РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
„ИНФОРМАТИКА И УПРАВЛЕНИЕ“

На правах рукописи

Сумбатов Александр Сумбатович

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ СИСТЕМ С ИДЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ И СО СВЯЗЯМИ С ТРЕНИЕМ

Специальность 01.02.01 Теоретическая механика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2019

Работа выполнена в отделе 24 отделения 2 Федерального исследовательского центра „Информатика и управление“ Российской академии наук

Официальные оппоненты – *БОЛОТНИК Николай Николаевич*
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
Институт проблем механики
им. А.Ю. Ишлинского РАН,
главный научный сотрудник

КРАСИЛЬНИКОВ Павел Сергеевич
доктор физико-математических наук,
профессор,
Московский авиационный институт,
заведующий кафедрой

САМСОНОВ Виталий Александрович
доктор физико-математических наук,
профессор,
НИИ механики МГУ
им. М.В. Ломоносова,
главный научный сотрудник

Защита диссертации состоится 28 февраля 2020 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета МГУ.01.10 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу:119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.
E-mail: msu.01.10@mech.math.msu.su

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС "ИСТИНА": https://istina.msu.ru/dissertations/246183372/

Автореферат разослан 25 декабря 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук А.А. Зобова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация состоит из двух частей.

Первая часть посвящена вопросу о существовании лагранжевой формы уравнений движения неголономных систем, развитию и приложениям методов аналитической механики и дифференциальной геометрии к решению задачи о существовании линейных по скоростям интегралов (общих и некоторых частных) в динамике голономных и неголономных систем.

В первой части рассматриваются и решаются следующие задачи.

(1) Существование локально невырожденного кинетического потенциала, для систем с идеальными неголономными связями, описываемых минимальным числом уравнений.

(2) Построение инвариантных и конструктивных признаков существования в голономных и неголономных системах, отнесенных к произвольно заданным обобщенным координатам, линейных по скоростям первых интегралов уравнений движения и совокупностей линейных однородных инвариантных соотношений.

(3) Анализ условий существования обобщенных интегралов площадей и возможностей их приложения к задачам динамики твердых тел, катающихся без скольжения по произвольной регулярной опорной поверхности.

Вторая часть работы посвящена общетеоретическим и прикладным задачам механики систем с сухим трением. В ней рассматриваются следующие задачи.

(4) Строгое математическое обоснование условия Ле Суан Аня возникновения парадоксов трения в системах с одной фрикционной парой.

(5) Разработка приложений теории Болотова-Чаплыгина о критическом перемещении в задачах движения твердых тел с сухим трением, уточнение возможностей применения построенной классиками геометрической теории.

(6) Исследование конкретных прикладных задач с сухим трением с целью строгого обоснования особых движений и поведения механических систем исключительно на основе классического закона Кулона о трении без привлечения дополнительных гипотез о законе трения.

(7) Задачи о наибыстрейшем спуске тел с трением с помощью методов вариационного исчисления, в том числе, о наибыстрейшем спуске тяжелого диска с трением на основе модифицированной теории множителей Лагранжа с введением дополнительных дифференциальных переменных.

Актуальность темы

Многие задачи, рассмотренные в диссертации, являются классическими, имеют богатую историю и обширную библиографию. Суть работы состоит в прояснении некоторых тонких теоретических вопросов, остававшихся незамеченными или не поддававшихся долгое время решению и вызывавших ошибки. Поэтому любое продвижение в их решении несомненно является актуальным. Также актуальным является привлечение строго обоснованных математических подходов с целью развития и придания завершенной формы классическим методам теоретической механики, расширению сферы их применения.

Цель работы

Целью работы является развитие методов аналитической механики голономных, неголономных систем и систем с трением для получения необходимых и достаточных инвариантных условий существования линейных интегралов, которые можно эффективно применять; для обоснования некоторых специфических движений, наблюдающихся в ряде систем с трением, исключительно на основе законов механики; для расширения диапазона вариационных задач механики, которые решаются средствами классического вариационного исчисления и их модификаций, с использованием алгебры, дифференциальной геометрии, тензорного анализа и других математических дисциплин.

Теоретическая и практическая значимость

Работа проясняет и расширяет возможности анализа динамики систем на те случаи, когда система обладает линейными интегралами и инвариантными соотношениями, указывает границы некоторых применений общей теории, дает теоретическое обоснование поведения ряда прикладных систем с сухим трением, демонстрирует эффективность использования модифицированной теории Лагранжа для решения задач вариационного исчисления при наличии одновременно ограничений-равенств и ограничений-неравенств. Результаты диссертации вошли в опубликованные обзоры и монографию по трению.

Методы исследования. Достоверность результатов

Большинство результатов, полученных в диссертации, основаны на геометрических методах исследования в решении теоретических и прикладных задач механики. Достоверность представленных результатов дополнительно проверялась, где это возможно, дублированием вычислений с помощью компьютерных систем.

Основные результаты. Научная новизна

Научная новизна диссертации состоит в следующем:

1) Доказано, что в задаче о качении твердого тела по плоскости без скольжения не существует случаев, когда все

три уравнения движения этой неголономной системы в форме Чаплыгина вырождаются в уравнения Лагранжа 2-го рода. Найден общий вид неголономных связей, для которых при ограничении одной степени свободы тела уравнения движения принимают лагранжеву форму.

2) Получены условия существования квадратичного по скоростям кинетического потенциала для дифференциальной системы двух уравнений, разрешенных относительно ускорений, с правыми частями, являющимися однородными квадратичными формами скоростей.

3) Доказано, что не существует универсального действия типа действия по Гамильтону, уравнения экстремалей которого совпадают с динамическими уравнениями неголономных систем Чаплыгина.

4) Для консервативных голономных систем с двумя степенями свободы, лагранжиан которых записан в произвольных обобщенных координатах, решена задача нахождения точечного преобразования к новым обобщенным координатам, среди которых имеется хотя бы одна циклическая. Получены необходимые и достаточные условия существования таких координат, которые требуют проверки простых соотношений между коэффициентами лагранжиана и их производными. Эти условия дают также критерий существования общего линейного по скоростям интеграла в консервативных голономных системах с двумя степенями свободы. Результаты обобщены на неконсервативные системы с двумя степенями свободы.

5) Дано конструктивное решение задачи о существовании скрытых циклических координат в голономных системах с тремя степенями свободы. Решение сведено к построению в явном виде функционально независимых инвариантов лагранжиана системы, записанного в произвольных обобщённых координатах.

6) Найдено конструктивное решение задачи о существовании в консервативных голономных системах с двумя и тремя степенями свободы условного по Биркгофу линейного интеграла системы.

7) Показано, что если в консервативной голономной системе с n степенями свободы известны $n-1$ функционально независимых инвариантов лагранжиана системы, записанного в произвольных обобщённых координатах, то вопрос о существовании скрытой циклической координаты решается эффективно при помощи дифференцирований и элементарных операций линейной алгебры.

8) В случае произвольной необратимой консервативной голономной системы отмечено, что для существования разделяющихся обобщенных координат в её уравнении Гамильтона-Якоби, необходимо существование линейных интегралов в системе, а, следовательно, явных или скрытых циклических координат.

9) Получен конструктивный признак существования линейного интеграла в неголономной системе Чаплыгина с двумя степениями свободы в случае ненулевых активных позиционных сил.

10) Для стационарных голономных и неголономных систем даны инвариантные признаки существования линейных однородных инвариантных соотношений. В ряде случаев эти соотношения представлены в явном виде.

11) В задаче о движении тяжелого твердого тела по горизонтальной гладкой плоскости найдено в параметрической форме общее аналитическое выражение поверхности, ограничивающей тело, при которой уравнения движения допускают совокупность четырех линейных и однородных по скоростям инвариантных соотношений. Три из них известны, четвертое записано явно. Подробно рассмотрен частный случай, когда

тело ограничено поверхностью вращения, ось симметрии которой является осью одного из круговых сечений центрального гирационного эллипсоида. Уравнения движения такого тела допускают одиночное инвариантное соотношение. Найдены соответствующие стационарные движения тела, получено достаточное условие устойчивости некоторых многообразий стационарных движений.

12) Доказано, что в классической задаче о катании твердых тел без скольжения условия теорем Чаплыгина, обобщающих теорему площадей, выполняются только для симметричных шаров, катающихся по сферической или цилиндрической поверхности.

13) Дано строгое доказательство условия Ле Суан Аня о возникновении парадоксов Пенлеве в системе с одной фрикционной парой при наличии в ней сухого трения.

14) Доказано, что пространственный вариант теории критического перемещения по Болотову-Чаплыгину в задаче о движении с сухим трением твердого тела по неподвижной поверхности применим только в случае, когда опорная поверхность — плоскость.

15) В задаче о плоском движении твердого тела по неподвижной поверхности при наличии сухого трения (связь предполагается неудерживающей) получены условия, имеющие вид системы двух однотипных неравенств, которые гарантируют контакт поверхностей и сохранение качения тела без проскальзывания. Проведен анализ этих условий на конкретных примерах механических систем.

16) Решена прикладная задача о нахождении точки соприкосновения и угла наклона инструмента, затачиваемого на точильном круге, при которых давление круга на инструмент оказывается минимальным по величине.

17) Опираясь только на закон сухого трения Кулона,

без дополнительных предположений о необходимости каких-либо модификаций этого закона, дано объяснение характерного движения „качающегося маятника“ Пошехонова, что завершило общую теорию этого маятника, предложенную А.Ю. Ишлинским.

18) Построена механическая модель, которая объяснет особый характер движения монет в аттракционах с монетоприемником в виде пластиковой воронки. Решающим в этой модели является учет моментов сил трения качения и верчения в малом пятне контакта монеты с поверхностью воронки, по которой она, ускоряясь, и, сделав несколько десятков оборотов, скатывается вниз.

19) Задача о брахистохроне для материальной частицы, скатывающейся в вертикальной плоскости по материальной направляющей с сухим трением, поставлена и решена как вариационная задача с двумя изопериметрическими условиями. Уравнения экстремали представлены в конечном виде.

20) Решена задача о наибыстрейшем спуске в вертикальной плоскости тяжелого однородного диска, который может катиться и скользить с сухим трением по неподвижной материальной направляющей, а также покидать её. Доказано, что в экстремальном движении диск может только скользить во время движения. Качественно описаны всевозможные виды экстремальных траекторий центра диска.

Положения, выносимые на защиту

I. Не существует универсального действия типа действия по Гамильтону, уравнения экстремалей которого совпадают с динамическими уравнениями неголономных систем Чаплыгина.

II. Условия существования линейных по скоростям первых интегралов уравнений движения голономных и неголономных систем с двумя и тремя степенями свободы допускают инвариантную и конструктивную форму записи, что дает существенное продвижение в решении проблемы интегрируемости уравнений аналитической механики.

III. Обобщения теоремы площадей и теория Чаплыгина о критических перемещениях в задаче качения твердого тела по абсолютно шероховатой поверхности и поверхности с трением имеют существенные ограничения применимости, которые установлены в явном виде.

IV. Существуют некоторые особые движения в ряде прикладных задач механики:

- для „качающегося маятника“ Пошехонова „застревание“ рамы в начале движения является в рамках закона Кулона следствием взаимодействия моментов сил трения в цилиндрических опорах вертикальной оси рамы и силы Кориолиса, приложенной к физическому маятнику, который поворачивается вокруг горизонтальной оси рамы;

- ускоряющееся скатывание диска от периферии к оси симметрии по спиралевидной траектории на поверхности вращения отрицательной кривизны наблюдается в рамках неголономной модели из-за присутствия моментов сил трения качения и верчения в пятне контакта.

V. В задаче переменной структуры о наибыстрейшем скатывании в вертикальной плоскости тяжелого круглого диска по опорной кривой с сухим трением

- существование экстремальных кривых центра диска зависит от выполнения определенных условий для стартового положения диска;

- в экстремальном движении диск может только скользить;

- существуют два разных типа экстремальных кривых спуска в зависимости от значения коэффициента трения.

Апробация работы

Диссертационная работа носит теоретический характер. Её результаты могут найти применение в учебных курсах и научных исследованиях в МГУ им. М.В. Ломоносова, Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, МФТИ, МАИ, КНИТУ-КАИ и в других научных центрах математики и механики.

Основные результаты работы докладывались на семинарах в ВЦ РАН, МГУ, Институте проблем механики РАН, Университете Париж-6, в Национальной школе шоссе и мостов (Париж), в Институте математической физики "Ж.-Л. Лагранж" Туринского университета, в Высшей технической школе (Дармштадт), в Институте проблем техники Академии наук Польши (Варшава), а также на следующих Всесоюзных и Всероссийских международных съездах, конференциях, симпозиумах, семинарах и школах:

1. Всесоюзные и Всероссийские съезды по теоретической и прикладной механике V (1981), VI (1986), VIII (2001), IX (2006), X (2011), XI (2015).

2. Всесоюзная конференция "Нелинейные колебания механических систем" (Горький, 1987).

3. IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Analyt. Mech. (Torino, June 7-11, 1982).

4. Четаевские конференции по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением III (1977), IV (1982), V (1987), X (2012), XI (2017).

5. Int. Conf.-Sem. "Dynamics of multibody systems containing rigid, elastic and liquid elements" , Sagarejo (1996).

6. XII Всероссийское совещание по проблемам управления (Москва, ИПУ РАН, 2014).

7. Международные симпозиумы по классической и небесной механике. Великие Луки. II (1996), III (1998), V (2004), VI (2007).

8. Международная конференция им. Е.С. Пятницкого "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Москва, ИПУ РАН). X (2008), XI (2010).

9. Всероссийская научная конференция по проблемам математики, информатики, физики, химии и методике преподавания естественнонаучных дисциплин (Москва, Российский Университет Дружбы Народов). XXXVIII (2002), XLV (2009).

10. Int. Conf. "Dynamical System Modelling and Stability Investigation" (Kyiv, Nat. Univ.) (2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015).

11. Int. Sc. Kravchuk Conf. (Kyiv, Polytechnik Inst.) XI (2006), XII (2008), XIII (2010), XV (2014), XVI (2015).

12. Крымская международная математическая школа "Метод функций Ляпунова и его приложения" (Симферополь, Симф. гос. ун-т). IV (1998), V (2000), VI (2002), VII (2004), VIII (2006), IX (2008), X (2010).

Публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в 38 печатных работах, 16 из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Scopus, WoS, RSCI. Список работ приведен в конце автореферата.

Личный вклад

Все представленные в диссертации результаты получены лично соискателем.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Объем работы 285 страниц. Графических илл. 31. Библиография включает 246 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении кратко излагаются содержание диссертации, сведения по ее апробации и структура работы.

Глава 1 посвящена задаче нахождению условий, при которых уравнения движения неголономной системы могут быть приведены к лагранжевой (гамильтоновой) форме.

Развитие механики неголономных систем началось с практически не замеченной пионерской работы 1872 года Н.М. Феррерса, в которой явно указывалось, что уравнения движения в форме Лагранжа 2-го рода не пригодны для описания движения систем с неголономными связями, в частности, в задачах о качении твердого тела без скольжения. Поначалу ряд известных ученых некорректно записывали уравнения неголономной динамики.

Когда было осознано принципиальное отличие уравнений движения систем с голономными и неголономными идеальными связями, возникли попытки преобразовать уравнения неголономной динамики к лагранжевой форме. Здесь, на сегодняшний день, практически единственным работающим методом остается метод репараметризации независимой переменной (метод приводящего множителя), идею которого высказал П. Аппель и развил С.А. Чаплыгин. Метод приводящего множителя оказался эффективным только для неголономных систем с двумя степенями свободы. В последние 20-25 лет он переживает второе рождение в связи с появлением серии работ в рамках современной математики и механики по гамильтонизации неголономных систем.

В §1 доказана т е о р е м а: в классической задаче с тремя степенями свободы о качении твёрдого тела по неподвижной плоскости без скольжения случаев, когда все три уравнения Чаплыгина вырождаются в уравнения Лагранжа 2-го рода, не существует.

Однако есть положительные примеры возникновения лагранжевой формы в неголономных системах с двумя степенями свободы. В §1 доказано, что если наложена дополнительная голономная связь, обеспечивающая постоянство высоты центра масс катающегося тела, то уравнения

$$\dot{x} = \dot{u}\, F(u) \cos(u, w), \qquad \dot{y} = \dot{u}\, F(u) \sin(u, w)$$

где $u(q_1, q_2), w(q_1, q_2)$ – произвольные функции обобщенных координат с ненулевым якобианом $J(u, w) \neq 0$, представляют *самый общий вид неголономных связей* в задаче катания без скольжения тела с двумя степенями свободы, при наложении которых оба уравнения Чаплыгина принимают лагранжеву форму.

Кроме теории приводящего множителя, задачу гамильтонизации в неголономной механике пытались решать с помощью обратной задачи вариационного исчисления (И.М Рапопорт, В.С. Новоселов, С.Н. Кирпичников, В. Сарле, и др.), которая состоит в поиске кинетического потенциала – функции, уравнения Лагранжа которой тождественно совпадают с уравнениями движения неголономной системы.

В §2 получены необходимые и достаточные условия существования локально невырожденного квадратичного по скоростям кинетического потенциала для системы двух уравнений 2-го порядка с произвольными квадратичными правыми частями. Уравнения такого вида описывают, например, движение неголономных систем по инерции. Для уравнений саней Чаплыгина (неголономная система с 2-мя степенями свободы) полученные условия не выполняются.

В механике *голономных* систем имеется ряд дескриптивных функций (Лагранжа, Гамильтона, Якоби, Рауса), которые дают уравнения движения механической системы как уравнения экстремалей соответствующего функционала. Но ни одна из этих функций не годится для *неголономных* систем. В §3 доказано принципиальное утверждение: не существует универсального действия типа действия по Гамильтону, уравнения экстремалей которого совпадают с динамическими уравнениями неголономных систем Чаплыгина.

Глава 2 диссертации посвящена одному из аспектов проблемы интегрируемости уравнений динамики – условиям существования в голономных и неголономных системах линейных по обобщенным скоростям интегралов и инвариантных соотношений.

Здесь существенна сама постановка задачи. Функция Лагранжа голономной системы задается в *произвольных* обобщенных координатах и требуется выяснить, существует ли скрытая циклическая координата в этой системе. По теореме Леви-Уиттекера это условие равносильно существованию линейного по обобщенным скоростям первого интеграла системы.

Отметим, что в ряде работ вопрос о существовании алгебраических по скоростям интегралов в системах с двумя степенями свободы исследуется в случаях, когда кинетическая энергия записана в специальных координатах (изотермических, нуль-координатах и др.). Однако при этом не отмечается, что переход от заданных координат к специальным координатам связан с нахождением общего интеграла соответствующего дифференциального уравнения 1-го порядка, что, вообще говоря, представляет неразрешимую задачу. Для решения задачи о циклических координатах этого не требуется.

В классических работах Ф.Г. Миндинга, Э. Бельтрами, Л. Бианки были введены и использовались важные понятия дифференциального инварианта и дифференциального параметра в геометрии, которые оказались востребованными и для поиска скрытых циклических координат в консервативных голономных системах. Опираясь на работы классиков дифференциальной геометрии, в частности, на решение задачи о наложимости двух поверхностей, одна из которых обладает метрикой поверхности вращения, в §1 получены условия существовании скрытой циклической координаты в консервативных голономных системах с двумя степенями свободы. При этом возникла полная аналитическая аналогия при замене обобщенной силовой функцией $a = a_0 + U$ гауссовой кривизны K первой квадратичной формы конфигурационного многообразия системы. В механике эта форма задается кинетической энергией:

$$ds^2 = 2T_2(dt)^2,\ T = T_2 + T_1 + T_0 = 1/2\, a_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j + a_i(q)\dot{q}^i + a_0$$
$$(\text{суммирование по } i, j = 1, \ldots, n; \qquad \delta^2 = \det\|a_{ij}\|)$$

Именно, справедлива т е о р е м а ($n = 2$): пусть

$$\Phi = \begin{cases} a, & \text{если } a \not\equiv const \\ K, & \text{если } a \equiv const \end{cases}$$

(предполагаем, что $\Phi \not\equiv const$), тогда при выполнении следующих условий

$$J(\Delta_1\Phi, \Phi) = J(\Delta_2\Phi, \Phi) = J(\text{rot } b, \Phi) = 0\,,$$

где $\Delta_1\Phi = |\operatorname{grad}\Phi|^2,\ \Delta_2\Phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi,\ \text{rot } b = \dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{\partial a_2}{\partial q^1} - \dfrac{\partial a_1}{\partial q^2}\right)$,

в системе существует циклическая координата. При нарушении хотя бы одного из этих условий скрытой циклической координаты нет.

Результат обобщен на голономные неконсервативные системы.

В §2 получены инвариантные конструктивные признаки существования одной и двух скрытых циклических координат в системах с тремя степенями свободы. В частности, доказана т е о р е м а ($n = 3$): обозначим

$$\nabla(\varphi_1, \varphi_2) = a^{ij}\partial_i\varphi_1\partial_j\varphi_2, \quad \tau = \mathrm{grad}\varphi_1 \times \mathrm{grad}\varphi_2, \quad \omega = \mathrm{rot} b$$

Если

$$a, \quad \Delta_1\varphi_\alpha\,, \quad \nabla(\varphi_1, \varphi_2)\,, \quad \mathrm{grad}\varphi_\alpha \cdot \mathrm{rot}\,\tau\,, \quad \tau \cdot \mathrm{rot}\,\tau$$

$$\omega \cdot \mathrm{grad}\varphi_\alpha\,, \quad \omega \cdot \tau \qquad (\alpha = 1, 2)$$

— функции каких угодно локально независимых дифференциальных инвариантов (параметров) φ_1, φ_2 лагранжиана, то в системе существует циклическая координата. Если хотя бы одна из семи перечисленных функций не зависит от φ_1, φ_2, то скрытых циклических координат в системе нет.

В качестве дифференциальных инвариантов φ_1, φ_2 можно взять, помимо прочих, инварианты квадратичной дифференциальной формы от трех переменных, найденные казанскими геометрами Ф.М. Суворовым (1871) и П.И. Петровым (1960).

В §3 рассмотрены задача Дж. Биркгофа об условном линейном интеграле и еще два приложения результатов §§1-2. Доказано, что если на изоэнергетическом уровне консервативной голономной системы существует линейный по скоростям интеграл, то в некоторой вспомогательной системе есть скрытая или явная циклическая координата.

Результаты §§4-6 в гл. 2 получены под влиянием идей классической работы Г. Риччи-Курбастро и Т. Леви-Чивиты об абсолютном дифференциальном исчислении (1901). Эта работа дала математический аппарат для развития общей теории относительности. Велико ее значение для других наук, в частности, для общей механики.

В §4 для неголономных систем Чаплыгина с двумя степенями даны условия существования общего линейного интеграла и однородного линейного инвариантного соотношения. Если приложенные активные силы ненулевые, то они определяют ортогональное векторное поле, свойства которого позволяют однозначно решить вопрос о существовании в системе линейного общего интеграла и с помощью единственной квадратуры записать этот интеграл в явном виде.

В §5 рассматриваются подмногообразия траекторий голономной или неголономной системы, задаваемые в локальных координатах уравнениями линейными и однородными относительно обобщенных скоростей. В конструктивной форме устанавливаются локальные условия существования некоторых таких подмногообразий. В частности, доказано, что если совокупность линейных однородных инвариантных соотношений неголономной системы с тремя степенями свободы состоит из уравнений связей и еще одного линейного по скоростям равенства, то последнее имеет вид

$$\det\|F, \eta, \lambda_4, \ldots, \lambda_n, \dot{q}\| = 0$$

где λ_i – коэффициенты i-го уравнения связей $(i = 4, \ldots, n)$, n – число обобщенных координат системы, F – заданный вектор обобщённых активных сил, $\eta = (F, \nabla)F$.

Полученные теоретические результаты иллюстрируются на примерах из динамики твердого тела.

В §6 в задаче о движении тяжелого твердого тела по горизонтальной гладкой плоскости найдено в параметрической форме общее аналитическое выражение поверхности, ограничивающей тело, при которой уравнения движения допускают совокупность четырех линейных и однородных по скоростям инвариантных соотношений. Подробно рассматривается частный случай, когда тело ограничено поверхностью вращения, ось симметрии которой является осью одного из круговых сечений центрального гирационного эллипсоида. Уравнения движения такого тела допускают одиночное инвариантное соотношение. Найдены соответствующие стационарные движения тела, получено достаточное условие устойчивости некоторых многообразий стационарных движений.

Заключительный §7 гл. 2 связан с обобщениями теоремы площадей и вытекающих из нее линейных первых интегралов в случаях, когда ось виртуальных поворотов механической системы как одного твердого тела подвижна в пространстве.

Рассмотрим некоторую прямую AL, направление которой в пространстве задано единичным вектором $e(t)$. Прямая постоянно проходит через движущуюся геометрическую точку A, которая может не совпадать ни с какой материальной точкой системы, v_A – скорость точки A, Mv_G – количество движения системы, K_A – кинетический момент системы относительно точки A.

Согласно теореме В.В. Козлова и Н.Н. Колесникова (1978), если среди возможных перемещений имеется поворот системы как одного твердого тела вокруг оси AL и выполняется условие

$$(Mv_G,\, v_A \times e) + (K_A,\, \dot{e}) = 0$$

то скорость изменения кинетического момента системы относительно оси AL равна главному моменту активных сил, действующих на точки системы, относительно этой же оси.

В теореме Суслова (1902) фигурируют более ограничительные условия

$$e = const, \quad (v_G,\, v_A \times e) = 0$$

Еще более частные условия предложены Чаплыгиным (1897)

$$e = const, \quad v_A = \lambda v_G \qquad (\lambda = const)$$

Условие Козлова-Колесникова существенно зависит от распределения масс в системе, поэтому в диссертации проанализированы условия Суслова. Доказана т е о р е м а: при качении твердого тела по неподвижной поверхности без скольжения условия Суслова выполняются только тогда, когда тело представляет собой шар с центрально-симметричным распределением массы, а неподвижная поверхность либо сферическая (в частности плоская), либо произвольная цилиндрическая (в последнем случае направления подвижной оси AL и образующей цилиндра должны совпадать).

Кроме того, проанализированы обобщения теорем Чаплыгина об обмене моментами количеств движения и импульсами между составляющими механической системы при разбиении ее на подсистемы.

Главы 3-5 диссертации посвящены системам с сухим трением.

В **главе 3** рассмотрены некоторые общие вопросы теории систем с сухим трением, относящиеся, в основном, к случаю плоскопараллельного движения твердого тела.

В §1 дано строгое доказательство условия Ле Суан Аня возникновения парадоксов Пенлеве в системах с одной фрикционной парой.

В §2 изучается найденное С.А. Чаплыгиным обобщение теории Е.А. Болотова о критическом полюсе для случая пространственного движения твердого тела по поверхности с сухим трением. Согласно принципу Даламбера в каждый момент времени силы инерции $-m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$, приложенные к точкам системы активные силы $\mathbf{F}_i$ и реакции $\mathbf{R}_i$ связей образуют нулевую систему. Это значит, что виртуальная работа суммы всех этих сил равна нулю на *произвольном* виртуальном перемещении системы:

$$\sum_i (-m_i\ddot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i)\,\delta\mathbf{r}_i = \delta A + \delta A_{\mathbf{F}} + \delta A_{\mathbf{R}} = 0$$

Виртуальную работу δA сил инерции можно разбить на два слагаемых $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ так, что в первое слагаемое входят только компоненты сил инерции, содержащие линейные и угловые ускорения системы, а во второе – компоненты сил инерции, зависящие от скоростей. В некоторых случаях удается найти такое специальное виртуальное перемещение системы, названное критическим, на котором

$$\delta A_1 \equiv 0$$

Тогда для виртуального критического перемещения системы уравнение принципа Даламбера примет вид

$$\delta A_{\mathbf{R}} = -\delta A_2 - \delta A_{\mathbf{F}}$$

Идея состоит в том, что когда имеется только один точечный контакт системы с опорной поверхностью, в котором развивается реакция сухого (кулонова) трения и направление реакции однозначно определяется направлением скорости скольжения, полученное уравнение позволяет легко выявить случаи, когда в зависимости от мгновенных значений координат и скоростей точек системы (т.е. значение правой части известно) соответствующим выбором реакции в левой части уравнения непрерывное движение системы в соответствии с законом Кулона определяется однозначно, неоднозначно (два значения реакции в левой части уравнения обращают его в равенство) или невозможно (знаки левой и правой частей уравнения противоположны при любом выборе направления силы реакции).

Впервые эту простую и красивую геометрическую идею для случая плоскопараллельного движения твердого тела реализовал Е.А. Болотов в своей магистерской диссертации.

С помощью анализа распределения ускорений в теле в диссертации доказано, что в общем случае работа сил инерции δA_2 на критическом перемещении содержит с точностью до постоянного множителя слагаемое

$$- v_{C1} v k_1 \sin\alpha + v_{C2} v \left(\sigma + \alpha'\right)$$

где v_{C1}, v_{C2} – компоненты скорости точки C тела, которой оно в данный момент касается опорной поверхности, v – модуль скорости видимой (геометрической) точки касания C, а k_1 и σ – соответственно кривизна и кручение следа L точки C на опорной поверхности. Угол между вектором кривизны линии L и касательной плоскостью в точке C обозначен α.

Поскольку движение тела заранее не известно, то значения кривизны и кручения следа в рассматриваемое мгновение тоже не известны и, следовательно, при $\alpha \neq 0$ теория критического перемещения не работает. Таким образом, доказано, что в задаче о движении твердого тела по поверхности с сухим трением виртуальная работа сил на критическом перемещении определяется геометрией, распределением масс и мгновенными значениями линейной и угловой скоростей тела только в случае, когда опорная поверхность – плоскость.

В §3 рассматривается общая задача о плоском движении твердого тела по неподвижной поверхности при наличии сухого (кулонова) трения. Связь предполагается неудерживающей.

Получены условия, обобщающие условия Болотова, которые имеют вид системы двух однотипных неравенств и гарантируют контакт поверхностей с сохранением качения тела без проскальзывания. Проведен анализ полученных условий на двух примерах механических систем.

В **главе 4** изучаются конкретные задачи механики систем с сухим трением с целью строгого обоснования с помощью классического закона Кулона некоторых специфических типов движений в рассматриваемых системах.

В §1 решена задача о нахождении точки соприкосновения и угла наклона инструмента, затачиваемого на точильном абразивном круге, при которых давление круга на инструмент оказывается минимальным по величине. Эти параметры важны для долговечности эксплуатации точильного круга и безопасности работы на нем.

В §2 рассматривается „качающийся маятник“ Пошехонова – прибор, демонстрирующий суточное вращение Земли в кабинетных условиях. В нем рама с вертикальной осью, может вокруг нее в лабораторной неинерциальной (с учетом суточного вращения Земли) системе отсчета поворачиваться вследствие колебаний физического матяника, имеющего горизонтальную ось вращения, фиксированную в раме. Теория движения этого прибора получила математическое обоснование в работе А.Ю. Ишлинского. Однако остался один исключительный тип движения маятника, который не получил объяснения, и теория Ишлинского оставалась незавершенной.

В указанном движении при пуске маятника Пошехонова, демонстрируемого в Московском планетарии, вначале рама практически стоит на месте (в течение первых 10-50 колебаний). Далее рама приходит в движение, причём, характер этого движения происходит штатно, с остановками.

В отношении этого движения А.Ю. Ишлинский пишет:

„Я объясняю это явление изменением трения в подшипниках вертикальной оси рамы, которое резко возрастает при продолжительном пребывании маятника без движения из-за появляющихся окислов и пыли. При пуске маятника в ход подшипник постепенно „разрабатывается“, и нормальное движение маятника восстанавливается“ (Астрон. журн., 1955, т.32, вып.5, с.462-468).

В §2 особенный режим движения прибора обоснован исключительно на основании закона трения Кулона, без привлечения дополнительных гипотез и предположений. Именно, следует принять во внимание „игру“ сил – момента сил сухого трения между цапфами вертикальной оси рамы и стенками вертикальных верхней и нижней цилиндрических опор и момента силы Кориолиса, приложенной к маятнику. С помощью проведенного анализа построена качественная картина на цилиндрическом фазовом пространстве маятника, из которой следует, что изображающая точка может начать движение из зоны застоя (покоящаяся первоначально рама остается неподвижной), постепенно приближаясь к положению равновесия вследствие наличия трения в подшипниках горизонтальной оси рамы. Маятник совершает колебания, а рама при этом остается неподвижной. Но в какое-то мгновение изображающая точка пересекает в фазовом пространстве границу области, не принадлежащей зоне застоя. Рама начинает поворачиваться.

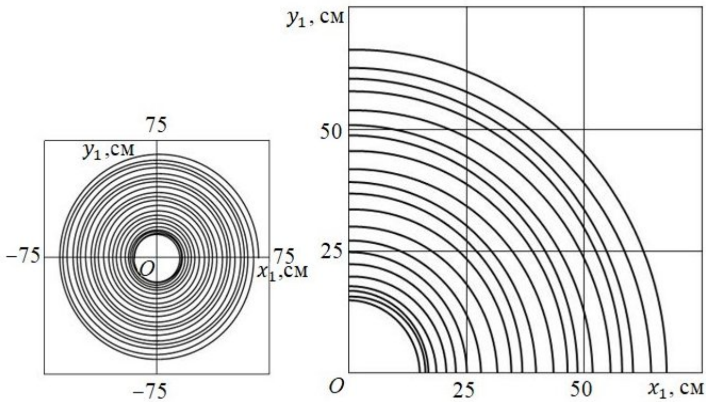
В §3 построена модель движений диска по двояковыпуклой твердой поверхности вращения (воронки) – основного элемента развлекательного автомата для сбора денег, используемого в ряде стран. Каждое такое устройство представляет собой стол в форме чаши, установленный на ножке-подставке. У чаши есть отверстие внизу по центру. Столы имеют разные размеры и глубину. На самой высокой параллели установлены один или несколько „запускающих“ механизмов в виде горки со спускающейся к ее основанию канавкой, по которой с вершины горки посетитель пускает без начальной скорости монету (или жетон в виде тонкого круглого диска). Встречаются и другие принципиально мало отличающиеся конструкции таких механизмов. Монета начинает скатываться почти по параллели, на которую она запущена, постепенно переходя на более низкие (и следовательно, более короткие) параллели, ускоряя свое вращение вокруг вертикальной оси симметрии стола. В итоге монета проваливается через отверстие в монетоприемник. Одновременно можно запустить несколько монет, причем в противоположных направлениях. Скатываясь вниз, монеты не сталкиваются друг с другом, так как угол наклона каждой монеты к оси симметрии стола принимает строго определенное значение, определяемое текущей мгновенной скоростью качения и текущим расстоянием центра монеты до оси симметрии стола. Ставится задача объяснить описанное поведение монет.

Выбрана неголономная модель движения тонкого диска без скольжения. Составлены уравнения качения диска, найдены стационарные движения и получены условия их устойчивости в первом приближении. В неголономной модели движения монеты не соответствуют наблюдаемым в монетоприемнике. Решающим оказался учет трения качения и трения верчения:

$$m_1 = -\, k_r N\sigma\,|\sigma|\ , \qquad m_2 = -\, k_p N\ \mathrm{sign}\ \omega_{\mathrm{n}}$$

где m_1 – выражение момента сил трения качения в зависимости от N и скорости прецессии σ, m_2 – момент сил трения верчения, размерные коэффициенты k_r и k_p зависят от свойств материалов трущихся поверхностей, $N > 0$ – нормальная компонента силы реакции (сила давления), приложенная к диску со стороны опоры, ω_n – проекция мгновенной угловой скорости диска на нормаль поверхности. Выражения для моментов взяты из экспериментальной работы Ма Даолина с соавторами (2014), посвященной т.н. „диску Эйлера“.

Другая проблема, которую необходимо решить при моделировании, это выбор уравнения поверхности, по которой катается диск. Ни на сайте изобретателя устройства, ни в его патенте информации о форме воронки нет. Подбором параметров системы, которая оказалась весьма чувствительной к такому выбору, на качественном уровне удалось добиться близости результатов численного моделирования наблюдаемым движениям в реальных физических устройствах. Ниже приведен один из результатов численного моделирования для проекции на горизонтальную плоскость траектории следа диска при скатывании по поверхности однополостного гиперболоида.



Глава 5 посвящена решению двух задач о брахистохроне с трением, которые найдены средствами вариационного исчисления.

В §1 представлен краткий обзор обобщений классической задачи о брахистохроне (1696) и предпринята попытка некоторой классификации этих работ, число которых уже больше сотни.

Спустя почти 300 лет после решения классиками первой задачи о брахистохроне Н. Эшби с соавторами поставил и решил задачу о нахождении кривой с сухим трением, по которой тяжелая частица скатывается из заданной стартовой точки в заданную финальную точку за минимальное время (1975). Долгое время эта задача оставалось единственной задачей с сухим трением, решенной как условная вариационная задача. Другие решения этой задачи и некоторые её обобщения были получены методами теории оптимального управления.

В §2 задача Эшби решена как вариационная задача с двумя изопериметрическими условиями. При этом для лагранжиана задачи соответствующее уравнение Эйлера оказывается конечным уравнением относительно искомой функции. Отмечено, что при выбранном методе решения вариационной задачи появляется вторая экстремаль, представляющая постороннее решение. Она становится идентичной первой экстремали, когда одно из изопериметрических условий пропадает, что соответствует решению задачи о наибыстрейшем спуске тяжелой частицы из заданного положения без начальной скорости до заданной вертикальной прямой.

Были неоднократные попытки решить более сложную задачу о наибыстрейшем спуске тяжелого диска по кривой в вертикальной плоскости. Если предположить, что в точке контакта диска развивается сила сухого трения, то объектом этой вариационной задачи является система переменной структуры, т.е. необходимо учитывать, что диск может не только катиться, скользить по направляющей кривой с трением, но и отрываться от нее. Задачу эту удалось решить аналитически, и в §3 приведено ее полное решение.

Успех решения задачи связан с применением модификации метода множителей Лагранжа и использовании вспомогательных дифференциальных переменных. Данный математический аппарат был разработан Ф.А. Валентайном (1937).

Точная постановка задачи такова. Тяжёлый динамически симметричный круглый диск движется в вертикальной плоскости, постоянно опираясь на неподвижную материальную кривую с трением. Трение в точке соприкосновения диска с опорой описывается законом Кулона, то есть величина тангенциальной компоненты силы реакции (силы трения) в точке контакта диска с опорной кривой не превосходит произведения модуля давления опоры на диск и постоянного коэфициента трения $0 < k < 1$. Когда диск скользит, сила трения имеет указанное максимальное значение и направлена противоположно мгновенной скорости точки диска, совпадающей с точкой контакта. Когда диск катится (мгновенная скорость точки диска, совпадающей с точкой контакта, равна нулю), то сила трения не больше указанного максимального значения. Требуется найти такую форму опорной кривой (экстремали), чтобы при движении по ней диска его центр достиг из заданного стартового положения A с нулевой начальной скоростью заданное финальное положение B за минимальное время по сравнению со всеми другими регулярными кривыми AB, при движении центра по которым диск совершает безотрывное движение по соответствующим R - эквидистантным опорным кривым (R – радиус диска).

Главное в методе Валентайна – выразить с помощью введения дополнительных дифференциальных переменных все ограничения в вариационной задаче, включая закон Кулона, в виде равенств. Полученная в итоге вариационная задача насчитывает 13 переменных. Анализ необходимых условий экстремума с учетом краевых и начальных условий показал, что в экстремальном движении диск может только скользить, а вид направляющей кривой зависит от величины коэффициента сухого трения k и при $k \to 0$ стремится к циклоиде.

Более точно: при $0 < k < 0.13$ из области достижимости в заданную финальную точку $(0,0)$ спускаются экстремали двух типов; экстремали первого типа целиком расположены выше горизонтальной оси и входят в начало координат сверху; экстремали второго типа имеют финальный участок, расположенный ниже горизонтальной оси, и входят в начало координат снизу. При $k > 0.13$ остаются только экстремали первого типа, причем, с ростом значения k они спрямляются.

В Заключении перечислены полученные результаты, даны рекомендации для дальнейших разработок темы исследований.

Основные публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертации изложены в 38 печатных работах, 16 из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Scopus, WoS, RSCI:

1. *Сумбатов А.С.* О приведении дифференциальных уравнений неголономной механики к форме Лагранжа // Прикл. матем. и механ. Т. 36. Вып. 1. 1972. С. 211-217. = Reduction of the differential equations of nonholonomic mechanics to Lagrange form // J. Appl. Math. Mech. Vol. 36, Issue 2, 1972, Pages 194-201.
2. *Сумбатов А.С.* О применении некоторых обобщений теоремы площадей в системах с качением твердых тел // Прикл. матем. и механ. Т. 40. Вып. 1. 1976. С. 599-605. = On the application of certain generalizations of the area theorem in systems with rolling of rigid bodies // J. Appl. Math. Mech. Vol. 40, Issue 4, 1976, Pages 552-558.
3. *Сумбатов А.С.* К проблеме поиска циклических координат в консервативных динамических системах // Прикл. матем. и механ. Т. 42. Вып. 1. 1978. С. 43-51. = On the

problem of determining the existence of ignorable coordinates in conservative dynamic systems // J. Appl. Math. Mech. Vol. 42, Issue 1, 1978, Pages 42-50.

4. *Сумбатов А.С.* Решение одной задачи Биркгофа // Прикл. матем. и механ. Т.42. Вып.6. 1978. С. 1138-1141. = Solution of one of Birkhoff's problems // J. Appl. Math. Mech. Vol. 42, Issue 6, 1978, Pages 1248-1254.
5. *Сумбатов А.С.* О линейных интегралах уравнений Чаплыгина // Прикл. матем. и механ. Т. 45. Вып. 3. 1981. С. 466-470. = On the linear integrals of the Chaplygin equations // J. Appl. Math. Mech. Vol. 45, Issue 3, 1981, Pages 339-342.
6. *Сумбатов А.С.* О циклических координатах консервативных натуральных систем с тремя степенями свободы // Прикл. матем. и механ. Т. 45. Вып. 5. 1981. С. 787-799. = On ignorable coordinates of conservative and natural systems with three degrees of freedom // J. Appl. Math. Mech. Vol. 45, Issue 5, 1981, Pages 588-597.
7. *Сумбатов А.С.* Об интегрируемости уравнения Гамильтона-Якоби в обобщенных координатах // Прикл. матем. и механ. Т. 46. Вып. 1. 1982. С. 13-19. = On the integrability of the Hamilton-Jacobi equation in generalized coordinates // J. Appl. Math. Mech. Vol. 46, Issue 1, 1982, Pages 9-15.
8. *Сумбатов А.С.* О законе изменения кинетического момента шара, катающегося по неподвижной поверхности // Прикл. матем. и механ. Т. 47. Вып. 5. 1983. С. 875-877. = On the law of angular momentum variation of a sphere rolling on a stationary surface // J. Appl. Math. Mech. Vol. 47, Issue 5, 1983, Pages 695-698.
9. *Сумбатов А.С.* Об однородных линейных инвариантных соотношениях // Прикл. матем. и механ. Т. 50. Вып. 1. 1986. С. 32-42. = On uniform linear invariant relations of the

equations of dynamics // J. Appl. Math. Mech. Vol. 50, Issue 1, 1986, Pages 22-30.

10. *Сумбатов А.С.* Некоторые инвариантные соотношения в задаче о движении тяжелого твердого тела по горизонтальной гладкой плоскости // Прикл. матем. и механ. Т. 52. Вып. 1. 1988. С. 34-41. = Some invariant relations in the problem of the motion of a body on a smooth horizontal plane // J. Appl. Math. Mech. Vol. 52, Issue 1, 1988, Pages 30-34.

11. *Сумбатов А.С.* Об условиях возникновения скольжения в плоской системе с трением // Прикл. матем. и механ. Т. 59. Вып. 6. 1995. С. 887-894. = Conditions for the onset of sliding in a plane system with friction // J. Appl. Math. Mech. Vol. 59, Issue 6, 1995, Pages 845-852.

12. *Сумбатов А.С.* О маятнике Пошехонова // Прикл. матем. и механ. Т. 60. Вып. 3. 1996. С. 413-417. = On the Poshekhonov pendulum // J. Appl. Math. Mech. Vol. 60, Issue 3, 1996, Pages 407-411.

13. *Сумбатов А.С.* О качении тяжелого диска по поверхности вращения отрицательной кривизны // Прикл. матем. и механ. Т. 83. № 2. 2019. С. 234-248. (SJR 0,335)

14. *Sumbatov A.S.* Nonholonomic systems // Reg. Chaotic Dyn. V.7, №2, 2002. Pp. 221-238. (SJR 0,597)

15. *Sumbatov A.S.* Brachistochrone with Coulomb friction as the solution of an isoperimetrical variational problem // Int. Journal of Non-Linear Mechanics. Vol. 88 (2017) pp. 135-141. (SJR 1,032)

16. *Sumbatov A.S.* Problem on the brachistochronic motion of a heavy disk with dry friction // Int. Journal of Non-Linear Mechanics. Vol. 99 (2018) pp.295-301. (SJR 0,903)

Опубликованы статьи в рецензируемых журналах, входящих в список ВАК:

17. *Сумбатов А.С.* О принципе Гамильтона для неголономных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер 1. Матем. Механ., 1970. № 1. С. 98-101.
18. *Сумбатов А.С.* Неэкстремальность семейств кривых, определяемых динамическими уравнениями неголономных систем Чаплыгина // Дифф. уравн. Т. 20. № 5. 1984. С. 897-899.
19. *Сумбатов А.С.* Об уравнениях Лагранжа в неголономной механике // Нелинейная динамика. Т. 9. № 1. 2013. С. 39-50.
20. *Сумбатов А.С.* Задача о брахистохроне (классификация обобщений и некоторые последние результаты) // Труды МФТИ (2017). Т.9, №3. С. 66-75.

По результатам работы опубликован обзор в академическом издании и его дополненный английский перевод:

21. *Сумбатов А.С.* Интегралы, линейные относительно скоростей. Обобщения теоремы Якоби // В кн.: Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Общая механика. 1979. Т. 4, С. 3-57.
22. *Sumbatov A.S.* Integrals linear with respect to velocities. Generalizations of the Jacobi theorem. In: Applied Mechanics Soviet Reviews. V.1: Stability and Analytical Mechanics. Hemisphere Publ. Co.: NY etc. 1990. Pp. XVII-XVIII, 327-392.

По результатам работы опубликованы статьи в трудах международных конференций:

23. *Сумбатов А.С.* О циклических координатах консервативных динамических систем с двумя степенями свободы. В

кн. Теория устойчивости и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1979. С. 214-221.

24. *Sumbatov A.S.* On hidden ignorable coordinates of conservative holonomic systems with three degrees of freedom. In: Proc. IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Anal. Mech. (Torino, June 7-11, 1982), V.2, Torino, 1983. Pp. 817-819.
25. *Сумбатов А.С.* О применении обобщенной теоремы площадей в задаче качения твердого тела по неподвижной поверхности. В сб.: Устойчивость движения. Новосибирск: Наука, 1985. С. 159-162.
26. *Сумбатов А.С.* Об устойчивости установившихся вращений твердого тела в некоторых системах с сухим трением. В Сб. трудов V Всесоюзной конференции по аналитической механике, теории устойчивости и управлению движением (задачи устойчивости, управления, колебания). М.: ВЦ АН СССР. 1990. С. 57-63.
27. *Сумбатов А.С.* К динамике твердого тела, касающегося одной точкой опорной поверхности с сухим трением. В кн.: Проблемы теории устойчивости и аналитической механики. М.: Физматлит, 2009. С. 127-135.
28. *Сумбатов А.С.* История и методы решения задачи о брахистохроне (классическая постановка и некоторые обобщения). В Трудах XI Четаевской международной конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление" (13-17 июня 2017 г., Казань), Т.1 (2017). Казань: изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. С.299-308.

Опубликована монография:

29. *Сумбатов А.С., Юнин Е.К.* Избранные задачи механики систем с сухим трением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 200 с.

Опубликованы статьи в сборниках:

30. *Сумбатов А.С.* К теореме площадей. В сб.: Задачи иссл. уст. и стаб. движения. М.: ВЦ АН СССР, 1982. С. 80-86.
31. *Сумбатов А.С.* О обратной задаче вариационного исчисления. В сб.: Задачи иссл. уст. и стаб. движения. М.: ВЦ АН СССР, 1985. С. 105-118.
32. *Сумбатов А.С.* О движении систем с сухим трением. В сб.: Задачи иссл. уст. и стаб. движения. М.: ВЦ АН СССР, 1986. С.63-76.
33. *Сумбатов А.С.* О линейных интегралах неконсервативных механических систем с двумя степенями свободы. В сб.: Задачи иссл. уст. и стаб. движения. М.: ВЦ АН СССР, 1987. С. 67-72.
34. *Сумбатов А.С.* О возникновении парадоксов Пенлеве в системах с одной фрикционной парой. В сб.: Задачи иссл. уст. и стаб. движения. М.: ВЦ РАН. 2011. С. 135 -143.
35. *Сумбатов А.С.* Об оптимальных параметрах заточки инструмента на точильном круге. В сб.: Задачи иссл. уст. и стаб. движения. М.: ВЦ РАН, 2013. С. 50-54.
36. *Сумбатов А.С.* О невозможности чистого скатывания вертикально вниз тяжёлого диска по кривой с сухим трением // В сб.: Задачи иссл. уст. и стаб. движения. М.: ВЦ РАН, 2013. С. 79-82.
37. *Сумбатов А.С.* Об уравнениях Ферререса. В кн.: Материалы международной научно-практической конференции "Математика в современном техническом университете" (Киев, 19-20 апреля 2013 г.). К.: НТУУ "КПИ" , 2013. Т.III "История точных наук". С. 413-415.
38. *Сумбатов А.С.* Задача о брахистохроне с кулоновым трением как изопериметрическая вариационная задача. В сб. научно-метод. статей „Теоретическая механика“. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та. 2018. С. 166-179.