



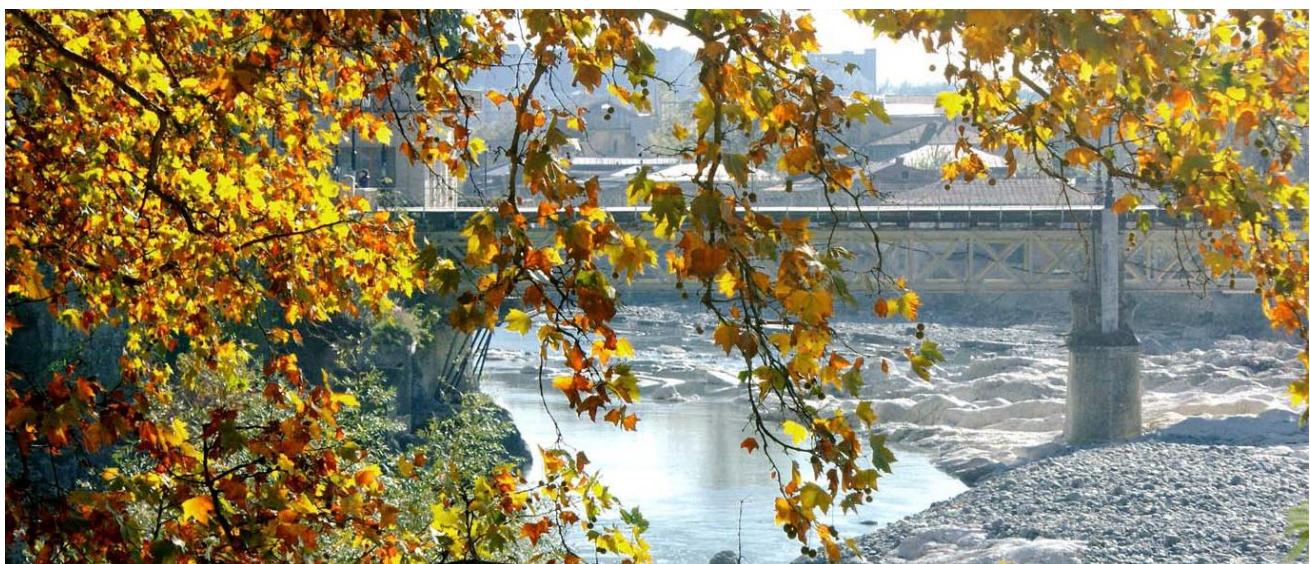
შოთა რუსთაველის ეროვნული  
სამეცნიერო ფონდი  
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL  
SCIENCE FOUNDATION



საქართველოს  
სახალხო მთავრობის  
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია  
**ურთიერთ გარემოთა მექანიკის  
მონათესავე პრობლემები**

International Scientific Workshop  
**Related Problems  
of Continuum Mechanics**



პროგრამა  
PROGRAMME

BOOK OF ABSTRACTS  
თეზისების კრებული

31.10.2019 – 1.11.2019

KUTAISI



შოთა რუსთაველის ეროვნული  
სამეცნიერო ფონდი  
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL  
SCIENCE FOUNDATION



აკაკი ტერეტელის  
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

აკაკი ტერეტელის სახელმწიფო უნივერსიტეტი  
AKAKI TSERETELI STATE UNIVERSITY

## საერთაშორისო სამეცნიერო ვორქშოპი უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მონათესავე პრობლემები

ვორქშოპი ტარდება

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდის ფინანსური  
მხარდაჭერით (DI-2016-41, პროექტი “მათემატიკური მოდელი  
და კომპიუტერული პროგრამები მრავალშრიანი ტექსტილის  
მრავალფუნქციური კვლევისათვის”)

**International Scientific Workshop**

## Related Problems of Continuum Mechanics

**Workshop is held within project “Mathematical Models and Computer Program for Multi-functional Researches of Multi-layer Textile Composites” (DI-2016-41) implementing under financial support of the Shota Rustaveli National Science Foundation (SRNSF)**

ISBN 978-9941-484-85-8

**საერთაშორისო სამეცნიერო ვორქშოპი  
უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მონათესავე პრობლემები**

**International Scientific Workshop  
*Related Problems of Continuum Mechanics***

**31 ოქტომბერი, ხუთშაბათი  
October 31-November 1, 2019**

ბიბლიოთეკის კორპუსი, აწსუ, ქუთაისი, თამარ მეფის ქ., 59  
**Library Building, ATSU, 59, Tamar Mepe str., Kutaisi**

13.00 – 14.00	რეგისტრაცია	Registration
14.00 – 14.15	გახსნა	Opening
14.15 – 15.30	პლენარული სხდომა	Plenary Session
15.30 – 16.00	ლანჩი	Lunch
16.00 – 18.30	პლენარული სხდომა	Plenary Session
19.00	ოფიციალური სადილი	Official Dinner

**1 ნოემბერი, პარასკევი  
Friday, November 1**

აწსუ, VII კორპუსი, ქუთაისი, ახალგაზრდობის გამზ., 98  
**Building VII, ATSU, 98, Akhalgazrdoba ave., Kutaisi**

10.30 – 11.00	რეგისტრაცია	Registration
11.00 – 12.30	პლენარული სხდომა	Plenary Session
12.30 – 13.00	ლანჩი	Lunch
13.00 – 16.30	პლენარული სხდომა	Plenary Session
16.30 - 17.00	დახურვა	Workshop Closing

გახსნა / პლენარული სხდომა  
**OPENING / PLENARY SESSION**

31 ოქტომბერი, ხუთშაბათი  
**Thursday, October 31**

ბიბლიოთეკის კორპუსი, აწსუ, თამარ მეფის ქ., 59  
**Library Building, ATSU, 59 Tamar Mepe str.**

**14.00 - 14.15**

გახსნა  
**Opening**

როლანდ კოპალიანი, აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის რექტორი

**Roland Kopaliani, Rector of the Akaki Tsereteli State University**

**14.15 - 15.50**

პლენარული სხდომა  
**Plenary Session**

თავმჯდომარე: მიხეილ ნიქაბაძე

**Session Chair: Mikhail Nikabadze.**

**14.15 - 14.50**

**Synthesis of Metamaterial: new experimental and theoretical challenges**

**Francesco dell'Isola**

*Università degli Studi di Roma "La Sapienza", Italy*

**14.50 - 15.30**

**Differential Hierarchical Models for Piezoelectric Prismatic Cusped Shells and Bars**

**George Jaiani**

*Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics*

**15.30 - 16.00**

Lunch  
**ლანჩი**

**16.00 - 18.30**

პლენარული სხდომა  
Plenary Session

თავმჯდომარე: გიორგი ჯაიანი  
Session Chair: George Jaiani

**16.00 -16.30**

**Higher order homogenization of highly contrasted elastic materials**

**Lukas Jakabcin and Pierre Seppecher**

*IMATH, Université de Toulon*

**16.30 - 17.00**

**Variational principles in theories of thin bodies when applied  
the orthogonal polynomial method**

**<sup>1</sup>Mikhail Nikabadze, <sup>2</sup>Armine Ulukhanyan**

*<sup>1</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

*<sup>1,2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

*<sup>1</sup>munikabadze@yandex.ru, <sup>2</sup>armine\_msu@mail.ru*

**17.00 - 17.30**

**On the almost everywhere convergence of multiple Fourier series for square  
summable functions.**

**Ushangi Goginava<sup>1</sup> and Giorgi Oniani<sup>2</sup>**

*<sup>1</sup>I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia*

*<sup>2</sup>Akaki Tsereteli State University, Kutaisi, Georgia*

**17.30-18.00**

**ПРОБЛЕМА ПУАНКАРЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В  
ОКРЕСТНОСТЯХ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК.**

**М.В. Коровина**

*МГУ им. М.Ломоносова, РФ*

**18.00-18.30**

**Some Biharmonic Problems and their Application in Technology and Medicine**

**Hovik Matevossian<sup>1</sup>, Giorgio Nordo<sup>2</sup>, Tokuei Sako<sup>3</sup>**

*<sup>1</sup>Federal Research Center “Computer Science & Control”, & Steklov Mathematical Institute, RAS,  
Moscow, Russia.*

*<sup>2</sup>Università di Messina, Messina, Italy.*

*<sup>3</sup>Nihon University, Tokyo-Chiba, Japan.*

**Friday, November 1**  
**1 ნოემბერი, პარასკევი**

**Plenary Session**  
**პლენარული სხდომა**

აუდიტორია 212, კორპუსი VII, აწსუ, ახალგაზრდობის გამზ., 98  
Room 212, Building VII, ATSU, 98 Akhalgazrdoba ave.

თავმჯდომარე: თამაზ ობგაძე  
Session Chair: Tamaz Obgadze

**11.00 -11.30**

**Brief Description of Scientific Achievements**

**Tamaz S. Vashakmadze**

*Javakhishvili Tbilisi State University, Vekua Institute of Applied Mathematics*

**11.30 – 12.00**

**On variational principles in the theories of five-layer thin bodies  
when applying orthogonal polynomials**

**<sup>1</sup>Mikhail Nikabadze, <sup>2</sup>Armine Ulukhanyan, <sup>3</sup>Aleksandr Romanov, <sup>4</sup>Nodar Mardaleishvili, <sup>5</sup>Zurab Arkania, <sup>6</sup>Tamar Moleshvili, <sup>7</sup>Ketevan Tskhakaia**

<sup>1,3</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>1,2</sup>*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

<sup>4,5,6,7</sup>*Akaki Tsereteli State University, Kutaisi, Georgia*

**12.00 – 12.30**

**Mathematical Modeling of the Mud Flow Dynamics.**

სელური ნაკადის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება.

**Tamaz Obgadze, Archil Prangishvili, Naida Kuloshvili**  
თამაზ ობგაძე, არჩილ ფრანგიშვილი, ნაიდა ყულოშვილი

*Georgian Technical University, Georgia*  
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

**12.30 – 13.00**

**Lunch**  
ლანჩი

თავმჯდომარე: თამაზ ვაშაკმაძე  
Session Chair: Tamaz Vashakmadze

**13.00 -13.30**

თანამედროვე მაღლივი ნაგებობების მშენებლობა ქალაქების ნორმების და წესების დაცვით.

გელა ყიფიანი<sup>1</sup>, მალხაზ ბედიაშვილი<sup>2</sup>  
**Gela Kipiani<sup>1</sup>, Malkhaz Bediashvili<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი.

<sup>2</sup>საქართველოს საინჟინრო აკადემია.

<sup>1</sup>*Georgian Aviation University, Georgian Technical University, Georgia.*

<sup>2</sup>*Engineering Academy of Georgia.*

**13.30 – 14.00**

### **The Dynamics of Thermoelastic Beams**

**Omar Kikvidze**

*Akaki Tsereteli State University, Georgia*

**14.00 – 14.30**

### **Homogenization of Semi-linear Elliptic and Parabolic Operators in Perforated Domains.**

**Hovik Matevossian<sup>1</sup>, Giorgio Nordo<sup>2</sup>.**

<sup>1</sup> *Federal Research Center "Computer Science and Control", Russian Academy of Sciences, Russian Federation.*

<sup>2</sup> *University of Messina, Italy.*

**14.30 – 15.00**

### **The Problem of Eigenvalues of Material Properties Tensor Objects and Velocities of Wave Propagation in the Structures**

**Mikhail Nikabadze<sup>1</sup>, Hovik Matevossian<sup>2</sup> ArmineUlukhanian<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation,*

<sup>2</sup>*Computing Center FRC CSC RAS, Moscow, Russian Federation,*

<sup>1,3</sup>*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

თავმჯდომარე: ომარ კიკვიძე  
Session Chair: Omar Kikvidze

15.00 – 15.30

ერთგვაროვანი ბლანტი დრეკადი ძელის რხევის განტოლება, როცა  
განმსაზღვრელი ტანაფარდობა შეიცავს წილადური რიგის წარმოებულს.  
**A Homogeneous Equation of the Elastic Bar Oscillation when the Defining  
Relationship Contains the Fraction Order Derivative.**

**Teimuraz Surguladze**  
თეიმურაზ სურგულაძე

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი  
Akaki Tsereteli State University, Georgia

15.30 – 16.00

**О математическом моделировании призматических тел с применением метода  
ортогональных полиномов.**  
**On mathematical modeling of prismatic bodies using the method of orthogonal  
polynomials.**

**М.У. Никабадзе<sup>1</sup>, А.Р. Улуханян<sup>2</sup>, Н.В. Мардалеишвили<sup>3</sup>**  
M.Nikabadze, A.Ulukhanyan, N.Mardaleishvili

<sup>1</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, РФ,

<sup>1,2</sup>МГТУ имени Н.Э. Баумана, РФ,

<sup>3</sup>Государственный университет имени А. Церетели, Грузия

16.00 -16.30

სითხის ან ჰაერის ნაკადში მოთავსებული ღეროების მექანიკის ძირითადი  
ამოცანები.

**The Basic Problems of the Mechanics of Rods Placed in the Flow of Liquid or Air.**

**Alexandre Badzgaradze**  
ალექსანდრე ბაძგარაძე

Akaki Tsereteli State University, Georgia  
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

16.30-17.00

**ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ ОБРАЗЦОВ, ОБРАБОТАННЫХ ПО ТЕХНОЛОГИИ ЛАЗЕРНО-УДАРНО-ВОЛНОВОЙ  
ОБРАБОТКИ, НА ИХ УСТАЛОСТНУЮ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ .**

**The Thickness Effect of the Specimens Processed on the Basis of Laser-Shock-  
Wave Treatment Technology on their Fatigue Endurance Life.**

**Г.Ж. Сахвадзе<sup>1</sup>, К. წհակայ<sup>2</sup>, Г.Г. Сахвадзе<sup>1,3</sup>**

<sup>1</sup>Институт машиностроения им. А.А.Благонравова РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Государственный университет им. Ак. Церетели, Кутаиси, Грузия

# ABSTRACTS

## Synthesis of Metamaterial: new experimental and theoretical challenges

Francesco dell'Isola

*Università degli Studi di Roma "La Sapienza", Italy*

The novel demands from the science of materials require the conception of materials showing exotic behaviour. We claim that an old problem from the theory of analog circuits must be revived. Indeed before the invention of digital computers in engineering and scientific applications during the decades 1930-1960 analog computers were used. Given a PDE the experts of analog circuits could design a specific circuit governed by the given equation. When successful they had obtained the circuit which was the analog of the physical system which was modelled by their PDE. In our more modern setting we specify the mechanical properties of a given material or structure by assigning the action functional which governs it and then we look for the specific mechanical system whose behaviour is exactly the desired one.

We talk about the <<synthesis>> of a specific architectured material or of a specific structure. In some situations homogenisation techniques are needed and the required material is synthesised at a certain length scale by using some smaller scale microstructures. In this context the theory of higher gradient continua needs to be introduced and it presents some mathematical problems whose solution needs the methods of differential geometry and mathematical physics. The concepts of stress and strain must be generalised to encompass this more general case, which cannot be framed in the standard theory of continua by Cauchy, as formalised by Truesdell. In other situations the synthesis problem can be solved only by looking the best value for some parameters characterising the considered microstructure. In this context the theory of optimisation plays a crucial role.

In this presentation we refer some results recently obtained in the problem of synthesis of second gradient materials, of extremely extensible microstructures and of structures being damage resistant. The synthesis problem is solved by introducing so called <<pantographic>> structures. Their mathematical properties are discussed, some numerical simulations showing their exotic behaviour are presented and some experimental evidence is shown,

# Differential Hierarchical Models for Piezoelectric Prismatic Cusped Shells and Bars

George Jaiani

*Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics*

First part of the talk is devoted to piezoelectric prismatic shells.

In 1955 Ilia Vekua [1] published his models of elastic prismatic shells. In 1965 he offered analogous models for standard shells [2]. In both papers he considered very important the investigation of well-posedness of boundary value problems (BVPs) of peculiar types which could arise in the case of cusped shells.

Cusped prismatic shells considered as 3D bodies may have non-Lipschitz surfaces as the boundaries and their thicknesses may vanish at the edge. Using I. Vekua's dimension reduction method, complexity of the 3D domain, occupied by the body will be transformed into the degeneracy of the order of the 2D governing equations of the constructed hierarchy of 2D models on the boundary of the 2D projection of the 3D bodies under consideration.

Consideration of BVPs and initial boundary value problems (IBVPs) within the framework of hierarchical models for elastic cusped prismatic shells leads to investigation of nonclassical BVPs and IBVPs for the governing elliptic and hyperbolic systems of equations of the second order with order degeneracy on the boundary of the domain under consideration in the case of two spatial variables [1]-[4]. We easily reduce this case to the case of systems of singular differential equations, i.e., to systems of equations with unbounded coefficients. Initial conditions (IC) for the so called weighted mathematical moments of displacements remain classical, while the boundary conditions (BC) for them are nonclassical, in general. It means that in certain cases the Dirichlet BCs should be replaced by the Keldysh BCs (i.e. some parts of the boundary, where the order of the equations degenerates, should be freed from the BCs) and in certain cases weighted BCs should be set (see [4]).

The present talk is devoted to construction of hierarchical models for piezoelectric nonhomogeneous porous elastic and viscoelastic Kelvin-Voigt prismatic shells on the basis of linear theories [5]-[10]. Using I. Vekua's [1] (see also [2]) dimension reduction method, governing systems of partial differential equations are derived and in the Nth approximation of hierarchical models BVPs and IBVPs are set. In the  $N = 0$  approximation, considering, e.g., elastic plates of a constant thickness, governing systems mathematically coincide with the governing systems of the plane strain corresponding to the basic three-dimensional (3D) linear theory [1]-[4] up to a separate equation for the out of plane component of the displacement vector.

The ways of investigation of BVPs and IBVPs, including the case of cusped prismatic shells [4], are indicated and some preliminary results are presented. Antiplane deformation of piezoelectric nonhomogeneous materials in the threedimensional formulation and in  $N = 0$  approximation is analysed. Some BVPs are solved in explicit forms in concrete cases.

The aim of the present talk is also to draw the attention to problems to be solved connected with cusped shell-like elastic and viscoelastic piezoelectric bodies with voids and with related nonclassical BVPs and IBVPs for partial differential equations with order and type degeneracy. The development of the corresponding numerical methods and numerical calculations on computers are especially challenging.

The talk is organized as follows. Section 1 is devoted to motivations of our research and the main targets of the work are indicated as well. Section 2 contains 3D field equations for nonhomogeneous piezoelectric Kelvin-Voigt materials with voids in the case of the general anisotropy. In Section 3 the hierarchical models are constructed and in the Nth approximation BVPs and IBVPs are set in the case of noncusped prismatic shells. Section 4 deals with the analysis of Dirichlet and Keldysh type problems for the general governing system of the  $N = 0$  approximation for

nonhomogeneous piezoelectric Kelvin-Voight materials with voids and general anisotropy. To this end results of Section 8 are exploited. In Section 5 we consider transversely isotropic elastic piezoelectric nonhomogeneous bodies in the case when the poling axis coincides with one of the material symmetry axes. Namely, time-harmonic motion under conditions of anti-plane piezoelectric state is discussed. In Section 6 we study an antiplane deformation of piezoelectrics in  $N = 0$  approximation of hierarchical models for prismatic shells, in particular, with cusped edges. In Section 7 we treat BVPs for porous isotropic elastic cusped prismatic shells. In Section 8 we examine well-posedness of BVPs for systems of elliptic equations of the second order with an order degeneracy, covering systems of elliptic equations arising in previous sections. The last section is devoted to conclusions, concerning mainly mechanical meaning.

The Second part is devoted to bars.

This part is devoted to static and oscillation problems of hierarchical models of piezoelectric transversely isotropic cusped bars in  $(0,0)$  approximation. A special attention is given to analysis of peculiarities of nonclassical setting BCs. Namely, the criteria are established when on one end or on both ends of the bar no data need be prescribed. Weighted BCs are set as well. On the face surfaces of the bar under consideration stress vectors and outward normal components of the electric displacement vectors are prescribed, while at the ends of the bar all the admissible [in sense of well posedness of boundary value problems (BVPs)] BCs, including mixed ones, with respect to weighted  $(0,0)$  moments of the components of the mechanical displacement vectors and electric potential, and  $(0,0)$  moments of the components of the stress and electric displacement vectors are prescribed. Namely, in Section 1 we compile auxiliary materials concerning geometry of cusped, in general, prismatic bars with rectangular cross-sections and double mathematical moments of functions. In section 2 we briefly sketch field equations of the transversely isotropic elastic piezoelectric materials. In Section 3 we derive governing differential equations of  $(0,0)$  hierarchical model. In Section 4 we deduce governing differential equations of one-dimensional particular case of three-dimensional model. In Section 5 we study BVPs which are solved in the explicit forms. In Section 6 mechanical interpretation of results of analysis of peculiarities of setting BCs for cusped bars is given. In Section 7 we make some bibliographical remarks.

## References

- [1] I. Vekua. On a way of calculating of prismatic shells. Proceedings of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 21:191-259, 1995 (Russian).
- [2] I. Vekua. The theory of thin shallow shells of variable thickness. Proceedings of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 30:5-103, 1965 (Russian).
- [3] I.N. Vekua. Shell Theory: General Methods of Construction. Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London, Melbourne, 1985.
- [4] G. Jaiani. Cusped Shell-Like Structures. Springer, Heidelberg-Dordrecht-LondonNew York, 2011.

**Acknowledgment.** *This work is supported by Shota Rustaveli National Science Foundation (SRNSF) [Grant No 217596, Construction and investigation of hierarchical models for thermoelastic piezoelectric structures].*

# The Dynamics of Thermoelastic Beams

Omar Kikvidze

*Akaki Tsereteli State University, Kutaisi, Georgia*

The use of new light metal materials in building structures makes it relevant to study the influence of temperature factor on strength and rigidity within the elastic limits both under static and dynamic loads. The uneven temperature distribution, even at a small temperature change, can affect the free-running frequency. The use of numerical calculation methods allows for solving nonlinear problem, and it also automates the calculations for different fixing conditions and complex geometry of the axis of beam.

Dynamic analysis of structures consists in determining internal forces and displacements from dynamic loads, or in testing the system for resonance with a recurrent load of certain frequency. The dynamics of structures is a lot more complicated than the statics of structures, and lags behind the latter in the development and improvement of applied calculation techniques. This is exemplified in numerical calculation applications for desktop software.

The report dwells on flexural vibrations of an elastic beam, the axial line of which in natural state is a plane curve and after loading remains plane. We made the following assumptions: all the cross-sections of beam remain plane and perpendicular to the longitudinal axis during deformation, the length of longitudinal axis is changing, the temperature field is stationary and nonhomogeneous. The thermoelastic curve for a beam is represented mathematically as functions of beam length and time:  $v = v(l, t)$ ,  $w = w(l, t)$ ,  $\theta = \theta(l, t)$ , where  $v$ ,  $w$  and  $\theta$  are respectively the vertical displacement, horizontal displacement and slope angle. To obtain these functions we have nonlinear differential equations, which contains the change in length of longitudinal axis.

The differential equations of motion for force factors take the form:

$$\begin{aligned}\rho A(l) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial R}{\partial l} + q_y, \\ \rho A(l) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial H}{\partial l} + q_z, \\ \frac{\partial}{\partial t}(I_x^0 \dot{\theta}) &= \frac{\partial M}{\partial l} + m + R \cos \theta - H \sin \theta\end{aligned}$$

where  $\rho$  - the material density;  $A$  - the cross-section area;  $v, w$  - the displacements in the direction of the axes  $y, z$ , respectively;  $I_x^0$  - the physical moment of inertia of the element of unit length beam. For the principal axes of the section  $I_x^0 = \rho I_x$ ,  $I_x$  - is a geometric moment of inertia of the cross section,  $M$  - is a bending moment,  $R, H$  - the components of the internal force vector,  $q_y, q_z$  - the components of the vector of distributed external forces, and  $m$  - the intensity of the external bending moment.

The differential equations for kinematic factors:

$$\frac{\partial v}{\partial l_0} = (1 + \varepsilon_0) \sin \theta - \sin \theta_0$$

$$\frac{\partial w}{\partial l_0} = (1 + \varepsilon_0) \cos \theta - \cos \theta_0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial l_0} = \frac{1 + \varepsilon_0}{r_0} + \kappa_x$$

where:  $\varepsilon_0$  - deformation of thermoelastic line,  $l_0$  - arc length of undeformed thermoelastic line,  $\kappa_x$  - characterizes variation of curvature.

The values  $\varepsilon_0$  and  $\kappa_x$  are determined by the formulas:

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{A^*} + \frac{1}{A^*} \int \varepsilon^T E dA, \quad \kappa_x = \frac{M}{I_x^*} + \frac{1}{I_x^*} \int \varepsilon^T y E dA$$

where:  $A^* = \int EdA$  - the generalized area;  $I_x^* = \int y^2 EdA$  - the generalized moment of inertia;  $E = E(T)$  - elastic modulus of material;  $T = T(y)$  - temperature,  $\varepsilon^T$  - temperature strain.

Normal force  $N$  in the cross-section equals:  $N = H \cos \theta + R \sin \theta$ .

From the computational point of view, a problem on eigenvalues is very similar to the boundary problems, for which we use the shooting method. The difference lies in the adjustment not only by the missing left boundary conditions, but also by the target eigenvalues. To solve the problems on eigenvalues there is used a mathematical editor Mathcad.

#### References

1. Svetlitsky V.A. Beam mechanics: part II. Dynamics.-M.: VYSHAYA SHKOLA publishers, 1987.-304 p.
2. Kikvidze O.G. Large displacements of berms under bending // Problems of mechanical engineering and machine reliability. RAS.-No 1.-2003.- pp.49-53
3. O.Kikvidze, E. Minadze, G. Baisarova, R. Brzhanov Dynamics of Thermoelastic Beams/ Proceedings of the 10th INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTEMPORARY PROBLEMS OF ARCHITECTURE AND CONSTRUCTION, Beijing, China, 22-24, September, 2018. pp. 410-413.
4. E. Minadze, O.Kikvidze ONE MODEL OF CONSTRUCTION DYNAMICS CALCULATION/ 2 nd INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SEISMIC STABILITY AND ENGINEERING SEISMOLOGY Dedicated to the 100th anniversary of professor Giorgi Kartivadze. COLLECTION OF REPORTS, TBILISI,GEORGIA 16.01.2019-17.01.2019

## თანამედროვე მაღლივი ნაგებობების მშენებლობა ქალაქების ნორმების და წესების დაცვით<sup>1</sup>.

გელა ყიფიანი<sup>1</sup>, მალხაზ ბედიაშვილი<sup>2</sup>

<sup>1</sup>საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი.

<sup>2</sup>საქართველოს საინჟინრო აკადემია, საქართველო.

გადმოცემულია საქართველოში და კერძოდ, თბილისში მაღლივი მშენებლობის განვითარების ეტაპები 11-სართულიანი სახლიდან გმირთა მოედანზე 40-სართულიან სახლამდე თბილისში ი.ჭავჭავაძის გამზირზე.

აღინიშნება, რომ ქალაქებში, სადაც მიწის ფასი მაღალია და ქალაქის ინფრასტუქტურა და არქიტექტურა მოითხოვს თანამედროვე იერსახის შექმნას, საჭირო ხდება მაღლივი შენობების და კომპლექსების დაპროექტება.

თანამედროვე სამშენებლო მეცნიერება ამის საშუალებას იძლევა. ამჟამად ჩვენ ქვეყანაში შეიქმნა ინჟინერ-კონსტრუქტორთა მთელი პლეადა, რომელთაც ძალუმთ ამ ამოცანის ღირსეულად გადაჭრა.

ავტორთა აზრით, მაღლივი მშენებლობა თბილისში და საკურორტო ზონებში, რომელიც ასეთი ტემპებით ვითარდება დღეს, ეყრდნობა სეისმომედეგობის მეცნიერების თანამედროვე საფუძვლებს და უნდა მომავალშიც განვითარდეს.

ის, რომ მაღლივ მშენებლობას ალტერნატივა არ გააჩნია, მოწმობს მსოფლიოს მრავალი ქვეყნის გამოცდილება, იმ ქვეყნებისაც, სადაც მაღალი სეისმური აქტივობაა. მაგრამ აქტივობაა იმ მოსახლეობის მხრიდანაც, რომლებიც ქალაქის მჭიდრო დასახლების პირობებში ცხოვრობენ, მაღლივი მშენებლობა კი მათი ცხოვრების პირობებს ზღუდავს.

არა და ყველა საკითხი დიდი ხანია გადაჭრილია მოქმედი ქალაქების ნორმების და წესების მიერ. ამიტომ, უნდა გათვალისწინებული იყოს ქალაქმშენებლობის მოთხოვნათა შემდეგი პირობები

საჭიროა მხოლოდ მათი დაცვა და ცხოვრებაში გატარება.

მაღლივი მშენებლობის აუცილებლობა, მისი სართულიანობა განისაზღვრება ტექნიკურ- ეკონომიკური განვითარების საფუძველზე არქიტექტურულ-კომპოზიციური, სოციალურ-საყოფაცხოვრებო, ჰიგიენური, დემოგრაფიულ-მოთხოვნათა, სამშენებლო ბაზის თავისებურებათა და საინჟინრო მოწყობილობათა გათვალისწინებით.

ჩამოყალიბებული განაშენიანების რეკონსტრუქციის პირობებში საჭიროა გეგმარებითი სტრუქტურა და ქუჩების ქსელის მუწესრიგება, საზოგადოებრივი მომსახურების სისტემის გაუმჯობესება, ტერიტორიის გამწვანება და კეთილმოწყობა, საცხოვრებელი და საზოგადო შენობათა არქიტექტურული იერსახის მაქსიმალური შენარჩუნება.

<sup>1</sup> Gela Kipiani<sup>1</sup>, Malkhaz Bediashvili<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Georgian Aviation University, Georgian Technical University

<sup>2</sup>Engineering Academy of Georgia

მაღლივი მშენებლობის პირობებში განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიექცეს ქუჩების ქსელის, გზების და სატრანსპორტო გადაკვეთების გამტარუნარიანობას და ავტომანქანების სადგომების ადგილთა რიცხვს.

ამავე დროს უნდა გათვალისწინებულ იქნას საინჟინრო ქსელების განლაგების და მომეტებული დატვირტვის პირობებში, ახალი ან ძველი ქსელების მოწყობას და რეკონსტრუქციას.

საცხოვრებელი ნაგებობების პროექტირების დროს მხედველობაში უნდა იქნას მიღებული საცხოვრებელი რაიონის და მიკრორაიონის ტერიტორიის მოსახლეობის სათანადო სიმჭიდროვე ქალაქმშენებლობის მიერ დადგენილი ნორმებით (ადამიანი/ჰექტარზე).

ისტორიული ქალაქების არსებულ ცენტრალური ნაწილის რეკონსტრუქციისას, ასევე ისტორიულ-კულტურული და არქიტექტურულ-ლანდშაფტურ ღირებულებათა სხვა ნაწილებშიც, მოსახლეობის სიმჭიდროვე დგინდება საპროექტო დავალებით. ხოლო სეისმურ რაიონებში მოსახლეობის საანგარიშო სიმჭიდროვე საჭიროა განისაზღვროს რეგიონალური ნორმების შესაბამისად, მაგრამ არა უმეტეს 300 ადამიანისა ჰექტარზე.

ქალაქებისათვის არანაკლებ 6 კვ.მ უნდა იყოს ერთ მცხოვრებზე.

ასევე დასახლებებში საერთო სარგებლობის გამწვანების ტერიტორიაზე შესვლა სეისმურ რაიონებში უნდა იყოს თავისუფალი. დაუშვებელია მათი შემოკავება საცხოვრებელი რაიონის მხრიდან.

განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიექცეს მაღლივ საცხოვრებელ და საზოგადოებრივ შენობებთან სახანძრო მანქანათა მისვლის შესაძლებლობას, მეხანძრეთა და ავტოკიბეთა ნებისმიერ ბინასთან მისვლას.

შეთანხმებას საჭიროებს აეროპორტების სიახლოეს მაღლივი შენობების პროექტირებისას მათი განლაგება სათანადო ორგანოებთან.

სწორედ ამ პირობების დაუცველობა იწვევს მოსახლეობის პროტესტს, რასაც საკმაოდ ხშირი ადგილი აქვს საქართველოს ქალაქებში.

საბოლოოდ დავასკვნით –თანამედროვე მაღლივ მშენებლობას უნდა მიეცეს ფართო გზა, მას ალტერნატივა არა აქვს, მაგრამ ქალაქის მესვეურებმა უნდა მკაცრად დაიცვან ქალაქგანაშენიანების ნორმები და მოთხოვნები.

**ПРОБЛЕМА ПУАНКАРЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ АСИМПТОТИК РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОЛОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В  
ОКРЕСТНОСТЯХ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК.**

М.В. Коровина<sup>2</sup>

*МГУ им. М.Ломоносова, РФ*

Проблема представления асимптотики решения уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки впервые была сформулирована А. Пуанкаре в работах [1], [2]. В этих работах рассматриваются уравнения нефуксова типа и впервые было показано, что решение уравнения с голоморфными коэффициентами в окрестности иррегулярной особой точки в некоторых случаях может разлагаться в асимптотический ряд. Проблема Пуанкаре состоит в том, чтобы найти вид асимптотических разложений для произвольных линейных уравнений с голоморфными коэффициентами. В этой данной работе приводится классификация особых точек и рассматриваются соответствующие им асимптотические разложения..

А именно рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения

$$b_n(r) \left( \frac{d}{dr} \right)^n u(r) + b_{n-1}(r) \left( \frac{d}{dr} \right)^{n-1} u(r) + \dots + b_i(r) \left( \frac{d}{dr} \right)^i u(r) + \dots + b_0(r) u(r) = 0, \quad (1)$$

здесь  $b_i(r)$  являются голоморфными функциями.

Если коэффициент при старшей производной  $b_n(r)$  обращается в ноль в некоторой точке, без ограничения общности можно считать, что эта точка  $r=0$ , то уравнение (1), вообще говоря, имеет особенность в нуле. В этом случае ноль может быть регулярной или иррегулярной особой точкой. Уравнение (1) может быть сведено к уравнению вида

$$\hat{H}u = H \left( r, -r^{k+1} \frac{d}{dr} \right) u = 0, \quad (2)$$

где  $\hat{H}$  – дифференциальный оператор с голоморфными коэффициентами

$$H(r, p) = \sum_{i=0}^n b'_i(r) p^i.$$

Здесь  $b'_i(r)$  – соответствующие голоморфные функции. Здесь  $k$  целое неотрицательное число. Очевидно, что значение  $k$  определяется неоднозначно. Можно найти минимальное значение  $k$ . В зависимости от минимального значения  $k$  можно разбить уравнения на три типа, каждому из которых соответствует свой тип асимптотик. К первому типу отнесем те уравнения, для которых  $k=-1$ . В этом случае мы имеем невырожденные дифференциальные уравнения не имеющие особенности в нуле. В случае  $k=0$  уравнения являются вырожденными. Мы имеем уравнение фуксова типа. Особая точка является регулярной,

$k=0$  – регулярная особая точка, асимптотика решения является конормальной.

$k \in N$  – иррегулярные особенности. Эти уравнения называются уравнениями нефуксова типа. Примером асимптотик нефуксова типа являются асимптотики вида

$$\sum_{j=1}^n \exp \left( \frac{P_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i^{j_{k-i}}}{r^{k-i}} \right) r^{\sigma_j} \sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i \quad (3)$$

нефуксовые асимптотики вида (3) соответствуют случаю, когда многочлен

---

<sup>2</sup> М.В.Коровина

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation,*

$H(0, p)$  имеет только простые корни. Здесь через  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i^j r^i$  обозначен асимптотический ряд,  $p_j, j = 1, \dots, n$  -корни многочлена  $\alpha^{j_{k-i}}, \sigma_j$  -некоторые числа

Если многочлен  $H(0, p)$  имеет кратные корни, и  $k = 1$  то асимптотика в окрестности иррегулярной точки  $p_j$  соответствующей кратному корню, будет представима в виде суммы конormalной асимптотики и асимптотического разложения вида

$$\sum_{j=1}^n \exp\left(\frac{p_j}{r} + \sum_{i=1}^{m-v} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{i}{m}}}\right) \sum_{l}^{\infty} b_l^j r^l \quad (4)$$

Примером такой особой точки является бесконечно удаленная точка для уравнения

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n u(x) + a_{n-1}(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} u(x) + \dots + a_i(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^i u(x) + \dots + {}_0(x) u(x) = 0, \quad (5)$$

здесь коэффициенты  $a_i(x)$  регулярны на бесконечности, это означает, что существует такая внешность круга  $|x| > a$ , что функции  $a_i(x), i = 0, 1, \dots, n-1$  разлагаются в ней в сходящиеся степенные ряды  $a_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_i^j}{x^j}$ . Уравнение (5) путем замены  $x = \frac{1}{r}$  приводится к уравнению (2) при  $k = 1$ . А значит представляет собой сумму асимптотики (4) и конormalной асимптотики. Впервые эта задача рассматривалась в работе Томэ.

Если  $k > 1$  и  $p_j$  корень многочлена  $H(0, p)$  является кратным, то асимптотика решения может быть представима в виде конormalной асимптотики и асимптотического разложения

$$\sum_j \exp\left(\frac{p_j}{r^k} + \sum_{i=1}^{km-v} \frac{\alpha_i^j}{r^{\frac{i}{m}}}\right) r^{\sigma_j} \sum_{l=1}^{\infty} A_l r^{\frac{j}{m}} \quad (6)$$

**ГИПОТЕЗА.** Асимптотики решения уравнения (1) представима в виде суммы нефуксовой асимптотики (6) и конormalной асимптотики .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Poincare H. Sur les integrales irregulieres des equations lineaires. //Acta math. 1886, v. 8, p. 295-344.
2. Пуанкаре /Избранные труды в трех томах. Том 3. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественных работ Анри Пуанкаре. Изд-во наука 1974
3. Thome L. W. Zur Theorie der linearen differentialgleichungen. ( German) 1872

# **Homogenization of Semi-linear Elliptic and Parabolic Operators in Perforated Domains.**

**Hovik Matevossian<sup>1,2</sup>, Giorgio Nordo<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Federal Research Center “Computer Science & Control”, Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia.*

<sup>2</sup>*Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>3</sup>*Universita di Messina, Messina, Italy*

A second order semi linear elliptic (parabolic) equation whose lower term has power-like growth at infinity with respect to the unknown function is considered. It is proved that a sequence of solutions in the perforated domains (cylinders) converges to a solution in the non-perforated domain (cylinder) as the diameters of the rejected balls (in parabolic metric) converge to zero with a rate depending on the power exponent of the lower term.

**Keywords:** Homogenization, elliptic and parabolic semi-linear operators, perforated domains.

**MSC 2010:** 35B37; 35J15; 35J61; 35K10; 35K58

## **References:**

- [1] O. A. Matevosyan, I. V. Filimonova, “*Homogenization of semilinear parabolic operators in a perforated cylinder*”, Math. Notes, 78:3 (2005), 364–374.
- [2] O. A. Matevosyan, I. V. Filimonova, “*On the averaging of weakly nonlinear parabolic operators in a perforated cylinder*”, Russian Math. (Iz. VUZ), 49:9 (2005), 27–35
- [3] O. A. Matevossian, S. V. Pikulin, “*On the homogenization of semilinear elliptic operators in perforated domains*”, Sbornik Math., 193:3 (2002), 409–422.
- [4] H. A. Matevossian, S. V. Pikouline, “*On the homogenization of weakly nonlinear divergent operators in a perforated cube*”, Math. Notes, 68:3 (2000), 337–344.
- [5] C. O. Alves, G. M. Biscil, C. E. Torres-Lademes, *Existence of solutions for a class of fractional elliptic problems on exterior domains*. arXiv:1812.04878v1 [math.AP]

# Some Biharmonic Problems and their Application in Technology and Medicine

Hovik Matevossian<sup>1</sup>, Giorgio Nordo<sup>2</sup>, Tokuei Sako<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Center “Computer Science & Control”, & Steklov Mathematical Institute, RAS, Moscow, Russia.

<sup>2</sup>Università di Messina, Messina, Italy.

<sup>3</sup>Nihon University, Tokyo-Chiba, Japan.

In the present paper we study some properties of solutions of biharmonic problems. Namely, we study the Steklov and Steklov-type boundary value problems for the biharmonic equation. For solving these biharmonic problems with application in technology and medicine, we need to solve the Dirichlet, Neumann and Robin boundary value problems for the Poisson equation using the scattering model.

In order to select suitable solutions, we solve the Poisson equation with the corresponding boundary conditions Dirichlet, Neumann or Robin, that is, some criterion function is minimized in the Sobolev norms. Under appropriate smoothness assumptions, these problems may be reformulated as boundary value problems for the biharmonic equation.

**Keywords:** Biharmonic operator, Steklov and Steklov-type boundary value problems, scattering model, variational methods.

**MSC 2010:** 35J15; 35J35; 35J40; 58J50; 58J90.

## References:

- [1] Brock F 2001, "An isoperimetric inequality for eigenvalues of the Stekloff problem", *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMP)*, 81(1), 69--71.
- [2] Duffin R J 1969, "The influence of Poisson's ratio on the vibrational spectrum", *SIAM J. Appl. Math.*, 17, 179--191.
- [3] Farwig R 1994, "A note on the reflection principle for the biharmonic equation and the Stokes system", *Acta Appl. Math.*, 34, 41--51.
- [4] Gazzola F, Grunau H.-Ch and Sweers G 2010, *Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains*. Lecture Notes Math., 1991, Springer-Verlag.
- [5] Kondratiev V A and Oleinik O A 1990, "Hardy's and Korn's Inequality and their Application", *Rend. Mat. Appl.*, Serie VII. 10(3), 641--666.
- [6] Kuttler J R and Sigillito V G 1968, "Inequalities for membrane and Stekloff eigenvalues", *J. Math. Anal. Appl.*, 23(1), 148--160.
- [7] Matevossian H A 2017, "On the biharmonic Steklov problem in weighted spaces", *Rus. J. Math. Phys.*, 24 (1), 134--138.
- [8] Matevossian H 2019, "On the Mixed Dirichlet--Steklov-Type and Steklov-Type Biharmonic Problems in Weighted Spaces", *Math. Comput. Appl.*, 24 (1), 25, 1--9.
- [9] Matevossian H A, Nikabadze M U and Ulukhanian A R 2018, "On solutions of some biharmonic problems and their applications", *IJNSNS Int. J. Nonlin. Sci. Numer. Simul.*, 10 p. (to appear).
- [10] Hovik Matevossian, Tokuei Sako 2019, "Mixed Biharmonic Problems in Exterior Domains", *Abstracts. MMMSEC 2019: I International Conference on "Mathematical Modeling in Materials Science of Electronic Components"* (Moscow, October 21–23, 2019), MAKS Press, Moscow, 2019, p.94, 168 pp.
- [11] Payne L E 1970, "Some isoperimetric inequalities for harmonic functions", *SIAM J. Math. Anal.*, 1 (3), 354--359.
- [12] Antunes Pedro R.S., Gazzola F 2018, Some solutions of minimaxmax problems for the torsional displacements of rectangular plates. *ZAMM Z Angew Math Mech.*, 1–18. DOI: 10.1002/zamm.201800065
- [13] Antunes Pedro R. S., A numerical method for the calculation of extremal Steklov and mixed Steklov eigenvalues, Preprint, 2018

# **The Problem of Eigenvalues of Material Properties Tensor Objects and Velocities of Wave Propagation in the Structures**

**Mikhail Nikabadze<sup>1</sup>, Hovik Matevossian<sup>2</sup> Armine Ulukhanian<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation,*

<sup>2</sup>*Computing Center FRC CSC RAS, Moscow, Russian Federation,*

<sup>1,3</sup>*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

The problems of eigenvalues of the tensor and the tensor-block matrix of any even rank are considered. A complete orthonormal system of eigentensors for a symmetric tensor of any even rank, as well as a complete orthonormal system of eigentensor-columns for an symmetric tensor-block matrix of any even rank are constructed in an explicit form. It is represented the elastic energy of deformation and the constitutive relations using the introduced tensor columns and tensor-block matrix. The canonical representations of the tensor-block matrix, the specific strain energy and the constitutive relations are given. The symbols of structure of tensor and tensor-block matrix are introduced. A classification of some anisotropic materials is given. Using the canonical representations of tensors (tensor-block matrix), it is obtained dispersion equations and expressions for dispersion tensors. Formulas for velocity of the waves for some materials through the eigenvalues of the material tensors (tensor-block matrix) are also obtained.

**Keywords:** tensor-block matrix, problem of eigenvalues of the tensor-block matrix, tensor column, complete orthonormal system of eigentensor-columns, symbols of structure of tensor-block matrix, dispersion tensor

**Acknowledgement:** this work was supported by the Shota Rustaveli National Science Foundation, project № DI-2016-41.

# **On variational principles in the theories of five-layer thin bodies when applying orthogonal polynomials**

**<sup>1</sup>Mikhail Nikabadze, <sup>2</sup>Armine Ulukhanyan, <sup>3</sup>Aleksandr Romanov,  
<sup>4</sup>Nodar Mardaleishvili, <sup>5</sup>Zurab Arkania, <sup>6</sup>Tamar Moseshvili, <sup>7</sup>Ketevan Tskhakaia**

*<sup>1,3</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
<sup>1,2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
<sup>4,5,6,7</sup>Akaki Tsereteli State University, Kutaisi, Georgia*

Based on the formulated three-dimensional variational principles of Lagrange, Castigliano and Reissner type for the theory of multilayer thin bodies, the corresponding variational principles are derived for the theories of five-layer thin bodies at moments with respect to systems of orthogonal polynomials under various interlayer contact conditions. As special cases, classical and micropolar thin and shallow and prismatic thin bodies, as well as the bodies of revolution, are considered. In particular, cylindrical, conical and spherical thin bodies are considered. Based on the principles of Lagrange and Castigliano, finite elements are created.

**Keywords:** micropolar theory, micropolar prismatic thin body, micropolar cylindrical thin body, revolution body

**Acknowledgement:** this work was supported by the Shota Rustaveli National Science Foundation, project № DI-2016-41.

# **Variational principles in theories of thin bodies when applied the orthogonal polynomial method**

**<sup>1</sup>Mikhail Nikabadze, <sup>2</sup>Armine Ulukhanyan**

*<sup>1</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

*<sup>1,2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

The variational principles of Lagrange and Castiglano, as well as generalized variational principles of the Reissner type in the framework of three-dimensional micropolar theory are formulated and proved. The original forms of writing are given for the compatibility of deformation with respect to strain and bending-shearing tensors, as well as with respect to stress and couple stress tensors (analogs to the Beltrami-Mitchell equations). Moreover, the equations for stress and couple stress tensors are represented by both asymmetric differential operators and symmetric ones. From them, as a special case, the Beltrami-Michell equations by both asymmetric and symmetric differential operators are obtained. New formulation of the boundary value problem with respect to stress and couple stress tensors are given, from which a new formulation of B.E. Pobedria of the classical stress problem is obtained as a special case. From the above three-dimensional principles, the corresponding variational principles for the theory of thin bodies are derived. Of the last, in turn, the corresponding variational principles for the theory of thin bodies in moments with respect to systems of orthogonal polynomials are derived. Moreover, for the micropolar theory of multilayer thin bodies, both in full contact and in the presence of zones of weakened adhesion, generalized variational principles of the Reissner type are obtained, since the principles of Lagrange and Castiglano are easily derived from them. The theorems on the minimum of the stationary point of the Lagrangian and the maximum of the stationary point of the Castiglian, as well as the uniqueness theorem for the generalized solution of boundary value problems, are proved. In addition, variational principles for some gradient theories of thin bodies are considered.

**Keywords:** orthogonal polynomials, variational principle, stress tensor, couple stress tensor, micropolar theory, multilayer thin bodies, new formulation of the boundary value problem

**Acknowledgement:** this work was supported by the Shota Rustaveli National Science Foundation, project № DI-2016-41.

# **О математическом моделировании призматических тел с применением метода ортогональных полиномов<sup>3</sup>**

**М.У. Никабадзе<sup>1</sup>, А.Р. Улуханян<sup>2</sup>, Н.В. Мардалеишвили<sup>3</sup>**

*<sup>1</sup>МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, РФ,*

*<sup>1,2</sup>МГТУ имени Н.Э. Баумана, Москва, РФ,*

*<sup>3</sup>Государственный университет имени А. Церетели, Кутаиси, Грузия*

На основании расщепленных уравнений классической и микрополярной теорий упругости выведены соответствующие расщепленные уравнения статической задачи теории призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях. Из последних систем уравнений в свою очередь выведены уравнения в моментах неизвестных векторных функций относительно любых систем ортогональных полиномов. Получены системы уравнений различных приближений (с нулевого по восьмого порядка) в моментах относительно систем полиномов Лежандра. При этом эти уравнения выведены как без учета граничных условий на лицевых поверхностях, так и с учетом этих условий. Начиная с первого приближения, системы уравнений распадаются на две системы. Одна из них – система относительно моментов четных порядков неизвестной векторной функции, а другая относительно моментов нечетных порядков той же функции. На основании найденного оператора алгебраических дополнений к оператору любой из этих систем для каждого момента неизвестной векторной функции получается уравнение эллиптического типа высокого порядка, характеристические корни которого легко находятся. Используя метод И.Н. Векуа для решения таких уравнений, можно получить их аналитическое решение. Расщепленные уравнения в моментах векторов перемещений и вращений относительно системы полиномов Лежандра получены и для микрополярной теории призматических тонких тел с двумя малыми размерами, имеющих поперечное сечение в виде прямоугольника. Аналогичные уравнения получены и для редуцированной среды, содержащие уравнение классической среды. Выведены расщепленные системы уравнений статической задачи микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в перемещениях и вращениях и в моментах векторов перемещений и вращений, из которых, как частный случай, получаются аналогичные системы уравнений классической теории. Получены расщепленные системы уравнений восьмого приближения микрополярной теории многослойных призматических тел постоянной толщины в моментах векторов перемещений и вращений. Для этой системы, а также для системы уравнений редуцированной среды аналогично однослоиному призматическому телу, используя метод И.Н. Векуа, можно выписать аналитическое решение. Рассмотрены задачи о цилиндрическом изгибе пластины бесконечной длины в направлении продольной оси. На основе полученных систем дифференциальных уравнений с нулевого по пятого приближений проведено численное моделирование напряженно-деформированного состояния пластины с помощью

<sup>3</sup> On mathematical modeling of prismatic bodies using the method of orthogonal polynomials.

<sup>1</sup>Mikhail Nikabadze, <sup>2</sup>Armine Ulukhanyan, Nodar Mardaleishvili<sup>3</sup>

*<sup>1</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

*<sup>1,2</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

*<sup>3</sup>Akaki Tsereteli State University, Kutaisi, Georgia.*

составленной программы в MAPLE. С помощью корректирующего слагаемого удовлетворены граничные условия на лицевых поверхностях. Кроме того, приведены решения задач различных приближений о тонком теле с двумя малыми размерами и прямоугольной тонкой плоской области (полосы), а также о двухслойной двумерной области с защемленными краями при различных нагрузках.

**Ключевые слова:** микрополярная теория, полиномы Лежандра, оператор алгебраических дополнений, многослойные призматические тела, метод И.Н.Векуа, расщепленные уравнения, редуцированная среда

Работа выполнена при поддержке гранта совместных исследований с соотечественниками национального научного фонда им. Шота Руставели № DI-2016-41.

# სელური ნაკადის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება<sup>4</sup>

თამაზ ობგაძე, არჩილ ფრანგიშვილი, ნაიდა ყულოშვილი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ჩვენი ქვეყანა ყოველწლიურად იღებს კოლოსალურ ზარალს ქარისა და წყლისგან გამოწვეული მთის ქანობების ეროზიით, დამეწყვრით და სელური ნაკადების წარმოქმნით.

სელური ნაკადები მთიანი რეგიონების სხვა დამანგრეველ სტიქიურ პროცესებთან ერთად, როგორიცაა: წყალდიდობები, ქვათაცვენა, მეწყერი, თოვლის ზვავი, მიწისძვრა - მთიანი რეგიონების ათვისებასთან ერთად დიდ საშიშროებას წარმოადგენს ადამიანისა და საინჟინრო ნაგებობებისათვის.

ქვა-ტალახოვანი, წყალ-ქვიანი და ტალახოვანი სელები, პრაქტიკულად, მოულოდნელად წარმოიქმნებიან და წარმოადგენ მთიანი რეგიონის კალაპოტში ქანობებისაგან მოწყვეტილი ქვებისა და წყლიანი, ქვა-ღორღიანი მასის მოძრავ ნაკადს.

ასეთი ნაკადები, მოკლე დროის განმავლობაში ანადგურებენ ხიდებს, გზებს, ჰიდროელექტრო სადგურებს, ნატანით ფარავენ სავარგულებს არხებს და დასახლებულ ადგილებს.

ამჟამად, მიუხედავად მრავალი მეცნიერის ძალისხმევისა, ჯერ-ჯერობით ცოტაა, მეცნიერულად დასაბუთებული მათემატიკური მოდელები, რომლებიც პრაქტიკული სიზუსტით მოგვცემდა სელური ნაკადის წარმოშობის, დინამიკის და დამანგრეველი ძალის პროგნოზს. სელურ ნაკადებთან დაკავშირებული მრავალი საკითხი განსაკუთრებით კი დინამიკა, პროცესის სირთულის გამო ნაკლებადაა შესწავლილი.

თ.ვოინიჩ-სიანოჟენცისა და თ.ობგაძის შრომებში აგებულია მრავალი სხვადასხვა სახის მოდელი, რომელიც კარგად ასახავს ტალახოვანი სელური ნაკადის დინამიკას. საქართველოს მთიან რეგიონებში, სელური ნაკადის პირველ დარტყმას თავის თავზე იღებენი ხერხეულიძის ტიპის სელსაწინააღმდეგო ცხავური ტიპის ნაგებობები, რომლებიც ნაკადს ათავისუფლებენ მსხვილი ქვიანი და მოტივტივე ხეების ფრაქციებისაგან. ამ ნაგებობათა გავლის შემდეგ, სელური ნაკადი შეგვიძლია ჩავთვალოთ წყალ-ტალახოვან ნაკადად, რაც მეტად აქტუალურს ხდის წინამდებარე კვლევას.

სელური ნაკადი წარმოადგენს წყლისა და შეტივტივებული ქვა-ღორღის ნარევს. ასეთი ტიპის ნაკადების მოდელირებისათვის არსებობს რამდენიმე ტიპის მიღებომა: ა)სელის მთელ მასას უყურებენ, როგორც ერთიან უკუმშ მყარ წარმონაქმნს და სწავლობენ მისი სიმძიმის ცენტრის დინამიკას თეორიული მექანიკის მეთოდებით, რაც მეტად უხეშ შედეგებს იძლევა; ბ)ნარევის თითოეული კომპონენტისათვის წერენ დინამიკის განტოლებებს, სადაც კომპონენტების ურთიერთქმედებიდან გამომდინარე უმათებენ ურთიერთქმედების შესაბამის წევრებს, რაც მეტად სქემატური წარმოდგენაა, რადგან საინჟინრო ნაგებობათა გარსდენისას დაგროვილი მასის გამოყოფა არ ხერხდება; გ) ადგენენ ერთი ჰიპოთეთური სითხის მოდელს, რომელიც გასაშუალებულად მოიცავს ნარევის ყველა კომპონენტის თვისებას.

ჩვენ ვცდილობთ გამოვიყენოთ ბ) და გ) მიღების დადგებითი მხარეები და სელური ნაკადი წარმოვადგინოთ, როგორც წყალ-ტალახოვან-ქვაღორღიანი ნაკადი, რომელიც ერთის მხრივ

<sup>4</sup> Mathematical Modeling of the Mud Flow Dynamics.

Tamaz Obgadze, Archil Prangishvili, Naida Kuloshvili

Georgian Technical University, Georgia

შეიცავს გენიევ-გოგოლაძის უკუმშ სითხეს, რაც საშუალებას გვაძლევს საინჟინრო ნაგებობების გარსდენისას წარმოქმნილი მაღალწევიანი სითხის თვისებები გავითვალისწინოთ და მეორე მხრივ წყლის ნაკადის დინამიკური თვისებები აღვწეროთ, ხოლო ამ ორი კომპონენტის ურთიერთქმედება გავითვალისწინოთ დიფუზის განტოლებით.

აქედან გამომდინარე, ღცარცოფული ნაკადის მათემატიკური მოდელირებისათვის მიზანშეწონილია, რომ გამოვიყენოთ თ.ვოინიჩ-სიანოჟენცვის მიდგომა, რომლის თანახმადაც ნარევის  $\rho$  სიმკვრივე,  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  დეფორმაციის სიჩქარის და ძაბვის ტენზორის  $\sigma_{ij}$  კომპონენტები გამოისახება, ნარევის კომპონენტების შესაბამისი სიდიდეების მიხედვით, სადაც გათვალისწინებულია ნარევში, თითოეული კომპონენტის  $\nu$  კონცენტრაცია:

$$\rho = \nu \rho_v + (1 - \nu) \rho_w; \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \nu \sigma_{ij}^v + (1 - \nu) \sigma_{ij}^w; \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \nu \dot{\varepsilon}_{ij}^v + (1 - \nu) \dot{\varepsilon}_{ij}^w; \quad (3)$$

სადაც  $\rho_v$ ,  $\rho_w$  - სიმკვრივეებია  $\nu$  - ქვა-დორდის კომპონენტისა, ხოლო  $w$  - ნარევის თხევადი კომპონენტისა,  $\sigma_{ij}^{(v)}$ ,  $\sigma_{ij}^{(w)}$  - ძაბვის შესაბამისი ტენზორის კომპონენტებია.

თუ გავითვალისწინებთ გენიევ-გოგოლაძის ბარო-ბლანტი სითხის და ნიუტონის სითხეების რეოლოგიურ განტოლებებს, მაშინ მივიღებთ რომ, სელური ნაკადისათვის რეოლოგიურ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + (\mu_0 (1 - \nu) + \nu \lambda p) (\nu_{i,j} + \nu_{j,i}). \quad (2.33)$$

აქედან გამომდინარე, ნაშრომში აგებულია სელური ნაკადის კომპოზიციური მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა რვაჩოვ-ობგამის RO მეთოდის ბაზაზე გავთვალოთ სელური ნაკადის განმსაზღვრელი პარამეტრები ლანდშაფტის გათვალისწინებით და შევაფასოთ ნაკადისაგან საინჟინრო ნაგებობებზე მოსალოდნელი ზარალი.

# **On the almost everywhere convergence of multiple Fourier series for square summable functions.**

**Ushangi Goginava<sup>1</sup> and Giorgi Oniani<sup>2</sup>**

*<sup>1</sup>I. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia*

*<sup>2</sup>Akaki Tsereteli State University, Kutaisi, Georgia*

It is proved that if for each one-dimensional orthonormal system  $\Phi_1, \dots, \Phi_d$  partial sums (lacunary partial sums) of Fourier series of every square summable function converge almost everywhere then the product system  $\Phi_1, \dots, \Phi_d$  also possesses similar property for a quite general type partial sums.

# ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ ОБРАЗЦОВ, ОБРАБОТАННЫХ ПО ТЕХНОЛОГИИ ЛАЗЕРНО-УДАРНО-ВОЛНОВОЙ ОБРАБОТКИ, НА ИХ УСТАЛОСТНУЮ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ<sup>5</sup>

Г.Ж. Сахвадзе<sup>1</sup>, К. Цхакая<sup>2</sup>, Г.Г. Сахвадзе<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Государственный университет им. Ак. Церетели, Кутаиси, Грузия

<sup>3</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе проведено исследование влияния технологии лазерно-ударно-волновой обработки (ЛУВО) образцов из нержавеющей стали 03Х22Н6М2 на их усталостную долговечность путем конечноэлементного моделирования (КЭМ). Известные в литературе экспериментальные данные об усталостной долговечности сравниваются с данными от конечноэлементного моделирования. Наблюдается приемлемая корреляция между численными и экспериментальными данными. Показано, что с уменьшением толщины образца значительно увеличивается усталостная долговечность, обусловленная применением технологии ЛУВО.

**Ключевые слова:** лазерно-ударно-волновая обработка, усталостная долговечность, остаточные напряжения, конечноэлементное моделирование

Целью данной работы является исследование влияния толщины образца на усталостное поведение образцов из нержавеющей стали 03Х22Н6М2, подвергнутых технологии ЛУВО. Процедура КЭМ состоит из двух шагов. Сначала осуществляется моделирование технологии ЛУВО на образцах с вырезом в конечноэлементном пакете ABAQUS/Explicit и определяются поля остаточных напряжений [1-2]. Затем проводится анализ усталостной долговечности в конечноэлементном пакете FE-SAFE с использованием многоосных критериев усталости [3]. Поля остаточных напряжений, полученных на первом шаге моделирования, используются в качестве входных данных на втором шаге. Полученные данные сравниваются с известными в литературе экспериментальными результатами.

С целью проведения сравнительного анализа в КЭМ был исследован материал, который использовался в экспериментах [4]: нержавеющая сталь 03Х22Н6М2. Ее механические характеристики такие: предел текучести при растяжении - 520 МПа, предел прочности - 710 МПа, модуль упругости - 190 ГПа.

Результаты расчетной усталостной долговечности в виде классической кривой усталости (в координатах максимальное приложенное напряжение-число циклов до разрушения, т.н. кривая  $\sigma-N$ ) для образца с толщиной 4 мм показаны на рис. 1. Видно, что при  $\sigma_{max} = 287,5$  МПа, число циклов до разрушения в образцах без применения ЛУВО составляло 460 600, после ЛУВО – 2 228 500 циклов, т.е. увеличение составляет примерно 297%. При  $\sigma_{max} = 275$  МПа эти цифры составляют до ЛУВО 836,700 циклов, после ЛУВО – 4 200 000 циклов (эта точка обозначена стрелкой на рис. 1), соответственно. В этом случае эффект от применения технологии ЛУВО составляет около 402%. Отсюда следует, что при уменьшении максимальных приложенных напряжений ( $\sigma_{max}$ ), усталостная долговечность значительно увеличивается на образцах, обработанных по технологии ЛУВО. Как видим, наблюдается приемлемое совпадение с экспериментальными результатами, взятых из [4].

<sup>5</sup> The Thickness Effect of the Specimens Processed on the Basis of Laser-Shock-Wave Treatment Technology on their Fatigue Endurance Life.

G. Sakhvadze<sup>1</sup>, K.Tskhakaia<sup>2</sup>, G.Sakhvadze<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Russian Federation

<sup>2</sup>Akaki Tsereteli State University, Georgia

<sup>3</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

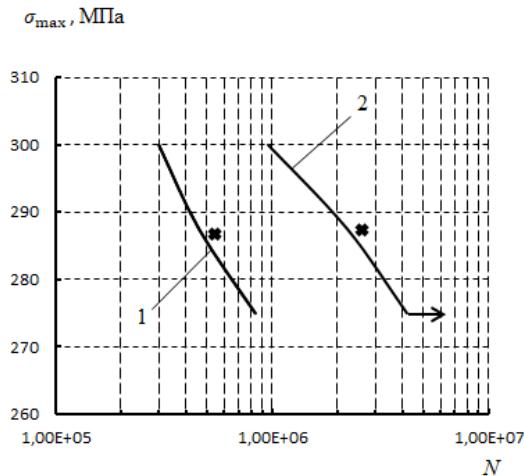


Рис. 1. Расчетная усталостная долговечность до (1) и после применения ЛУВО (2) для образа с толщиной 4 мм. Экспериментальные результаты, взятое из [4] для случая  $\sigma_{\max} = 287,5$  МПа, показаны крестиками

**Выводы.** Исследовано влияние толщины образца на усталостное поведение образцов из нержавеющей стали 03Х22Н6М2, подвергнутых лазерно-ударно-волновой обработке (ЛУВО). Показано, что после применения ЛУВО для тонких образцов (толщиной 2 мм), усталостная долговечность была увеличена более чем на 300%. Подтверждена закономерность, что чем тоньше образец, тем больше эффект от ЛУВО в проблеме продления усталостного ресурса.

Улучшение усталостных характеристик материалов при ЛУВО является результатом синергетического эффекта поверхностного упрочнения (повышения микротвердости) и создания полезных сжимающих остаточных напряжений (СОН) в приповерхностной области. Поверхностное упрочнение уменьшает скорость зарождения трещины, а СОН уменьшают скорость распространения уже существующих трещин.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, проект RFMEFI60717X0191.

## Литература

- Сахладзе Г.Ж., Кавтарадзе Р.З., Никабадзе М.У., Киквидзе О.Г. Повышение усталостной долговечности образцов из нержавеющей стали с применением технологии лазерно-ударно-волновой обработки // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 4. С. 83-92.
- Сахладзе Г.Ж., Кавтарадзе Р.З., Натриашвили Т.М., Сахладзе Г.Г. Особенности терморелаксации остаточных напряжений, возникающих при лазерно-ударно-волновой обработке жаропрочных материалов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 5. С. 91-98.
- Тропкин С., Девятов А., Винклер А., Тляшева Р., Закирничная М. Прогнозирование усталостной прочности рабочих колес центробежных насосных агрегатов с помощью решений SIMULIA: Abaqus, fe-safe и комплекса гидродинамического анализа FlowVision // САПР и графика. 2014. № 5. С. 1-6.
- Achinth M., Nowell D., Fufari D., Sackett E.E., Bache M.R. Fatigue behaviour of geometric features subjected to laser shock peening: experiments and modelling // Int. J. Fatigue. 2014. № 62. P. 171–179.

# Higher order homogenization of highly contrasted elastic materials

Lukáš Jakabčin and Pierre Seppecher

IMATH, Université de Toulon

## Abstract

Highly contrasted periodic heterogeneous elastic materials are known to present sometimes an anomalous effective behavior. In particular their homogenized energy may contain terms involving higher order derivatives of the displacement field  $u$ . Up to now, computing these higher order terms remain an open problem. A formula for higher order homogenization, valid only for weakly contrasted materials, was proposed by Smyshlyaev and Cherennichenko [3] : terms involving the second gradient of the displacement (or equivalently the gradient of the linearized strain field  $e(u)$ ) arise as an asymptotically small correction to the standard homogenization formula. In addition to the standard elastic stiffness tensor  $A^{hom}$ , the limit energy is represented by a symmetric bi-linear form  $D^{hom}$  over right-symmetric third-order tensors and possibly a coupling bi-linear form  $C^{hom}$  in such a way that the limit energy  $E^{lim}(u)$  reads

$$\int_{\Omega} \left( e(u) : (A^{hom} : e(u)) + e(u) : (C^{hom} : \nabla e(u)) + \nabla e(u) : (D^{hom} : \nabla e(u)) \right) dx.$$

It is tempting to try to apply the formula proposed in [3] also to highly contrasted materials. In this study we check its validity through analytical and numerical simulation by applying it to the structures which are known in the literature to lead asymptotically to second-gradient effective materials.

Firstly, we consider the case of a layered material. We obtain an energy still depending on  $\varepsilon$ . So we compute its  $\Gamma$ -limit as  $\varepsilon$  tends to zero and we show that the result coincides with the theoretical second-gradient effective energy given by Briane-Camar-Edine [2].

Then we study the case of a regular square grid with different ways of placing diagonals inside the squares. We compute numerically the effective stiffness tensors following the procedure of [3] for  $\varepsilon$  as small as possible and we compare them to the ones predicted by the theorem stated in [1]. In the cases where respectively Cauchy material and second-gradient material are

expected, the results are concluding. In the last case, see Figure 1, where the theoretical result predicts a non-local Cosserat model the procedure of [3] is unable to give the right result (see Figure 2). It gives a fundamentally different second gradient model.

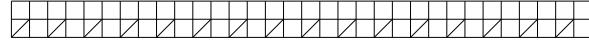


Figure 1: A square grid with isolated diagonal rods

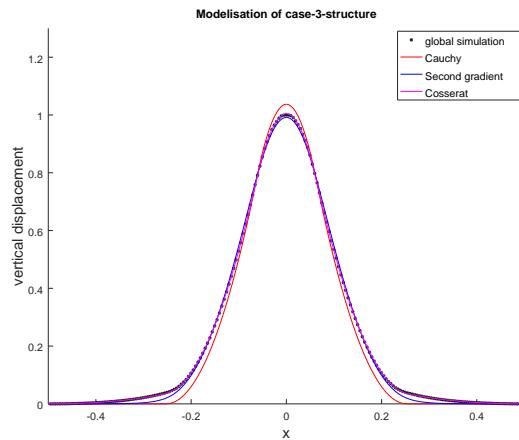


Figure 2: Vertical displacement of Cosserat model and comparison with the best Cauchy and second-gradient models.

## References

- [1] O. Abdoul-Anziz, P. Seppecher, *Homogenization of periodic graph-based elastic structures*, Journal de l’École polytechnique, Mathématiques, 5:259-288 (2018).
- [2] M. Briane, M. Camar-Edine, *Homogenization of two-dimensional elasticity problems with very stiff coefficients*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Vol. 88, pp. 483-505 (2007).
- [3] V. P. Smyshlyaev, K. D. Cherednichenko, *On rigorous derivation of strain gradient effects in the overall behaviour of periodic heterogeneous media*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48, 1325- 1357 (2000).

ერთგვაროვანი ბლანტი დრეკადი ძელის რხევის განტოლება, როცა  
განმსაზღვრელი ტანაფარდობა შეიცავს წილადური რიგის წარმოებულს

### თეიმურაზ სურგულაძე<sup>1</sup>

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ქუთაისი, საქართველო

განიხილება ერთგვაროვანი ბლანტი დრეკადი,  $\rho$  სიმკვრივის მქონე, ორივე მხრივ  
უსასრულო ძელის მოძრაობის განტოლება, როცა მასზე მოქმედებს გარეშე დატვირთვა  
 $f(t, x)$ . მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x} + f(t, x) = \rho \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \\ \varepsilon(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \end{cases}$$

აქ  $x$  - არის ძელის წერტილის კოორდინატი,  $t$  - დრო,  $\sigma$  - დაძაბულობა,  $\varepsilon$  -  
დეფორმაცია.  $u$  - ძელის მატერიალური ელემენტის გადაადგილება. დავუშვათ  
განმსაზღვრელ თანაფარდობას ძელისათვის აქვს სახე

$$\sigma(t, x) = E\eta^\beta D^\beta \varepsilon(t, x), \quad 0 < \beta < 1$$

აქ  $D^\beta$  აღნიშნულია წილადური რიგის წარმოებული რიმან - ლიუვილის აზრით.  
მოძრაობის განტოლებას ამ შემთხვევაში აქვს სახე

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 D^\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} f(t, x)$$

ამოხსნილია ამოცანა

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 D^\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} f(t, x), t > 0, -\infty < x < \infty \\ u(-\infty, t) = u(\infty, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(0+, x) = \frac{\partial u(0+, x)}{\partial x} = 0, -\infty < x < \infty \end{cases}$$

ნაჩვენებია, რომ როცა  $\beta = 0$  ან  $\beta = 1$  მიიღება კლასიკური განტოლების ამონახსნები.  
დასმულია რამოდენიმე ამოცანა.

---

<sup>1</sup>A Homogeneous Equation of the Elastic Bar Oscillation when the Defining Relationship Contains the Fraction Order Derivative

# სითხის ან ჰერის ნაკადში მოთავსებული ღეროების მექანიკის ძირითადი ამოცანები<sup>2</sup>.

## ალექსანდრე ბამგარაძე

აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ღეროვანი კონსტრუქციები, რომლებიც ურთიერთქმედებენ გარე ნაკადთან, ფართოდ გამოიყენება მრეწველობის სხვადასხვა დარგებში. გაანგარიშების დროს ღეროზე მოქმედი ძალების გათვალისწინება წარმოადგენს რთულ ამოცანას. სირთულე მდგომარეობს იმაში, რომ ნაკლები ინფორმაცია არსებობს ამ ძალების შესახებ და მათი განსაზღვრისას საჭიროა ექსპერიმენტული მონაცემების განზოგადება, რათა შესაძლებელი იყოს ამ ძალების ანალიზური გამოსახულების მიღება. როგორც წესი, რეალურ პირობებში, მოქნილი ღეროების გარემოსთან ურთიერთქმედების ამოცანა წარმოადგენს არაწრფივ ამოცანას, რაც მნიშვნელოვნად ართულებს გაანგარიშებას.

ღეროვანი სისტემების გაანგარიშების დროს, ხშირ შემთხვევაში შესაძლებელია ღუნვითი და გრეხითი სიხისტეების უგულებელყოფა, რაც საშუალებას გვაძლევს გავამარტივოთ გაანგარიშებები. ასეთ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ გვაქვს აბსოლუტურად მოქნილი ღერო (ძაფი). ასეთი ტიპის კონსტრუქციას შეიძლება მოვაკუთნოთ ელექტროგადამცემი ხაზები, სადაც დაძაბულ-დეფირმირებული მდგომარეობის გაანგარიშებისას მნიშვნელოვნა მისი ღერძული დატვირთვების გამოთვლა.

ძაფის სტატიკისა და დინამიკის ამოცანების ძირითადი თავისებურებები მდგომარეობს შემდეგში:

1. როგორც წონასწორობის, ასევე მოძრაობის განტოლებები წარმოადგენს არაწრფივ განტოლებებს, რაც ართულებს ამოხსნას ეგმ-ის გამოყენებით. თუ ანგარიშში ვითვალისწინებთ გარე აეროდინამიკურ ძალებს, ისინი რთული ბუნების ძალებია და მათი ანალიზური გამოსახულების მისაღებად საჭიროა გათვალისწინებული იყოს ექსპერიმენტალური მონაცემები, რომლებიც აღწერენ ამ ურთიერთქმედების ბუნებას. ნაკადის ბუნება დამოკიდებულია ღეროს ფორმაზე. მოძრაობის პროცესში მოქნილი ღერო მნიშვნელოვნად იცვლის ფორმას და, შესაბამისად, იცვლება ძალის მნიშვნელობა. ამიტომ ასეთი ძალების განსაზღვრა წარმოადგენს ძაფის მექანიკის ერთერთ ძირითად ამოცანას.

2. ღეროვანი კონსტრუქციების დინამიკური გაანგარიშება მოიცავს სამ ურთიერთდაკავშირებულ ამოცანას: 1) კონსტრუქციაზე მოქმედი აეროდინამიკური ძალების განსაზღვრა, როგორც უძრავ, ასევე მოძრაობის პროცესში. 2) კონსრტუქციის წონასწორობის მდგომარეობის და მასში აღძრული დაჭიმულობის ძალების

<sup>2</sup>The Basic Problems of the Mechanics of Rods Placed in the Flow of Liquid or Air

განსაზღვრა. 3) წონასწორობაში მყოფი კონსტრუქციის მცირე რხევების გაანგარიშება და შესაბამისი დინამიკური მდგრადობის ანალიზი.

მოძრაობის არაწრფივი განტოლებების ანალიზი აუცილებელია მდგრადი რხევითი მოძრაობის რეჟიმის განსაზღვრისათვის, როცა გარე ნაკადის სიჩქარე განსხვავდება კრიტიკული სიჩქარისაგან. რაც საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ კონსტრუქციის საიმედოობა

კრიტიკული სიჩქარის განსაზღვრა შესაძლებელია წრფივი განტოლებების საშუალებით, რომელიც მიიღება არაწრფივიგანტოლებებიდან შესაბამისი დაშვებებით. მიღებული შედეგების საიმედოობა დამოკიდებულია მასზე თუ რამდენად ზუსტად აღწერს განტოლებები მოძრაობის პროცესს. ამიტომ განსაკუთრებული ყურადღება უნდა მიექცეს ამ განტოლებების შედგენას.

ძირითადი ამოცანები, რომლებიც უნდა ამოიხსნას დინამიკური პროცესების გაანგარიშებისას, ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ:

1) რხევის ფორმებისა და სიხშირეების განსაზღვრა. ეს აუცილებელია რათა დაპროექტების პროცესშივე ავიცილოთ ისეთი სახიფათო შემთხვევები, როგორიცაა რეზონანსი. რხევის ფორმებს ვიყენებთ შემდგომი გაანგარიშებისას.

2) კონსტრუქციის დინამიკური მდგრადობა და ნაკადის კრიტიკული სიჩქარეების განსაზღვრა.

3) ღეროს მცირე რხევების ანალიზის დროს მოქმედი ძალის დინამიკური მდგენელის გათვალისწინებას მივყავართ არაცონსერვატიულ ამოცანამდე, რაც კიდევ უფრო ართულებს გაანგარიშების პროცესს.

ამრიგად, ღეროვანი კონსტრუქციების ანგარიში გულისხმობს რამდენიმე ამოცანის გადაჭრას. ისინი უშუალოდ დამოკიდებული არიან ერთმანეთზე. ამიტომ საბოლოო შედეგის საიმედოობა მნიშვნელოვნად არის განპირობებული თითოეული მათგანის ამოხსნის სიზუსტით.

#### ლიტერატურა:

1. ა. ბაძგარაძე - აბსოლუტურად მოქნილი ღეროების რხევის სიხშირისა და ფორმების განსაზღვრა შეყურსული დრეკადი ბმის გათვალისწინებით, საერთაშორისო კონფერენცია მექანიკის არაკლასიკური ამოცანები“ -შრომები. ქუთაისი, საქართველო, 2012წ.

2.Badzgaradze.A.G –

Eqvelibrium equations completely flexible rod under the action of aerodynamic forces. IV  
international Sceintific Conference, Kutaisi, Georgia - 2016.

## Brief Description of Scientific Achievements.

**Tamaz S. Vashakmadze**

*Javakhishvili Tbilisi State University, Vekua Institute of Applied Mathematics,*

**Direction I:** Creation of mathematical theory of elastic thin-walled structures (TWS).

**Direction II.** Creation of optimal methods of investigation and computation of some classes of initial and boundary value problems (BVP) of ordinary differential equations (ODEs).

**Direction III.** On the uniform systems of governing equations of Continuum Mechanics and some generalizations.

**Here we observed the directions I and III as this Workshop is dedicated to problems of continuum mechanics.**

**Direction I.** With respect to Pr.1, 2 main results look as:

1.1. The method of construction of refined theories and new analogous models (without SH with arbitrary control parameters and having continuum capacity) were elaborated. The exact analytical expressions were found for corresponding remainder vector. Using those expressions and by applying new technology for error transition the unimprovable estimates were obtained, which represents the fact of negative invention. The principal aspects of those estimates are the same with Chladny's experiments for vibrating plates. Many principal authors in this field (including Euler, Bernulli, Gersten, Navier, Kirchhoff, Love, Filon, Poincaré, von Kármán, Timoshenko, Reissner, Henky, Mindlin, Goldenveiser, Landau, Donnel, Vorovich, Vekua, Koiter, Naghdy, Ambartsumian, Vashicu, Lucasievich, Antman, Ball, Ciarlet, Destuynder,...) assumed that their theories gave an approximation (in physical, geometrical, asymptotical or other meanings) to initial 3D BVP for TWS of theory of elasticity, but we proved that for each one from finite theories the transition error is bounded from below. We can cite here Edgar Allan Poe's words: "And yet, for centuries, no man, in verse, has ever done, or ever seemed to think of doing, an original thing. The fact is that originality (unless in minds of very unusual force) is by no means a matter, as some suppose, of impulse or intuition ....A positive merit of the highest class demands in its attainment less of invention than negation" (The Philosophy of Composition, 1846).

1.2. Based on works [ , the method of constructing the anisotropic inhomogeneous 2D nonlinear models of von Kármán-Mindlin-Reissner (KMR) type for binary mixture of porous, piezo-magneto-electric and electrically conductive and viscous elastic TWS with variable thickness is given. In particular ,the Truesdell Problem (formulated in 1978) with respect to "Physical Soundness" of von Kármán system was solved. Against the Ciarlet elaborations [Ph. Ciarlet, Mathematical Elasticity, vol. II, Theory of Plates, Elsevier, Ch.5.] the corresponding variables are the quantities with physical meaning such as the averaged components of the displacement vector, bending and twisting moments, shearing forces, rotation of normals, surface efforts. From KMR (by choosing the parameter with some additional physical assumptions) the von Kármán system as one of possible models is obtained. The given method differs from the classical ones by the fact, that according to classical method one of the equations of von Kármán system represents the Saint-Venant-Beltrami compatibility condition( remarked by Podio-Guidugli too). For isotropic and generalized transversal elastic plates in linear case KMR have the unified representation as the systems of Cauchy-Riemann DEs in terms of planar expansion and rotation. For dynamical case (along the values describing the vertical directions and Rayleigh-Lamb surface wave processes) the quantity  $\Delta\partial_n\Phi$  ( $\Phi$  denotes Airy stress function) appears too.

1.3. Given are generalized Hellinger-Reissner variational principle and method of constructing MR-Filon type refined theories for nonhomogeneous plates with variable thickness without assumptions of geometrical or physical characters, some well-known paradoxes of classical refined theories are

explained, a member, characterizing new edge effects and different for well-known classical layer one is discovered. This correction is situated in bounds of *KMR models*.

2.1. Considered are *Vekua* type processes when on surfaces of plates the linear form of stress tensor and displacement vector are given.

For justification of *Kantorovich-Vekua* type projective methods: i) the problem of basis property of Jacobi polynomials is studied, ii) for remainder members of *Fourier-Legendre* series synchronous exact estimates with respect to thickness  $h$  and N-number of approximation are given.

For BVP of *Vekua* type systems DEs: i) for any  $N \leq \infty$  there are truly *Korn's* type inequalities, ii) for the transition error in Sobolev's space of functions exact estimates with respect to  $h$  and  $N$  are obtained and the convergence of corresponding processes is proved, iii) there are constructing factorized schemes (*Rutishauser or Gauss* types) by means of which an approximate solution for any  $N < \infty$  can be found,

2.2. New regular processes of approximate solution of 3Dim linear initial BVP is developed. The model is constructed on the basis of refined representations which have been already set in 1.1 and finite linear broken element method is created. The system, corresponding to this model, is reduced to the inversion to the operator of comparatively simple structure m-times, where  $m$  denotes the number of pseudo-layers and defines the exactness of approximation of the initial problem by two-dimensional one. The full split factorized scheme of the solution assumes complete parallelizability of the algorithm. The estimate of transition error and the convergence of corresponding processes follow immediately by using methods of functional analysis, in particular, methods of energetic inequalities and *Lax-Milgram-Babushka* technology.

### Direction III.

#### D.III.1.The uniform systems of governing equations of Continuum Mechanics

1. Within of *Newtonian and Truesdell-Noll* axiomatic, we created a uniform dynamic system of pseudo-differential equations which is 3D with respect to spatial coordinates, contains as a particular case *Navier-Stokes, Euler* equations, systems of PDEs of Solid Mechanics( if on continuum media electro-magnetic fields act) *Maxwell's* dynamical systems, the mass and principle of energy conservations, *Saint-Venant-Beltrami* (continuity equations) conditions. Such unique representation of this system allows us to prove that the nonlinear phenomena observed in problems of solid mechanics can also be detected in *Navier-Stokes* type equations, and vice versa. We describe this part in more details. The basic system of PDE has the following form:

$$\rho \frac{D_{\Gamma}^2 u}{Dt^2} = f - (1-\Gamma) \nabla p + \nabla[(1+\nabla u)\tau], \quad (1)$$

where  $\rho$  is a density,  $p$  is pressure,  $v = (v_1, v_2, v_3)^T$  is vector of velocities,  $f$  are known volume forces,  $D/Dt$  is total or convective derivative,  $\tau$  is stress tensor,  $u = (u_1, u_2, u_3)^T$  denotes displacement vector,

$$\partial u / \partial t = v, \nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^T = grad, \frac{D_{\Gamma}^2 u}{Dt^2} = \begin{cases} \partial^2 u / \partial t^2, \Gamma = 1 \\ Dv / Dt, \Gamma = 0 \end{cases}$$

*Newton's* type law for viscous flow and *Hooke's* generalized law for solid structures may be written in the form:

$$\tau = \left[ (1-\Gamma) \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma \right] A_{\Gamma} \cdot \varepsilon, \quad (0 \leq \Gamma \leq 1) \quad (2)$$

For conditions of conservation of mass or equations of continuity *Saint-Venant – Beltrami* conditions we have:

$$[(1-\Gamma) \partial_t + \Gamma] B_{\Gamma}[\varepsilon] = 0 \quad (3)$$

where

$$B_0[\rho, \varepsilon] = \partial_t \rho + \nabla(\rho v), B_1[\varepsilon] = (B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{15}, B_{16})^T \quad (4)$$

In the classical case  $B_{11}(u) = 2(u_{3,12})^2 - 2u_{3,11}u_{3,22}$  corresponds to well-known Monge-Amper form.

We underline that **above elaborations are in conformity with Newton's second axiom and different from it in concrete substance**. In case if on some continuum media also the electro-magnetic fields act with PDEs (1)-(3) Vashakmadze used *Maxwell's* dynamical system too.

2. The three-dimensional models created by *Vashakmadze*, contain as a particular case and refined models of *Coleman-Noll* (in the direction of elasticity theory), *Griffith, Kobayashi, Atluri* (in case of cracks and inclusions), *Biot* (in case of poroelastic media), *Green, Naghdi, Steel* (in case of binary mixtures). For example, in the linear theory by *Biot* corresponding differential operators with respect to spatial variables have double degeneration, since symbolic determinants contain as a cofactor a symbolic minor corresponding to *graddivoperator*. In the nonlinear theory of *Biot* the anisotropic property of the media depends on the ratio of strain and deformation tensors and not on the character of the media. It must be pointed out, that in the models presented by *Vashakmadze* these controversies are overcome. He introduced for each point of the mixture average quantities of tensors of stresses and strains and displacement vectors. He refined *Biot-Hooke's law*. Relevant systems of DEs have the same form as nonlinear spatial theory of elasticity with positive symbolic determinant. This form of equilibrium equations proves that the *Pascal-Darcy* law for poroelastic media (introduced by *Biot*) demands more precise definition.

### D.III.2 Some generalizations

1. In the second part of monograph [Vashakmadze 1999,Ch.III] the stable projective methods are also presented using the linear form of classical orthogonal polynomials as coordinate systems and their numerical realizations for a design of 2D BVPs (in bounded and unbounded domains) for the first part. These efficient and optimal (in some sense) methods increase the possibilities of classical finite-difference, exponential-fitted, variational-discrete and continuous analogue of alternating-direction methods. Here[pages 124-127}there are created the Alternative to Perturbation *Poincare-Lyapunov's theory* convergent method for linear operator equation  $(L+\varepsilon M)=f$  (with parameter  $\varepsilon$ ), which gives approximate solution by inversion of  $L$  n-times and applications operator  $\varepsilon M$  to known function.

2. For observation and analysis of results of *Vashakmadze* corresponding to Directions I,III we can recommend the following form of *KMR* type systems:

$$(D\Delta^2 + 2h\rho\partial_{tt} - 2DE^{-1}(1+\nu)\rho\partial_{tt}\Delta)w = \left(1 - \frac{h^2(1+2\nu)(2-\nu)}{3(1-\nu)}\Delta\right)(g_3^+ - g_3^-)$$

$$2h\left(1 - \frac{2h^2(1+2\nu)}{3(1-\nu)}\Delta\right)[w, \varphi] + h(g_{\alpha,\alpha}^+ - g_{\alpha,\alpha}^-) - \int_{-h}^{+h} \left(tf_{\alpha,\alpha} - \left(1 - \frac{1}{1-\nu}\Delta(h^2 - t^2)\right)f_3\right)dt$$

(5)

$$\left(\Delta^2 - \frac{1-\nu^2}{E}\rho\Delta\partial_{tt}\right)\varphi = -\frac{E}{2}[w, w] + \frac{\nu}{2}\left(\Delta - \frac{2\rho}{E}\partial_{tt}\right)(g_3^+ + g_3^-) + \frac{1+\nu}{2h}f_{\alpha,\alpha}$$

(6)

The second equation of *von Kármán* system even in dynamical case has the form:  $\Delta^2\varphi = -0.5E[w, w]$  while a dynamical part of the first equation has the same form as (5). Such structure of *von Kármán* classical system gives the possibility to use methods of **Harmonic Analysis**. As the new dynamical members are  $\Delta\partial_{tt}\varphi$  and  $\partial_{tt}(g_3^+ - g_3^-)$  too, the **KMR type (5)-(6) systems describe new nonlinear wave processes and it's evident that for them it isn't possible to apply The Fourier Analysis technique**

At last we remind the words of *Antman* [Nonlinear Problems of Elasticity, Springer, 2005, p.699] that: "See *Vashakmadze* (1999) for an alternative treatment. This work was the first that gave the von Kármán equations with a rational positions within the general theory of nonlinear elasticity. All previous derivations of these equations, beginning with von Kármán (1910), employed a variety of ad hoc assumptions about the negligibility of certain terms". This estimation is true but the sufficiently incomplete one

**I. Problems of Stability.** The problems of convergence and stability in Variational-Projective Methods (VPM) represent the central questions beginning from Riemann. We remind that for "Justification of Riemann's Problem" were decisive the works of Weierstrass and Hilbert. In problems of development and application of VPM essentially were, as I think, the activities of Ritz, Courant, Friedrichs, Levy, Kantorovich, Mikhlin, Rectoris and Babuska. The VPRs are of Vekua methods of constructing 2dim mathematical models for thin-walled elastic structures(TWS) by Legendre polynomials and Victor Kupradze's "Approximate Solution Method by Nonorthogonal

Series" for spatial problems of TE. Of course, the main objective in such problems are the Gram matrices (Gramian) and their properties. I joke that my grandmother (babuska -in Russian) was died before my birth but I'm very happy that I read works and met with Ivo Babushka. Now we remind that by Vekua method 2dim models are constructing when surfaces  $S^\pm$  of TWS are free.i.e. for to 2dim models these conditions are natural condition. They satisfied for limited unknown functions but such problems are unstable (see book of K.Rectoris). This problem understood by Ilia Vekua and he constructed such functions which on surfaces vanished but they don't satisfy the 2dim models for each N. We introduced Vekua type models of two kind and for second of them satisfies Neuman type conditions for each  $N \leq \infty$ , i.e. these conditions are main one.

Below for definiteness we consider the linear Refined Theories(RT) in wide sense when  $\Omega_h = D(x, y)X(h^-, h^+)$  thin-walled elastic structure is isotropic, the boundary conditions on the  $S^\pm$  surfaces have the form  $\sigma_3^\pm = g_3^\pm$  (termo-dynamic, anisotropic, piezo-elastic, nonlinear, with variable coefficients and variable thickness and other generalizing, for example, creation and justification of nonlinear models of KMR type using a priori spatial nonlinear dynamic models of visco-elasticity by Sanders, McComb, Schlechte ,but not I.N. Rabotnov, See details in our works, from 1999 to 2010).

Now we remind the explicit form of RT (see 2,section 2.4:**"Variational formulation for refined theories, generalized Hellinger-Reissner principle"**:

$$\frac{2h^3}{3} [\mu \Delta w_\alpha + (\lambda^* + \mu) graddiv w_+] - \frac{\mu h}{(1+2\gamma)} (w_\alpha + v_{3,\alpha}) = \int_{-h}^h t f_\alpha dt - h(g_\alpha^+ + g_\alpha^-) - \frac{\lambda}{2(\lambda+2\mu)} \int_{-h}^h t \sigma_{33,\alpha} dt$$

$$\frac{\mu h}{(1+2\gamma)} [\Delta v_3 + w_{\alpha,\alpha}] = \int_h^{-h} f_3 dt - (g_3^+ - g_3^-).$$

From this system follow all refined models by choosing  $\gamma$  parameters and Reissner's theory too, if  $\gamma = 0.1$ .

As it is well-known the conditions  $\sigma_{33}|_{S^\pm} = g_3^\pm$  are satisfying only for Reissner's theory .We remark that in this case  $\sigma_{33,3}|_{S^\pm} = 0$ . For  $\sigma_{33}$  this expression is Hemite two point interpolation formula.

Now, if we will find  $\sigma_3$  vector in the form [V.,1999], page 60:

$$\sigma_3 = \frac{(z-h^-)g^+}{2h} + \frac{(h^+-z)}{2h} + \sum_{s=1}^{\infty} \sigma_3^s(x, y)(P_{s+1}\left(\frac{z-h^*}{h}\right) - P_{s-1}\left(\frac{z-h^*}{h}\right)), h^* = 0.5(h^+ + h^-),$$

$$2h = h^+ - h^-$$

the form of all refined models and Filon-Kirchhof type systems of DEs (for Reissner's averaged deflection, components of a rotations of normal, shearing forces, bending and twisting moments, surfaces efforts and averaged horizontal components of vector  $u$ ) are invariants and the boundary conditions are satisfying exactly for all refined models. In addition we remark that:

$$Q_{\alpha 3} = h(g_\alpha^+ + g_\alpha^-) - 2h\sigma_{\alpha 3}^1, M_{\alpha\beta} = \frac{2h^2}{3} \sigma_{\alpha\beta}^1, T_{\alpha\beta} = 2h\sigma_{\alpha\beta}^0, \int_{-h}^h t \sigma_{33} dt = h^2 \left( \frac{g_3^+ - g_3^-}{2} - \frac{2}{3} \sigma_{33}^2 \right)$$

$$\psi_\alpha = \frac{1}{2} \int_{-h}^h (h^2 - t^2) \sigma_{\alpha 3} dt = \frac{h^2(1+2\gamma)}{3} Q_{\alpha 3} + r_2 \left[ t \int_0^t \sigma_{\alpha 3} dt; \gamma \right].$$

For  $r_2[\cdot]$  see (2.16) of [2].

In this point we remind the bacis relations which will be used in point 4. as main expressions for functioning of schemes considering there (details see [2]). From Generalised Hellinger-Reissner's principle follows general representation of refined theories[2].

We remark that for BVP of any refined theories it is not necessary to investigate the problems of existence and uniqueness of classical or general solutions (when on  $\partial D$  displacements are zero or it

is free) and there are true Korn type inequalities for any  $N \leq \infty$  when  $1 + 2\gamma \geq 0$  (see details in chapter 2 of [2], inequalities (6.19) and (6.23)):

$$(-L_N U_N, U_N) \geq \mu \left( \kappa^2 \|U_N^+\|_1^2 + \|U_N^3\|_2^2 \right), \quad (3)$$

$$(-L_{v_1} U, U) \geq (4h\mu) \left( \kappa_1^2 \|grad U^+\|_1^2 + \kappa_2^2 \|U^3\|_2^2 \right), \quad (4)$$

Variational-projective method applied in [2, ch.3] represents Ritz method ( see p.146 of [2]). For projective methods, one of the crucial point is the problem of stability. For these coordinate systems, corresponding Gram type matrix in case of Laplace operator has the same structure with the matrix corresponding to the finite difference method for 2Dim Laplacian. Same are true for operators, considering in this article. Thus, this fact opens the new way of possibility for sufficient large class of BVPs to investigate Gram type functional matices by methods of numerical mathematics. In our case, Gram matrix is bounded from below by non-negative value when the order of the matrix tends to infinity. This implies that the process of finding unknown coefficients and approximate solution is stable (see[1], Ch.3, section 12.1 ).

In this case 2dim model are same with respect to displacement components but different you can see to relatively of components of normal stress vectors. .f.e. see T.Vashakmadze 1, [The Theory of Elastic Plates. Advances of Mechanics \(UspekhiMekhaniki\)](#), Warshaw, -Referee-Pavel Jilin-Vol. 11 , No3, 1988, pp.35-74,

BVPs as direct methods are variational and finite-difference methods. In [2,T.Vashakmadze, Theory of Anisotropic Elastic Plates, Springer-Verlag, II edit.,2010],points 12, 17.2 we consider modification of variational methods selecting coordinate functions so that moments of unknown vector would satisfy an algebraic equations systems which has the structure by small perturbation of the finite-difference scheme, appropriate to a two-dim BVP. In different from pure variational methods this one gives possibility to study the properties of coordinate functions, Gramians using some results of numerical analysis and investigated problem of stability of corresponding numerical processes. For example, if we used the first order differences with respect to Legendre polynomials, then the variational-discrete schemes for Laplace operator has five-point structure, for biharmonic operator-13 piont one as pure finite-difference algorithms. This technology is essentially convenience if we consider unbounded domains.