x^2| \approx |p'|/L_{\parallel}^2$ ,  $|\Delta_{\perp} p'| \approx |p'|/L_{\perp}^2$ . Более быстрое изменение давления поперек пучка по сравнению с изменением в продольном направлении означает, что  $|\partial^2 p'/\partial x^2| \ll |\Delta_{\perp} p'|$ . Тогда можно пренебречь малым членом  $\partial^2 p'/\partial x^2$  в левой части уравнения (п.11). Соответствующее приближение называется *приближением квазиоптики*. В результате приходим к следующему приближённому уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^3} p' \frac{\partial p'}{\partial \tau} \right] = \frac{c_0}{2} \Delta_{\perp} p'. \quad (\text{п.12})$$

Переход от уравнения Вестервельта к уравнению Хохлова-Заболотской можно сделать и более формальным образом, вводя малый параметр  $\mu \ll 1$ , учитывающий малость амплитуды волны, медленность изменения профиля и слабую расходимость пучка. Будем искать решение уравнения (п.10) в следующем виде:

$$p' = \mu P \left( \tau = t - \frac{x}{c_0}, x_1 = \mu x, y_1 = \sqrt{\mu} y, z_1 = \sqrt{\mu} z \right), \quad (\text{п.13})$$

Ограничиваясь формой решения (п.13), мы предполагаем, что волна распространяется в положительном направлении оси  $x$ , а её форма в системе координат, перемещающейся вместе с волной со скоростью  $c_0$ , медленно изменяется как вдоль, так и поперек оси пучка. «Медленность» означает, что изменение характеристик волны на масштабе длины волны малы. Учёт преимущественного направления распространения волны вдоль оси  $Ox$  сделан путём перехода от времени  $t$  к «запаздывающему» времени  $\tau = t - x/c_0$  и использованием предположения о медленности изменения формы волны вдоль направления распространения:  $x_1 = \mu x$ . Приближение квазиоптики содержится в допущении, что изменение профиля волны в

поперечном направлении также происходит медленно, но, в то же время, эти изменения являются более быстрыми по сравнению с изменениями вдоль оси пучка:  $y_1 = \sqrt{\mu}y, z_1 = \sqrt{\mu}z$ . Переходя в уравнении (п.11) к новым переменным (п.13), получим:

$$\begin{aligned} \mu^3 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{2\mu^2}{c_0} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \tau} + \mu \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \tau^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \mu^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \mu \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \tau^2} = \\ = -\mu^2 \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (P^2) \end{aligned} \quad (\text{п.14})$$

Видно, что в уравнении (п.14) члены порядка  $\mu$  взаимно сокращаются. Первым слагаемым в правой части, имеющим порядок  $\mu^3$ , мы пренебрегаем. Оставшиеся члены имеют одинаковый порядок  $\mu^2$ . Возвращаясь к исходным пространственным координатам  $x, y, z$  и акустическому давлению  $p'$ , получим уравнение Хохлова-Заболотской (п.12).

Уравнение (п.12) применительно к нелинейным акустическим пучкам было получено в 1969 г. в работе [Е.А.Заболотская, Р.В.Хохлов. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков. – Акуст. журн. 1969. Т.15. № 1. С. 40 - 47.]; впоследствии оно было названо уравнением Хохлова-Заболотской (ХЗ). Поскольку уравнение ХЗ является уравнением эволюционного типа (содержит лишь первую производную акустического давления по координате распространения  $x$ ), оно является гораздо более лёгким для аналитического и численного анализа по сравнению с нелинейным волновым уравнением (п.10). Уравнение Хохлова-Заболотской и его модификации, учитывающие различные диссипативные свойства среды и присутствие неоднородностей, широко используется в современной нелинейной акустике. Более подробно история вывода уравнения и его модификаций изложена в статье О.В. Руденко. К 40-летию уравнения Хохлова-Заболотской. Акуст. журн. 2010.Т.56(4).С.452-462.

## Приложение 2. Численный алгоритм решения уравнения Хохлова-Заболотской

Как уже отмечалось, для уравнения Хохлова-Заболотской (п.12) не удастся найти точного аналитического решения, и поэтому его приходится интегрировать численно. Это задача достаточно сложная, требующая разработки специальных алгоритмов, учитывающих специфику конкретной задачи [Н.С.Бахвалов, Я.М. Жилейкин и Е.А.Заболотская «Нелинейная теория звуковых пучков» М.: Наука, 1982]. В данной задаче практикума используется модифицированный спектральный метод, позволяющий описывать сильно искаженные волны с разрывами с помощью небольшого количества гармоник [Ю.А.Пищальников, О.А.Сапожников, В.А.Хохлова. Модификация спектрального подхода к описанию нелинейных акустических

волн с разрывами. - Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 3. С. 412-417.]. Расчеты проводятся на неоднородной пространственной сетке, учитывающей геометрию расходящегося пучка (рис.9). Такой подход позволяет существенно сократить время вычислений. При выполнении задачи в практикуме используется заранее созданная база данных с результатами моделирования в широком диапазоне значений параметра  $N$ .

Рассмотрим здесь кратко основные идеи используемого метода. Будем искать решение уравнения ХЗ (26) в виде разложения в ряд Фурье:

$$V(z, R, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z, R) \exp(-in\theta). \quad (\text{п.13})$$

Если подставить разложение (п.13) в уравнение (23) и приравнять члены при одинаковых экспонентах, то получится бесконечная система связанных уравнений для комплексных амплитуд гармоник распространяющейся волны:

$$\frac{\partial C_n}{\partial z} = -N \frac{in}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k C_{n-k} + \frac{i}{4n} \Delta_{\perp} C_n = L_{\text{нел}} + L_{\text{диф}}. \quad (\text{п.14})$$

Здесь  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , причём  $C_{-n} = C_n^*$ , где звёздочка означает комплексное сопряжение, а нелинейный и дифракционный операторы условно обозначены как  $L_{\text{нел}}$  и  $L_{\text{диф}}$ .

Численное интегрирование уравнений (п.14) проводится методом конечных разностей. Величины  $C_n^m(z, R)$  рассчитываются, начиная от входа в среду  $z = 0$ , пошагово путём последовательных переходов от текущей плоскости  $z$  к следующей плоскости  $z + \Delta z$  в узлах неоднородной пространственной сетки, которая вводится в поперечном направлении. Таким образом, непрерывное поперечное распределение амплитуд гармоник заменяется набором дискретных функций  $C_n^m(z)$ , соответствующих  $C_n(z, R_m)$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots, M_{\text{max}}$ . Величина  $M_{\text{max}}$  выбирается достаточно большой,

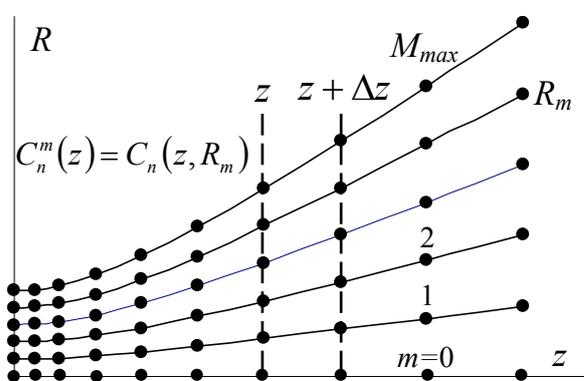


Рис. 9. Неоднородная пространственная сетка, учитывающая геометрию дифрагирующего пучка.

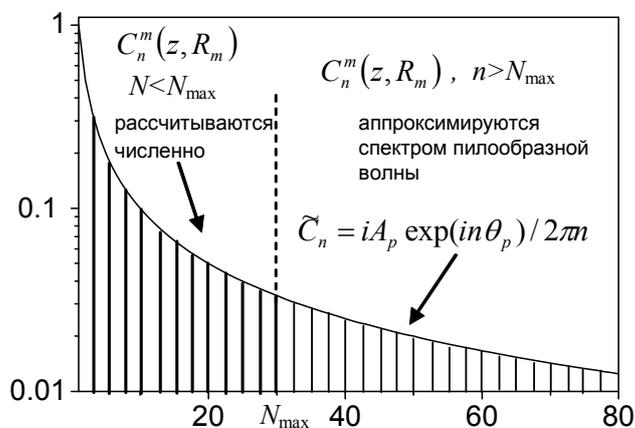


Рис. 10. Использование высокочастотной асимптотики спектра пила для численного моделирования волн с разрывами.

чтобы амплитуда волны на расстоянии  $R_{M_{\max}}$  от оси была пренебрежимо мала. На каждом шаге интегрирования вдоль оси от слоя  $z$  к слою  $z + \Delta z$  используется метод расщепления по физическим факторам, который реализуется в два этапа.

На первом этапе делается шаг  $z \rightarrow z + \Delta z$ , на котором учитываются только нелинейные эффекты. Для этого необходимо для каждого из узлов  $R_m$  решить связанную систему бесконечного числа нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит в правой части бесконечные суммы:

$$\frac{\partial C_n^m}{\partial z} = -N \frac{in}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^m C_{n-k}^m, \quad -\infty < n < \infty. \quad (\text{п.15})$$

Чтобы проинтегрировать такую систему численно, необходимо ограничить количество гармоник. Однако спектр волны, содержащей разрыв, как и спектр пилообразной волны (11), формально бесконечен: амплитуда высших гармоник пропорциональна амплитуде разрыва и обратно пропорциональна номеру гармоники (рис.10). Для корректного описания разрывных волн с использованием конечного спектра обычно вводится искусственная вязкость, которая сглаживает разрыв, и приходится использовать очень большое число гармоник ( $\sim 1000$ ), что требует больших затрат компьютерного времени.

Чтобы упростить задачу, здесь используется априорное знание поведения амплитуд гармоник высокочастотного спектра. Заметим, что до момента образования разрыва амплитуды гармоник с очень большими номерами пренебрежимо малы. Существенное обогащение спектра высшими гармониками происходит лишь после образования разрыва. Можно показать, что спектр произвольной разрывной периодической волны на высоких частотах асимптотически стремится к спектру пилообразной волны (11)  $\sim 1/n$

$$\tilde{C}_n = iA_p \exp(in\theta_p) / 2\pi n, \quad (\text{п.16})$$

где  $A_p$  - это амплитуда разрыва,  $\theta_p$  - его положение внутри одного из периодов волны.

Основная идея модифицированного спектрального подхода заключается в замене точной системы бесконечного числа уравнений (п.15) приближенной системой для амплитуд первых  $N_{\max}$  гармоник

$$\frac{dC_n}{dz} = -inN \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} + \sum_{k=n+1}^{N_{\max}} C_k C_{k-n}^* + \sum_{k=N+1}^{N_{\max}-n} \tilde{C}_k C_{k-n}^* + \left( \frac{A_p}{2\pi} \right)^2 \frac{\exp(in\theta_p)}{n} \sum_{k=N_{\max}+1}^{N_{\max}+n} \frac{1}{k} \right\} \quad (\text{п.17})$$

В правой части (п.17) амплитуды гармоник с номерами  $n > N_{\max}$  на каждом шаге вычислений аппроксимируются их асимптотическими значениями спектра пилообразной волны (п.16). Такая замена позволяет вычислить бесконечные суммы в правой части (п.15) аналитически, а необходимые параметры разрыва  $A_p$  и  $\theta_p$  определяются из значений последних двух спектральных компонент системы  $C_{N_{\max}-1}$  и  $C_{N_{\max}}$  в предположении, что при  $n \approx N_{\max}$  вид спектра уже мало отличается от его высокочастотной асимптотики:

$$A_p = 2\pi N_{\max} |C_{N_{\max}}|, \theta_p = \arg(C_{N_{\max}} / C_{N_{\max}-1}) \quad (\text{п.18})$$

Развитый метод позволяет с высокой точностью моделировать распространение волн с узкими ударными фронтами, используя небольшое количество гармоник  $N_{\max}$ , порядка 30-50. Уравнения (п.17) интегрировались численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности при  $N_{\max}=50$ . Для каждого последующего шага счета по  $z$  значения  $A_s(z)$  и  $\theta_s(z)$  восстанавливались (п.18) из рассчитанных на предыдущем шаге значений коэффициентов  $C_{N_{\max}-1}$  и  $C_{N_{\max}}$ .

Полученное решение дифракционной задачи берется в качестве начального условия для второго этапа учета дифракционных эффектов, описываемых оператором  $L_{\text{диф}}$  :  $\partial C_n / \partial z = i\Delta_{\perp} C_n / 4n$ . Система решается независимо для каждой из гармоник с использованием схемы Кранка - Николсона.

После нахождения амплитуд гармоник может быть рассчитано не только акустическое давление (по формуле (п.13)), но и энергетические характеристики пучка. Например, полную интенсивность в пучке можно найти, суммируя интенсивности гармоник:

$$I(z, R) = 4I_0 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n(z, R)|^2, \quad (\text{п.19})$$

где  $I_0 = p_0^2 / (2\rho_0 c_0)$  - интенсивность на оси пучка на входе в среду.

**Хохлова В.А., Сапожников О.А., Пономарев А.Е., Руденко О.В. Численное моделирование нелинейных и дифракционных эффектов в звуковых пучках.** Методическая разработка специального физического практикума кафедры акустики.— М.: Физический факультет МГУ, 2010, 32 с.

Пособие подготовлено на кафедре акустики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ Российской Федерации.

**Подписано в печать 28.05.2010  
Формат А5. Объем 2 п.л. Тираж 30 экз. Заказ №**

**Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова  
119991, д. 1, стр. 2, ГСП-1, Москва, Ленинские горы**

**Отпечатано в отделе оперативной печати физического факультета**