ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ПОГРУЖЕННОГО ПОРИСТОГО ШАРА

Н.Г. Тактаров

Мордовский государственный педагогический институт, Саранск
n.g.taktarov@mail.ru

Аннотация. Определены течения вязкой жидкости, вызванные: 1) поступательно-колебательным и 2) вращательно-колебательным движением погруженного в нее пористого шара. В приближении Стокса получены точные аналитические решения нестационарного уравнения Бринкмана внутри шара и уравнения Навье-Стокса вне него для обоих случаев движения шара. Определены: сила сопротивления, действующая на контрольную сферическую поверхность, ограничивающую пористый шар, в первом случае и момент сил трения на сферической поверхности, ограничивающей пористый шар, во втором. Показано, что в частных случаях из полученных результатов следуют известные ранее решения задач о колебаниях твердой непроницаемой сферы в жидкости.

Ключевые слова: вязкая жидкость, пористый шар, уравнение Бринкмана, колебательное движение.

Теория движения жидкостей в пористых средах интенсивно развивается в последнее время в связи с разнообразными приложениями в технологических процессах, а также при изучении природных явлений. Целью настоящей работы является определение течений вязкой жидкости, возникающих при колебаниях погруженного в нее пористого шара, а также силы сопротивления и момента сил трения, действующих на этот шар.

1. Поступательно-колебательное движение пористого шара

Поступательно-колебательное движение пористого шара радиуса R в жидкости можно рассматривать двумя эквивалентными способами: 1) в неподвижной системе координат, 2) в подвижной неинерциальной системе, жестко связанной с этим шаром. Пористая среда предполагается недеформируемой, однородной и изотропной, а также имеющей достаточно большую пористость (близкую к единице) и высокую проницаемость. Величины, относящиеся к пористой среде и свободной жидкости, обозначаются в необходимых случаях индексами 1 и 2 соответственно.

1) В неподвижной системе координат $Ox^*y^*z^*$, начало которой в данный момент времени t^* совпадает с центром шара, уравнения движения жидкости запишем в виде (в приближении Стокса):

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial \mathbf{u}_1^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho}\nabla^* p_1^* + \nu' \Delta^* \mathbf{u}_1^* - \frac{\nu}{K}\left(\mathbf{u}_1^* - \mathbf{u}^*\right), \quad \nabla^* \cdot \mathbf{u}_1^* = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho}\nabla^* p_2^* + \nu \Delta^* \mathbf{u}_2^*, \ \nabla^* \cdot \mathbf{u}_2^* = 0.$$

Здесь и далее знаком «*» обозначены размерные переменные (но не параметры), а безразмерные переменные обозначены теми же символами, но без этого знака, Γ – пористость, $\mathbf{u}_1^*$ – скорость фильтрации, $\nu' = \eta'/\rho$, $\nu = \eta/\rho$, η' и η – коэффициент с размерностью вязкости и вязкость жидкости соответственно, K – коэффициент проницаемости пористой среды, $\mathbf{u}^* = \Gamma \mathbf{v}^*$, $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_0 \exp(-i\omega t^*)$ – скорость шара, ω – частота колебаний, $\mathbf{v}_0 = \mathrm{v}_0 \mathbf{e}$ $(\mathrm{v}_0 > 0)$, ось Oz^* направлена по единичному вектору $\mathbf{e}$. В связи со сделанными предположениями далее полагаем $\eta' = \eta$. Во всех рассмотренных случаях физический смысл имеют лишь действительные части комплексных выражений.

Введем сферическую систему координат r^*, θ, φ, полярная ось которой совмещена с осью Oz^*. Используя систему отсчета, жестко связанную с шаром, в которой элементы его поверхности неподвижны, граничные условия к уравнениям (1) при сделанных предположениях запишем в виде:

$$\text{при } r^* = R:\ u_{1r}^* - \Gamma \mathrm{v}^* \cos\theta = u_{2r}^* - \mathrm{v}^* \cos\theta, \quad u_{1\theta}^* + \Gamma \mathrm{v}^* \sin\theta = u_{2\theta}^* + \mathrm{v}^* \sin\theta, \tag{2}$$

$$p_1^* = p_2^*, \ \Lambda\left(\frac{\partial u_{1\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{\partial u_{2\theta}^*}{\partial r^*}\right) = u_{1\theta}^* + \Gamma \mathrm{v}^* \sin\theta,$$

$$\text{при } r^* \to \infty:\ u_2^* \to 0.$$

Здесь Λ – параметр с размерностью длины. К условиям (2) добавляются также условия конечности всех величин в областях их определения.

2) Второй способ рассмотрения движения жидкости заключается в использовании подвижной системы координат $Ox^*y^*z^*$, жестко связанной с этим шаром (O – центр шара). Полярная ось подвижной сферической системы координат совмещена с осью Oz^* декартовой системы. В связи с неинерциальностью подвижной системы в уравнениях относительного движения жидкости добавляется сила инерции:

$$\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial \mathbf{u}_1^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho}\nabla^* p_1^* + \nu' \Delta^* \mathbf{u}_1^* - \frac{\nu}{K}\mathbf{u}_1^* - \frac{1}{\Gamma}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}^*}{\mathrm{d}t^*}, \quad \nabla^* \cdot \mathbf{u}_1^* = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\rho}\nabla^* p_2^* + \nu \Delta^* \mathbf{u}_2^* - \frac{1}{\Gamma}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}^*}{\mathrm{d}t^*}, \ \nabla^* \cdot \mathbf{u}_2^* = 0.$$

Здесь $\mathbf{u}_1^*$ и $\mathbf{u}_2^*$ – относительные скорости (в отличие от уравнений (1) и условий (2), в которых скорости абсолютные).

Граничные условия к уравнениям (3):

$$r^* = R: \ u_{1r}^* = u_{2r}^*, \ \ u_{1\theta}^* = u_{2\theta}^*, \quad p_1^* = p_2^*, \ \Lambda\left(\frac{\partial u_{1\theta}^*}{\partial r^*} - \frac{\partial u_{2\theta}^*}{\partial r^*}\right) = u_{1\theta}^*, \tag{4}$$

$$r^* \to \infty: \ u_{2r}^* = -\mathrm{v}^* \cos\theta, \ u_{2\theta}^* = \mathrm{v}^* \sin\theta \ \left(\mathrm{v}^* = \mathrm{v}_0 \exp\left(-i\omega t^*\right)\right).$$

Вводя безразмерные переменные: $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*/R$, $t = \omega t^*$, $\mathbf{u} = \mathbf{e}\,\Gamma \exp(-it)$, $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j^*/\mathrm{v}_0$, $p_j = p_j^*(R/\eta \mathrm{v}_0)$ $(j = 1, 2)$, уравнения (3) и граничные условия (4) можно записать в безразмерном виде [1].

Решая безразмерные уравнения, находим поля скоростей внутри и вне шара

$$u_{jr} = -2e^{-it}\frac{\cos\theta}{r}\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}r}, \ u_{j\theta} = e^{-it}\sin\theta\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}r} + \frac{\mathrm{d}^2 f_j}{\mathrm{d}r^2}\right) \quad (j = 1, 2).$$

Выражения для $\mathrm{d}f_j/\mathrm{d}r$ приведены в [1].

Сила сопротивления, действующая со стороны внешней жидкости на контрольную поверхность, ограничивающую пористое тело, равна потоку импульса через эту поверхность в системе отсчета, в которой эта поверхность покоится [2]

$$F_i^* = \iint\left(\sigma_{2ij}^* - \rho\, u_{2i}^*\, u_{2j}^*\right) n_j \,\mathrm{d}S^* \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Здесь σ_{2ij}^* – тензор вязких напряжений, n_j – внешняя нормаль к поверхности шара, интегрирование проводится по всей поверхности сферы $r^* = R$. В приближении Стокса второе слагаемое под интегралом следует отбросить как имеющее второй порядок малости по скорости.

Вводя безразмерную силу $F_i = F_i^*/(\eta \mathrm{v}_0 R)$, запишем проекцию силы F_i на ось Oz [2]:

$$F_z = \iint\left(-p_2\cos\theta + \sigma'_{2rr}\cos\theta - \sigma'_{2r\theta}\sin\theta\right)\mathrm{d}S,$$

$$\sigma'_{2rr} = 2\frac{\partial u_{2r}}{\partial r}, \ \sigma'_{2r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_{2r}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{2\theta}}{\partial r} - \frac{u_{2\theta}}{r}.$$

Здесь интегрирование проводится по поверхности сферы $r = 1$. Окончательно находим:

$$F_z = -\frac{4}{3}\pi\, e^{-it}\,\frac{N_1 \sin m_1 + m_1 N_2 \cos m_1}{N_3 \sin m_1 + m_1 N_4 \cos m_1}. \tag{5}$$

Здесь N_1, N_2, N_3, N_4 – коэффициенты, зависящие от параметров m_1, m_2, выражения для которых приведены в [1]. В пределе, соответствующем замене пористого шара сплошным твердым, из (5) получается размерная сила, действующая на твердый (без пор) шар [2, §24, задача 5].

2. Вращательно-колебательное движение пористого шара

Течение жидкости при вращательно-колебательном движении пористого шара с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}_0 \exp\left(-i\omega t^*\right)$ вокруг оси Oz^* (O – центр шара), можно рассматривать либо в неподвижной системе координат, либо в подвижной, жестко связанной с шаром. Ограничимся здесь рассмотрением движения в неподвижной системе. В этом случае внутреннее и внешнее абсолютные поля скоростей имеют вид [3]:

$$u_{1\varphi} = -\left[\frac{2iA_1}{r}\left(m_1\cos m_1 r - \frac{1}{r}\sin m_1 r\right) + 2Cr\right]e^{-it}\sin\theta, \tag{6}$$

$$u_{2\varphi} = -\frac{A_2}{r^2}\left(im_2 r - 1\right)e^{im_2 r - it}\sin\theta.$$

Выражения для m_1, m_2, C приведены в [3]. Коэффициенты A_1, A_2 в (6) следует определять с помощью безразмерных граничных условий при $r = 1$:

$$u_{1\varphi} - \Gamma \mathrm{v}_\varphi = u_{2\varphi} - \mathrm{v}_\varphi,\ \left(\mathrm{v}_\varphi = e^{-it}\sin\theta\right),$$

$$\lambda\left[\frac{\partial u_{1\varphi}}{\partial r} - \frac{\partial u_{2\varphi}}{\partial r} + (1-\Gamma)e^{-it}\sin\theta\right] = u_{1\varphi} - \Gamma e^{-it}\sin\theta,\ (\lambda = \Lambda / R).$$

Эти граничные условия заменяют собой неправильные граничные условия в [3]. В связи с этим коэффициенты A_1, A_2 будут отличаться от приведенных в [3] и должны иметь вид:

$$A_1 = \frac{i\lambda(1-\Gamma-2C)(3-3im_2-m_2^2)+(2C+\Gamma)(m_2+i)}{2[(\lambda(m_1^2-m_2^2-im_1^2m_2)+im_2-1)\sin m_1+(\lambda m_1m_2^2-m_1(im_2-1))\cos m_1]},$$

$$A_2 = \frac{\lambda(1-\Gamma-2C)(3m_1\cos m_1-3\sin m_1+m_1^2\sin m_1)+m_1\cos m_1-\sin m_1}{e^{im_2}[(\lambda(m_1^2-m_2^2-im_1^2m_2)+im_2-1)\sin m_1+(\lambda m_1m_2^2-m_1(im_2-1))\cos m_1]}.$$

Безразмерный момент сил трения со стороны внешней жидкости, действующих на контрольной поверхности, ограничивающей пористый шар, определяется равенством [2]:

$$M_z = \iint \sigma'_{2r\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}S,\ \sigma'_{2r\varphi} = \frac{\partial u_{2\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{2\varphi}}{r}.$$

Здесь интегрирование проводится по всей поверхности сферы $r = 1$.

В результате интегрирования находим

$$M_z = \frac{8}{3}\pi e^{-it}\left(m_2^2+3im_2-3\right)\frac{Q_1\sin m_1+m_1Q_2\cos m_1}{Q_3\sin m_1+m_1Q_4\cos m_1}, \tag{7}$$

$$Q_1 = -1+\lambda\left(m_1^2-3\right)\left(1-\Gamma-2C\right),\ Q_2 = 1+3\lambda\left(1-\Gamma-2C\right),$$

$$Q_3 = -1+im_2+\lambda\left(m_1^2-im_1^2m_2-m_2^2\right),\ Q_4 = 1-im_2+\lambda m_2^2.$$

Размерный момент определяется равенством $M_z^* = (\eta\Omega_0R^3)M_z$.

В пределе, соответствующем замене пористого шара сплошным твердым, из (7) получается размерный момент сил трения, действующих на поверхности твердого (без пор) шара [2, §24, задача 10].

Литература

1. Н.Г. Тактаров, О.А. Рунова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2018. № 2. С. 27-37.
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2006. 736 с.
3. Н.Г. Тактаров // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 5. С. 133-138.