
**Задача оптимального распределения ресурсов
в двухсекторной экономической модели с функционалом
интегрального типа при различных коэффициентах
амортизации: теоретический анализ и численные
эксперименты¹**

**Optimal Resource Allocation Problem in Two Sector Economic
Model with Integral Type Cost and Different Amortization
Coefficients: Theoretical Analysis and Numerical Experiments**

Киселёв Ю.Н.

Факультет ВМК МГУ, Ленинские горы, Москва, 119991, Россия
e-mail: kiselev@cs.msu.su

Аввакумов С.Н.

Факультет ВМК МГУ, Ленинские горы, Москва, 119991, Россия
e-mail: asn@cs.msu.su

Орлов М.В.

Факультет ВМК МГУ, Ленинские горы, Москва, 119991, Россия
e-mail: orlov@cs.msu.su

Орлов С.М.

Факультет ВМК МГУ, Ленинские горы, Москва, 119991, Россия
e-mail: sergey.orlov@cs.msu.su

Рассматривается задача распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с двухфакторной производственной функцией Кобба–Дугласа при различных коэффициентах амортизации на конечном горизонте времени с функционалом интегрального типа. Задача приводится к некоторой канонической форме масштабированием фазовых переменных и времени. Устанавливается оптимальность экстремального решения, построенного на основе принципа максимума. При достаточно большом горизонте планирования оптимальное управление имеет две или три точки переключения, содержит один особый участок и равно нулю на финальном участке. Интересно отметить, что между особым участком, где движение идёт по особому лучу, и финальным участком существует переходный «калибровочный» режим, чего не отмечалось ранее при исследованиях похожих процессов. Решение краевой задачи принципа максимума предъявляется в явном виде для случая, когда начальное состояние объекта лежит ниже особого луча.

¹Работа поддержана грантом РФФИ 16-31-00177 мол_a

Теоретические результаты дополняются графическими иллюстрациями на основе численных расчётов.

В докладе представлены перечисленные ниже вопросы.

1. Постановка задачи (каноническая форма). Изучается двумерная задача оптимального управления на конечном отрезке времени

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{u_1}{\varepsilon_1} F(x) - \mu_1 x_1, \quad x_1(0) = x_{10} > 0, \\ \dot{x}_2 = \frac{u_2}{\varepsilon_2} F(x) - \mu_2 x_2, \quad x_2(0) = x_{20} > 0, \\ J \equiv \int_0^T e^{-\nu t} (1 - u_1 - u_2) F(x) dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}, \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u \in U = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq 1 \right\}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где x_1, x_2 — положительные фазовые переменные, u_1, u_2 — координаты управления $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, подчинённого геометрическому ограничению $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^2$, где область управления U является треугольником, $x^0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2$ — начальное состояние управляемого объекта, длительность процесса управления $T > 0$ — заданный параметр. В дифференциальных уравнениях управляемого движения участвует функция

$$F(x) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^2,$$

— производственная функция Кобба–Дугласа, в которой коэффициенты эластичности $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, удовлетворяют условиям:

$$\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1,$$

μ_1, μ_2 — положительные коэффициенты амортизации. Коэффициент дисконтирования $\nu > 0$. Фазовые переменные характеризуют уровень развития двух секторов экономики, а функционал — интегральный объём потребления на отрезке времени $[0, T]$ с учётом дисконтирования. Набор исходных данных задачи управления (1) состоит из положительных чисел $\nu, \mu_1, \mu_2, x_{10}, x_{20}, T$ и параметров ε_1 и ε_2 . Длительность T горизонта планирования предполагается «достаточно большой». Данная работа примыкает к статьям [2]–[7]. Случай $\mu_1 = \mu_2$ задачи (1) был изучен ранее. Переход к случаю $\mu_1 \neq \mu_2$ оказался нетривиальным.

2. Анализ канонической задачи с помощью принципа максимума Понтрягина (ПМП). Вычисление возможных особых

режимов. Краевая задача ПМП. Обоснование оптимальности экстремального решения.

3. Анализ дифференциальных уравнений движения и сопряжённых уравнений при различных режимах управления.

4. Формулировка теоремы об оптимальном решении задачи (1). Конструктивное описание оптимального решения.

5. Вычислительный эксперимент.

По теме доклада подготовлена статья с подробным изложением полученных результатов.

Список литературы

- [1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. М.: Наука. (1961).
- [2] Киселёв Ю.Н. “Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина”, *Математические модели в экономике и биологии: Материалы научного семинара*. Планерное Московской обл. М.: МАКС Пресс, 57-67 (2003).
- [3] Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н. “Некоторые алгоритмы оптимального управления”, *Труды Института Математики и Механики УрО РАН*, 12, №2, 3-17 (2006).
- [4] Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Тарасьев А.М. “Задача максимизации прибыли для производственных функций Кобба–Дугласа и CES” *Сб. Нелинейная динамика и управление под ред. С. В. Емельянова, С. К. Коровина*, 5, 309-350 (2007).
- [5] Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. “Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба–Дугласа”, *Дифференциальные уравнения*, 46, №12, 1749-1765 (2010).
- [6] Киселёв Ю.Н., Орлов М.В. “Оптимальная программа распределения ресурсов в двухсекторной экономической модели с производственной функцией Кобба–Дугласа при различных коэффициентах амортизации”, *Дифференциальные уравнения*, 48, №12, 1642-1657 (2012).
- [7] Киселёв Ю.Н., Орлов М.В., Орлов С.М. “Исследование двухсекторной экономической модели с функционалом интегрального типа”, *Вестник Москов. ун-та. Сер. 15. ВМиК*, №4, 27-37 (2013).