АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 1998, том 44, № 5, с. 628–633

УДК 534.222

# СИММЕТРИИ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ХОХЛОВА–ЗАБОЛОТСКОЙ

© 1998 г. **А. Г. Кудрявцев, О. А. Сапожников**

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет*
*119899 Москва, Воробьевы горы*
*E-mail: olegs@na.phys.msu.su*

Поступила в редакцию 11.06.97 г.

Представлены результаты группового анализа трехмерного обобщенного уравнения Хохлова–Заболотской (ХЗ), описывающего интенсивные акустические пучки. Вычислены группы всех точечных преобразований симметрии уравнения при произвольном виде нелинейности среды. Многие из полученных преобразований были неизвестны ранее. Наряду с уравнением ХЗ, описывающим акустическое давление или колебательную скорость, рассмотрено связанное с ним уравнение для смещений частиц среды. Для этого уравнения также получены все возможные точечные симметрии. Показано, что часть точечных преобразований рассмотренных уравнений допускается при произвольной нелинейности среды; ряд симметрий, напротив, имеет место лишь для специальных видов нелинейности. Проведено обсуждение физического смысла найденных симметрий.

Базовым уравнением в нелинейной теории акустических пучков в квадратично нелинейных средах является уравнение Хохлова–Заболотской (ХЗ) [1]. Будучи обобщенным на случай среды с нелинейностью общего вида, в безразмерных обозначениях оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial u}{\partial z}+P(u)\frac{\partial u}{\partial\tau}\right]=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (1)$$

где $u$ – функция, описывающая профиль волны, $\tau$ – "бегущее" время, $z$ – продольная (вдоль оси пучка) координата, $x$ и $y$ – поперечные координаты. В отсутствие дифракции уравнение (1) превращается в уравнение Римана $\partial u/\partial z + P\partial u/\partial\tau = 0$, т.е. $P(u)$ характеризует нелинейную добавку к линейной скорости волны. Для звуковых пучков в жидкостях и газах $u$ – колебательная скорость или акустическое давление, нелинейность является квадратичной: $P(u) = u$. Уравнение (1) в этом случае было впервые получено в работе [1] и названо впоследствии уравнением Хохлова–Заболотской [2]. Можно показать, что обобщенное уравнение ХЗ является квазиоптическим приближением нелинейного волнового уравнения вида

$$\Delta u-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 N(u)}{\partial t^2},$$

где правая часть может также иметь вид смешанной производной по пространству и времени, либо второй производной по пространству от нелинейной функции $N(u)$. Функция $P$, входящая в уравнение (1), пропорциональна производной функции $N$ по аргументу. Указанная связь обобщенного уравнения ХЗ с нелинейным волновым уравнением означает, что уравнение (1) описывает пучки волн разной природы. Наряду с упомянутым случаем квадратично нелинейных сред практический интерес представляет также случай кубичной нелинейности $P(u) = u^2$, который имеет отношение к оптическим пучкам [3–5], а также к пучкам сдвиговых акустических волн в твердых телах [6, 7]. Кроме того, уравнение (1) описывает некоторые режимы потенциального околозвукового течения газа; в газодинамике оно было предложено задолго до появления работы [1] и известно под названием уравнения Линя–Рейсснера–Цяня [8].

В силу нелинейности уравнения (1) его решение в общем случае может быть получено лишь численно. Подобный расчет, однако, требует больших затрат машинного времени и не всегда возможен. Поэтому важны и дополнительные подходы к анализу уравнения ХЗ. Наряду с различными приближенными методами упрощения интерес может представить поиск симметрий этого нелинейного уравнения, которые позволяют выявить как некоторые общие свойства его решений, так и находить определенные классы точных решений и законы сохранения. В качестве примера такого подхода можно привести известную теорию подобия и размерностей, использующую инвариантность уравнения относительно согласованного растяжения координат и самой функции $u$. Класс симметрий дифференциальных уравнений часто является более широким, чем это следует из соотношений подобия. Для их нахождения существует известная техника, связанная с групповым анализом дифференциальных уравнений [8–11]. Начало исследованию симметрий уравнения ХЗ было положено в статье [12], посвященной двумерному уравнению при квадратичном характере нелинейности ($\partial/\partial y = 0$, $P(u) = u$). Другой подход, связывающий в соответствующем пределе двумерное уравнение ХЗ с уравнением Кадомцева–Петвиашвили, рассматривался в работе [13]. Проведенный к настоящему времени групповой анализ двумерного и трехмерного уравнений ХЗ ограничивается случаем $P(u) = u$, соответствующие результаты приведены в справочнике [14].

Целью настоящей работы являлось вычисление группы всех точечных (классических) симметрий трехмерного уравнения ХЗ (1) и связанного с ним уравнения (3) (см. ниже) при произвольной гладкой функции $P(u)$.

Заметим, прежде всего, что если две функции $P_1(u)$ и $P_2(u)$ связаны между собой преобразованием вида $P_1(u) = aP_2(u+b) + c$, где $a, b, c$ – произвольные константы ($a \neq 0$), то соответствующие случаи можно не различать. Действительно, производя в уравнении (1), содержащем функцию $P_1(u)$, замену переменных $\bar{\tau} = \tau - cz$, $\bar{z} = az$, $\bar{x} = \sqrt{a}x$, $\bar{y} = \sqrt{a}y$, $\bar{u} = u + b$, придем к уравнению (1) с нелинейностью $P_2(\bar{u})$. Поэтому, например, нелинейность $P(u) = \alpha_0 + \alpha_1 u$ ($\alpha_1 \neq 0$) эквивалентна нелинейности $P(u) = u$, нелинейность $P(u) = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2$ ($\alpha_2 \neq 0$) – нелинейности $P(u) = u^2$, нелинейность $u/(1-u)$ – нелинейности $u^{-1}$, где $\alpha_i$ – любые константы и т.д.

Уравнение (1) можно представить также в несколько ином виде. Наряду с функцией $u$ будем использовать связанную с ней величину

$$w = \int_{\tau_*}^{\tau} u d\tau', \tag{2}$$

где $\tau_*$ – некоторый фиксированный момент времени, зависящий, вообще говоря, от координат $x$, $y$, $z$. Если $u$ – колебательная скорость, то $w$ имеет смысл смещения частиц среды относительно их положения в момент времени $\tau = \tau_*$. Кроме того, введем новые обозначения для независимых переменных: $x_0 = z$, $x_1 = \tau$, $x_2 = x$, $x_3 = y$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\partial^2 w/\partial x_0 \partial x_1 + P(\partial w/\partial x_1)\partial^2 w/(\partial x_1^2) - \\ - \partial^2 w/\partial x_2^2 - \partial^2 w/\partial x_3^2 = C(x_0, x_2, x_3),$$

где $C$ – некоторая произвольная функция. Эту функцию без ограничения общности можно положить равной нулю, поскольку она устраняется переходом от функции $w$ к новой функции $w' = w + v(x_0, x_2, x_3)$, где $v$ – решение уравнения Пуассона $\partial^2 v/\partial x_2^2 + \partial^2 v/\partial x_3^2 = C(x_0, x_2, x_3)$. Указанная замена соответствует подходящему выбору $\tau_*$ в соотношении (2). Вводя обозначения $w_\mu \equiv \partial w/\partial x_\mu$, $w_{\mu\nu} = \partial^2 w/\partial x_\mu \partial x_\nu$, запишем получившееся уравнение в виде:

$$w_{01} + P(w_1)w_{11} - w_{22} - w_{33} = 0. \tag{3}$$

В данной работе приводятся результаты вычисления групп точечных симметрий для уравнений (1) и (3). Строгие математические определения и техника вычислений точечных симметрий изложены в [8–11]. Здесь, имея в виду читателя-нематематика, отметим, что на физическом уровне строгости точечной симметрией дифференциального уравнения (3) можно назвать множество зависящих от непрерывного параметра $\lambda$ обратимых преобразований переменных вида:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\mu &= X_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3, w; \lambda), \\ \tilde{w} &= W(x_0, x_1, x_2, x_3, w; \lambda), \end{aligned} \tag{4}$$

которые переводят решение уравнения (3) опять в решение этого уравнения, т.е. новая функция $\tilde{w}$, рассматриваемая как функция новых переменных $\tilde{x}_\mu$, является решением уравнения (3). Если при $\lambda = 0$ преобразование является тождественным, то в первом порядке по $\lambda$ имеем так называемые инфинитезимальные преобразования

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\mu &= x_\mu + \lambda\varphi_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3, w), \\ \tilde{w} &= w + \lambda\psi(x_0, x_1, x_2, x_3, w), \end{aligned} \tag{5}$$

где функции $\varphi_\mu$ и $\psi$ задают компоненты касательного векторного поля группы точечных симметрий. По известным $\varphi_\mu$ и $\psi$ могут быть восстановлены соответствующие конечные преобразования (4) с помощью решения уравнений Ли:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_\mu}{d\lambda} &= \varphi_\mu(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{w}), \\ \frac{d\tilde{w}}{d\lambda} &= \psi(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{w}), \end{aligned} \tag{6}$$

с начальными ($\lambda = 0$) условиями $\tilde{x}_\mu = x_\mu$, $\tilde{w} = w$.

Для уравнения (1) все аналогично. Например, инфинитезимальные преобразования группы точечных симметрий (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\mu &= x_\mu + \lambda\vartheta_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3, u), \\ \tilde{u} &= u + \lambda\eta(x_0, x_1, x_2, x_3, u), \end{aligned}$$

Техника группового анализа [8–11] позволяет вычислять компоненты касательного векторного поля группы симметрии. Результаты проведенных нами вычислений для групп точечных симметрий уравнений (1) и (3) собраны в табл. 1, 2 и 3.

**Таблица 1.** Касательные векторы групп симметрий обобщенного уравнения ХЗ при произвольном виде нелинейности $P(u)$. В симметрии № 8 функция $\Phi(x_0, x_2, x_3)$ – произвольное решение уравнения Лапласа $(\partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2)\Phi = 0$

| N | $\varphi_0$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ | $\varphi_3$ | $\Psi$ | $\eta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $w$ | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | $x_2/2$ | $x_0$ | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | $x_3/2$ | 0 | $x_0$ | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | $x_3$ | $-x_2$ | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\Phi(x_0, x_2, x_3)$ | 0 |

Оказалось, что функции $\varphi_\mu$ и $\vartheta_\mu$ совпадают, поэтому приводятся только $\varphi_\mu$.

Обсудим полученные результаты вычисления точечных симметрий для уравнений (1) и (3). Таблица 1 описывает симметрии, не зависящие от вида нелинейности. В табл. 2 даны касательные векторы групп симметрий, допускаемые только в линейном случае. Наиболее интересные результаты собраны в табл. 3, где помещены касательные векторы групп симметрий, допускаемые лишь для специальных видов нелинейности.

Приведенные в табл. 1–3 касательные векторы групп описывают инфинитезимальные преобразования. Путем интегрирования уравнений Ли (6) были рассчитаны и конечные преобразования, в которых параметр $\lambda$ является произвольным. Конечные преобразования, соответствующие касательным векторам табл. 1, выписаны в табл. 4. Примечательно, что, не считая симметрии № 0, все они связаны с инвариантностью уравнений (1) и (3) относительно геометрических преобразований: сдвигов (№ 1–4) и поворотов (№ 5–7). Симметрия № 8 задает тождественное преобразование уравнения (1), т.е. не представляет интереса. Конечные преобразования для касательных векторов из табл. 2 тоже были рассчитаны, но здесь не приводятся, так как уравнение ХЗ в этом случае является линейным.

Конечные преобразования, соответствующие табл. 3, выписаны в Приложении. Как видно из получившихся выражений, симметрия № 17 может быть названа "линзовым преобразованием", поскольку конечное преобразование при $x_0 = 0$ задает параболическую фазовую добавку к координате $x_1$, не меняя остальных координат и функции $w$. Такое инвариантное преобразование было получено в работе [4] при исследовании самофокусировки пучков в кубично нелинейной среде. Симметрия № 18 задает аналог линзового преобразования в случае квадратичной нелинейности. Симметрия № 19 описывает галилееву инвариантность, функция $h$ задает сдвиг координаты $x_1$, произвольным образом зависящий от координаты $x_0$. Заметим, что симметрия № 2 является частным случаем данной симметрии при $h$ = const. Преобразования № 20 и № 21 описывают повороты в плоскостях $(x_1, x_2)$ и $(x_1, x_3)$ соответственно; при этом углы поворотов пропорциональны величинам $q$ и $g$, произвольным образом зависящим от координаты $x_0$. Симметрии № 3 и № 4 являются ча-

**Таблица 2.** Касательные векторы групп симметрий обобщенного уравнения ХЗ, имеющих место только в линейном случае $P(u) \equiv 0$. В симметрии № 16 функция $\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ – произвольное решение линейного уравнения $\partial^2\Psi/\partial x_0 \partial x_1 = \partial^2\Psi/\partial x_2^2 + \partial^2\Psi/\partial x_3^2$. Кроме указанных, в линейном случае имеют место все симметрии из табл. 1, а также симметрия № 17, включенная в табл. 3

| N | $\varphi_0$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ | $\varphi_3$ | $\Psi$ | $\eta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | $x_0x_2$ | $x_1x_2$ | $2x_0x_1 + \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2)$ | $x_2x_3$ | $-x_2w$ | $-x_2u$ |
| 10 | $x_0x_3$ | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ | $2x_0x_1 + \frac{1}{2}(x_3^2 - x_2^2)$ | $-x_3w$ | $-x_3u$ |
| 11 | $-\frac{1}{4}(x_2^2 + x_3^2)$ | $-x_1^2$ | $-x_1x_2$ | $-x_1x_3$ | $x_1w$ | $x_1u$ |
| 12 | $x_2/2$ | 0 | $x_1$ | 0 | 0 | 0 |
| 13 | $x_3/2$ | 0 | 0 | $x_1$ | 0 | 0 |
| 14 | $3x_0$ | $-x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $-w$ | $-u$ |
| 15 | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $-w$ | $-u$ |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ | $\Psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ |

**Таблица 3.** Касательные векторы групп симметрий обобщенного уравнения ХЗ, имеющих место лишь для некоторых видов нелинейности $P(u)$. В симметриях № 19–21 $h$, $q$ и $g$ – произвольные функции координаты $x_0$, точка обозначает производную по аргументу. В симметрии № 22 $\alpha$ – произвольная ненулевая константа

| N | $\varphi_0$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ | $\varphi_3$ | $\Psi$ | $\eta$ | $P(u)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | $-x_0^2$ | $-\frac{x_2^2+x_3^2}{4}$ | $-x_0x_2$ | $-x_0x_3$ | $x_0w$ | $x_0u$ | $P(u)\equiv$ или $P(u)=u^2$ |
| 18 | $-x_0^2$ | $-\frac{2}{5}x_0x_1-\frac{3}{10}(x_2^2+x_3^2)$ | $-\frac{6}{5}x_0x_2$ | $-\frac{6}{5}x_0x_3$ | $\frac{6}{5}x_0w-\frac{1}{5}x_1^2$ | $\frac{8}{5}x_0u-\frac{2}{5}x_1$ | $P(u)=u$ |
| 19 | 0 | $h(x_0)$ | 0 | 0 | $\dot{h}x_1+\frac{\ddot{h}}{4}(x_2^2+x_3^2)$ | $\dot{h}$ | $P(u)=u$ |
| 20 | 0 | $\frac{\dot{q}}{2}x_2$ | $q(x_0)$ | 0 | $\frac{\ddot{q}}{2}x_1x_2+\frac{\dddot{q}}{12}x_2^3$ | $\frac{\ddot{q}}{2}x_2$ | $P(u)=u$ |
| 21 | 0 | $\frac{\dot{g}}{2}x_3$ | 0 | $g(x_0)$ | $\frac{\ddot{g}}{2}x_1x_3+\frac{\dddot{g}}{12}x_2^3$ | $\frac{\ddot{g}}{2}x_3$ | $P(u)=u$ |
| 22 | $(2+3\alpha)x_0$ | $(2-\alpha)x_1$ | $(2+\alpha)x_2$ | $(2+\alpha)x_3$ | $-(2+\alpha)w$ | $-4u$ | $P(u)=u^{\alpha}$ |
| 23 | $3x_0$ | $-x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $-w-4x_1$ | $-4$ | $P(u)=\exp(u)$ |
| 24 | $x_0$ | $x_1-2x_0$ | $x_2$ | $x_3$ | $-w$ | $-2u$ | $P(u)=\ln(u)$ |

стными случаями данных симметрий при $q = \text{const}$ и $g = \text{const}$, а симметрии № 5 и № 6 – при $q = x_0$ и $g = x_0$. Симметрии № 22–24 отвечают преобразованиям растяжений.

Многие из приведенных выше симметрий для трехмерного уравнения Хохлова–Заболотской ранее не были известны. До сих пор групповой анализ уравнения ХЗ проводился только для случая квадратичной нелинейности [4]. В настоящей работе групповая классификация уравнения ХЗ проведена при произвольном виде нелинейного члена, т.е. вычислены все возможные точечные симметрии обобщенного уравнения ХЗ. Показано, что некоторые симметрии не зависят от вида нелинейности; ряд симметрий, напротив, имеет место лишь для специальных видов нелинейности. Наряду с уравнением ХЗ рассмотрено уравнение, получающееся из него однократным интегрированием по времени. Для него также получены все точечные симметрии при произвольном виде нелинейности. Вычисленные симметрии могут быть использованы для поиска точных решений и законов сохранения уравнений (1) и (3). Соответствующие результаты будут изложены в следующей статье авторов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 98-02-17318) и CRDF (код проекта RB2-131). Авторы признательны В.А. Красильникову и О.В. Руденко за сделанные замечания.

**Приложение.** Конечные преобразования, соответствующие табл. 3.

Симметрия № 17:

$$U = u(1+\lambda x_0), \quad W = w(1+\lambda x_0),$$

$$X_0 = x_0/(1+\lambda x_0),$$

$$X_1 = x_1 \frac{\lambda}{4}\frac{x_2^2+x_3^2}{1+\lambda x_0}, \quad X_2 = x_2/(1+\lambda x_0),$$

$$X_3 = x_3/(1+\lambda x_0).$$

Симметрия № 18:

$$U = u(1+\lambda x_0)^{8/5} - \frac{2}{5}\lambda x_1(1+\lambda x_0)^{3/5} + \frac{3}{50}\frac{\lambda^2(x_2^2+x_3^2)}{(1+\lambda x_0)^{2/5}},$$

$$W = w(1+\lambda x_0)^{6/5} - \frac{1}{5}\lambda x_1^2(1+\lambda x_0)^{1/5} +$$

$$+\frac{3}{50}\frac{\lambda^2 x_1(x_2^2+x_3^2)}{(1+\lambda x_0)^{4/5}} - \frac{3}{500}\frac{\lambda^3(x_2^2+x_3^2)^2}{(1+\lambda x_0)^{9/5}},$$

$$X_0 = x_0/(1+\lambda x_0),$$

$$X_1 = \frac{x_1}{(1+\lambda x_0)^{2/5}} - \frac{3}{10}\lambda\frac{x_2^2+x_3^2}{(1+\lambda x_0)^{7/5}},$$

$$X_2 = x_2/(1+\lambda x_0)^{6/5}, \quad X_3 = x_3/(1+\lambda x_0)^{6/5}$$

**Таблица 4.** Конечные симметрии обобщенного уравнения ХЗ, имеющие место при любом виде нелинейности $P(u)$

| N | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $W$ | $U$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_0e^{\lambda}$ | $x_1e^{\lambda}$ | $x_2e^{\lambda}$ | $x_3e^{\lambda}$ | $we^{\lambda}$ | $u$ |
| 1 | $x_0+\lambda$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $w$ | $u$ |
| 2 | $x_0$ | $x_1+\lambda$ | $x_2$ | $x_3$ | $w$ | $u$ |
| 3 | $x_0$ | $x_1$ | $x_2+\lambda$ | $x_3$ | $w$ | $u$ |
| 4 | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3+\lambda$ | $w$ | $u$ |
| 5 | $x_0$ | $x_1+\frac{\lambda}{2}x_2+\frac{\lambda^2}{4}x_0$ | $x_2+\lambda x_0$ | $x_3$ | $w$ | $u$ |
| 6 | $x_0$ | $x_1+\frac{\lambda}{2}x_3+\frac{\lambda^2}{4}x_0$ | $x_2$ | $x_3+\lambda x_0$ | $w$ | $u$ |
| 7 | $x_0$ | $x_1$ | $x_2\cos\lambda+x_3\sin\lambda$ | $-x_2\sin\lambda+x_3\cos\lambda$ | $w$ | $u$ |
| 8 | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $w+\lambda\Phi(x_0,x_2,x_3)$ | $u$ |

Симметрия № 19:

$$U = u+\dot{H},\quad W = w+\dot{H}x_1+\frac{H\ddot{H}}{2}+\frac{\ddot{H}}{4}(x_2^2+x_3^2),$$

$$X_0 = x_0,\quad X_1 = x_1+H,\quad X_2 = x_2,$$

$$X_3 = x_3,\ \text{где}\ H(x_0) = \lambda h(x_0).$$

Симметрия № 20:

$$U = u+\frac{\dot{Q}}{2}x_2+\frac{Q\dot{Q}}{4},$$

$$W = w+\frac{\dot{Q}}{2}\left(x_1x_2+\frac{Q}{2}x_1+\frac{\dot{Q}}{4}x_2^2+\frac{Q\dot{Q}}{4}x_2+\frac{Q^2\dot{Q}}{16}\right)+$$

$$+\frac{1}{48}\frac{\dot{Q}}{Q}[(x_2+Q)^4-x_2^4],$$

$$X_0 = x_0,\quad X_1 = x_1+\frac{Q}{2}x_2+\frac{QQ}{4},$$

$$X_2 = x_2+Q,\quad X_3 = x_3,\ \text{где}\ Q(x_0) = \lambda q(x_0).$$

Симметрия № 21:

$$U = u+\frac{\ddot{G}}{2}x_3+\frac{G\ddot{G}}{4},$$

$$W = w+\frac{\ddot{G}}{2}\left(x_1x_3+\frac{G}{2}x_1+\frac{\dot{G}}{4}x_3^2+\frac{G\dot{G}}{4}x_3+\frac{G^2\dot{G}}{16}\right)+$$

$$+\frac{1}{48}\frac{\dot{G}}{G}[(x_3+G)^4-x_3^4],$$

$$X_0 = x_0,\quad X_1 = x_1+\frac{\dot{G}}{2}x_3+\frac{G\dot{G}}{4},$$

$$X_2 = x_2,\quad X_3 = x_3+G,\ \text{где}\ G(x_0) = \lambda g(x_0).$$

Симметрия № 22:

$$U = u\exp(-4\lambda),\quad W = w\exp[-(2+\alpha)\lambda],$$

$$X_0 = x_0\exp[(2+3\alpha)\lambda],\quad X_1 = x_1\exp[(2-\alpha)\lambda],$$

$$X_2 = x_2\exp[(2+\alpha)\lambda],\quad X_3 = x_3\exp[(2+\alpha)\lambda]$$

Симметрия № 23:

$$U = u-4\lambda,\quad W = (w-4\lambda x_1)\exp(-\lambda),$$

$$X_0 = x_0\exp(3\lambda),\quad X_1 = x_1\exp(-\lambda),$$

$$X_2 = x_2\exp(\lambda),\quad X_3 = x_3\exp(\lambda),$$

Симметрия № 24:

$$U = u\exp(-2\lambda),\quad W = w\exp(-\lambda),$$

$$X_0 = x_0\exp(\lambda),\quad X_1 = (x_1-2\lambda x_0)\exp(\lambda),$$

$$X_2 = x_2\exp(\lambda),\quad X_3 = x_3\exp(\lambda).$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Заболотская Е.А., Хохлов Р.В.* Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акуст. журн. 1969. Т. 15. № 1. С. 40–47.
2. *Новиков Б.К., Руденко О.В., Солуян С.И.* Анализ параметрического излучателя ультразвука методом нелинейного уравнения Хохлова–Заболотской // Программа VIII Всесоюз. совещания по квантовой акустике и акустоэлектронике. Казань, 1974.
3. *Руденко О.В., Сапожников О.А.* Мощные акустические пучки: самовоздействие разрывных волн, фокусировка импульсов и экстракорпоральная литотрипсия // Вестник Моск. ун-та, сер. 3. Физ. Астр. 1991. Т. 32. № 1. С. 3–17.
4. *Руденко О.В., Сапожников О.А.* Безынерционная самофокусировка недиспергирующих волн с ши-

роким спектром // Квантовая электроника. 1993. Т. 20. № 10. С. 1028–1030.

5. *Руденко О.В., Сапожников О.А.* Волновые пучки в кубично-нелинейных средах без дисперсии // ЖЭТФ. 1994. Т. 106. № 2(8). С. 395–413.
6. *Planat M., Hoummady M.* Observation of soliton-like envelope modulations generated in an anisotropic quartz plate by metallic interdigital transducers // Appl. Phys. Lett. 1989. V. 55. № 2. P. 103–105.
7. *Mozhaev V.* Effects of self-action-unexplored fields of nonlinear acoustics of solid surfaces // In Physical Acoustics, ed. by O.Leroy and M.A. Breazeale: Plenum Press, NY, 1991. P. 523–527.
8. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
10. *Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.
11. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
12. *Виноградов А.М., Воробьев Е.М.* Применение симметрий для нахождения точных решений уравнения Хохлова–Заболотской // Акуст. журн. 1976. Т. 22. № 1. С. 23–27.
13. *Kodama Y.* A method for solving the dispersionless KP equation and its exact solutions // Phys. Lett. A. 1988. V. 129. № 4. P. 223–226.
14. C.R.C. Handbook of Lie group analysis of differential equations, ed. by N.H. Ibragimov. V. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws (1994). V. 2. Application in engineering and physical sciences (1995). V. 3. New trends in theoretical developments and computational methods (1996) // C.R.C. Press, Boca Raton, Florida, USA.

# Symmetries of the Generalized Khokhlov–Zabolotskaya Equation

**A. G. Kudryavtsev and O. A. Sapozhnikov**

Results of the group analysis of the generalized Khokhlov–Zabolotskaya (KZ) equation describing powerful acoustic beams are presented. Groups of all point symmetry transformations of the equation are calculated for a medium with an arbitrary type of nonlinearity. Many of the transformations obtained were unknown previously. Along with the KZ equation describing the acoustic pressure or the oscillation velocity, an related equation describing the displacement of the particles of the medium is considered. All possible point symmetries are also obtained for this equation. It is demonstrated that part of the point symmetry transformations of the equations under study is allowed in the case of an arbitrary nonlinearity of the medium, while some symmetries exist for some special types of nonlinearity. The physical meaning of the symmetries is discussed.