Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
Российский университет дружбы народов
Математический Фонд Крыма

Сборник материалов международной конференции

КРОМШ-2019

XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум

по спектральным и эволюционным задачам

Симферополь
«Полипринт»
2019

УДК 517.9:519.2
С 23

Печатается по решению Организационного комитета XXX Крымской Осенней Математической Школы-симпозиума по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2019).

Ответственный за выпуск:

Копачевский Николай Дмитриевич, председатель Организационного комитета КРОМШ-2019, д.ф.-м.н., профессор.

Ответственный редактор:

Войтицкий Виктор Иванович, к.ф.-м.н., доцент.

Редакционная коллегия:

Копачевский Н.Д., Муратов М.А., Скубачевский А.Л., Шкаликов А.А., Войтицкий В.И., Пашкова Ю.С., Плохая Е.В., Старков П.А.

С 23 Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019: ПОЛИПРИНТ, 2019. – 328 с.

ISBN 978-5-6043331-6-7

В сборнике представлены материалы работ участников международной конференции “Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2019)”, посвященных различным направлениям исследований в области математического и функционального анализа, численного анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей, оптимального управления, теории игр, математического моделирования, дискретной математики и методики преподавания.

В книге сохранена авторская редакция статей, выполнено лишь частичное техническое редактирование; в связи с этим редакционная коллегия не несет ответственности за возможные неточности.

Материал, представленный в сборнике, может быть полезен научным сотрудникам, работникам высшего образования, аспирантами студентам.

УДК 517.9:519.2

ISBN 978-5-6043331-6-7

© ФГАОУ ВО “Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского”, 2019
© Математический Фонд Крыма, 2019

3°. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $0 \leq s < 2$. *Не существует постоянной* $C(\tau)$ *такой, что*

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2} \sin(\tau (A^0)^{1/2}) - \varepsilon K(\varepsilon) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon.$$

Теорема 4. *Предположим, что для некоторых* j *и* $\boldsymbol{\theta}_0$ *выполнено* $\mu_j(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$.
1°. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и*

$$\left\| \cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (A^0)^{1/2}) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon.$$

2°. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и*

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2} \sin(\tau (A^0)^{1/2}) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon.$$

3°. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и*

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2} \sin(\tau (A^0)^{1/2}) - \varepsilon K(\varepsilon) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon.$$

С другой стороны, при дополнительных условиях мы усиливаем результаты теорем 1 и 2.

Теорема 5. *Предположим, что* $\mu_j(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* j *и* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Кроме того, предположим, что кратность спектра ростка* $S(\boldsymbol{\theta})$ *не зависит от* $\boldsymbol{\theta}$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\left\| \cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (A^0)^{1/2}) \right\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_4 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon,$$

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2} \sin(\tau (A^0)^{1/2}) \right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_5 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon,$$

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2} \sin(\tau (A^0)^{1/2}) - \varepsilon K(\varepsilon) \right\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_6 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon.$$

В частности, условия теоремы 5 выполнены для оператора акустики $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами.

Более того, мы показываем, что результаты теоремы 5 тоже точны: их нельзя усилить, если хотя бы один коэффициент $\nu_j(\boldsymbol{\theta})$ отличен от нуля в некоторой точке $\boldsymbol{\theta}_0$.

Метод основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке – Блоха и аналитической теории возмущений.

Полученные результаты можно применить к задаче Коши

$$\partial_\tau^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, \tau) = -(A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}).$$

Применение основано на представлении решения в виде

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \tau) = \cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\phi} + A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\psi} + \int_0^\tau A_\varepsilon^{-1/2} \sin((\tau - \rho) A_\varepsilon^{1/2}) \mathbf{F}(\cdot, \rho)\, d\rho.$$

Рассмотрены приложения к нестационарным уравнениям акустики и теории упругости.

Часть результатов получена в работе [2].

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект 17-11-01069).

Список литературы

[1] Бирман М.Ш. Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений / М.Ш. Бирман, Т.А. Суслина // Алгебра и анализ – 2008. – Т.20, № 6. – С. 30-107.
[2] Dorodnyi M.A. Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients / M.A. Dorodnyi, T.A. Suslina // Journal of Differential Equations – 2018. – T.264, № 12. – P. 7463-7522.
[3] Мешкова Ю.М. Об усреднении периодических гиперболических систем / Ю.М. Мешкова // Математические заметки – 2019. – Т.105, № 6. – С. 937-942.

УДК: 517.9

О ГЛАДКИХ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зайцева Н. В.

старший преподаватель, Казанский (Приволжский) федеральный университет (Россия, Казань)
E-mail: n.v.zaiceva@yandex.ru

Для гиперболического дифференциально-разностного уравнения в плоскости построено однопараметрическое семейство гладких глобальных решений.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, преобразование Фурье.

ON SMOOTH GLOBAL SOLUTIONS OF TWO-DIMENSIONAL HYPERBOLIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS

Zaitseva Natalya Vladimirovna

senior lecturer, Kazan (Volga region) federal university (Russia, Kazan)

A one-parametric family of smooth global solutions of a two-dimensional differential-difference hyperbolic equation is constructed.

Keywords: hyperbolic equation, differential-difference equation, Fourier transformation.

Задачи в ограниченных областях для дифференциально-разностных уравнений, возникающие в разнообразных приложениях, не покрываемых классическими моделями математической физики (см., напр., [1] и имеющуюся там библиографию), к настоящему моменту исследованы полно и глубоко (см. [1-4] и имеющуюся там библиографию). Задачи в неограниченных областях хорошо изучены для параболического (см. [5]) и эллиптического (см. [6-10]) случаев. В настоящей работе исследуется гиперболическое дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x-h,t), \tag{1}$$

где a, h — произвольные вещественные постоянные.

Доказана следующая

Теорема 1. *Функция*

$$G(x,t;\xi) = \sin\left[\left(at\cos\frac{h\xi}{2} + x + \frac{h}{2}\right)\xi\right] e^{a\xi t \sin\frac{h\xi}{2}} + \sin\left[\left(at\cos\frac{h\xi}{2} - x - \frac{h}{2}\right)\xi\right] e^{-a\xi t \sin\frac{h\xi}{2}} \tag{2}$$

удовлетворяет уравнению (1) при любом вещественном значении параметра ξ.

Для доказательства теоремы достаточно непосредственно подставить функцию (2) в уравнение (1).

Указанное решение (2) найдено с помощью классической схемы Гельфанда–Шилова, при этом учитывалось, что оператор сдвига (так же, как и дифференциальные операторы), является мультипликатором Фурье.

Автор выражает глубокую благодарность Региональному научно-образовательному математическому центру Казанского (Приволжского) федерального университета за финансовую поддержку.

Список литературы

[1] Скубачевский А.Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения / А.Л. Скубачевский // Успехи матем. наук. – 2016. – Т. 71, вып. 5 (431). – С. 3–112.

[2] Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. I / А.Л. Скубачевский // Соврем. мат. Фундам. направл. – 2007. – Т. 26. – С. 3–132.

[3] Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. II / А.Л. Скубачевский // Соврем. мат. Фундам. направл. – 2009. – Т. 33. – С. 3–179.

[4] Skubachevskii A.L. Elliptic functional-differential equations and applications / A.L. Skubachevskii. – Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1997. – 293 p.

[5] Муравник А.Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши / А.Б. Муравник // Соврем. мат. Фундам. направл. – 2014. – Т. 52. – С. 3–143.

[6] Муравник А.Б. Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики / А.Б. Муравник // Матем. заметки. – 2019. – Т. 105, вып. 5. – С. 747–762.

[7] Муравник А.Б. Асимптотические свойства решений двумерных дифференциально-разностных эллиптических задач / А.Б. Муравник // Соврем. мат. Фундам. направл. – 2017. – Т. 63, № 4. – С. 678–688.

[8] Муравник А.Б. О задаче Дирихле в полуплоскости для дифференциально-разностных эллиптических уравнений / А.Б. Муравник // Соврем. мат. Фундам. направл. – 2016. – Т. 60. – С. 102–113.

[9] Муравник А.Б. Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений / А.Б. Муравник // Матем. заметки. – 2016. – Т. 100, вып. 4. – С. 566–576.

[10] Muravnik A. On the half-plane Diriclet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms / A. Muravnik // Math. Model. Nat. Phenom. – 2017. – Vol. 12, No. 6. – P. 130–143.

УДК: 517.984.48:532.135

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Закора Д. А.

к. ф.-м. н., доцент, КФУ им. В.И.Вернадского (Россия, Симферополь)

E-mail: dmitry.zkr@gmail.com

Рассматриваются интегро-дифференциальные операторные уравнения, описывающие движения вязкоупругих тел. Проводится спектральный анализ операторных матриц и ассоциированных с ними операторных пучков, доказываются утверждения о структуре спектра и о свойствах базисности системы корневых элементов задачи.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, операторная матрица, операторный пучок, спектр, асимптотика, корневые элементы.

SPECTRAL ANALYSIS OF INTEGRO DIFFERENTIAL EQUATIONS ARISING IN VISCOELASTICITY

Zakora Dmitry

phd, V.I.Vernadsky CFU (Russia, Simferopol)

We study integro differential operator equations which describe small motions of viscoelastic bodies. Operator matrices and corresponding operator pencils are investigated. Statements on spectrum structure, spectrum localization, properties of root elements are proven.

Keywords: integro differential equation, operator matrix, operator pencil, spectrum, asymptotic, root elements.

Рассмотрим изотропное тело, занимающее область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Введем прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с областью. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t,x)$ $(x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega)$ — поле смещений в изотропном теле, тогда тензор деформации ε_{ij} будет выражаться через поле перемещений по формуле Коши. Разложим тензоры деформации ε_{ij} и напряжений σ_{ij} на девиаторы и шаровые составляющие: $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon\delta_{ij}$, $\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij}$. Здесь e_{ij}, s_{ij} — девиаторы тензора деформации и напряжений соответственно, δ_{ij} — символ Кронекера, $\theta := 3\varepsilon$ — объемная деформация, σ — среднее гидростатическое напряжение. В [1, гл. 2, § 4] выводится общий вид связей девиаторов и шаровых составляющих тензоров деформаций и напряжений:

$$s_{ij}(t) = \int_0^t \Gamma_1(t-s)e_{ij}(s)\,ds, \quad \sigma(t) = \int_0^t \Gamma_2(t-s)\theta(s)\,ds, \tag{1}$$

где $\Gamma_1(t)$ и $\Gamma_2(t)$ — это ядра сдвиговой и объемной релаксации. Эти ядра имеют следующий вид:

$$\Gamma_1(t) := -c_1\delta'(t) + c_0\delta(t) - \Gamma(t), \quad \Gamma_2(t) := -\widetilde{c}_1\delta'(t) + \widetilde{c}_0\delta(t) - \widetilde{\Gamma}(t), \tag{2}$$
$$\Gamma(t) := \sum_{l=1}^{m} c_{-l}e^{-tb_l}, \quad \widetilde{\Gamma}(t) := \sum_{l=1}^{n} \widetilde{c}_{-l}e^{-t\widetilde{b}_l},$$

где $\delta(t)$ — δ-функция, c_k, $\widetilde{c}_k$ — некоторые структурные постоянные, b_k^{-1}, $\widetilde{b}_k^{-1}$ — времена релаксации. При этом

$$\begin{gathered} c_1, \widetilde{c}_1 \geqslant 0, \quad c_0, \widetilde{c}_0 > 0, \quad c_{-l} > 0 \quad (l = \overline{1,m}), \quad \widetilde{c}_{-l} > 0 \quad (l = \overline{1,n}), \\ 0 < b_1 < b_2 < \dots < b_m, \quad 0 < \widetilde{b}_1 < \widetilde{b}_2 < \dots \widetilde{b}_n. \end{gathered} \tag{3}$$

Отсутствие глобальных решений слабо связанной системы полулинейных параболических уравнений второго порядка 153

Бозоров Завкиддин Равшанович *Бухарский государственный университет (Узбекистан, Бухара)*
Задача об определении двумернерного ядра уравнения вязкоупругости . 154

Вронский Борис Михайлович *Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского (Россия, Симферополь)*
О структуре спектра одной гидроакустической задачи 156

Гольдман Наталья Львовна *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Россия, Москва)*
Некоторые нелинейные задачи параболического типа 158

Дородный Марк Александрович, Суслина Татьяна Александровна *Санкт-Петербургский государственный университет (Россия, Санкт-Петербург)*
Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами 161

Зайцева Наталья Владимировна *Казанский (Приволжский) федеральный университет (Россия, Казань)*
О гладких глобальных решениях некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений 163

Закора Дмитрий Александрович *КФУ им. В.И.Вернадского (Россия, Симферополь)*
Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторных уравнений, возникающих в задачах вязкоупругости 165

Зимин Борис Александрович, Свентицкая Вера Евгеньевна, Ялыч Елизавета Сергеевна *Балтийский государственный технический университет "ВОЕНМЕХ"имени Д.Ф.Устинова (Россия, Санкт-Петербург)*
Использование методов дифференциальной геометрии для представления Лакса некоторых нелинейных уравнений 167

Кожевникова Лариса Михайловна *Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета (Россия, Стерлитамак)*
О решениях эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей и данными в виде меры 169

Копачевский Николай Дмитриевич *Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского (Россия, Симферополь)*
О нормальных колебаниях системы из двух вязкоупругих жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд (модельная задача) 172

Копачевский Николай Дмитриевич, Плохая Екатерина Владимировна, Фордук Карина Викторовна *Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского (Россия, Симферополь)*
Малые движения и нормальные колебания тела, частично заполненного жидкостью, под действием упругодемпфирующего устройства 176

Корнута Анжелика Александровна *Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского (Россия, Симферополь)*
Стационарные структуры параболического уравнения с преобразованием пространственного аргумента на окружности 178

Лийко Виктория Владимировна *Российский университет дружбы народов (Россия, Москва)*
Смешанные краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре 179

Лиманский Дмитрий Владимирович *ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет"; ГУ "Институт прикладной математики и механики" (ДНР, Донецк)*
Априорные оценки для систем минимальных дифференциальных операторов в анизотропных пространствах Соболева 182

Научное издание

Сборник материалов международной конференции
КРОМШ-2019 «XXX Крымская Осенняя Математическая
Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам»

В авторской редакции

Компьютерная верстка: В.И. Войтицкий

Подписано к печати 11.09.2019 г. Формат бумаги 60x84 /8
Усл. печ. л. 38.13. Заказ 010/0906-1. Тираж 100 экз.

Издательство и типография «Полипринт»
г. Симферополь, ул. Крылова, 54
тел./факс +7(3652) 248-178, +7(978)776-56-76
248178@mail.ru, www.print2u.ru