МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Гаргянц Александр Георгиевич

Некоторые вопросы теории показателей Перрона решений дифференциальных систем

Специальность 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре Дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель: **Сергеев Игорь Николаевич,**
доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», кафедра Дифференциальных уравнений механико-математического факультета, профессор

Официальные оппоненты: **Ильин Александр Владимирович,**
доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», кафедра Нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики, профессор

Попова Светлана Николаевна,
доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», кафедра Дифференциальных уравнений Института математики, информационных технологий и физики, заведующий кафедрой

Салова Татьяна Валентиновна,
кандидат физико-математических наук, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», кафедра Математического анализа механико-математического факультета, доцент

Защита диссертации состоится «6» ноября 2019 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.09 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, строение 52, факультет ВМК, комната 685

E-mail: ilgova@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/230929648/

Автореферат разослан «   »   2019 года

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.09
доктор физико-математических наук,
профессор   Захаров Е. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Среди многочисленных направлений качественной теории дифференциальных уравнений теория устойчивости решений дифференциальных систем занимает особое место в силу присущего ей сочетания теоретической значимости с близостью к практическим приложениям. А. М. Ляпуновым [31] в рамках предложенного им так называемого первого метода исследования устойчивости обыкновенных дифференциальных систем была разработана теория характеристических показателей, получившая развитие в работах многих авторов. Приведём далеко не полный список тех из них, кто внёс существенный вклад в эту теорию: Р. Э. Виноград [14, 15], Б. Ф. Былов [7, 8], В. М. Миллионщиков [36–38], Н. А. Изобов [21, 25, 26], М. И. Рахимбердиев [45, 46], И. Н. Сергеев [47, 48], А. В. Ильин [29, 30], Е. А. Барабанов [4, 5], С. Н. Попова [43, 44], Е. К. Макаров [33,34], О. И. Морозов [41,42], А. С. Фурсов [57,58], А. Н. Ветохин [12,13], В. В. Быков [9,10], Ю. И. Дементьев [16,17] и другие. Здесь указаны далеко не все работы каждого автора, а исчерпывающую (на настоящий момент) библиографию по этим вопросам можно найти в обзорах [24,28] и монографиях [6,19].

Теория характеристических показателей идейно восходит к оценкам роста нормы решения системы в специальных упорядоченных шкалах, в качестве которых, как правило, выбираются экспоненциальные. Введённый самим А. М. Ляпуновым (1892 г.) показатель, называющийся сейчас верхним характеристическим, оценивает сверху рост нормы решения в экспоненциальной шкале. Этот показатель активно используется при исследовании устойчивости и неустойчивости по Ляпунову решений систем и детально изучен к настоящему времени. Вслед за верхним характеристическим позже были определены и другие показатели: нижние характеристические показатели Перрона [64], степенные показатели Демидовича [18], экспоненциальные и σ-показатели Изобова [23, 26], центральные показатели Винограда–Миллионщикова [15], генеральные (особые) показатели Боля–Персидского [19,59], вспомогательные показатели Миллионщикова [39, 40].

Возникший, таким образом, целый набор показателей ляпуновского типа отвечает на разнообразные вопросы о свойствах решений линейных систем, начиная от исследования различных типов устойчивости и заканчивая изучением зависимости асимптотических характеристик решений от возмущений системы. Ближайшим к исходному показателю Ляпунова, по-видимому, является нижний характеристический показатель Перрона, оценивающий снизу рост нормы решения дифференциальной системы в экспоненциальной шкале. Этот показатель применяется для изучения неустойчивости решений по Ляпунову и устойчивости по Перрону [53, 54]. Показатель Перрона исследовался в работах О. Перрона [64], Н. А. Изобова [21, 22, 27], Е. А. Барабанова [1–4], И. Н. Сергеева [49, 50, 53, 54], А. В. Филипцова [55, 56], A. Czornik [60, 61], M. Niezabitowski [62, 63] (более полные библиографии по этому вопросу можно найти, например, в обзорах [24, 28] и монографии [19]).

Нижний характеристический показатель был впервые введён О. Перроном в 1930 году в работе [64]. Там же автором было подмечено одно из принципиальных отличий введённого показателя от верхнего характеристического. Как известно [6, §3], набор значений показателя Ляпунова на ненулевых решениях фиксированной n-мерной системы состоит из не более чем n различных чисел. В статье [64] О. Перрон приводит пример двумерной диагональной системы, на решениях которой нижний характеристический показатель принимает три различных числовых значения.

Исследования свойств спектра (множества значений) показателя Перрона на множестве решений заданной системы продолжились во второй половине XX века белорусской школой математиков. Н. А. Изобов в работах [20, 21] показал, что n-мерная диагональная система имеет не более $2^n - 1$ нетривиальных решений с попарно различными значениями нижнего показателя. Достижимость этой оценки для произвольной размерности (для случая $n = 3$ она была установлена уже в работе [20]) была доказана Е. А. Барабановым в статье [1].

В работе [20] Н. А. Изобовым приводится пример недиагональной системы с неограниченными коэффициентами, имеющей континуум нетривиальных решений с попарно различными значениями нижнего показателя, а в статье [21] удаётся реализовать континуальный спектр показателя Перрона на решениях ограниченной двумерной системы.

При этом оказывается, что спектр показателя Перрона линейной системы, рассматриваемый как подмножество числовой прямой, может быть устроен довольно разнообразно. В работе [21] Н. А. Изобов доказал, что спектр нижнего характеристического показателя системы с неограниченными коэффициентами может быть числовым подмножеством положительной меры Лебега, а в работе [22] построил двумерную ограниченную систему, нижние показатели решений которой заполняют целиком отрезок $[0, 1]$.

Окончательно вопрос о структуре спектра показателя Перрона линейной системы с ограниченными коэффициентами был решён Е. А. Барабановым. В статье [2] им было доказано, что спектр нижнего характеристического показателя такой системы может совпадать с любым ограниченным и замкнутым сверху суслинским подмножеством числовой прямой. Развитие этого результата на случай некоторых нелинейных систем приводится в работе [4].

Учитывая то, что спектр показателя Перрона линейной даже ограниченной системы может быть устроен крайне сложно, особый интерес представляет вопрос о распределении значений показателя Перрона по решениям заданной системы.

Как известно [6,19], почти на всех решениях заданной линейной системы реализуется максимальное на пространстве её решений значение показателя Ляпунова. Оказалось [3,21,27], что схожим свойством обладает и показатель Перрона: почти все по мере Лебега решения n-мерной ограниченной системы, начинающиеся на k-мерной ($k = 1, \ldots, n$) аффинной плоскости, имеют нижний показатель, равный наибольшему из нижних показателей рассматриваемых решений. Аналогичный вопрос для систем с неограниченными на полуоси коэффициентами оставался открытым.

Обобщая указанное свойство распределения значений верхнего и нижнего характеристических показателей по решениям линейных систем с ограниченными коэффициентами, И. Н. Сергеев в работе [51] дал определение метрической типичности и метрической существенности значения произвольного показателя системы. В работе [52] им же предложено альтернативное определение типичности и существенности значения показателя системы с топологической точки зрения. В работах [51,52] были поставлены вопросы о наличии метрической типичности максимального значения показателя Перрона, принимаемого на решениях системы с неограниченными коэффициентами, а также о наличии топологической типичности или хотя бы существенности максимального значения показателя Перрона, принимаемого на решениях ограниченной линейной системы.

Цель работы. Целью настоящей диссертационной работы является исследование свойств распределения значений показателя Перрона по решениям произвольной линейной дифференциальной системы (как с ограниченными, так и с неограниченными коэффициентами) и, в частности, наличия у этого распределения типичных или существенных в метрическом или топологическом смысле значений.

Научная новизна. В диссертации доказаны следующие основные утверждения:

- существуют системы с *ограниченными* коэффициентами, на решениях которых показатель Перрона не имеет *ни одного* топологически типичного и даже *топологически существенного* значения;
- точная верхняя грань показателя Перрона на решениях любой системы с *неположительным* значением показателя Ляпунова её опера-

тор-функции достижима и *метрически типична*;

- существуют системы с *любым* наперёд заданным *положительным* значением показателя Ляпунова их оператор-функций, на решениях которых показатель Перрона не имеет *ни одного* метрически типичного и даже *метрически существенного* значения;
- точная верхняя грань показателя Перрона на решениях любой *диагонализуемой* слабым ляпуновским преобразованием системы достижима и *метрически типична*;
- отображение, сопоставляющее каждому ненулевому решению системы с *неограниченными* коэффициентами значение его показателя Перрона, может оказаться *произвольной непрерывной функцией* с естественными ограничениями.

Методы исследования. В работе применяются аналитические методы качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, линейной алгебры, математического анализа. В доказательствах ряда утверждений используются методы, которые обобщают и развивают техники, предложенные в работах Н. А. Изобова [21, 27].

Положения, выносимые на защиту. В диссертации выносятся на защиту следующие основные положения:

- метод построения линейных дифференциальных систем с ограниченными коэффициентами, на решениях которых показатель Перрона не имеет ни одного топологически существенного значения;
- доказательство достижимости и метрической типичности точной верхней грани показателя Перрона на решениях всякой системы с неположительным значением показателя Ляпунова её оператор-функции;
- метод построения линейных дифференциальных систем с любым наперёд заданным положительным значением показателя Ляпунова их оператор-функций, на решениях которых показатель Перрона не имеет ни одного метрически существенного значения;
- доказательство включения всех непрерывных функций, удовлетворяющих естественным ограничениям, в класс отображений, сопоставляющих ненулевым решениям линейной дифференциальной системы с неограниченными коэффициентами значения их показателей Перрона.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами по качественной теории дифференциальных уравнений.

Апробация работы. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих научных семинарах:

- Семинар по качественной теории дифференциальных уравнений кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ под рук. проф. И. В. Асташовой, проф. А. В. Боровских, проф. Н. Х. Розова, проф. И. Н. Сергеева (неоднократно: 2013–2017 гг.);

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались автором на следующих конференциях:

- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов — 2013» (г. Москва, апрель 2013 г.), присуждена первая премия;
- XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения — 2014» (Республика Беларусь, г. Новополоцк, май 2014 г.);
- II Международная научная конференция «Осенние математические чтения в Адыгее» (г. Майкоп, октябрь 2017 г.);
- XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения — 2018» (Республика Беларусь, г. Гродно, май 2018 г.);
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2018 (г. Суздаль, июль 2018 г.).

Публикации. Личный вклад автора По теме диссертации опубликовано 9 печатных работ. Из них 3 статьи с переводом в научных журналах из списков ВАК, RSCI, SCOPUS, Web of Science, 2 аннотации докладов, 4 статьи в сборниках трудов конференций. Работ в соавторстве нет.

Все представленные в диссертации результаты являются новыми и получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разделённых на параграфы, заключения и списка литературы. Работа изложена на 89 страницах. Библиография содержит 73 наименования.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, определяется цель работы и кратко излагаются основные определения и результаты диссертации.

В работе под $\mathbb{R}^n$ понимается произвольное n-мерное пространство, наделённое евклидовой нормой $|\cdot|$, а под $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ и S^{n-1} — пространство его линейных преобразований с операторной нормой и соответственно единичная сфера с центром в нуле в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для всякого линейного пространства X через X_* в работе обозначается подмножество его ненулевых векторов, а также для каждого вектора $v \in \mathbb{R}^n_*$ через $\operatorname{span}(v)$ обозначается его линейная оболочка. Кроме того, *нетривиальной плоскостью* в линейном пространстве называется любое содержащее более одной точки аффинное подпространство, отличное от одномерной прямой, содержащей нулевой вектор.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{M}^n$ в работе обозначается множество линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^+ \stackrel{\text{def}}{=} [0, +\infty), \tag{1}$$

оператор-функции $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ которых кусочно непрерывны и, вообще говоря, *не ограничены*. Считается, что множество точек разрыва кусочно непрерывного отображения из полупрямой $\mathbb{R}^+$ в нормированное пространство не имеет точек накопления, а само отображение в каждой точке разрыва имеет пределы слева и справа. При этом решениями системы (1) с кусочно непрерывной функцией A по определению считаются только непрерывные кусочно дифференцируемые функции. Каждая система (1) в работе отождествляется с задающей её оператор-функцией A. В частности, пишется $A \in \mathcal{M}^n$ и система называется *ограниченной* (*неограниченной, бесконечно гладкой*), если соответствующим свойством обладает функция A.

Для системы $A \in \mathcal{M}^n$ через $\mathcal{S}(A)$ и $\mathcal{S}_*(A)$ в работе обозначаются множества всех и соответственно всех ненулевых её решений, а через $\iota_A\colon \mathcal{S}(A) \to \mathbb{R}^n$ — естественный линейный изоморфизм, заданный равенством $\iota_A(x) \stackrel{\text{def}}{=} x(0)$, $x \in \mathcal{S}(A)$. Кроме того, полагается

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{A\in\mathcal{M}^n} \mathcal{S}(A), \qquad \mathcal{S}_* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{A\in\mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

Определение 1 [6]. *Показателем Ляпунова* отображения $f\colon \mathbb{R}^+ \to \to X$ полупрямой в пространство X с нормой $|\cdot|$ называется величина $\chi(f)$, заданная равенством

$$\chi(f) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |f(t)|,$$

в котором значение логарифма от нуля полагается равным $-\infty$.

Определение 2 [19,64]. 1. *Показателем Перрона* называется функционал $\pi\colon \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$, заданный равенствами

$$\pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln |x(t)|, \quad x \in \mathcal{S}_*, \qquad \pi(0) \stackrel{\text{def}}{=} -\infty.$$

2. Для системы $A \in \mathcal{M}^n$ назовём отображение $\pi \circ \iota_A^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *распределением показателя Перрона по решениям* этой системы и обозначим его через π_A.

Из определения немедленно вытекает, что показатель Перрона инвариантен относительно умножения функции-аргумента на ненулевые скаляры, а значит, значения функции π_A на всех коллинеарных ненулевых векторах совпадают между собой. Таким образом, функция π_A однозначно определяется своим сужением на сферу S^{n-1}. Более того, в диаметрально противоположных точках этой сферы функция π_A также заведомо принимает одинаковые значения.

Определение 3 [51]. 1. Для отображения $f\colon X \to Y$ измеримого пространства X во множество Y значение $y \in Y$ называется *метрическим типичным* или *метрически существенным,* если полный прообраз $f^{-1}(y) \subset X$ является подмножеством полной меры или соответственно хотя бы содержит подмножество положительной меры в пространстве X.

2. Для системы $A \in \mathcal{M}^n$ и аффинного подпространства $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}(A)$ размерности $k \leqslant n$ величину $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ назовём *метрически типичным* или *метрически существенным на* $\mathcal{P}$ значением показателя Перрона, если это значение метрически типично или соответственно метрически существенно для отображения $\pi_A|_{\iota_A(\mathcal{P})}$ в смысле k-мерной меры Лебега на аффинном подпространстве $\iota_A(\mathcal{P}) \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 4 [52]. 1. Для отображения $f\colon X \to Y$ топологического пространства X во множество Y значение $y \in Y$ называется *топологически типичным* или *топологически существенным,* если дополнение к полному прообразу $f^{-1}(y) \subset X$ во всём пространстве X или соответственно хотя бы в некотором его открытом подмножестве есть множество первой категории Бэра, то есть представимо в виде счётного объединения нигде не плотных множеств.

2. Для системы $A \in \mathcal{M}^n$ и аффинного подпространства $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}(A)$ величину $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ назовём *топологически типичным* или *топологически существенным на* $\mathcal{P}$ значением показателя Перрона, если это значение топологически типично или соответственно топологически существенно для отображения $\pi_A|_{\iota_A(\mathcal{P})}$ аффинного подпространства $\iota_A(\mathcal{P})$ с индуцированной из пространства $\mathbb{R}^n$ топологией.

Из определений немедленно следует, что типичное (в метрическом или топологическом смысле) значение показателя Перрона на некотором подпространстве решений всегда является единственным существенным (в том же смысле), а при отсутствии типичного значения логически возможно наличие бесконечного, но не более чем счётного числа существенных значений.

В **первой главе** исследуются распределения значений показателя Перрона на пространствах решений линейных дифференциальных систем с ограниченными коэффициентами. В работах [21, 27] доказано, что для показателя Перрона системы $A \in \mathcal{M}^n$ с *ограниченными* на полуоси $\mathbb{R}^+$ коэффициентами метрически типичным значением на всяком аффинном подпространстве пространства $\mathcal{S}(A)$ (в том числе и на всём $\mathcal{S}(A)$) является точная верхняя грань показателя Перрона на этом подпространстве. Однако в топологическом смысле точная верхняя грань показателя Перрона на пространстве решений ограниченной системы может не оказаться даже существенным значением.

Основным результатом первой главы является

Теорема 1. *Для любого натурального $n \geqslant 2$ существует система $A \in \mathcal{M}^n$ с ограниченными бесконечно гладкими коэффициентами, на пространстве решений которой у показателя Перрона нет ни одного топологически существенного значения.*

В **параграфе 1** первой главы приводится необходимый для дальнейшего аппарат интегрирования треугольных линейных дифференциальных систем. **Параграф 2** первой главы посвящён построению объектов, использующихся далее в доказательстве теоремы 1. В **параграфе 3** первой главы приводится ряд технических лемм и на основе полученных результатов доказывается теорема 1.

Вторая глава посвящена исследованию точных верхних граней показателя Перрона на пространствах решений линейных дифференциальных систем с неограниченными коэффициентами. В главе показано, что свойство метрической типичности точных верхних граней показателя Перрона на подпространствах решений сохраняется в классе систем, коэффициенты которых, возможно, не ограничены, но растут не слишком быстро.

Основным результатом второй главы является

Теорема 2. *Если для системы $A \in \mathcal{M}^n$ выполняется неравенство $\chi(A) \leqslant 0$, то для всякого аффинного подпространства пространства $\mathcal{S}(A)$ точная верхняя грань показателя Перрона на этом подпространстве является метрически типичным на нём значением.*

В **параграфе 1** второй главы вводятся технические определения и доказываются необходимые для дальнейшего вспомогательные утверждения. **Параграф 2** второй главы посвящён доказательству теоремы 2.

В **третьей главе** исследуется класс отображений, сопоставляющих ненулевому решению линейной дифференциальной системы значение показателя Перрона на нём. Из теоремы 2 следует, что для всякой системы (1), оператор-функция которой имеет неположительный показатель Ляпунова, распределение показателя Перрона по решениям является функцией, постоянной почти всюду по мере Лебега. Оказывается, что для систем с неограниченными коэффициентами произвольного роста это утверждение не выполняется, а класс отображений, являющихся распределениями показателя Перрона по решениям систем (1), довольно широк.

Основным результатом третьей главы является

Теорема 3. *Для любого натурального $n \geqslant 2$ и любой непрерывной функции $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}$, принимающей одинаковые значения в диаметрально противоположных точках, существует такая система $A \in \mathcal{M}^n$ с бесконечно гладкими коэффициентами, что справедливо равенство $\pi_A|_{S^{n-1}} = f$.*

В **параграфе 1** третьей главы доказывается лемма о сглаживании коэффициентов неограниченной системы в классе слабо-ляпуновски приводимых к ней.

Определение 5 [11, определение 2 и замечание 1]. Пусть заданы $n \in \mathbb{N}$, A, $\widetilde{A} \in \mathcal{M}^n$. Для каждого $t \in \mathbb{R}^+$ обозначим через $X(t)$ и $\widetilde{X}(t)$ операторы Коши систем A и соответственно $\widetilde{A}$ с начальным нулевым и конечным t моментами времени. Будем говорить, что система A *слабо-ляпуновски приводима* к системе $\widetilde{A}$, если существует такой невырожденный оператор $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \left(\|L(t)\| + \left\|L^{-1}(t)\right\|\right) \text{ конечен, где } L(t) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{X}(t)CX^{-1}(t),\ t \in \mathbb{R}^+. \quad (2)$$

Непосредственно из определения следует, что слабая ляпуновская приводимость является симметричным отношением для линейных систем.

Условимся далее для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначать через id_n тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$.

Лемма. *Для любой системы $A \in \mathcal{M}^n$ найдётся система $\widetilde{A} \in \mathcal{M}^n$ с бесконечно гладкими коэффициентами, для которой выполнено условие (2) с оператором $C = \mathrm{id}_n$. В частности, система A слаболяпуновски приводима к системе $\widetilde{A}$.*

Параграфы 2 и 3 третьей главы посвящены построению объектов, использующихся в конструкциях заключительной части доказательства. В **параграфе 4** третьей главы на основе полученных результатов доказывается теорема 3.

В **четвёртой главе** развиваются некоторые результаты предыдущих глав. Из теоремы 3, в частности, следует, что на пространстве решений произвольной системы с неограниченными коэффициентами у показателя Перрона может не оказаться метрически типичного значения. При этом, согласно результату теоремы 2, неположительность значения показателя Ляпунова оператор-функции системы является достаточным условием для того, чтобы на всяком аффинном подпространстве её решений метрически типичное значение у показателя Перрона нашлось.

Параграфы 1 и 2 четвёртой главы посвящены доказательству следующей теоремы, которая утверждает, что метрически типичное значение показателя Перрона может отсутствовать на пространстве решений системы со сколь угодно малым положительным значением показателя Ляпунова её оператор-функции.

Теорема 4. *Для любого натурального $n \geqslant 2$ и любого числа $\Lambda > 0$ существует система $A \in \mathcal{M}^n$ с бесконечно гладкими коэффициентами, для которой выполняется оценка $\chi(A) \leqslant \Lambda$, а на всякой нетривиальной плоскости $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}(A)$ в пространстве решений у показателя Перрона нет ни одного метрически существенного значения.*

Необходимость условия нетривиальности плоскости $\mathcal{P}$ в формулировке теоремы следует из того, что на всех ненулевых решениях одномерного линейного подпространства в пространстве $\mathcal{S}(A)$ показатель Перрона принимает одно и то же значение, автоматически являющееся метрически типичным на рассматриваемой прямой решений.

В **параграфе 1** четвёртой главы доказывается вспомогательная лемма об оценке значений показателя Ляпунова оператор-функций систем, построенных в третьей главе. **Параграф 2** четвёртой главы посвящён доказательству теоремы 4.

Несмотря на результат теоремы 4, существует довольно широкий класс систем (в том числе с положительными значениями показателя Ляпунова их оператор-функций), на подпространствах решений которых показатель Перрона имеет метрически типичные значения.

Основным результатом **параграфа 3** четвёртой главы является

Теорема 5. *Если система $A \in \mathcal{M}^n$ слабо-ляпуновски приводима к диагональной, то для всякого аффинного подпространства пространства $\mathcal{S}(A)$ точная верхняя грань показателя Перрона на этом подпространстве является метрически типичным на нём значением.*

В доказательстве теоремы использована техника Н. А. Изобова, применённая им в работах [20, 21] для исследования мощности множества значений показателя Перрона, принимаемых на решениях диагональной системы.

Заключение

В работе изучены свойства возможных распределений показателя Перрона по решениям линейных дифференциальных систем как с ограниченными, так и с неограниченными на временно́й полуоси коэффициентами.

Доказано, что существуют линейные дифференциальные системы с ограниченными коэффициентами, на пространствах решений которых показатель Перрона не имеет ни одного топологически типичного и даже топологически существенного значения.

Доказано, что если показатель Ляпунова нормы оператор-функции линейной дифференциальной системы неположителен, то для любого аффинного подпространства начальных векторов точная верхняя грань показателей Перрона решений, начинающихся на этом подпространстве, достигается, а множество начальных векторов решений с наибольшим показателем Перрона имеет в подпространстве полную меру Лебега. Показано, что аналогичным свойством обладают системы, слабо-ляпуновски приводимые к диагонализуемым.

Доказано, что отображение, сопоставляющее ненулевому решению системы с неограниченными коэффициентами значение его показателя Перрона, может оказаться произвольной непрерывной функцией, постоянной вдоль всякой проходящей через нуль прямой в пространстве решений.

Показано, что существуют системы с любым наперёд заданным положительным показателем Ляпунова их оператор-функций, на всех нетривиальных подпространствах решений которых показатель Перрона не имеет ни одного метрически типичного и даже метрически существенного значения.

Интересным остаётся вопрос о топологической типичности или хотя бы существенности точной верхней грани показателя Перрона на нетривиальных аффинных подпространствах решений систем с ограниченными коэффициентами. Представляет интерес задача о полном исследовании класса возможных распределений показателя Перрона по решениям линейных систем с неограниченными коэффициентами.

Благодарность

Автор глубоко признателен профессору Игорю Николаевичу Сергееву за научное руководство, постоянное внимание и помощь в работе. Автор благодарен также доценту Владимиру Владиславовичу Быкову за полезные замечания.

Работы автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах SCOPUS, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

1. Гаргянц А. Г. О метрической типичности показателя Перрона на решениях неограниченных систем // Дифференц. уравнения (импакт-фактор 0,959). 2014. **50**. № 11. С. 1556–1556. (Gargyants A. On the metric typicality of the Perron exponent on solutions of unbounded systems // Differential Equations (impact-factor 0,659). 2014. **50**. № 11. P. 1557–1558.)

2. Гаргянц А. Г. О метрической типичности старшего показателя Перрона на решениях линейной системы с медленно растущими коэффициентами // Дифференц. уравнения (импакт-фактор 0,959). 2018. **54**. № 8. С. 1011–1017. (Gargyants A. Supremum of the Perron exponent on the solutions of a linear system with slowly growing coefficients is metrically typical // Differential Equations (impact-factor 0,659). 2018. **54**. № 8. P. 993–999.)

3. Гаргянц А. Г. О существовании линейной дифференциальной системы с заданными показателями Перрона // Известия РАН (импакт-фактор 1,047). Серия математическая. 2019. **83**. № 2. С. 21–39. (Gargyants A. On the existence of a linear differential system with given values of the perron exponent // Izvestiya. Mathematics (impact-factor 1,030). 2019. **83**. № 2. P. 214–231.)

Аннотации докладов

1. Гаргянц А. Г. К вопросу о типичности и существенности значений показателя Перрона неограниченных линейных систем // Дифференц. уравнения (импакт-фактор 0,959). 2013. **49**. № 11. С. 1505–1506.

2. Гаргянц А. Г. К вопросу о распределении значений показателя Перрона по решениям систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения (импакт-фактор 0,959). 2017. **53**. № 11. С. 1567.

Статьи в сборниках трудов конференций

1. Гаргянц А. Г. О метрической типичности показателя Перрона линейной дифференциальной системы // XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения — 2014): тезисы докладов, Новополоцк, май 2014 г. **1**. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 2014. С. 31–32.

2. Гаргянц А. Г. О некоторых свойствах показателей Перрона линейных дифференциальных систем // Материалы II Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». **2**. Майкоп: Изд-во АГУ. 2017. С. 81–82.

3. Гаргянц А. Г. О метрической типичности старшего показателя Перрона на решениях линейной системы с медленно растущими коэффициентами // XVIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения — 2018): тезисы докладов, Гродно, май 2018 г. **1**. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 2018. С. 37–38.

4. Гаргянц А. Г. О распределении значений показателя Перрона по решениям линейных систем с неограниченными коэффициентами // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль, июль 2018. «Аркаим» Владимир. 2018. С. 66—67.

Литература

[1] Барабанов Е. А. Достижимость оценки числа нижних показателей линейной дифференциальной диагональной системы // Докл. АН БССР. 1982. **26**. № 12. С. 1069–1072.

[2] Барабанов Е. А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. **22**. № 11. С. 1843–1853.

[3] Барабанов Е. А. О распределении нижних показателей Перрона линейных дифференциальных систем на прямых фазового пространства // Дифференц. уравнения. 1988. **24**. № 12. С. 2042–2046.

[4] Барабанов Е. А. Строение множеств нижних показателей Перрона // Дифференц. уравнения. 1995. **31**. № 3. С. 393—406.

[5] Барабанов Е. А. О вычислении показателей решений линейных дифференциальных систем по временным геометрическим прогрессиям // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. № 12. С. 1592–1600.

[6] Былов Б. Ф. Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

[7] Былов Б. Ф. Почти приводимые системы. Автореф. дисс. докт. физ.-мат. наук. Мн.: АН БССР, 1966.

[8] Былов Б. Ф. Приведение к блочно-треугольному виду и необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1970. **6**. № 2. С. 243–252.

[9] Быков В. В. Некоторые свойства минорант показателей Ляпунова // Успехи матем. наук. 1996. **51**. Вып. 5. С. 186.

[10] Быков В. В. Классификация Бэра σ-показателей Изобова // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. № 11. С. 1574.

[11] Быков В. В. О классах Бэра ляпуновских инвариантов // Матем. сб. 2017. **208**. № 5. С. 38–62.

[12] Ветохин А. Н. О классах Бэра остаточных функционалов // Дифференц. уравнения. 1995. **31**. № 5. С. 909–910.

[13] Ветохин А. Н. Точный класс Бэра экспоненциального показателя Изобова в равномерной топологии // Дифференц. уравнения. 1999. **35**. № 11. С. 1578–1579.

[14] Виноград Р. Э. Неустойчивость характеристических показателей правильных систем // Докл. АН СССР. 1953. **91**. № 5. С. 999–1002.

[15] Виноград Р. Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Матем. сборник. 1957. **42**. № 2. С. 207–222.

[16] Дементьев Ю. И. О классах Бэра старшего показателя Ляпунова систем, линейно зависящих от параметра // Научн. вест. МГТУ ГА. Серия Матем. 1999. № 16. С. 5–10.

[17] Дементьев Ю. И. Частичные пределы показателей Ляпунова и их достижимость на кривых в окрестности данной системы // Дифференц. уравнения. 2001. **37**. № 11. С. 1577.

[18] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

[19] Изобов Н. А. Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.

[20] Изобов Н. А. О числе нижних показателей решений линейной дифференциальной системы // Докл. АН БССР. 1964. **8**. № 12. С. 761–762.

[21] Изобов Н. А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. **1**. № 4. С. 469–477.

[22] Изобов Н. А. О множестве нижних показателей положительной меры // Дифференц. уравнения. 1968. **4**. № 6. С. 1147—1149.

[23] Изобов Н.А. О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями // Дифференц. уравнения. 1969. **5**. № 7. С. 1186–1192.

[24] Изобов Н. А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. **12**. С. 71–146.

[25] Изобов Н. А. Минимальный показатель двумерной диагональной системы // Дифференц. уравнения. 1976. **12**. № 11. С. 1954–1966.

[26] Изобов Н. А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Докл. АН БССР. 1982. **26**. № 1. С. 5–8.

[27] Изобов Н. А. О мере множества решений линейной системы с наибольшим нижним показателем. // Дифференц. уравнения. 1988. **24**. № 12. С. 2168–2170.

[28] Изобов Н. А. Исследования в Беларуси по теории характеристических показателей Ляпунова и её приложениям // Дифференц. уравнения. 1993. **29**. № 12. С. 2034–2055.

[29] Изобов Н. А., Ильин А. В. Континуальный вариант эффекта Перрона смены значений характеристических показателей // Дифференц. уравнения. 2017. **53**. № 11. С. 1427–1439.

[30] Изобов Н. А., Ильин А. В. Реализация континуального варианта эффекта Перрона смены значений характеристических показателей // Доклады РАН, математика, механика. 2018. **479**. № 4. С. 382–387.

[31] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Череповец: Меркурий–ПРЕСС, 2000.

[32] Мазаник С. А. Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем. БГУ, Минск, 2008.

[33] Макаров Е. К. О линейных системах с множествами неправильности полной меры // Дифференц. уравнения. 1989. **25**. № 2. С. 209–212.

[34] Макаров Е. К. О реализации частичных показателей решений линейных дифференциальных систем на геометрических прогрессиях // Дифференц. уравнения. 1996. **32**. № 12. С. 1710–1711.

[35] Миллионщиков В. М. Системы с интегральной разделённостью всюду плотны в множестве всех линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. **5**. № 7. С. 1167–1170.

[36] Миллионщиков В. М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сибирск. матем. журнал. 1969. **10**. № 1. С. 99–104.

[37] Миллионщиков В. М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. **5**. № 10. С. 1775–1784.

[38] Миллионщиков В. М. Бэровские классы функций и показатели Ляпунова. I // Дифференц. уравнения. 1980. **16**. № 8. С. 1408–1416.

[39] Миллионщиков В. М. Вспомогательные степенные показатели // Дифференц. уравнения. 1992. **28**. № 6. С. 1085.

[40] Миллионщиков В. М. Вспомогательные логарифмические h-показатели // Дифференц. уравнения. 1992. **28**. № 6. С. 1087.

[41] Морозов О. И. Критерий полуустойчивости сверху старшего показателя Ляпунова неоднородной линейной системы // Дифференц. уравнения. 1990. **26**. № 12. С. 2181.

[42] Морозов О. И. Достаточные условия полуустойчивости сверху показателей Ляпунова неоднородных систем // Дифференц. уравнения. 1991. **27**. № 11. С. 2012.

[43] Попова С. Н., Тонков Е. Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1997. **33**. № 2. С. 226–235.

[44] Попова С. Н. О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем // Дифференц. уравнения. 2007. **43**. № 8. С. 1048–1054.

[45] Рахимбердиев М. И. О бэровском классе показателей Ляпунова // Матем. заметки. 1982. **31**. № 6. С. 925–931.

[46] Рахимбердиев М. И. О центральных показателях линейных систем // Дифференц. уравнения. 1983. **19**. № 2. С. 253–259.

[47] Сергеев И. Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 9. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983. С. 111–166.

[48] Сергеев И. Н. Формула для вычисления минимального показателя трёхмерной системы // Дифференц. уравнения. 2000. **36**. № 3. С. 345–354.

[49] Сергеев И. Н. О нижних характеристических показателях Перрона линейных систем // Международная конференция, посвящённая

103-летию со дня рождения И.Г. Петровского: Тез. докл. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2004. С. 199–200.

[50] Сергеев И. Н. Классы Бэра мажоранты старшего и миноранты младшего показателей Перрона линейных систем // Дифференц. уравнения. 2005. **41**. № 11. С. 1576.

[51] Сергеев И. Н. Метрически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2011. **47**. № 11. С. 1661–1662.

[52] Сергеев И. Н. Топологически типичные и существенные значения показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 2012. **48**. № 11. С. 1567–1568.

[53] Сергеев И. Н. Устойчивость по Перрону и её исследование по первому приближению // Доклады Академии наук. 2019. **486**. № 1. С. 20–23.

[54] Сергеев И. Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. **55**. № 5. С. 636–646.

[55] Филипцов А. В. О достаточных условиях устойчивости нижних показателей линейных систем // Дифференц. уравнения. 1995. **31**. № 9. С. 1493–1497.

[56] Изобов Н. А., Филипцов А. В. О вычислении максимального нижнего показателя Перрона линейной системы // Дифференц. уравнения. 2000. **36**. № 11. С. 1566–1567.

[57] Фурсов А. С. Критерий существования решения с малым ростом у линейной неоднородной системы // Дифференц. уравнения. 1993. **29**. № 11. С. 2011–2012.

[58] Фурсов А. С. Размерность пространства решений медленного роста линейной неоднородной системы // Успехи матем. наук. 1994. **49**. Вып. 4. С. 143.

[59] Bol P. Uber Differentialgleichungen // J. reine and angew. Math. 1913. Bd. 144. S. 284–318.

[60] Czornik A. On the Perron exponents of discrete linear systems // Linear Algebra and its Applications. 2008. **432**. № 1. Pp. 394–401.

[61] Czornik A. Bounds for characteristic exponents of discrete linear time varying systems // Journal of the Franklin Institut. 2010. **347**. № 2. Pp. 502–507.

[62] Czornik A., Klamka J., Niezabitowski M. On the set of Perron exponents of discrete linear systems // Proceedings of the World Congress of the 19th International Federation of Automatic Control 24–29.08.2014. 2014. Pp. 11740–11742.

[63] Niezabitowski M. On the Sequences Realizing Perron and Lyapunov Exponents of Discrete Linear Time-Varying Systems // Mathematical Problems in Engineering. 2016. **2016**. Article ID 1487824, 7 pages.

[64] Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Mathematische Zeitschrift. 1930. Bd. 32. Hft. 5. S. 703–728.