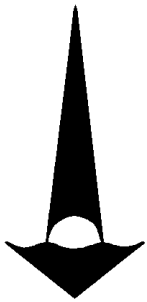
# Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова



## Институт механики

# ТРУДЫ

**конференции-конкурса молодых ученых**
**21 - 25 октября 2019 г.**

Данный электронный документ есть корректура Сборника трудов Конференции-конкурса молодых учёных Научно-исследовательского института механики МГУ имени М.В. Ломоносова 2019 года. Для популяризации результатов исследований участников Конференции корректура Сборника публикуется в электронном виде в сети Интернет до научного рецензирования, технического редактирования и печатного издания. Печатная версия сборника может отличаться от данной корректуры по содержанию, в том числе по нумерации страниц.

## ОГЛАВЛЕНИЕ


1. Предисловие……. 05
2. *Коровайцева Е.А.* Модифицированные уравнения теории больших деформаций мягких оболочек **(Диплом I степени конференции-конкурса)** ……... 12
3. *Косьянчук В.В.* Изучение процесса столкновения двухатомных молекул с учетом внутренних степеней свободы методами молекулярной динамики **(Диплом II степени конференции-конкурса)** ……..…….. 20
4. *Брюханов И.А.* Особенности разделение углекислого газа и азота в цеолитах **(Диплом III степени конференции-конкурса)** …… 28
5. *Гарбуз М.А.* Особенности разделение углекислого газа и азота в цеолитах **(Диплом III степени конференции-конкурса)**…….. 36
6. *Филиппов Я.Ю.* Биорезорбируемые макропористые материалы на основе системы $Ca_2P_2O_7$-$CaNa_2P_2O_7$-$Ca(PO_3)_2$, полученные методом коллоидного формования **(Диплом III степени конференции-конкурса)** …….. 43
7. *Баумгертнер Ю.А.* Динамика плоскопараллельного движения квадрокоптера с аэродинамическим маятником……. 50
8. *Гареев Л.Р.* Экспериментальное изучение развития возмущений в круглой струе ……..... 58
9. *Голуб А.П.* Периодические решения в задаче о двухзвенном аэродинамическом маятнике …….. 66
10. *Зайко Ю.С.* Исследование устойчивости потока на склоне относительно косых возмущений.…….……..……. 72
11. *Киселев Н.А.* Влияние начальной степени закрутки потока на температуру адиабатной стенки при сверхзвуковых скоростях течения …….. 79
12. *Максимов А.Н.* Структура автомодельного течения при отрицательном маховском отражении ударной волны ….…… 85
13. *Мастерова А.А.* Эмпирический подход к описанию воздействия потока на ротор Савониуса …..…….. 93
14. *Меркулов Д.И.* Исследование движения тел из намагничиваю-

щихся материалов в переменных магнитных полях …… 102
15. *Попович С.С.* Исследование адиабатной температуры стенки в сверхзвуковом газо-капельном потоке …… 109
16. *Сакано Д.* О динамике аэроупругой системы с пьезоэлементом ……..….. 117
17. *Уткин И.С.* Формирование магматического очага при внедрении магмы в земную коры ……..……... 125
18. *Хабибуллин Р.Р.* Взаимодействие ударной волны с пузырем газа повышенной плотности вблизи твердой стенки ……..…… 133
19. *Халявин С.А.* Численное моделирование переходных режимов двухфазной фильтрации в трещиновато-пористой среде …….. 142
20. *Чулюнин А.Ю.* Гистерезис турбулентного обтекания овальных лунок ……...…… 150
21. *Шарова О.А.* Сферическое тело из намагничивающегося эластомера на слое магнитной жидкости в магнитном поле …… 158
22. *Щендригина О.П.* Об исследовании динамического поведения конструкционных материалов на новом экспериментальном стенде НИИ механики МГУ …….. 166

## ПРЕДИСЛОВИЕ

**21–25 октября 2019 г.** в Институте механики МГУ им. М.В. Ломоносова прошла традиционная научная конференция-конкурс молодых ученых Института (возраст участников до 33 лет включительно). Кроме сотрудников Института на конференции с докладами выступили аспиранты и студенты механико-математического факультета Московского государственного университета.

Для подведения итогов конференции-конкурса было образовано жюри в составе:

| | |
|---|---|
| Академик А.Г. Куликовский, | Сопредседатель, |
| Гл. научн. сотр., дфмн Г.А. Любимов, | Сопредседатель, |
| Гл. научн. сотр., дфмн В.А. Самсонов, | |
| Гл. научн. сотр., дфмн А.М. Формальский, | |
| Вед. научн. сотр., дфмн И.Г. Брыкина, | |
| Вед. научн. сотр., дфмн С.Г. Пшеничнов, | |
| Вед. научн. сотр., дфмн А.К. Цатурян, | |
| Вед. научн. сотр., кфмн П.Ю. Георгиевский, | |
| Вед. научн. сотр., кфмн М.А. Зубин, | |
| Вед. научн. сотр., кфмн М.М. Симоненко, | |
| Вед. научн. сотр., кфмн П.В. Чистяков, | |
| Ст. научн. сотр., кфмн Б.И. Краснопольский | |
| Ст. научн. сотр., кфмн Д.А. Пелевина, | |
| Ст. научн. сотр., кфмн О.Г. Сутырин | |
| Ст. научн. сотр., ктн В.В. Терауд | |
| Ст. научн. сотр., кфмн А.В. Хохлов, | |
| Вед. научн.сотр., дфмн А.А. Афанасьев | Председатель Совета молодых ученых |

**Программа**
***Конференции-конкурса молодых ученых***
***Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова***

**22 октября 2019 г.**

**$11^{00}$ – $13^{00}$**

1. *Коровайцева Е.А.* Смешанные уравнения теории мягких оболочек
2. *Щендригина О.П.* Об исследовании динамического поведения конструкционных материалов на новом экспериментальном стенде НИИ механики МГУ
3. *Изимов Р.М.* Бразильский тест и хрупкое разрушение тел при сжатии
4. *Шалимова Е.С.* Об относительных равновесиях точки на сферическом астероиде в неоднородном гравитационном поле
5. *Баумгертнер Ю.А.* Плоскопараллельное движение квадрокоптера с аэродинамическим маятником
6. *Войцицкая К.Л.* Модель перевернутого двойного маятника, установленного на качелях СИСО

**$13^{00}$ – $14^{00}$ – Перерыв**

**$14^{00}$ – $16^{40}$**

1. *Попович С.С.* Исследование адиабатной температуры стенки в сверхзвуковом газо-капельном потоке
2. *Киселёв Н.А.* Влияние начальной степени закрутки потока на температуру адиабатной стенки при сверхзвуковых скоростях течения
3. *Хабибуллин Р.Р.* Взаимодействие ударной волны с пузырем газа повышенной плотности вблизи твердой стенки
4. *Максимов А.Н.* Структура автомодельного течения при «отрицательном» маховском отражении ударных волн

5. *Страдомский С.С.* Оптимальные волнолеты в сверхзвуковом потоке
6. *Чулюнин А.Ю.* Гистерезис турбулентного обтекания овальных лунок
7. *Сыроватский Д.А.* Бессеточное моделирование трехмерного обтекания машущих крыльев
8. *Гареев Л.Р.* Экспериментальное изучение развития возмущений в круглой струе

**23 октября 2019 г.**

**$11^{00}$ – $13^{20}$**

1. *Меркулов Д.И.* Исследование движения тел из намагничивающихся материалов в переменных магнитных полях
2. *Демин А.А.* Исследование свойств и движения анизотропных намагничивающихся эластомеров
3. *Шарова О.А.* Сферическое тело из намагничивающегося эластомера на слое магнитной жидкости в магнитном поле
4. *Брюханов И.А.* Особенности разделения углекислого газа и азота в цеолитах
5. *Косьянчук В.В.* Изучение процесса столкновения двухатомных молекул с учетом внутренних степеней свободы методами молекулярной динамики
6. *Коробицына И.В.* Исследование механических свойств комплексов белка тропомиозина методами молекулярной динамики
7. *Осепян А.Ш.* Электро-механическая модель миокардиальной ткани

**$13^{20}$ – $14^{00}$ – Перерыв**

**$14^{00} – 16^{00}$**

1. *Зайко Ю.С.* Исследование устойчивости потока на склоне относительно косых возмущений
2. *Смирнов К.В.* Докритические и сверхкритические режимы течения слоя вязкой жидкости по горизонтальному вращающемуся диску
3. *Иванов О.О.* О реактивном движении плавящейся частицы
4. *Майоров В.О.* Испарение-конденсация в аэрозоле в области низкого давления
5. *Горохова Н.В.* Эволюция электрического поля в течениях смеси газа с заряженными частицами в случае непрерывного потока частиц
6. *Корольков С.Д.* Моделирование взаимодействия солнечного ветра с межзвёздной средой. Диаграмма Вороного

**24 октября 2019 г.**

**$12^{00} – 14^{00}$**

Приглашенный доклад

*Gianni Royer Carfagni (Department of Engineering and Architecture, University of Parma, Italy)* Reductio ad unum phase-field approach to fracture, damage and plasticity

**25 октября 2019 г.**

**$11^{00} – 13^{00}$**

1. *Филиппов А.Ю.* Биорезорбируемые макропористые материалы основе системы $Ca_2P_2O_7$-$CaNa_2P_2O_7$-$Ca(PO_3)_2$, полученные методом коллоидного формования
2. *Шараборин Е.Л.* Многомасштабное моделирование течения полимерной смолы в пористой среде

3. *Уткин И.С.* Формирование магматического очага при внедрении магмы в земную кору
4. *Чернова А.А.* Исследование частных случаев решения автомодельной задачи о закачке нагретой солёной воды в водонасыщенный пласт
5. *Минаева Д.Р.* Тепловая конвекция в трещиновато-пористой среде
6. *Халявин С.А.* Численное моделирование двухфазных течений в трещиновато-пористой среде

**$13^{00}$ – $14^{00}$ – Перерыв**

**$14^{00}$ – $16^{00}$**

1. *Гарбуз М.А.* Режимы движения ветрокатамарана: устойчивость, бифуркации.
2. *Мастерова А.А.* Эмпирический подход к описанию воздействия потока на ротор Савониуса
3. *Голованов С.А.* Исследование стационарных режимов движения ветромобиля
4. *Махмудов П.К.* Динамика колёсного инерциоида
5. *Голуб А.П.* Периодические решения в задаче о двухзвенном аэродинамическом маятнике
6. *Сакано Д.* О динамике аэроупругой системы с пьезоэлементом

По итогам устных выступлений жюри конференции-конкурса предложило Ученому совету Института кандидатуры для награждения дипломами лауреатов конкурса, а также для выдвижения на стипендии МГУ для молодых преподавателей и ученых и стипендий Института механики МГУ для молодых ученых и специалистов на 2020 г.

***Дипломанты конференции-конкурса***

| | |
|---|---|
| Диплом I степени | *Коровайцева Е.А.* |
| Диплом II степени | *Косьянчук В.В.* |
| Диплом III степени | *Брюханов И.А.*<br>*Гарбуз М.А.*<br>*Филиппов Я.Ю.* |

***Лауреаты конкурса лучших работ аспирантов***

| | |
|---|---|
| Диплом I степени | *Максимов А.Н.* |
| Диплом II степени | *Страдомский С.С.* |
| Диплом III степени | *Мастерова А.А.* |

***Лауреаты конкурса лучших студенческих работ***

| | |
|---|---|
| Диплом I степени | *Гарбуз М.А.* |
| Диплом II степени | *Баумгертнер Ю.А.*<br>*Халявин С.А.* |
| Диплом III степени | *Осепян А.Ш.* |

***Почётная грамота самому молодому участнику***

присуждена *Махмудову П.К.*

***Дипломом***
***за лучшую экспериментальную работу Жюри конкурса***
***отметило работы***

*Меркулова Д.И.*
и
*Голуба А.П.*

Совет молодых ученых Института механики
**Афанасьев Андрей Александрович**, тел. (495) 939-57-67
E-mail: ***afanasyev@imec.msu.ru***

# МОДИФИЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК

*Е.А. Коровайцева*

**Аннотация.** В работе предложен модифицированный вариант разрешающих соотношений теории мягких оболочек, построенных в [1], отличающийся большим удобством для численной реализации. Сформулирован алгоритм решения задачи осесимметричного деформирования мягкой оболочки вращения, основанный на использовании метода непрерывного продолжения по параметру. Приведен пример решения задачи о раздувании полусферы.

**Введение.** Построению уравнений, описывающих поведение мягких оболочек, посвящено большое количество работ. В общем случае постановки соответствующих геометрически и физически нелинейных задач деформирования мягких оболочек отличаются существенной сложностью. По-видимому, по этой причине в области больших деформаций и по настоящее время наиболее изученными остаются мягкие оболочки вращения при осесимметричном нагружении, причем большая часть исследований посвящена задачам статического деформирования. При этом в доступной литературе приведены решения либо конкретных прикладных задач, либо частных задач деформирования мягких оболочек канонических форм [2, 3]. Разрабатываемые методы решения, как правило, применимы только к рассматриваемому узкому классу задач и не ориентированы на удобство, экономичность и универсальность для программной реализации.

В настоящей работе делается попытка постановки задач деформирования мягких оболочек более общая, чем известные, для чего в целях обобщения используется векторно-матричная формализация записи разрешающих соотношений и последующих преобразований векторных функций векторных переменных. При этом за основу взята система уравнений теории больших деформаций В.И. Усюкина [1]. Предло-

жена модификация указанной системы уравнений, позволяющая представить разрешающие соотношения в форме, удобной как для использования аппарата решения систем дифференциальных уравнений, так и для алгоритмизации решения различных типов задач теории мягких оболочек. Предложен алгоритм решения задач статического деформирования мягких оболочек вращения, не накладывающий ограничений на форму меридиана оболочки или диапазон исследуемых перемещений и деформаций.

**1. Постановка задачи.** Ограничимся рассмотрением осесимметричного деформирования мягких оболочек при больших деформациях. Введем для оболочки ортогональную криволинейную систему координат $\alpha$, $\beta$, $z$, совпадающих с линиями кривизны срединной поверхности оболочки и внешней нормалью. Пусть недеформированная форма срединной поверхности определяется коэффициентами Ляме $A$, $B$ и радиусами кривизны $R_1$, $R_2$. В этих координатах выражения для компонентов конечной деформации имеют вид [4]

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1^2 + \vartheta_1^2\right);$$
$$\varepsilon_2^* = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2. \qquad (1)$$

Здесь $\varepsilon_i (i = 1,2)$, $\vartheta_1$ - компоненты линейного тензора деформаций, связанные с перемещениями $u$, $w$ вдоль координатных линий $\alpha$, $z$ известными зависимостями [4]

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\cdot\frac{du}{d\alpha} + \frac{1}{R_1}\cdot w;$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A\cdot B}\cdot\frac{dB}{d\alpha}\cdot u + \frac{1}{R_2}\cdot w; \qquad (2)$$
$$\vartheta_1 = \frac{1}{R_1}\cdot u - \frac{1}{A}\cdot\frac{dw}{d\alpha}.$$

Следуя работе [1], для вывода уравнений равновесия оболочки используем принцип возможных перемещений. Условия равновесия оболочки, соответствующие этому принципу, имеют вид

$$\delta W = \delta A,$$

где $\delta W$ – работа внутренних усилий $T_1$, $T_2$, затрачиваемая на дополнительное деформирование оболочки из состояния равновесия, $\delta A$ – работа поверхностных и краевых сил на соответствующих перемещениях из состояния равновесия.

Виртуальная работа внутренних усилий имеет вид

$$\delta W = \iint\limits_S \left( T_1^* \delta\varepsilon_1^* + T_2^* \delta\varepsilon_2^* \right) AB d\alpha d\beta,$$

где $T_1^*$, $T_2^*$ – усилия, приведенные к метрике исходного состояния. Они связаны с истинными усилиями, действующими по граням деформированного элемента оболочки, соотношениями

$$T_1^* = T_1 \cdot \frac{1+e_2}{1+e_1}; \qquad T_2^* = T_2 \cdot \frac{1+e_1}{1+e_2},$$

где $e_1$, $e_2$ – относительные удлинения волокон оболочки вдоль линий $\alpha$, $\beta$ соответственно, связанные с компонентами деформаций следующим образом [4]:

$$e_1 + \frac{1}{2} e_1^2 = \varepsilon_1^*, \; 1 \leftrightarrow 2.$$

Работа внешних сил, действующих на оболочку, складывается из работы поверхностных и краевых сил. Пусть на краю оболочки $\alpha = const$ действуют краевые усилия $T^0$, $Q^0$, а составляющие поверхностной нагрузки по осям криволинейной системы координат $\alpha$, $z$, отнесенные к площади недеформированного элемента оболочки, соответственно $f_1^*$, $f_3^*$. Совершаемая ими работа при малых виртуальных деформациях срединной поверхности определяется выражением [4]

$$\delta A = \iint\limits_S \left( f_1^* \cdot \delta u + f_3^* \cdot \delta w \right) AB \cdot d\alpha d\beta +$$

$$+ \int\limits_\beta \left( T^0 \cdot \delta u + Q^0 \cdot \delta w \right) \left( 1 + e_2 \right) B d\beta .$$

Выражая вариации деформаций (1) через вариации перемещений и их производные при помощи соотношений (2) и пользуясь формулами Остроградского-Гаусса в криволинейных координатах, получаем вариационное уравнение в виде

$$\iint\limits_S \left\{ \left[ L_1 - f_1^* AB \right] \cdot \delta u + \left[ L_3 - f_3^* AB \right] \cdot \delta w \right\} d\alpha d\beta +$$

$$+ \int\limits_\beta \left\{ \left[ T_{1x} - T_1^0 \left( 1 + e_2 \right) B \right] \cdot \delta u + \left[ T_{1z} - Q_1^0 \left( 1 + e_2 \right) B \right] \cdot \delta w \right\} d\beta . \qquad (3)$$

Здесь операторы $L_i$ представляют соотношения

$$L_1 = -\frac{dT_{1x}}{d\alpha} + \frac{1}{A} \cdot \frac{dB}{d\alpha} \cdot T_{2y} + \frac{A}{R_1} \cdot T_{1z};$$

$$L_3 = \frac{dT_{1z}}{d\alpha} + \frac{A}{R_1} \cdot T_{1x} + \frac{B}{R_2} \cdot T_{2y},$$

где введены следующие обобщенные усилия:

$$T_{1x} = T_1^* \left( 1 + \varepsilon_1 \right) \cdot B;$$

$$T_{2y} = T_2^* \left( 1 + \varepsilon_2 \right) \cdot A;$$

$$T_{1z} = T_1^* \cdot \vartheta_1 \cdot B.$$

При независимых в области $S$ вариациях $\delta u$, $\delta w$ из вариационного уравнения (3) следуют уравнения равновесия в проекциях на оси криволинейной системы координат, связанной с недеформированной срединной поверхностью оболочки

$$L_1 - f_1^* AB = 0; \quad L_3 - f_3^* AB = 0$$

и силовые граничные условия

$$T_{1x} - T_1^0 \left( 1 + e_2 \right) B = 0; \quad T_{1z} - Q_1^0 \left( 1 + e_2 \right) B = 0.$$

Окончательно сформированная система содержит 16 уравнений с 16 неизвестными.

**2. Алгоритм решения.** Для удобства построения универсального алгоритма решения задачи деформирования мягкой оболочки запишем сформулированные соотношения соответствующей нелинейной краевой задачи в векторно-матричной форме, включающей в себя дифференциальные уравнения

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}, \vec{q}, \alpha), \tag{4}$$

дополнительные алгебраические соотношения

$$\vec{\varphi}(x, \vec{y}, \vec{z}, \vec{\mu}, \vec{q}, \alpha) = \vec{0} \tag{5}$$

и граничные условия

$$\vec{\psi}_{н}(x_{н}, \vec{y}_{н}, \vec{\mu}_{н}, \vec{q}_{н}, \alpha) = \vec{0};\ н \leftrightarrow к\,. \tag{6}$$

Здесь

$\vec{y} = \{T_{1x};\ T_{1z};\ u;\ w\}^{T}$, $\vec{z} = \{\varepsilon_1;\ \varepsilon_2;\ e_1;\ e_2;\ \vartheta_1;\ T_{2y};\ T_1^{*};\ T_2^{*};\ T_1;\ T_2\}^{T}$.

$\vec{q}(x)$ – функция из $l$ компонент заданных обобщенных распределенных нагрузок; $\vec{\mu}$ – вектор характерных геометрических параметров; $\alpha$ – параметр нагрузки; $\vec{\psi}_{н}$, $\vec{\psi}_{к}$ - вектор-функции заданных краевых соотношений с числом компонент соответственно $p$ и $s$, где $p + s = n$; $\vec{f}$ – вектор-функция из $n$ компонент правых частей разрешающей системы уравнений.

Для решения поставленной нелинейной краевой задачи используем метод дифференцирования по параметру [5]. Продифференцируем соотношения задачи (4)-(6) по некоторому выбранному параметру $T$. Тогда, выражая скорость вектора дополнительных переменных по параметру из продифференцированных алгебраических соотношений (5), получаем квазилинейную краевую задачу в скоростях переменных по параметру $T$

$$\frac{d\dot{\vec{y}}}{dx} = A^*(x,\vec{y},\vec{z},\vec{\mu},\vec{q},\alpha)\dot{\vec{y}} + \vec{a}^*(x,\vec{y},\vec{z},\vec{\mu},\vec{q},\alpha)\dot{\alpha} \qquad (7)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial\vec{\psi}_н}{\partial\vec{y}_н}\dot{\vec{y}}_н + \frac{\partial\vec{\psi}_н}{\partial\vec{z}_н}\dot{\vec{z}}_н + \frac{\partial\vec{\psi}_н}{\partial\vec{q}_н}\vec{q}_н\dot{\alpha} = 0; \qquad н \leftrightarrow к\,. \qquad (8)$$

Здесь

$$A^*(x,\vec{y},\vec{z},\vec{\mu},\vec{q},\alpha) = \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}} - \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{z}}\left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\vec{z}}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\vec{y}};$$

$$\vec{a}^*(x,\vec{y},\vec{z},\vec{\mu},\vec{q},\alpha) = \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{q}}\vec{q} - \frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{z}}\left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\vec{z}}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial\vec{q}}\vec{q}.$$

Решение задачи (7)-(8) может быть получено методом начальных параметров [6]. Начальные задачи последующего расчета соответствующих значений переменных $\vec{y}$ и $\alpha$ имеют вид

$$\frac{d\vec{y}}{dT} = \dot{\vec{y}}(\vec{y},x,T),$$
$$\frac{d\alpha}{dT} = \dot{\alpha}(\vec{y},T). \qquad (9)$$

Задача Коши (9) является нелинейной, причем с правой частью, известной только в дискретной форме. Поэтому для ее решения используются специально разработанные методы решения задач Коши с правыми частями, заданными на дискретной сетке переменного шага [7].

**3. Пример.** Решение системы (4)-(6) с использованием описанного алгоритма получено для случая раздувания полусферы с различными вариантами закреплений края. Принято, что физические свойства материала, из которого изготовлена оболочка, описываются соотношениями Трелоара:

$$T_1 = B\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^3\cdot\lambda_2^3}\right); \quad \lambda_1 = 1+e_1 \qquad (1\leftrightarrow 2)\,.$$

Здесь $E = Eh/\left(1-\nu^2\right)$, где $E$ - модуль упругости материала оболочки, $\nu$ - коэффициент Пуассона, $h$ - толщина оболочки.

На рис. 1 представлена зависимость внутреннего давления, равномерно распределенного по меридиану полусферы, от прогиба полюса для случая подвижного закрепления экватора. Связь безразмерных величин с размерными принята в виде $p = \frac{p^*}{E}$, $w = \frac{w^*}{R}$, где $R$ – радиус полусферы. Показано хорошее совпадение с аналитическим решением [8].

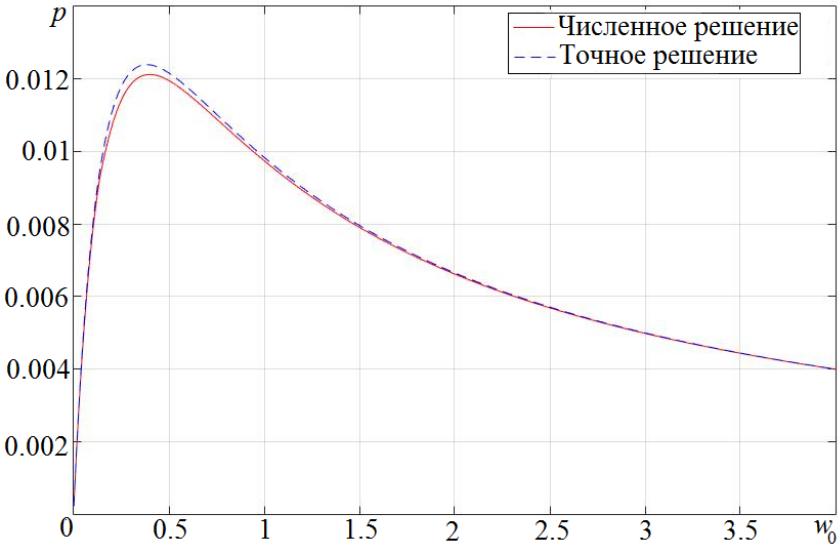



*Рис. 1. Диаграмма нагружения полусферы с подвижным закреплением края*

**Заключение.** В работе построена система уравнений статики мягких оболочек при больших деформациях, удобная для разработки универсальных экономичных алгоритмов численного решения. Сформулирован алгоритм решения задачи статического деформирования составной мягкой обо-

лочки, основанный на использовании векторно-матричной формализации уравнений и последующем применении метода дифференцирования по параметру. Приведен пример тестового расчета полусферы из материала, физические свойства которого описываются соотношениями Трелоара, с подвижным закреплением экватора. Показано хорошее совпадение результатов расчета с аналитическим решением.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Правительства Москвы (проект № 19-38-70005 мол_а_мос).

*Список использованных источников*

1. Усюкин В.И. Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. № 1. С. 70 – 75.
2. Друзь И.Б., Друзь Б.И. Статика мягких оболочек и емкостей при осесимметричной нагрузке. – Владивосток: Морской гос. университет им. Г.И. Невельского, 2012. – 122 с.
3. Гимадиев Р.Ш. Динамика мягких оболочек парашютного типа. – Казань: Казан.энерг.гос. университет, 2006. – 208 с.
4. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1948. – 212 с.
5. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения системы нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1953. Т.88. №4. С. 601-602.
6. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
7. Коровайцев А.В. Параметрический анализ оболочек вращения при больших перемещениях // Изв. вузов. Машиностроение. – 1979. – № 2. – С. 5–8.
8. Грин А., Адкинс Д. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 456 с.

# ИЗУЧЕНИЕ ПРОЦЕССА СТОЛКНОВЕНИЯ ДВУХАТОМНЫХ МОЛЕКУЛ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННИХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ МЕТОДАМИ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

*В.В. Косьянчук*

**Аннотация.** В работе изучен процесс столкновения и перераспределения энергии двухатомных молекул азота в широком диапазоне прицельных параметров (поступательной и вращательной энергии, прицельного расстояния, ориентации молекул, фаз вращения) при температурах до 2000 K. Для решения задачи проведена серия из большого числа (~$10^{13}$) траекторных молекулярно-динамических (МД) расчетов столкновений $N_2 - N_2$. Выявлены свойства, которые не отмечаются в существующих классических моделях. Показано, что угол разлета молекул, и коэффициенты обмена энергией в столкновении существенно зависят не только от поступательной, но и вращательных энергий молекул.

**Введение.** Одним из наиболее известных методов для моделирования неравновесных течений разреженного газа является метод прямого статистического моделирования Монте-Карло (DSMC [1,2]). Но моделирование неравновесных эффектов с использованием метода DMSC требует знания моделей столкновения-релаксации, которые обычно состоят из двух частей. Первая часть определяет факт столкновения между молекулами и угол разлета. По данной модели считается интегральная характеристика – сечение столкновений, которое определяет значения коэффициентов переноса. Самые известные модели включают: модель твердых сфер (Hard Spheres – HS [3]), модель переменных твердых сфер (Variable Hard Spheres – VHS [4]) и переменных мягких сфер (Variable Soft Spheres – VSS [5]). Вторая часть задает закон перераспределения энергии между степенями свободы и определяет скорость процессов релаксации. Наиболее

известной является модель Борнакке-Ларсена (BL [6]), в которой значения энергий после столкновения выбираются из равновесного распределения. Данная модель автоматически удовлетворяет условию детального баланса, но приводит к слишком высокой скорости релаксации. Улучшение этой модели предложил Бойд [7], введя на основании модели Паркера [8] параметр скорости вращательной релаксации $Z_{rot}$, зависящий от температуры. В недавних работах [9,10] было показано, что в неравновесных процессах параметр $Z_{rot}$ должен определяться двумя температурами – поступательной и вращательной. Стоит отметить, что большинство существующих работ посвящено изучению влияния *колебательных* степеней свободы на угол разлета и процесс обмена энергией [11,12], а влияние *вращательных* энергий в моделях не учитывается, или считается несущественным [12].

В данной работе проводится детальное изучение процесса столкновения пар двухатомных молекул ($N_2 - N_2$) при умеренных температурах (до 2000K) путем проведения большого числа (~$10^{13}$) молекулярно-динамических (MD) расчетов парных столкновений при различных значениях прицельных параметров (прицельное расстояние, относительная поступательная скорость молекул до столкновения, вращательные и колебательные энергии, ориентации молекул). Полученные результаты затем сравниваются с общепринятыми моделями столкновений.

**1. Метод решения.** Ограничение постановки умеренными температурами (до 2000 K) позволяет пренебречь рассмотрением колебательной энергии – все молекулы моделировались на нулевом колебательном уровне. Моделирование движения молекул в каждом из расчетов представляет собой решение системы уравнений движения, определяемых вторым законом Ньютона для четырех атомов системы

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ij} \quad i,j = 1,2,3,4 \qquad (1)$$

где $m_i -$ масса $i$ –го атома, $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ – его радиус вектор, $\boldsymbol{F}_{ij} = (\boldsymbol{F}_{x,ij}, \boldsymbol{F}_{y,ij}, \boldsymbol{F}_{z,ij}) = \partial U(r_{ij}) / \partial \boldsymbol{r}_{ij}$ – сила, действующая на атом со стороны $j -$го атома, определяемая потенциалом взаимодействия $U(r_{ij})$, а $\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i$. Взаимодействия между атомами разных молекул моделировалось потенциалом Леннарда-Джонса (12-6) вида

$$U_{LJ}(r_{ij}) = 4\varepsilon_{LJ}\left((\sigma_{LJ}/r_{ij})^{12} - (\sigma_{LJ}/r_{ij})^{6}\right) \qquad (2)$$

где $r_{ij}$ – расстояние между соответствующими атомами, а $\sigma_{LJ}$ и $\varepsilon_{LJ}$ параметры потенциала. Взаимодействие атомов в одной молекуле задавалось упругим потенциалом (Harmonic oscillator – HO)

$$U_{HO}(r_{ij}) = \frac{k(r_{ij} - r_0)^2}{2} \qquad (3)$$

где $k -$ жесткость связи, а $r_0$ – равновесная длина связи. Для решения системы (1) использовался явный метод численного интегрирования Верле. Шаг интегрирования $\Delta t$ выбирался таким образом, чтобы дальнейшее его уменьшение не приводило к изменению результатов ($\Delta t \sim 0.01$фс $= 10^{-17}\ c$). Дополнительно, в наборе из $10^4$ различных конфигурации результаты явного метода Верле сравнивались с результатами неявной схемы.

**2. Результаты.** Двумя основными исследуемыми характеристиками столкновения были: угол отклонения траекторий после столкновения $\chi(b, E_{tr}, E_{rot,1}, E_{rot,2})$, определяющий сечение столкновения и значениях коэффициентов переноса на макроуровне, а также $E'_{tr}(b, E_{tr}, E_{rot,1}, E_{rot,2})$ значение поступательной энергии после столкновения, определяю-

щие скорость обмена энергией между степенями свободы и значения величины $Z_{rot}$. Здесь $b$ – прицельное расстояние столкновения, $E_{tr}, E_{rot,1}, E_{rot,2}$ – поступательная и вращательные энергии молекул Стоит отметить, что этими же двумя величинами – $\chi, E'_{tr}$ (и их зависимостями от прицельных параметров) определяются и существующие модели.

**Угол отклонения $\chi$.** В существующих моделях (VHS, VSS) угол разлета может зависеть только от поступательной энергии относительного движения пары молекул $E_{tr}$ (а также от прицельного расстояния $b$), что на макроуровне приводит к зависимости коэффициентов переноса от поступательной температуры $T_{tr}$. Однако результаты MD расчетов свидетельствуют о том, что угол $\chi$ сильно зависит от вращательных энергий $E_{rot,1}, E_{rot,2}$ (Рис. 1,2), во многих случаях даже сильнее чем от параметров $b$ и $E_{tr}$, которыми определяются существующие модели.

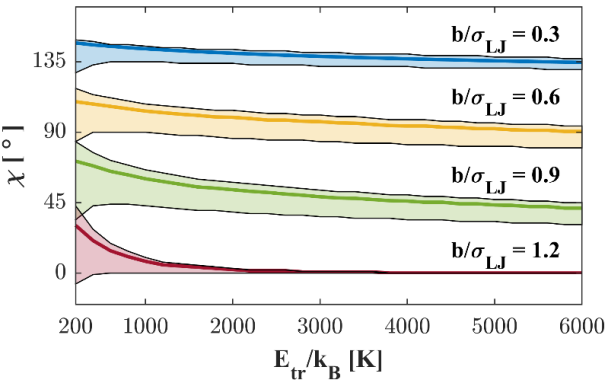



*Рис. 1. Зависимость угла разлета $\chi$ от поступательной $E_{tr}$ и вращательных $E_{rot,1}, E_{rot,2}$ энергий (отмечено шириной полос).*

На рисунке 1 изменение угла $\chi$ за счет $E_{rot,1}, E_{rot,2}$ обозначено вертикальной шириной полосы.

Таким образом, в сильно неравновесных процессах коэффициенты переноса будут определяться не только поступательной, но и вращательной температурой, а также видом неравновесного распределения вращательной энергий.

**Интенсивность обмена энергией между степенями свободы $\Delta\epsilon'_{tr}$.** Для удобства сравнения с существующими работами вместо зависимости

$$E'_{tr}\left(b, E_{tr}, E_{rot,1}, E_{rot,2}\right)$$

исследуется зависимость

$$\Delta\varepsilon'_{tr}\left(b, E_{tr}, \varepsilon_{tr}, \varepsilon_{rot,1}\right)$$

где $\Delta\varepsilon'_{tr} \equiv \varepsilon'_{tr} - \varepsilon_{tr}$, а $\varepsilon_{tr} \equiv E_{tr}/(E_{tr} + E_{rot,1} + E_{rot,2})$ – доля поступательной энергии столкновения, $\varepsilon_{rot,1} \equiv E_{rot1}/(E_{rot1} + E_{rot2})$ – доля вращательной энергии первой молекулы в суммарной вращательной энергии столкновения. В существующих моделях перераспределения энергии (BL и её модификации) выражение для $\epsilon'_{tr}$ можно записать следующим образом

$$\Delta\varepsilon'_{tr} = P \cdot (f_{eq}(\varepsilon'_{tr}) - \varepsilon_{tr})$$

где $f_{eq}$ – равновесная функция распределения поступательной энергии, а $P$ – вероятность неупругого столкновения, которая определяет интенсивность обмена энергией и макровеличину $Z_{rot}$. В классической модели BL [5] величина $P$ является константой, что приводит к $Z_{rot} = const$. В модели Бойда [7] $P$ зависит от $E_{tr}$, что приводит к $Z_{rot} = Z_{rot}(T_{tr})$. Недавние работы [8,9] показывают, что $P$ зависит еще и от $\varepsilon_{tr}$, что приводит к $Z_{rot} = Z_{rot}(T_{tr}, T_{rot})$. Полученные в данной работе результаты совпадают с выводами в [9,10] (Рис. 3). Интенсивность обмена зависит от $E_{tr}$ (что соответствует различным кривым на Рис. 2), и также от $\varepsilon_{tr}$ –

интенсивность обмена $\Delta\varepsilon'_{tr}$ по модулю выше при $\varepsilon_{tr}$, близких к единице, чем при $\varepsilon_{tr}$, близких к нулю.

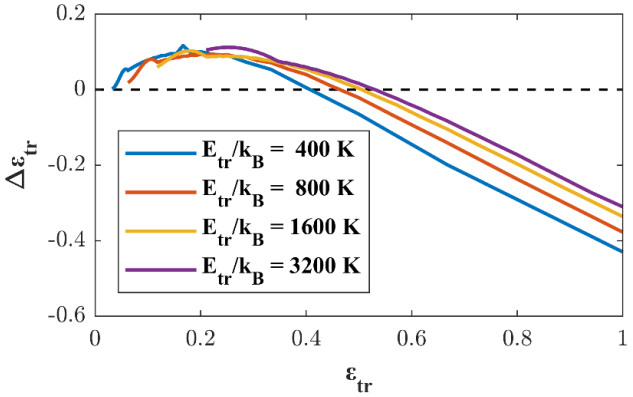



*Рис. 2. Зависимость интенсивности обмена энергией в столкновении $\Delta\varepsilon'_{tr}$ от $\varepsilon_{tr}$ удельной поступательной энергий в столкновении при различных $E_{tr}$.*

Также получено, что интенсивность обмена энергией существенно зависит от $\varepsilon_{rot,1}$ (Рис. 3), т.е. от соотношения вращательных энергией в сталкивающейся паре.

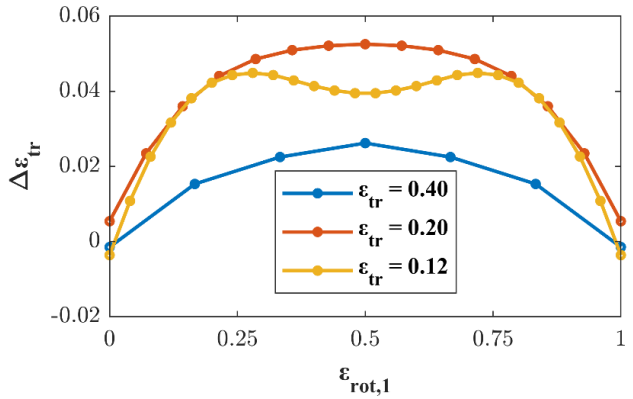



*Рис. 3. Зависимость интенсивности обмена энергией в столкновении $\Delta\varepsilon'_{tr}$ от соотношения вращательных энергий молекул ($\varepsilon_{rot,1}$).*

Когда вращательные энергии молекул равны, обмен между различными степенями свободы происходит наиболее интенсивно, а когда вся вращательная энергия сосредоточена в одной из молекул, обмена почти не происходит.

**Заключение.** На основании анализа большого набора МД расчетов были выявлены раннее не отмечавшиеся свойства столкновений двухатомных молекул. Так, было показано, что значения основных характеристик столкновения (угол разлета и интенсивность обмена энергией) существенно зависят не только от поступательной, но и вращательной энергии молекул.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова [13] и вычислительных ресурсов МСЦ РАН. Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 18-31-20025).

*Список использованных источников*

1. Bird G. A., Brady J. M. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. – Oxford: Clarendon press, 1994. – Т. 5.
2. Ivanov M. S. et al. SMILE system for 2D/3D DSMC computations //Proceedings of 25th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics. – 2006.
3. Haviland J. K., Lavin M. L. Application of the Monte Carlo method to heat transfer in a rarefied gas //The Physics of Fluids. – 1962. – Т. 5. – №. 11. – С. 1399-1405.
4. Bird G. A. Monte-Carlo simulation in an engineering context //Progress in Astronautics and Aeronautics. – 1981. – Т. 74. – С. 239-255.
5. Koura K., Matsumoto H. Variable soft sphere molecular model for inverse ‐ power ‐ law or Lennard ‐ Jones potential //Physics of fluids A: fluid dynamics. ‐ 1991. ‐

Т. 3. – №. 10. – С. 2459-2465.
6. Borgnakke C., Larsen P. S. Statistical collision model for Monte Carlo simulation of polyatomic gas mixture //Journal of computational Physics. – 1975. – Т. 18. – №. 4. – С. 405-420.
7. Boyd I. D. Rotational–translational energy transfer in rarefied nonequilibrium flows //Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. – 1990. – Т. 2. – №. 3. – С. 447-452.
8. Parker J. G. Rotational and vibrational relaxation in diatomic gases //The Physics of Fluids. – 1959. – Т. 2. – №. 4. – С. 449-462.
9. Valentini P., Zhang C., Schwartzentruber T. E. Molecular dynamics simulation of rotational relaxation in nitrogen: Implications for rotational collision number models //Physics of Fluids. – 2012. – Т. 24. – №. 10. – С. 106101.
10. Zhang C., Valentini P., Schwartzentruber T. E. Nonequilibrium-direction-dependent rotational energy model for use in continuum and stochastic molecular simulation //AIAA journal. – 2014. – Т. 52. – №. 3. – С. 604-617.
11. Kustova E. V., Kremer G. M. Influence of state-to-state vibrational distributions on transport coefficients of a single gas //AIP Conference Proceedings. – AIP Publishing LLC, 2016. – Т. 1786. – №. 1. – С. 070002.
12. Kustova E. V., Kremer G. M. Effect of molecular diameters on state-to-state transport properties: The shear viscosity coefficient //Chemical Physics Letters. – 2015. – Т. 636. – С. 84-89.
13. Vl. Voevodin, A. Antonov, D. Nikitenko, P. Shvets, S. Sobolev, I. Sidorov, K. Stefanov, Vad. Voevodin, S. Zhumatiy: Supercomputer Lomonosov-2: Large Scale, Deep Monitoring and Fine Analytics for the User Community. In Journal: Supercomputing Frontiers and Innovations, Vol.6, No.2 (2019). pp.4–11.

# ОСОБЕННОСТИ РАЗДЕЛЕНИЕ УГЛЕКИСЛОГО ГАЗА И АЗОТА В ЦЕОЛИТАХ

*И.А. Брюханов*

**Аннотация.** Способность цеолитов селективно адсорбировать газы из смесей обусловлена наличием в них положительно заряженных ионов металлов (катионов), которые могут блокировать доступ в поры молекулам одного газа, и открывать его для молекул другого газа. На основе изотерм индивидуальной адсорбции было показано, что цеолит NaKA обладает селективной адсорбцией $CO_2$ по отношению к $N_2$. В данной работе производится анализ влияния адсорбции углекислого газа на динамику катионов K и Na в цеолите NaKA с использованием ab initio молекулярной динамики (AIMD), основанной на решении уравнения Шредингера методом функционала плотности на уровне PBE/PAW. Показано, что гидрокарбонат- $HCO_3^-$ или карбонат анион $CO_3^{2-}$, которые образуются при адсорбции $CO_2$, могут образовывать комплексы с катионом $K^+$ и выводить его из окна 8R, так что вероятность диффузии $CO_2$ через 8R возрастает. Впервые рассчитаны временные корреляции между положения катионов и частицами $HCO_3^-/CO_3^{2-}$ и продемонстрировано их значительное взаимодействие, приводящего к катионному дрейфу из окон 8R. Это явление объясняет ненулевую адсорбцию $CO_2$ в цеолитах с узкими порами при высоком обмене Na/K. В газовой смеси такой деблокирующий эффект ухудшит коэффициент разделения из-за возможного прохождения обоих компонентов через плоскость частично открытых окон 8R [1].

**Введение.** Эффективное разделение газовых смесей, содержащих углекислый газ, является одной из центральных проблем улавливания и хранения углерода [2]. При изучении отделения диоксида углерода от сухих газовых смесей $CO_2/N_2$ было обнаружено, что цеолиты NaKA с низким и умеренным содержанием K обладают исключительно высокой селективностью $CO_2$ [3]. Аналогичные эффекты разде-

ления проявились и для других цеолитов щелочной формы с восьмичленными окнами 8R или призмами D8R на основе отдельных изотерм для газовых компонентов ETS-4 [4], CHA [5], ZK- 5, RHO, KFI, LEV, ETS-10. Кинетический диаметр адсорбата, размер щелочного катиона и модуль Si/Al являются важными факторами, которые следует учитывать при определении температуры закупорки пор в цеолитах MeCHA [6]. Однако специфическая особенность молекул $CO_2$ образовывать карбонаты остается не обсуждаемой, поскольку в них превращается лишь небольшая доля $CO_2$ (несколько процентов). Однако, даже небольшое количество карбонат-анионов, сконцентрированных в таких областях, как окна 8R или призмы D8R, могут значительно изменить характер адсорбции и кинетики газа. Рассмотрим цеолит NaKA.

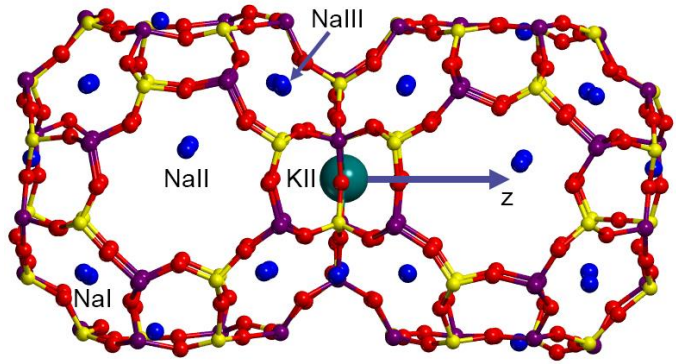



*Рисунок 1. Ячейка цеолита NaKA. Ось OZ перпендикулярно 8R окну. Атомы серового, красного, голубого, коричневого, желтого и зеленого цвета соответствуют H, O, Na, Al, Si, и K.*

Когда обмен катионов Na на K становится 33% мол., то все окна 8R в кристалле NaKA «закрываются» (сайт II), так как катионы K заменяют сначала катионы NaIII и NaII вблизи 4R и в 8R окна (рис. 1). Напомним, что один NaIII и три NaII

распределены на каждую α-пору, что приводит к (1 + 3) / 12 = 33%, в то время как один NaII или KII распределяется между двумя соседними α-клетками. Когда цеолит NaA со свободным диаметром около 4.1 Å для окна 8R превращается в NaKA (при соотношении 40% K/Na), свободный диаметр окна 8R уменьшается до 3 Å. В таком случае не ожидается ни адсорбции $CO_2$, ни $N_2$, поскольку их кинетические диаметры превышают 3 Å (3.3 и 3.64 Å). В действительности поглощение $CO_2$ не равно нулю при еще более высоком обмене Na/K, чем 40% [3].

Атомистическое моделирование использовалось для выяснения нескольких механизмов, объясняющих, как $CO_2$ может проникать через «закрытые» окна 8R. Авторы предложили так называемый «trapdoor mechanism» [5]. Используя расчет NEB с DFT, они обнаружили, что несколько молекул $CO_2$ могут вытеснить катион из каркаса из своего положения, и следующий $CO_2$ может пройти в это окно. Однако, этот механизм не был подтвержден недавними расчетами AIMD/DFT и термодинамическими расчетами. Из химических потенциалов при поглощении $CO_2$ в NaA не было получено доказательств того, что слабое взаимодействие между катионами $CO_2$ и Na может вытеснять катионы из их кристаллографических центров [20]. На основании расчета профиля свободной энергии $CO_2$, поступающего в окна 8R, авторы [11] предположили, что амплитуда теплового движения катионов внерамного каркаса достаточно велика и что CO2 способен сдавливаться при открытом затворе. Эта идея отклоняется от гипотезы [3], предложенной для $N_2$ и $CH_4$, проходящих через 8R выше пороговой температуры $T_s$, что соответствует активации миграции катионов. Эти выводы, однако, не объясняют ненулевое поглощение $CO_2$ в NaKA при высоком обмене Na/K.

Адсорбция CO2 приводит к образованию хемосорбированных карбонатов, что наблюдалось при измерениях инфра-

красного излучения (FTIR) во многих работах. Механизм поглощения $CO_2$, связанный с образованием карбоната, был предложен в [7] параллельно с «trapdoor mechanism» [5]. Предполагается, что отрицательно заряженные карбонатные частицы могут выводить катионы из окон из-за сильного кулоновского взаимодействия. Недавно было обнаружено, что энергия активации образования гидрокарбоната ($HCO_3^-$) из $CO_2$ и $H_2O$ в MeX-цеолитах достаточно мала (несколько ккал/моль) для Me = K, Rb, Cs,

В настоящей работе представлен анализ влияния карбонатных частиц на поведение $K^+$ в ходе адсорбции $CO_2$ в цеолите NaKA методом ab initio молекулярной динамики (AIMD).

**Описание системы.** Цеолитная ячейка псевдо-NaKA (химический состав $KNa_{23}Al_{24}Si_{24}O_{96}$) содержит две α-клетки, разделенные окном 8R (рис. 1), в котором находится катион K. Динамика AIMD смесей, содержащих 7 $CO_2$, $CO_3^{2-}$, $HCO_3^-$ и 7 $CO_2$ плюс $HCO_3^-$ в одной α-клетке, моделируется с использованием функционала PBE [8] в сочетании с базисным набором плоских волн, псевдопотенциалами PAW, и DFT-D2 полуэмпирические дисперсионные поправки, реализованные в пакете VASP [9]. Энергия обрезания кинетической энергии электронов была принята за 500 эВ. Это моделирование проводилось с временным шагом 1 фс в течение 10-30 пс при 300 К в термостате Ноза-Хувера с тепловыми колебаниями 40 фс.

ИК-спектроскопия показала наличие гидрокарбонатных и карбонатных анионов в NaKA. Моделирование реакции между $CO_2$ и $H_2O$ в оптимизированной ячейке NaKA выявляет незначительный барьер 0.15 эВ, который показывает, что гидрокарбонаты могут образовываться при комнатной температуре.

**Результаты.** В пикосекундной шкале амплитуду движения катиона $K^+$ относительно его положения равновесия в плоскости окна 8R цеолита NaKA (рис. 1) сравнивают без

(рис. 2a, 3a) и с одним (рис. 2b, 3b) $HCO_3^-$ или (рис. 2c) $CO_3^{2-}$ в одной из двух α-клеток NaKA, которые связаны окном 8R (рис. 1). Для пустого цеолита z-координата $K^+$ колеблется вокруг равновесного положения в 8R (около 12.20 Å на рис. 2a), в то время как в присутствии гидрокарбоната среднее отклонение от плоскости окна составляет около 1.2 Å (около 11.0 Å на рис. 2b) после 17 пс.

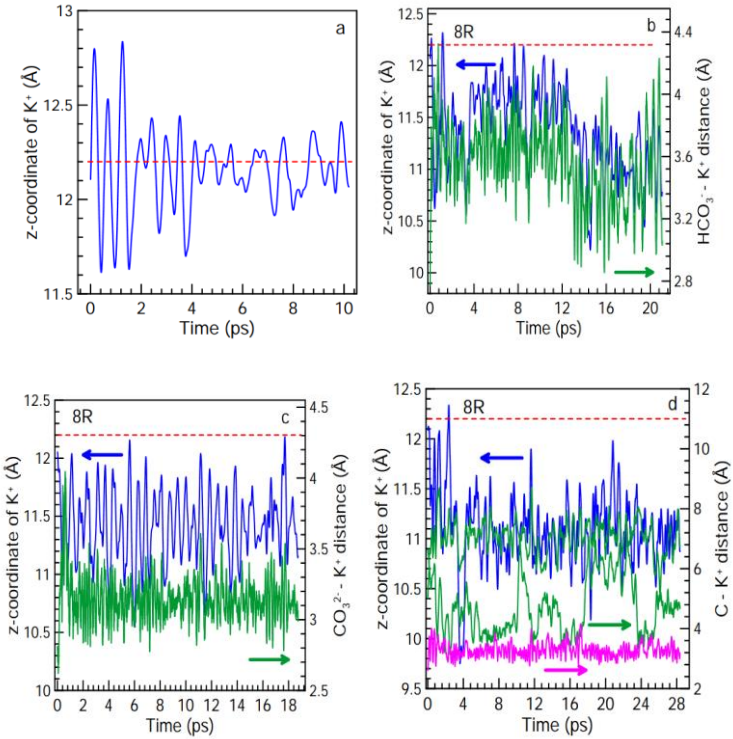



*Рисунок 2. Временные зависимости перемещения катиона $K^+$ вдоль оси z (голубые линии, левая ось) в пустом цеолите NaKA (a), и расстояния C-$K^+$ (зеленая линия, правая ось в b-d) NaKA с $HCO_3^-$ (b), $CO_3^{2-}$ (c), $HCO_3^-$ и $7CO_2$ (d) на одну α-полость при 300 K.*

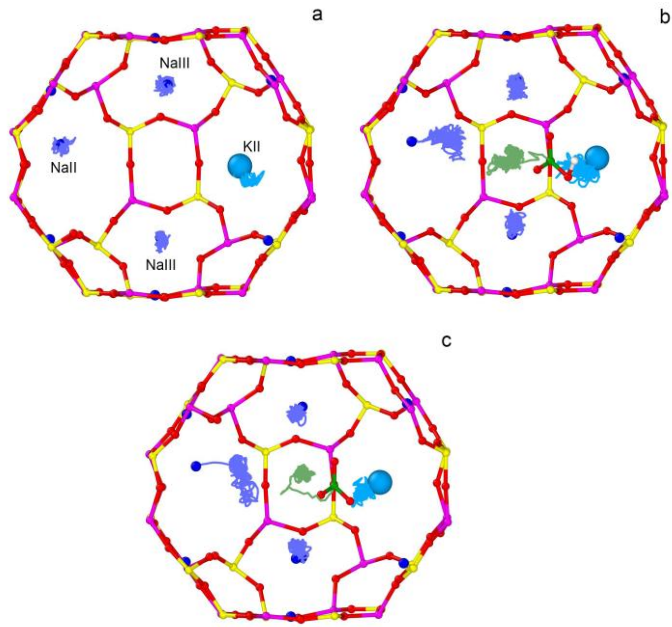



*Рисунок 3. Траектории атомов Na (темно-синий) и K (голубой) в расчетах квантовой молекулярной динамике в пустом цеолите NaKA (a), и при адсорбции $HCO_3^-$ (b) и $CO_3^{2-}$ (c), включая траектории C (зеленый) при 300 K, соответствующие рис 2a-b.*

Карбонат-анион сильнее взаимодействует с $3Na^+$ и $K^+$ благодаря более высокому заряду, и через 2 пс значительного движения с этого места не наблюдается. Можно видеть, что гидрокарбонат начинает смещать $K^+$ дальше от окна 8R на 12 пс (рис. 2b, 3b), что приводит к сдвигу 1.9 Å (достигая 10.3 Å на рис. 2b при 14 пс), Благодаря более слабому взаимодействию с катионами, гидрокарбонат обладает большей подвижностью, чем карбонат, и он может мигрировать между соседними окнами 6R (рис. 3б). Карбонатный анион не воспроизводит тот же масштаб движений, так как он находится в более плотном контакте с катионами. Чтобы убедиться в

этом, можно сравнить амплитуды |C-$K^+$| изменения в тех же условиях (при отсутствии $CO_2$) для $HCO_3^-$ на рис. 2b и для $CO_3^{2-}$ на рис. 2c. Узкий интервал |C-$K^+$| изменения во времени (рис. 2b-d) подтверждают сильное взаимодействие $K^+$-$CO_3^{2-}$ в стабильном комплексе

Было получено, что ни 3 $CO_2$, ни 7 $CO_2$ не могут выводить $K^+$ из окна 8R без гидрокарбоната или карбоната. Средняя позиция $K^+$ в этих расчетах находится вблизи плоскости 8R окна, а амплитуды смещения составляют 0.3-0.4 Å. Молекулы $CO_2$ не образуют комплексов с $K^+$, так как расстояние между $CO_2$ и $K^+$ больше 4.2 Å.

Сдвиг $K^+$ (рис. 2b-d, 3b-c) объясняет ненулевую адсорбцию $CO_2$ в NaKA с обменом Na/K, превышающим 33%, когда $CO_2$ не может пройти через все окна 8R, поскольку его кинетический диаметр составляет более 3 Å. Похоже, что при интерпретации прорывных экспериментов со смесями $CO_2$ следует учитывать микроскопическую модель карбонатов.

Такой эффект разблокировки каналов в любом случае уменьшит коэффициент разделения в газовой смеси из-за возможного прохождения обоих газовых компонентов через частично открытые окна 8R.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова [10].

*Список использованных источников*

1. I. A. Bryukhanov, A. A. Rybakov, and A. V. Larin, J. Phys. Chem. Lett. (2019).
2. S. Chu, Science **325**, 1599 (2009).
3. Q. Liu, A. Mace, Z. Bacsik, J. Sun, A. Laaksonen, and N. Hedin, Chem. Commun. **46**, 4502 (2010).
4. S. M. Kuznicki, V. A. Bell, S. Nair, H. W. Hillhouse, R. M. Jacubinas, C. M. Braunbarth, B. H. Toby, and M. Tsapatsis,

Nature **412**, 720 (2001).
5. J. Shang, G. Li, R. Singh, Q. Gu, K. M. Nairn, T. J. Bastow, N. Medhekar, C. M. Doherty, A. J. Hill, J. Z. Liu, and P. A. Webley, J. Am. Chem. Soc. **134**, 19246 (2012).
6. J. Shang, G. Li, R. Singh, P. Xiao, J. Z. Liu, and P. A. Webley, J. Phys. Chem. C **117**, 12841 (2013).
7. A. V. Larin, A. Mace, A. A. Rybakov, and A. Laaksonen, Microporous Mesoporous Mater. **162**, 98 (2012).
8. J. P. Perdew, K. Burke, and M. Ernzerhof, Phys. Rev. Lett. **77**, 3865 (1996).
9. G. Kresse and D. Joubert, Phys. Rev. B **59**, 1758 (1999).
10. Воеводин Вл.В., Жуматий С.А., и др. Практика суперкомпьютера "Ломоносов" // Открытые системы. - Москва: Издательский дом "Открытые системы", N 7, 2012. С. 36-39.

# РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ВЕТРОКАТАМАРАНА: УСТОЙЧИВОСТЬ, БИФУРКАЦИИ

*М.А. Гарбуз*

**Аннотация.** Рассматривается задача о движении катамарана в спокойной воде против направления ветра, за счёт ветродвигателя. В работе предложена новая математическая модель ветродвигателя, которая позволила получить ряд результатов в описании динамики ветрокатамарана, в частности, была продемонстрирована возможность наличия нескольких типов установившихся движений.

Составлены уравнения движения катамарана, найдены установившиеся режимы и проведено исследование их устойчивости. Проанализирована зависимость стационарных движений от параметров модели. В ходе численно-аналитического исследования определены параметры ветродвигателя, обеспечивающие наивысшую скорость движения катамарана против направления ветра. Построены соответствующие бифуркационные диаграммы.

**Введение.**

Судовой ветродвигатель – это устройство, преобразующее энергию потока ветра во вращательную энергию, которая используется для движения плавательных судов. Идея применения ветродвигателя в транспортной сфере становится всё более актуальной на фоне возрастающего загрязнения мирового океана и повышения цен на нефть.

Считается, что первые ветродвигатели появились в конце 1970-х [1]. Конструкция размещения ветроприёмного элемента менялась, до настоящего времени появлялись различные патенты. В работе [2] рассмотрена упрощённая математическая ветродвигателя, в которой лопасти воздушного пропеллера и гребного винта аппроксимированы тонкими пластинами. Недостатком одноротор-ной системы являются высокие гироскопические силы,

возникающие при маневрировании. Поэтому в более поздней работе [3] был предложен новый тип ветродвигателя с двумя пропеллерами и двумя гребными винтами на противовращающихся вложенных осях. Противовращение винтов делает систему более динамически симметричной и даёт ряд преимуществ при разгоне из состояния покоя.

В данной статье предложена принципиально новая математическая модель одноосного ветродвигателя. Рабочий элемент (ветроприемный пропеллер) закреплен на одном конце свободно вращающегося вала, а на другом конце закреплён гребной винт (рис. 1). Для описания пропеллера и гребного винта рассматриваются результаты реальных экспериментов для корабельных гребных винтов и пропеллеров от ветро-энергетических установок[4,5].

Траектория движения центра масс катамарана представляет собой прямую (Ox на рис. 1). Пропеллер и гребной винт совершают сложное движение, состоящее из поступательного по направлению движения и вращательного вокруг осей динамической симметрии (на рис 1. указаны жирным пунктиром).

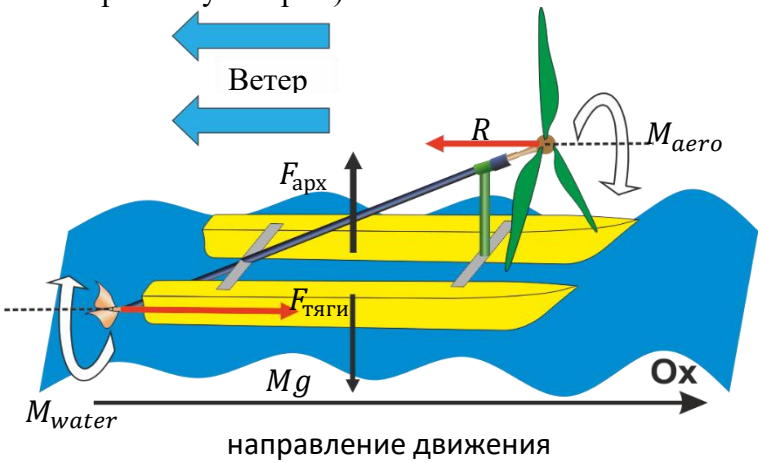



*Рис.1 Схема механизма (вид сбоку).*

Для детального изучения системы составим динамические уравнения модели и численно найдём их решения, соответствующие рабочему режиму ветродвигателя.

**1. Описание системы.** Схема ветродвигателя представлена на рис. 1. Пропеллер, каждая из трёх лопастей которого имеет длину $r_a$, соединён с двухлопастным гребным винтом диаметра $D$. Трение в соединяющих подшипниках отсутствует.

Обозначим $J$ – центральный момент инерции ветродвигателя. $M$ – масса снаряжённого катамарана. Плотности воздуха и воды соответственно равны $\rho_a$ и $\rho_w$.

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем угол $\varphi$ поворота вала и положение $x$ центра масс. Обе координаты являются циклическими, поэтому для описания положения системы использованы обобщённые скорости: $v$ – скорость центра масс и $\omega$ – угловая скорость вала.

Считаем, что система находится в потоке встречного ветра, скорость которого постоянна и равна $v_0$. Так же считаем, что движение корпуса происходит в отсутствии волн и подводных течений.

При численных расчетах использовались зависимости коэффициентов $C_D(\lambda)$, $C_T(\lambda)$ лобового сопротивления и подъемной силы от быстроходности пропеллера $\lambda = \frac{r_a}{|v+v_0|}$, и коэффициенты $K_T(j), K_Q(j)$ толкающей силы и момента гребного винта от поступи $j = \frac{v}{\omega r_w} \cdot \pi$. Зависимости получены на основе стационарных экспериментов [4, 5].

**2. Уравнения движения.** Уравнения движения в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x' = a_1 C_T\left(\frac{x}{y+1}\right) \cdot (y+1)^2 - \frac{a_2}{k^5} \cdot K_Q\left(\pi k \cdot \frac{y}{x}\right) \cdot x^2 \\ y' = \frac{b_1}{k^4} x^2 K_T\left(\pi k \cdot \frac{y}{x}\right) - b_2 (y+1)^2 C_D\left(\frac{x}{y+1}\right) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\tau = \frac{v_0}{r_a}t,\quad x = \frac{r_1\omega}{v_0},\ \ y = \frac{v}{v_0},\ \ k = \frac{r_a}{r_w};$

$a_1 = \frac{\rho_a \pi r_a^5}{2J}, a_2 = \frac{8}{\pi^2 J}\rho_w r_a^5, b_1 = \frac{4}{\pi^2 M}\rho_w r_a^3, b_1 = \frac{\rho_a r_a^3 \pi}{2M}$

– безразмерные параметры.

Нас будут интересовать установившиеся движения вида $(\dot{x}, \dot{y}) = (0,0)$. Уравнения этих движений имеют вид:

$$\begin{cases} 0 = a_1 C_T\left(\frac{x}{y+1}\right)\cdot(y+1)^2 - \frac{a_2}{k^5}\cdot K_Q\left(\pi k\cdot\frac{y}{x}\right)\cdot x^2 \\ 0 = \frac{b_1}{k^4}x^2 K_T\left(\pi k\cdot\frac{y}{x}\right) - b_2(y+1)^2 C_D\left(\frac{x}{y+1}\right) \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения (2) существенно нелинейны, они были решены численным методом Крылова-Ньютона. Были найдены решения вида (3) $(x, y) = (x_*, y_*)$.

**3. Условия асимптотической устойчивости решений.** Для решений (3) выполнены условия теоремы Рауса-Гурвица, если:

$$a_1(y_*+1)\left(C'_{T\underset{y=y_*}{x=x_*}} - 2\frac{y_*+1}{x_*}C_{T\underset{y=y_*}{x=x_*}}\right) + \\ + \frac{15}{\pi k^3}\left(\frac{a_2}{k}K'_{Q\underset{y=y_*}{x=x_*}} + b_1 K'_{T\underset{y=y_*}{x=x_*}}\right) - b_2\left(2(y_*+1)C_{D\underset{y=y_*}{x=x_*}} - xC'_{D\underset{y=y_*}{x=x_*}}\right) < 0, \quad (4)$$

и

$$ka_1 b_1 K'_{T\underset{y=y_*}{x=x_*}}\left(xC'_{T\underset{y=y_*}{x=x_*}} - 2(y_*+1)C_{T\underset{y=y_*}{x=x_*}}\right) + \\ + a_2 b_2 K'_{Q\underset{y=y_*}{x=x_*}}\left(2(y_*+1)C_{D\underset{y=y_*}{x=x_*}} - x_*\, C'_{D\underset{y=y_*}{x=x_*}}\right) > 0 \quad (5)$$

Производные интерполированных функций для описания гребного винта монотонно не возрастают и, следовательно, имеют отрицательную производную. В ходе аналитического решения было показано, что множители с производными функций $C'_{D\underset{y=y_*}{x=x_*}}$ не меняют знак во всём диапазоне исследования.

Анализ этих соотношений дал следующий результат: область, в которой нарушено условие (4) всегда находится внутри области, в которой нарушено условие (5). Потеря устойчивости происходит только путём перехода через ноль свободного члена (в точках ветвления).

**4. Бифуркационные диаграммы.** Корпус катамарана конструктивно задаёт максимальный размер пропеллера, который мы можем на него установить, и поэтому единственный параметр ветродвигателя, который можно подбирать – это размер гребного винта.

Выберем в качестве бифуркационного параметра коэффициент $k$.

С помощью численного моделирования проведём исследование скоростей $v$ и $\omega$, в зависимости от $k$ при фиксированном размере пропеллера и переменном размере гребного винта. Результаты исследования представлены на рисунке 2.

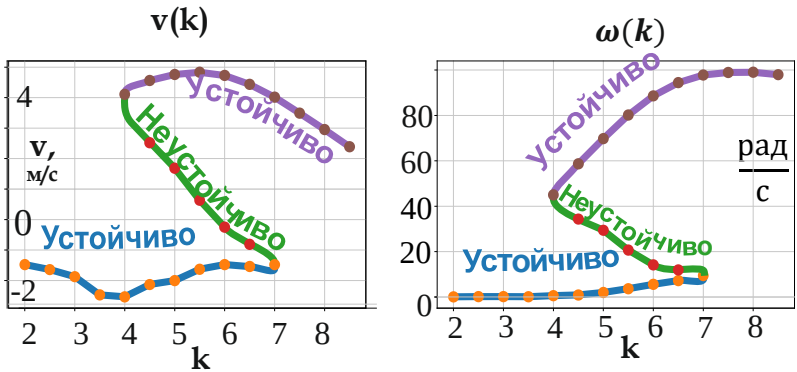



*Рис. 2. Бифуркационные диаграммы*

При расчетах использованы следующие соотношения: $v_{\text{ветра}} = 10$ м/с, $m = 50$ кг, $J = 0.1$ кг $\cdot$ м$^2$.

При малых $k$ имеем единственное решение, соответствующее режиму движения по ветру. Размер гребного винта слишком большой, вал вращается с низкой угловой скоростью, т.к. аэродинамического момента не хватает, для того чтобы прокрутить гребной винт.

При $4 \leq k \leq 7$ в системе 3 решения: устойчивые режимы движения по ветру и против направления ветра, а также неустойчивый режим. Максимальное теоретическое значение скорости движения катамарана против направления ветра $v_{max} = 4.83$ м/с и может быть достигнуто при $k_{max} = 5.44$.

Дальнейшее увеличение $k$ в диапазоне $(7; 8.5)$ в рассматриваемом случае соответствует уменьшению размера гребного винта. Гребной винт меньшего размера создаёт меньшую тягу, что ведёт к снижению скорости катамарана. Вместе с тем, падает и гидродинамический момент, поэтому угловая скорость вала возрастает.

Примечательно, что максимальные значения $v$ и $\omega$ достигаются при разных значениях параметра $k$. Это обусловлено уменьшением аэродинамического момента при увеличении угловой скорости ветропринимающего устройства.

В НИИ механики МГУ был создан и протестирован лабораторный макет исследуемого ветродвигателя. При этом было выбрано значение $k = 5$. Эксперименты проводились в аэродинамической трубе НИИ механики при скорости потока $5 - 10$ м/с. Были зарегистрированы 2 вида установившихся режимов движения катамарана: движение вдоль потока ветра при старте из состояния покоя, и движение в сторону ветра при начальной раскрутке вала потоком ветра. Максимальное значение скорости катамарана в эксперименте составило 2,1 м/с при скорости встречного потока 10 м/с.

**Заключение.** Предложена новая динамическая модель судового ветродвигателя, разработанная на основе экспериментальных данных аэро и гидродинамики. Найдены стационарные режимы движения и проанализирована их устойчивость. Доказано отсутствие бифуркаций Андронова-Хопфа (колебательной потери устойчи-

вости) в исследуемом диапазоне. Найдены конструктивные оптимальные параметры ветродвигателя, способного развить максимальную скорость при движении против направления ветра за счёт энергии ветра.

Экспериментально подтверждено наличие устойчивых режимов движения катамарана с ветродвигателем.

Работа выполнена в рамках НИР «Разработка методов исследования управляемых механических систем, взаимодействующих со сплошной средой» (АААА-А19-119012990123-0).

*Список использованных источников*

1. Лысенко Г.П. Транспортные ветродвигатели. – URSS. 2014. 88с. ISBN 978-5-9710-0659-6.
2. Гарбуз М.А. Катамаран с ветродвигателем. – Сборник трудов КМУ 2017., Издательство Московского университета 2018, Москва, том 1, с. 47-54.
3. Гарбуз М.А. Катамаран, движущийся против ветра при помощи противовращающихся пропеллерных ветродвигателей. – Сборник трудов КМУ 2018., Издательство Московского университета 2019, Москва, том 1, с. 69-76.
4. Я.И. Войткунский. Справочник по теории корабля. Том 1. Ленинград, 1986.
5. Adaramola, M.S., Krogstad, P.A. Experimental investigation of wake effects on wind turbine performance. Renewable Energy, 2011, 36(8), pp 2078-2086.

# БИОРЕЗОРБИРУЕМЫЕ МАКРОПОРИСТЫЕ МАТЕРИАЛЫ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ $Ca_2P_2O_7$-$CaNa_2P_2O_7$-$Ca(PO_3)_2$, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ КОЛЛОИДНОГО ФОРМОВАНИЯ

*Я.Ю. Филиппов*

**Аннотация.** Наиболее перспективными для остеопластики на сегодняшний день являются биорезорбируемые макропористые материалы с высокой проницаемостью, которые обеспечивают прорастание костной ткани, и с течением времени постепенно замещаются природной костью. Данная работа посвящена проблеме создания керамики на основе пирофосфата кальция, обладающего высокой скоростью биорезорбции в среде организма, а также вопросам выбора структуры и создания материалов с заданной системой пор путем совместного использования метода 3-D печати и коллоидного формования.

**Введение.** Резорбируемые биоматериалы имеют перспективу как имплантаты для реконструкции костной ткани; выполняя направляющую и, частично, опорную функции на самых ранних этапах своего применения, со временем они растворяются в среде организма, замещаясь природной костной тканью [1].

Пирофосфат кальция, в котором соотношение Ca/P=1, не проявляет токсического действия на ткани организма, является биосовместимым, биоактивным, а также обладает хорошей резорбируемостью [2]. Фосфаты с большим содержанием кальция значительно медленнее резорбируются в среде организма, а с меньшим – наоборот, слишком быстро, вследствие чего материал импланта не успевает заместиться природной костной тканью.Фундаментальная проблема получения пирофосфатной керамики заключается в малой подвижности пирофосфат-анионов, обладающих большим размером, вследствие чего возникает необходимость в высоких температурах и длительной термообработке, однако,

даже в этом случае качество получаемых материалов оставляет желать лучшего вследствие большого количества полостей, невысокой плотности и крупного размера зерна. Данная проблема может быть решена посредством получения керамики с использованием жидкофазного спекания, так как диффузия крупных пирофосфат-анионов протекает значительно легче через жидкую фазу. Крайне интересными с этой точки зрения является использование в качестве спекающих добавок полифосфата кальция и смешанного пирофосфата кальция/натрия, которые образуют относительно низкотемпературные эвтектики с пирофосфатом кальция [3].

Наиболее эффективно процессы регенерации костной ткани протекают при наличии в имплантате связной системы пор макроскопических размеров, когда наблюдается прорастание костной ткани вглубь материала имплантата [4]. В настоящее время практически единственным методом формирования имплантатов сложной архитектуры является методы быстрого прототипирования (3-D печать) [5]. Коллоидное формование, которое заключается в заполнении определенной формы суспензией под давлением с последующим ее отверждением за счет протекания химической реакции, является одним из перспективных методов получения материалов заданной формы, который может быть достаточно легко встроен в технологическую схему быстрого прототипирования.

Ранее нами было предложено использование метафосфата кальция в качестве спекающей добавки для создания керамики на основе пирофосфата кальция [6], однако по-прежнему остается ряд вопросов касательно несоответствия теоретического и реального химического состава получаемого материала.

**Экспериментальная часть**. Высококонцентрированную кальцийфосфатную суспензию готовили путем смешивания порошкового прекурсора необходимого состава с неосушенным глицерином в соотношении 2:1

по массе, после чего ее продавливали в предварительно напечатанную на 3D принтере полимерную форму со структурой Кельвина [7] (рис. 1 а,б) под давлением 0,5 МПа. Использование раствора глицерина в качестве жидкости затворения обусловлено тем, что он улучшает пластичность пасты, увеличивает ее вязкость, что позволяет избежать явления пресс-фильтрации (быстрого расслоения суспензии на агрегатные составляющие) при формовании, а также препятствует слишком быстрому твердению [8]. Полимерные формы для задания связанной системы макропор получали с использованием термоэкструзионной 3D-печати из пластика ABS. Геометрические параметры формы обеспечивали изготовление отливки диаметром 8 мм, с долей макропор 70%, размер пор 4мм, толщина балок каркаса отливки – 2 мм.

**Обсуждение результатов**. По данным рентгенофазового анализа в результате термообработки предварительно сформованной высококонцентрированной суспензии порошков пирофосфата кальция и моногидрата монокальциевого фосфата при температуре 1000ºС в течение 1 часа, наблюдается формирование композитов, в состав которых входит пирофосфат кальция и метафосфат кальция, за счет термолиза брушита, дигидропирофосфата кальция и монокальциевого фосфата:

$$2CaHPO_4 \cdot 2H_2O = Ca_2P_2O_7 + 5H_2O, \quad (1)$$

$$CaH_2P_2O_7 = Ca(PO_3)_2 + H_2O, \quad (2)$$

$$Ca(H_2PO_4)_2 \cdot H_2O = Ca(PO_3)_2 + 3H_2O. \quad (3)$$

Следует отметить, что в случае обжига в течение 3 часов фаза $Ca(PO_3)_2$ отсутствует (рис. 1); это может быть объяснено разложением монокальциевого фосфата (MCP) при высокой температуре до пирофосфата кальция (CPP) и удалением оксида фосфора в виде газообразного продукта.

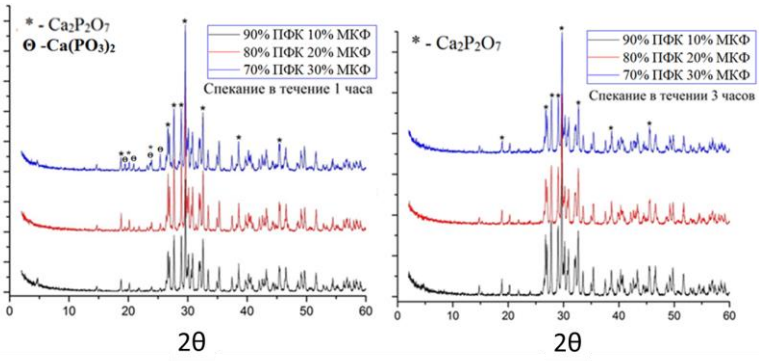



*Рис. 1. Рентгенофазовый анализ керамики, полученной посредством спекания при 1000°С в течение 1-3 часов.*

В процессе спекания исследуемой композиционной керамики возможно частичное протекание следующих реакций разложения СРР и СМР за счет испарения летучего оксида фосфора $P_4O_{10}$ ($P_2O_5$) ($T_{возг}$=360°С, $T_{кип}$=865°С для водного азеотропа с 92.4%$P_2O_5$ [9]):

$$4Ca(PO_3)_{2\,(тв)} \rightarrow 2Ca_2P_2O_{7(тв)} + P_4O_{10(г)} \quad (4)$$

$$6Ca_2P_2O_{7(тв)} \rightarrow 4Ca_3(PO_4)_{2(тв)} + P_4O_{10(г)} \,. \quad (5)$$

Для термодинамической оценки возможности протекания реакций (4, 5) были использованы следующие температурные зависимости энергий Гиббса образования участвующих в реакциях веществ: $\Delta_fG°_T(Ca_2P_2O_7)$ = -3475.9 + 1.5441T - 0.1051TlnT (± 11) кДж/моль [10], $\Delta_fG°_T$ ($Ca(PO_3)_2$) = -3334.8 + 6.1561T - 0.695TlnT (± 12) кДж/моль [11], $\Delta_fG°_T(Ca_3(PO_4)_2)$ = -4200.1 + 0.912T [11]; для газообразного оксида фосфора получено значение $\Delta_fG°_{1273}(P_4O_{10(г)})$ = -2048.16 кДж/моль, используя табличные данные [12-13]. Для реакции (7) разложения СМР до СРР $\Delta_rG°_{1273}$ (4) ≈ 156 кДж/моль СМР, а для реакции (5) разложения СРР до ТСР и газообразного оксида фосфора $\Delta_rG°_{1273}$ (5) ≈ 298 кДж/моль СРР. Если провести оценку равновесного парциального давления паров $P_4O_{10}$ согласно формуле $\Delta_rG°_T$ (7, 8) = - $R$T•ln $p(P_4O_{10(г)})$, то получаем, что

в первом случае $p(P_4O_{10(г)}) \approx 4 \cdot 10^{-2}$ Па, а во втором – $p(P_4O_{10(г)}) \approx 6 \cdot 10^{-8}$Па, что говорит о большей вероятности протекания реакции (4).

Следует отметить, что во влажной атмосфере картина инкогруэнтного испарения может быть несколько иной: в качестве летучего соединения фосфора могут выступать фосфорные кислоты, т.е. фактически происходит пирогидролиз фосфата кальция. Ниже представлен вариант реакции пирогидролиза СМР до СРР и ортофосфорной кислоты:

$$2Ca(PO_3)_{2(тв)} + 3H_2O_{(г)} \rightarrow Ca_2P_2O_{7(тв)} + 2H_3PO_{4(г)} \quad (6)$$

Для грубой оценки $\Delta_f G°_T(H_3PO_{4(г)})$ было использовано правило Трутона, согласно которому $\Delta S°_{кип} = \Delta H°_{кип}/T_{кип} \approx 88$Дж/(моль·К). Это правило в полной мере применимо для слабоассоциированных жидкостей, к которым протонные растворители с сеткой водородных связей не относятся. Тем не менее, для понимания самой возможности протекания реакции типа (6) применение такого приближения вполне допустимо. Тогда, с учетом того, что $\Delta_f H°_{298.15}(H_3PO_{4(г)}) = \Delta_f H°_{298.15}(H_3PO_{4(ж)}) + \Delta H°_{кип}$ и $\Delta_f S°_{298.15}(H_3PO_{4(г)}) = S°_{298.15}(H_3PO_{4(ж)}) + \Delta S°_{кип} - 3/2\ S°_{298.15}(H_{2(г)}) - S°_{298.15}(P_{белый(тв)}) - 2\ S°_{298.15}(O_{2(г)})$; пренебрегая теплоемкостью, получаем, что $\Delta_f G°_{1273}(H_3PO_{4(г)}) \approx -1534$ кДж/моль.

Оценку энергии Гиббса реакции (6) в нестандартных условиях (парциальное давление паров воды меньше 1 атм) проводили по формуле [13] $\Delta_r G_T = \Delta_r G°_T + RT\ln p/p_0$, где $p$ – парциальное давление водяного пара, а $p_0$ – атмосферное давление. Тогда, с учетом того, что при влажности 60% в лабораторных условиях $p \approx 2$ кПа, получаем, что $\Delta_r G°_{1273}$ (6) ≈ - 201 кДж. Отрицательный знак энергии Гиббса говорит о том, что равновесие (6) сдвинуто вправо, т.е. реакция протекает практически полностью. Реальная ситуация, когда влажность газовой среды отжига находится

между 0 и 60%, лежит между крайними случаями, описываемыми уравнениями (4) и (6). Свободная энергия реакции инконгруэнтного испарения лежит в диапазоне -201 кДж < $\Delta_r G_T$ < 156 кДж, давление диссоциации $4 \cdot 10^{-2}$ Па < p < $1 \cdot 10^5$ Па, в газовой фазе присутствуют оксид фосфора (V) и продукты его разложения ($PO_2$, $O_2$), фосфорные кислоты - ортофосфорная и полифосфорые. Наличие газового потока, уносящего летучие продукты разложения – дополнительный фактор, способствующий более полному протеканию реакции.

**Заключение.** Были проведены термодинамические расчеты различных реакций, протекание которых может объяснить отсутствие метафосфата кальция в конечном получаемом материале, и выбран наиболее вероятный механизм его разложения в процессе высокотемпературной обработки.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-33-00789 мол_а.

*Список использованных источников*

1. Bohner M., Resorbable biomaterials as bone graft substitutes. // Materialstoday, 2010. 13(1-2): 24–30.
2. Lee J.H., Chang B.S., Jeung U.O., Park K.W., Kim M.S., Lee C.K., The first clinical trial of beta-calcium pyrophosphate as a novel bone graft extender in instrumented posterolateral lumbar fusion // Clinics in orthopedic surgery. 2011. V.3. №3, P. 238–244.
3. Berak J., Znamierowska T. System Na2O-CaO-P2O5, Rocz. Chem. 46. 11. 1921–1929. 1972
4. Баринов С.М., Комлев В.С., Подходы к созданию пористых материалов на основе фосфатов кальция, предназначенных для регенерации костной ткани, т. 52, №4, 2016, 383–391.
5. Crump S.S. Apparatus and Method for Creating Three-Dimensional Objects // Book Apparatus and

Method for Creating Three-Dimensional Objects / EditorGoogle Patents, 1992.
6. Филиппов Я. Ю., Керамические 3-D структуры на основе системы $Ca_2P_2O_7$-$Ca(PO_3)_2$, полученные методом коллоидного формования// Сборник трудов конференции-конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ, 2019.
7. Lord Kelvin (Sir William Thomson) LXIII. On the division of space with minimum partitional area // Philosophical Magazine Series 5, 1887 Vol. 24, № 151, 503-514.
8. Я.Ю. Филиппов, А.А. Власихина, Е.С. Климашина, П.В. Евдокимов, В.И. Путляев. Создание трехмерных керамических структур заданной архитектуры на основе системы $Ca_2P_2O_7$-$CaNa_2P_2O_7$. Стекло и керамика, (11):35–39, 2018.
9. J.R. Van Wazer, Phosphorus and Its Compounds, Chemistry 1 (1958).
10. Malin Hannah Sandstro¨m, Dan Bostro¨m, Erik Rose´n, Determination of standard Gibbs free energy of formation for $Ca_2P_2O_7$ and $Ca(PO_3)_2$ from solid-state EMF measurements using yttria stabilised zirconia as solid electrolyte, J. Chem. Thermodynamics 38 (2006) 1371–1376.
11. Eiji YAMASUE, Kenji SHIMIZU, Kazuhiro NAGATA, Direct Determination of Standard Gibbs Energies of the Formation of $4CaO·P_2O_5$ and $3CaO·P_2O_5$ by Transpiration Method, ISIJ International, Vol. 53 (2013), No. 10, pp. 1828–1835.
12. Термические константы веществ. Под ред. В. П. Глушко. Вып. I—3. М., “Наука”, 1965—1968.
13. Г.Б. Наумов, Б.Н. Рыженко, И.Л. Ходаковский, Справочник термодинамических величин, Под редакцией чл.-корр. АН СССР А. И. Тугаринова, МОСКВА, АТОМИЗДАТ, 1971.

# ДИНАМИКА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРА С АЭРОДИНАМИЧЕСКИМ МАЯТНИКОМ

*Ю.А. Баумгертнер*

**Аннотация.** Рассматривается механическая система, состоящая из квадрокоптера и подвешенного к нему с помощью цилиндрического шарнира аэродинамического маятника. Построена математическая модель объекта с учётом потока, создаваемого винтами квадрокоптера. Проведена серия экспериментов, направленных на исследование зависимости скорости потока, создаваемого пропеллером квадрокоптера от угловой скорости пропеллера. Подробно изучен случай равномерного горизонтального полёта, рассмотрен вопрос управляемости системы в окрестности такого режима, также проведены численное моделирование и оценка влияния скорости потока на систему.

**Введение.** На сегодняшний день квадрокоптеры активно используются в различных областях [1,2]. Одна из таких областей – перемещение грузов на определённые расстояния. При этом важной задачей является разработка эффективного алгоритма, обеспечивающего необходимое движение с учетом воздействия среды на груз. Целью данной работы является исследование указанной выше системы с учётом потока от пропеллеров, а также изучение вопроса стабилизации движения.

**Постановка задачи.** Рассмотрим механическую систему, состоящую из квадрокоптера и подвешенного к нему с помощью цилиндрического шарнира аэродинамического маятника (Рис. 1). Для определения положения системы введём абсолютную инерциальную систему координат $Oxy$ с началом в произвольной точке $O$ и подвижную систему координат $Q\xi\eta$, жёстко связанную с квадрокоптером, с началом в центре масс $Q$. Колебания маятника происходят в

плоскости $Q\xi\eta$.

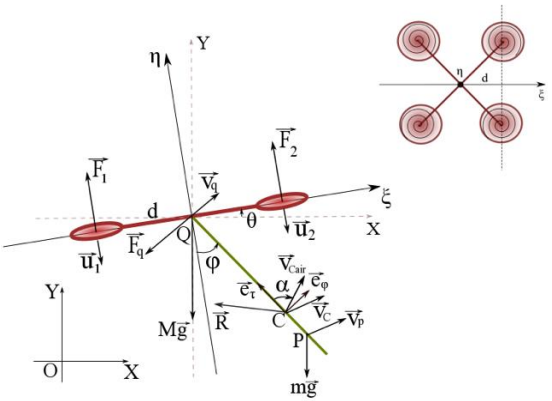



*Рис. 1 Схема механической системы*

Положение квадрокоптера определяется координатами $x, y$ центра масс в абсолютной системе координат и углом $\theta$, задающим отклонение рамы квадрокоптера от горизонтали.
В качестве обобщённой координаты, описывающей положение маятника, будем использовать угол φ отклонения маятника от оси $Q\eta$.

На квадрокоптер действуют силы тяги двигателей $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, определяемые соотношениями $F_i = k_F \omega_i^2, i = 1{,}2$, сила сопротивления воздуха $\vec{F}_q = -C_d \rho S |\vec{v}_q| \vec{v}_q$ и сила тяжести $M\vec{g}$, где $M$ - масса, $\vec{v}_q$ - скорость центра масс, $S$ - характерная площадь, $C_d$ - безразмерный коэффициент сопротивления квадрокоптера, $\rho$ - плотность воздуха, $\omega_i$ - угловая скорость вращения винтов квадрокоптера, $k_F$ –коэффициент пропорциональности. Считаем, что силы тяги двигателей во всё время движения сонаправлены с осью $Q\eta$ подвижной системы координат, а винты - парные, что обеспечивает отсутствие вращающих моментов.

На маятник действуют аэродинамическая сила $\vec{R}$ и сила тяжести $m\vec{g}$, где $m$ - масса маятника.

**Аэродинамическое воздействие на маятник.** В качестве аэродинамического маятника используется тонкая

прямоугольная пластинка, закреплённая на державке. Для описания аэродинамического воздействия на неё используем квазистатический подход [3]. Представим результирующую аэродинамическую силу $\vec{R}$ в виде суммы нормальной $\vec{F}_n$ и тангенциальной $\vec{F}_\tau$ сил, где $\vec{F}_n$ ортогональна пластинке, а $\vec{F}_\tau$ направлена вдоль пластинки (см. Рис. 2).

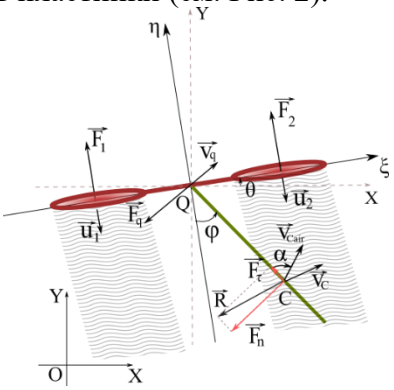



*Рис. 2*

Величины описанных сил определяются соотношениями: $F_n = {}^{\rho\sigma}/_2\, C_n(\alpha) V_{Cair}^2$, $F_\tau = {}^{\rho\sigma}/_2\, C_\tau(\alpha) V_{Cair}^2$, где σ - характерная площадь пластинки, $C_n(\alpha)$, $C_\tau(\alpha)$ - безразмерные коэффициенты нормальной и тангенциальной сил. Считаем, что движение системы происходит при отсутствии ветра. "Воздушная" скорость $V_{Cair}$ - скорость центра давления относительно набегающего потока полностью определяет аэродинамическое воздействие на пластинку и представима в виде:

$$\vec{V}_{Cair} = -\vec{u}_{1,2} + \vec{V}_c \qquad (1)$$

где $\vec{u}_{1,2}$ - скорость потока, создаваемого винтами квадрокоптера, $\vec{V}_c$ - скорость движения центра давления пластинки. Для корректного определения «воздушной» скорости будем рассматривать «зоны влияния» винтов и исходя из этого учитывать либо $\vec{u}_1$, либо $\vec{u}_2$. Под «зонами влияния» будем понимать области, в которых действует поток

от первой или второй пары пропеллеров. Исходя из того, что $C_n(\alpha) \gg C_\tau(\alpha)$, тангенциальной составляющей силы $\vec{R}$ пренебрегаем. Известно, что $C_n(\alpha)$ - $2\pi$ - периодическая функция. В данной задаче ограничимся только первой гармоникой ряда Фурье, т.е. $C_n(\alpha) = C_{n0}\sin(\alpha)$. Для определения угла атаки $\alpha$ используем полученные из (1) кинематические соотношения:

$$V_{Cair}\cos(\alpha) = u_{1,2}\cos(\varphi) + (\vec{V}_c, \vec{e}_\tau),$$
$$V_{Cair}\sin(\alpha) = u_{1,2}\sin(\varphi) + (\vec{V}_c, \vec{e}_\varphi), \qquad (2)$$

где $\vec{e}_\varphi = \cos(\varphi)\,\vec{e}_\xi + \sin(\varphi)\vec{e}_\eta$ - вектор нормали к пластинке, $\vec{e}_\tau = -\sin(\varphi)\vec{e}_\xi + \cos(\varphi)\,\vec{e}_\eta$- вектор, направленный вдоль пластинки.

**Эксперимент.** Для определения зависимости скорости потока, создаваемого винтами квадрокоптера от угловой скорости их вращения в НИИ механики МГУ была проведена серия экспериментов. Во всё время эксперимента рама квадрокоптера была жёстко фиксирована. Точками на графике (см. Рис. 3) показаны экспериментальные данные. Видно, что зависимость имеет линейный характер $u = k_u\omega$. С помощью метода наименьших квадратов был определён коэффициент зависимости $k_u = 0.01$. В результате была получена следующая зависимость: $u = 0.01\omega$.

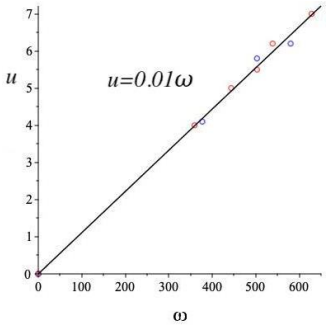



*Рис.3 График зависимости*

**Уравнения движения.** Для записи уравнений движения системы используем уравнения Лагранжа II-го рода

в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

Для упрощения их записи проводим процедуру обезразмеривания в базисе $\{d, \sqrt{d/g}, \rho\sigma d/2\}$. В итоге получаем систему безразмерных уравнений:

$$((\theta'' + \varphi'')\cos(\theta+\varphi) - (\theta' + \varphi')^2 \sin(\theta+\varphi))\widetilde{m}\tilde{l}_p + \left(\widetilde{M} + \widetilde{m}\right)\tilde{v}_x' = -\tilde{k}_F(\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2)\sin\theta - 2C_d\tilde{S}\sqrt{\tilde{v}_x^2 + \tilde{v}_y^2}\tilde{v}_x - \tilde{V}_{Cair}^2 C_{n0}\sin\alpha\cos(\theta+\varphi),$$

$$\left((\theta'' + \varphi'')\sin(\theta+\varphi) + (\theta' + \varphi')^2\cos(\theta+\varphi)\right)\widetilde{m}\tilde{l}_p + \left(\widetilde{M} + \widetilde{m}\right)(\tilde{v}_y' + 1) = \tilde{k}_F(\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2)\cos\theta - 2C_d\tilde{S}\sqrt{\tilde{v}_x^2 + \tilde{v}_y^2}\tilde{v}_y - \tilde{V}_{Cair}^2 C_{n0}\sin\alpha\sin(\theta+\varphi),$$

$$\left(\tilde{v}_x'\cos(\theta+\varphi) + (\tilde{v}_y' + 1)\sin(\theta+\varphi)\right)\widetilde{m}\tilde{l}_p + \left(\widetilde{m}\tilde{l}_p^2 + \tilde{J}_p + \tilde{J}_q\right)\theta'' + \left(\widetilde{m}\tilde{l}_p^2 + \tilde{J}_p\right)\varphi'' = -\tilde{k}_F(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2)\cos\theta - \tilde{V}_{Cair}^2\tilde{l}_c C_{n0}\sin\alpha,$$

$$\left(\tilde{v}_x'\cos(\theta+\varphi) + (\tilde{v}_y' + 1)\sin(\theta+\varphi)\right)\widetilde{m}\tilde{l}_p + \left(\widetilde{m}\tilde{l}_p^2 + \tilde{J}_p\right)(\theta'' + \varphi'') = -\tilde{V}_{Cair}^2\tilde{l}_c C_{n0}\sin\alpha. \quad (3)$$

Дополним уравнения обезразмеренными кинематическими соотношениями (2), чтобы система стала замкнутой.

**Равномерный горизонтальный полёт с постоянной скоростью.** Рассмотрим следующий программный режим: $\tilde{v}_x = v_0$, $\tilde{v}_y = 0$, $\theta' = 0$, $\varphi' = 0$. Задав $v_0$, можно определить неизвестные параметры: $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ и координаты: $\theta_0$, $\varphi_0$. При подстановке параметров программного движения было получено, что $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_0$. Следовательно, $\tilde{u} = \tilde{k}_u\tilde{\omega}_1$. Исходная система (3) преобразуется в систему существенно нелинейных уравнений. В связи с этим проведём процедуру разложения про малому параметру $\varepsilon \ll 1$. Считаем, что характерные плотности квадрокоптера и пластинки много больше плотности воздуха: $\widetilde{M} = \widehat{M}/\varepsilon^2$, $\widetilde{m} = \widehat{m}/\varepsilon^2$. Будем искать решение в виде: $\tilde{\omega}_0 = \frac{\Omega_0}{\varepsilon^2} + \frac{\Omega_1}{\varepsilon} + \Omega_2 + O(\varepsilon^2)$, $\varphi_0 =$

$\varepsilon\varphi_1 + O(\varepsilon^2)$, $\theta_0 = \varepsilon\theta_1 + O(\varepsilon^2)$. Также определим необходимые параметры: $\tilde{k}_u = \hat{k}_u\varepsilon$, $\tilde{k}_F = \hat{k}_F\varepsilon^2$, $C_d = \hat{C}_d\varepsilon^2$.

На следующих графиках представлены решения, полученные в результате разложения по малому параметру (красная линия) и решения, полученные численно (синие точки). (см. Рис. 4 – 6) Видно, что аппроксимационные формулы имеют достаточно хорошее приближение при $v_0 \in [0,3]$.

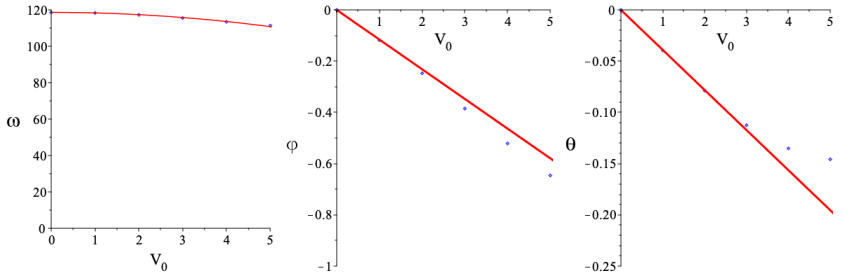



*Рис. 4 -6 Зависимости $\tilde{\omega}_0$, $\varphi_0$, $\theta_0$ от $v_0$ соответственно.*

**Управляемость.** Введём $\vec{z} = (\tilde{v}_x, \tilde{v}_y, \theta, \varphi)$ – вектор переменных системы и $\vec{w} = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ – вектор управления. В качестве программного движения возьмём рассмотренный выше равномерный горизонтальный полёт: $\vec{z}^d = (v_0, 0, \theta_0, \varphi_0)$, $\vec{w}^d = (\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_0)$. Матрица управляемости данной линеаризованной системы полного ранга, что говорит о полной управляемости системы. Управляющими воздействиями в данной задаче являются силы тяги двигателей $\vec{F}_i = k_F\omega_i^2\vec{e}_\eta, i = 1,2$. Поэтому зададим управление в виде обратной связи следующим образом:

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_0 + B_1\Delta\varphi + B_2\Delta\theta + B_3\Delta\theta' + B_4\Delta\tilde{v}_x + B_5\Delta\tilde{v}_y$$
$$\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_0 + D_1\Delta\varphi + D_2\Delta\theta + D_3\Delta\theta' + D_4\Delta\tilde{v}_x + D_5\Delta\tilde{v}_y$$

Положим, $\tilde{u} = \tilde{k}_u/2\,((1 - sign(\varphi_0))\tilde{\omega}_1 + (1 + sign(\varphi_0))\tilde{\omega}_2)$.

**Численное моделирование.** Зададим параметры системы (3): $\tilde{S} = 1$, $C_d = 0.004$, $C_{n0} = 2$, $\tilde{k}_u = 0.03$, $\tilde{k}_F = 0.0038$, $\tilde{l}_c = 1$, $\tilde{l}_p = 1$, $\tilde{M} = 80$, $\tilde{m} = 2$, $\tilde{J}_q = 40$, $\tilde{J}_p = 4.5$. Пусть $v_0 = 1$, тогда в случае равномерного горизонтального полёта

получаем: $\varphi_0 = -0.28$, $\theta_0 = -0.007$, $\tilde{\omega}_0 = 103.7$. Так как $sign(\varphi_0) < 0$, то пластинка находится под влиянием первой пары винтов, т.е. $\tilde{u} = \tilde{k}_u \tilde{\omega}_1$. Для коэффициентов обратной связи были подобраны следующие значения: $B_1 = 0$, $B_2 = -10$, $B_3 = 2700$, $B_4 = -16$, $B_5 = -1$, $D_1 = 0$, $D_2 = 100$, $D_3 = -700$, $D_4 = 500$, $D_5 = -130$. Численное решение системы (3) с начальными условиями: $\tilde{v}_x(0) = 1.7$, $\tilde{v}_y(0) = 0.3$, $\theta(0) = -0.2$, $\theta'(0) = 0$, $\varphi(0) = 0.5$, $\varphi' = 0$, представлено на графиках Рис.7-10.

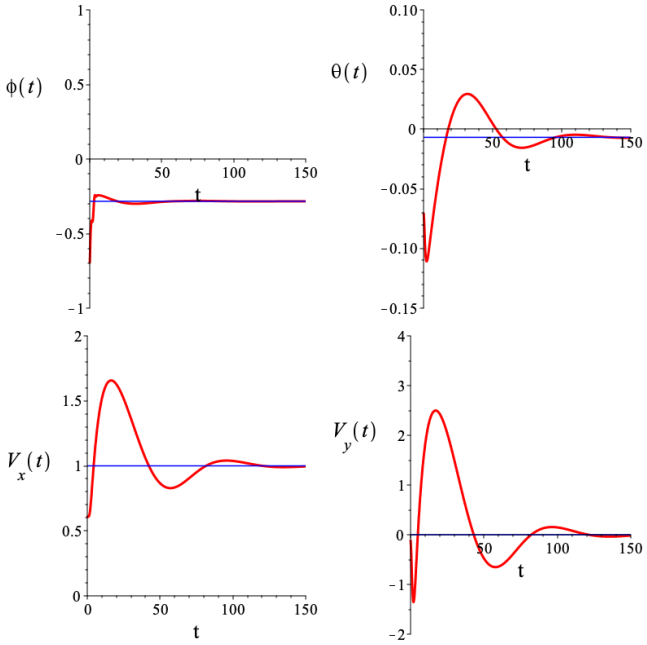



*Рис. 8 – 11 Графики численного решения (синие – программное движение, красное – возмущённое движение)*

**Оценка влияния скорости потока.** На Рис. 12 видно, что наличие потока от винтов заметно влияет на поведение маятника. Интересно отметить, что колебания маятника при учёте потока затухают значительно быстрее, чем без его учёта.

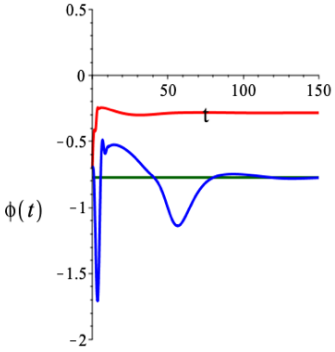



*Рис. 12* (зелёный – программное движение без учёта потока, синий и красный – возмущённое движение без учёта потока и с учётом соответственно)

**Заключение.** Проведена серия экспериментов, в результате которых была определена связь между угловой скоростью пропеллера квадрокоптера и скоростью потока, создаваемого этим пропеллером. Построена математическая модель с учётом потока, создаваемого винтами. Проведено исследование программного движения (равномерный горизонтальный полёт). Рассмотрен вопрос управляемости. Сформирован закон управления, обеспечивающий стабилизацию программного движения. Проведено численное моделирование поведения системы, а также оценено влияние потока, создаваемого винтами, на нее.

*Список использованных источников*

1. J. Wu, H. Peng, Q. Chen , X. Peng. «Modeling and control approach to a distinctive quadrotor helicopter» // ISA Transactions 53 (2014) 173 – 185.

2. A. Chovancova, T. Ficoa, L. Chovaneca, P. Hubinskya. «Mathematical Modelling and Parameter Identification of Quadrotor» // Procedia Engineering 96 (2014) 172 – 181.

3. Локшин Б.Я., Самсонов В.А. Задача о движении тела в сопротивляющейся среде. Качествен- ный анализ. / Локшин Б.Я., Самсонов В.А. – М.: Издательство Московского университета, 2012. – 237 с.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ РАЗВИТИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В КРУГЛОЙ СТРУЕ

*Л.Р. Гареев*

**Аннотация.** В данной работе было впервые экспериментально исследовано влияние вносимых осесимметричных возмущений на устойчивость круглой ламинарной струи. Возмущения в струе создавались при помощи тонкого кольца цилиндрического сечения, которое приводилось в движение двумя параллельными тонкими струнами, натянутыми на устройство, выполняющее синхронные колебания с задаваемой частотой и амплитудой.

Была проведена серия экспериментов с визуализацией струи лазерным ножом и последующая обработка полученных результатов. Кроме того, что одинаковые результаты были получены неоднократно, также имеет место качественное и во многом количественное подтверждение теоретических расчетов. Получены и проанализированы длины и частоты волн, видимых на боковых краях течения.

Также была проведена серия термоанемометрических измерений. Полученные характеристики развития возмущений соответствуют линейной теории устойчивости. Помимо профиля скорости и пульсаций скорости, была найдена зависимость относительных пульсаций скорости от расстояния до диффузора.

**Введение.** Исследование устойчивости осесимметричного ламинарного течения воздуха ранее не представлялось возможным из-за физических ограничений получаемых струй. Размеры «традиционных» установок для создания ламинарных струй воздуха на порядки превосходили характерные размеры затопленной струи (диаметр, длина ламинарного участка). Также сложность в создании подобных течений характеризуется низким критическим значением числа Рейнольдса $Re \leq 100$.

На базе лаборатории экспериментальной гидродинамики НИИ Механики МГУ было сконструировано устройство [1], способное формировать круглую ламинарную струю, имеющую диаметр поперечного сечения D = 120 мм и ламинарный участок до 10*D при скорости течения воздуха $1 - 3$ м/с. Схема установки представлена на рисунке.

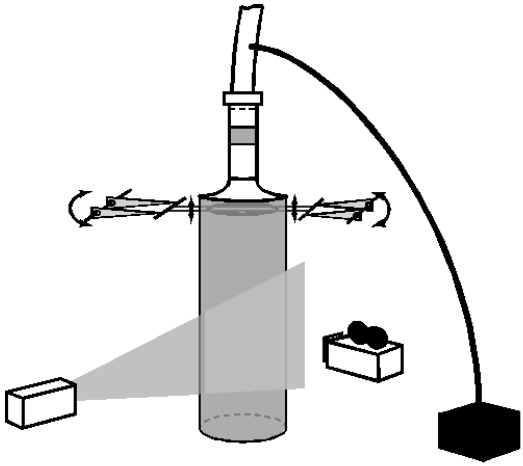


*Рис. 1. Схема экспериментальной установки для визуализации течения*

**Описание формирующего устройства.** Подача воздуха осуществляется из компрессорной системы, установленной на цокольном этаже НИИ Механики. Регулирование давления газа, подаваемого в рабочую часть установки, происходит с помощью системы редукторов, встроенной в газопровод, расположенной рядом с установкой. Регулируя уровень подаваемого давления, соответственно, устанавливается скорость исследуемой струи.

Воздушный поток, подаваемый из компрессорной системы, попадает через металлическую трубу в формирующее ламинарную струю устройство, состоящее из

двух секций: цилиндрического канала диаметром 0.04 м и насадка-диффузора.

В канал встроены две конструкции:

1) Решетка-фильтр – расположена на входе в канал. Сглаживает (выравнивает) поток, а также снижает пространственный масштаб турбулентных пульсаций. Диаметр отверстий – 0.6мм, отношение площади отверстий к площади решетки равняется 0.8. На решетку-фильтр также натянута плотная ткань;

2) Втулка с сетками – расположена на расстоянии 0.03 м от решетки, имеет длину 0.05 м. Уменьшает уровень турбулентности потока

Измерения показали, что величина турбулентных пульсаций после прохождения первой секции не превышает 0.6%. После первой секции струя попадает в диффузор, далее в атмосферу.

Диффузор расположен на расстоянии 0.06 м от втулки и имеет следующие геометрические параметры: длина 0.04, расширение диаметра канала от начальных 0.04 м до 0.12 м. Из литературы известно, что при расширении конической части канала более, чем на 12-14%, происходит образование отрывного потока, что существенно влияет на величину турбулентных пульсаций. Поэтому на выходе из диффузора установлена система из двух сеток – латунной с диаметром нитей ~0.05 мм и с коэффициентом свободной площади 34.4% и из нержавеющей стали с диаметром нитей ~0.03 мм и с коэффициентом свободной площади 32.7%. Сетки играют сдерживающую роль, способствуя расширению потока без образования значительных отрывных зон.

**Метод внесения возмущений.** Возмущения в струю вносятся при помощи колеблющегося кольца. Кольцо приводится в движение двумя натянутыми параллельными

струнами, к которым оно приклеено. Струны прикреплены к двум трубкам, которые синхронно приводятся в движение перемещающим устройством. Частота и амплитуда хода трубок контролируется выставлением соответствующих параметров в специальной программе на ПК.

На Рис.1 изображено, как струя воздуха набегает на колеблющееся кольцо, которое располагается в 5 мм от диффузора. Диаметр кольца подобран таким образом, чтобы кольцо располагалось в том месте струи, где в профиле скорости находится точка перегиба, порождающая первую ветвь растущих возмущений.

**Методы измерений.** Первая часть экспериментов была посвящена построению профиля скорости и величины пульсаций скорости. Измерительная система представляет из себя термоанемометр с перемещаемым чувствительным элементом, аналого-цифровой преобразователь (АЦП) и персональный компьютер. Часть всей системы, попадающая в поток, оказывает пренебрежимо влияние на измерения, так как датчик находится в самой верхней точке устройства.

Вторая часть экспериментов заключалась в визуализации струи лазерным ножом для, во-первых, подтверждения ламинарности струи, во-вторых, для нахождения длин и частот волн, образуемых на краях струи при внесении возмущений.

В струю под давлением подавались мелкие капли глицерина, включался лазер и удаленно включалась запись на видеокамеру. Для перенаправления пучка света вверх до диффузора так, чтобы получилось визуализировать диаметральный разрез струи, было использовано зеркало.

**Результаты визуализации струи лазером.** Влияние колебаний было рассмотрено на частотах, начиная с $\nu = 3$ Гц

и заканчивая $\nu = 12$ Гц с шагом 0.25 Гц. Результаты приведены на Рис. 2.

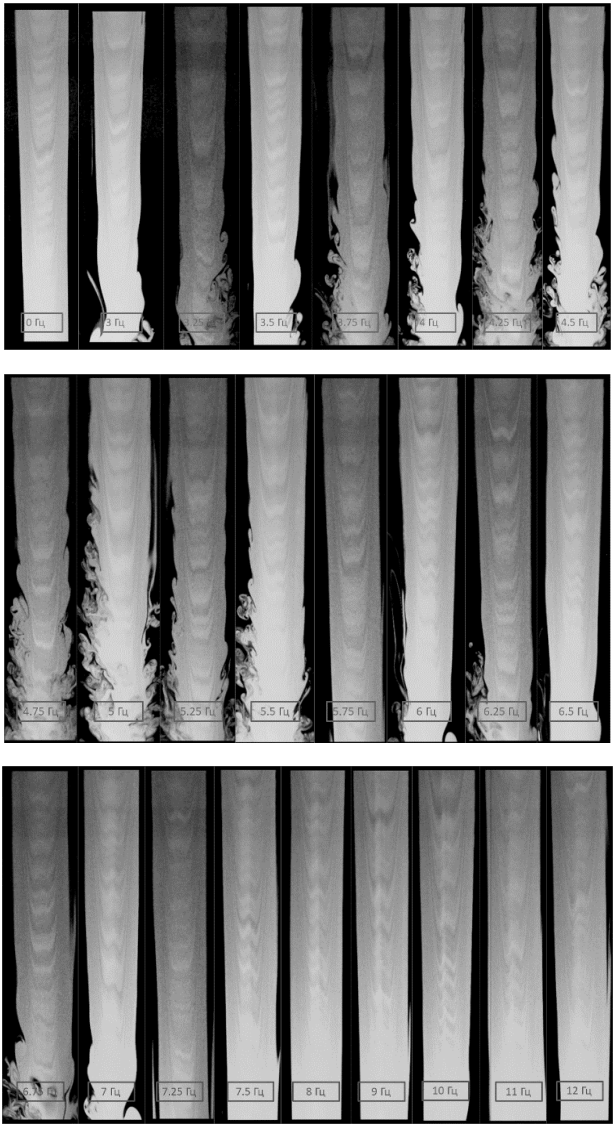



*Рис. 2. Снимки струи при внесении контролируемых возмущений*

Из Рис. 2 видно, что наибольшее влияние на разрушение струи оказывает кольцо с частотой колебания $\nu = 3.75 - 5.5$ Гц. На высоких же частотах колебаний кольца разрушение ламинарной структуры струи не наблюдается.

Данные экспериментальные результаты подтверждают теоретические. Согласно [2], осесимметричные колебания на частоте ~ 5 Гц приводят к наибольшему росту возмущений в струе.

Теоретическая зависимость длины волны от частоты подаваемых возмущений и экспериментальные данные представлены на Рис.3. Экспериментальные точки достаточно хорошо ложатся на теоретические кривые (указаны зависимости на двух расстояниях от диффузора – 0.5D и 1D):

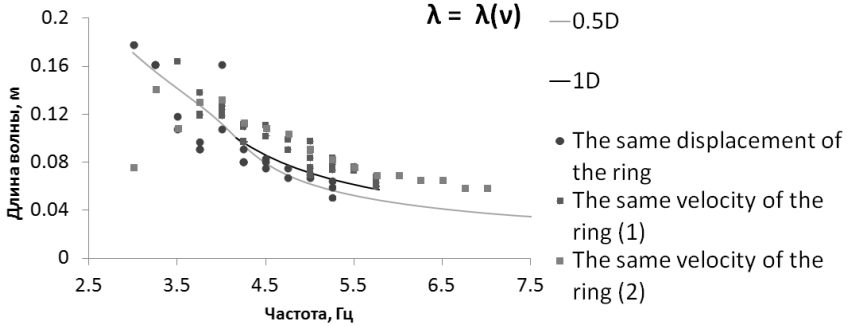



*Рис. 3. Зависимость длины образованной волны от частоты возмущений.*

**Результаты термоанемометрических измерений.** Опытным путем было решено исследовать небольшой участок профиля шириной 10-15мм, который находится под частью кольца, чтобы исключить влияние высокого уровня пульсаций на краю струи, а также убрать ненужные измерения ближе к центру, где интенсивность возмущений максимальна. Результаты трех серий экспериментов, при частоте колебаний кольца 5, 5.5, 6 Гц, представлены на Рис.4:

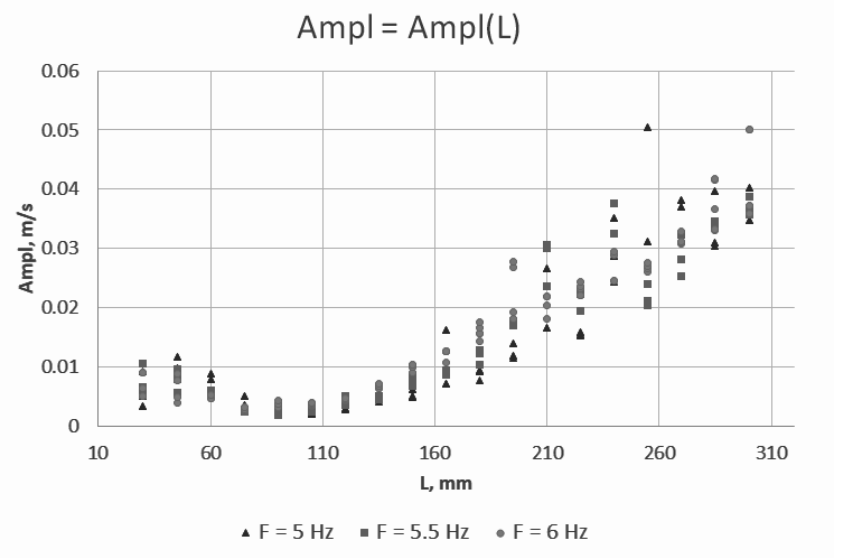



*Рис. 4.Экспериментальные значения амплитуды относительных пульсаций скорости потока в зависимости от расстояния до диффузора*

Согласно линейной теории устойчивости [1], [2], зависимость роста пульсаций скорости от расстояния до диффузора должна быть логарифмической. В левой части графика видно, что амплитуда пульсаций, вызванных колебаниями отрывной зоны за сечением кольца, затухают, а на расстояниях от 110 мм начинается развитие линейных возмущений, и как следствие, рост амплитуды пульсаций скорости.

**Заключение.** Впервые было исследовано развитие осесимметричных возмущений в круглой ламинарной затопленной струе воздуха при внесении контролируемых возмущений. Кроме того, что одинаковые результаты были получены неоднократно, также имеет место качественное и во многом количественное подтверждение теоретических расчетов. Получены и проанализированы длины и частоты волн, видимых на боковых краях течения. Найдены профили

скорости и пульсаций скорости, а также зависимость амплитуды относительных пульсаций скорости от расстояния до диффузора.

Согласно теории [2], существует также внутренняя точка перегиба в продольном профиле скорости потока, влияние вносимых возмущений в которой максимально. В связи с этим, в дальнейшем планируется исследование развития возмущений, создаваемых кольцом меньшего диаметра, а также экспериментальное подтверждение вида зависимости амплитуды пульсаций скорости от расстояния.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-38-00745.

*Список использованных источников*

1. J. Zayko, S. Teplovodskii, A. Chicherina, V. Vedeneev, and A. Reshmin. *Formation of free round jets with long laminar regions at large Reynolds numbers* // Phys. Fluids 30, 043603 (2018).
2. J. Zayko, S. Teplovodskii, A. Chicherina, V. Trifonov, V. Vedeneev, and A. Reshmin. *Experimental and theoretical analysis of perturbation growth in a laminar jet* // Proceedings of 9th International Symposium on Fluid-Structure Interactions, Flow-Sound Interactions, Flow-Induced Vibration Noise. July 8-11, 2018, Toronto, Ontario, Canada.
3. В.В. Козлов и М.П. Рамазанов. *Экспериментальное исследование устойчивости Течения Пуазейля* // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1981. № 8. Вып. 2. С. 45-48.

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ДВУХЗВЕННОМ АЭРОДИНАМИЧЕСКОМ МАЯТНИКЕ

*А.П. Голуб*

**Аннотация.** Работа является продолжением цикла статей по динамике двухзвенного аэродинамического маятника в упругом закреплении [1-3]. В данной статье проводится качественное и количественное сопоставление численного моделирования и эксперимента для двухзвенного аэродинамического маятника. Даётся оценка применимости квазистатической модели при описании аэродинамического воздействия для данной системы. Более подробно описано, как проводились эксперименты с аэродинамическим двухзвенным маятником в аэродинамической трубе А-6 НИИ механики МГУ.

**Постановка задачи.** Рассматривается двухзвенный маятник с вертикальной осью вращения в потоке среды, на втором звене которого закреплена симметричная лопасть. Аэродинамическое воздействие на лопасть, описывается с помощью квазистатической модели. Подробное описание системы и аналитическое исследование представлено в работе [4]. За обобщённые координаты, выбраны углы отклонения первого ($\varphi$) и второго ($\theta$) звеньев от направления набегающнго потока. Исследуется влияние параметра R (расстояние между межзвенным шарниром и центром хорды лопасти) на движение такого объекта.

**Положения равновесия и предельные циклы.** Для крыла с симметричным профилем существует тривиальное положение равновесия: $\varphi \equiv 0, \theta \equiv 0$. Это ситуация, когда оба звена направлены «по потоку». Заметим, что система может иметь и другие точки, которые соответствуют «косым» положениям равновесия. Число таких положений возрастает с увеличением скорости ветра. Однако здесь мы ограничимся анализом положения равновесия «по потоку».

В результате численного исследования, наблюдались следующие тенденции; существует два семейства притягивающих циклов. Обозначим их как циклы I-го и II-го типа. Цикл I-го типа рождается в месте, где происходит потеря устойчивости положения равновесия. Для него характерна небольшая частота автоколебаний, достаточно большая амплитуда автоколебаний первого звена и маленькая для второго. Для II-го типа циклов характерны большая частота и большие амплитуды автоколебаний по обоим звеньям, а также большая область существования [5]; происходит уменьшение амплитуд и увеличение частот автоколебаний при увеличении расстояния от межзвенного шарнира до центра хорды лопасти.

**Экспериментальное исследование.** В аэродинамической трубе А-6 НИИ механики МГУ проведена серия экспериментов с таким объектом. Была разработана и изготовлена модель двухзвенного аэродинамического маятника. Можно было задавать фиксированное положение крыла на втором звене, а также устанавливать пружины разной жёсткости.

Реализована система регистрации движения маятника. Диоды 1 и 4 крепились на горизонтальный чёрный экран, который располагался под маятником, и были неподвижны. Через диод 1 проходила ось вращения первого звена маятника, а диод 4 крепился в отдалении так, чтобы прямая, проходящая через диоды 1 и 4 совпадала с направлением набегающего потока. Лазер 2 устанавливался на оси вращения второго звена (которая проходила через первое звено). Лазер 3 крепился на втором звене. Эксперимент снимался на высокоскоростную камеру.

*Рис.1(а, б, в). Кадры высокоскоростной съёмки.*
*1 и 4 – неподвижные диоды; 2 и 3 – лучи лазеров,*
*показывающие положение первого и второго звеньев.*

На рис.1 представлен пример снимаемых данных из эксперимента. Таким образом, мы получаем неподвижную ось, проходящую через точки 1 и 4 (прямая 1-4) и две «бегающие» точки 2 и 3. Угол между прямой 1-4 и прямой проходящей через точки 1 и 2 – это $\varphi$; угол между прямой 1-4 и прямой проходящей через точки 2 и 3 – это $\theta$. На рис.1(а) показан момент, когда оба звена маятника направлены «по потоку». На рис.1(б, в) произвольные кадры во время движении маятника.

С помощью специальной программы были получены координаты всех точек на каждом кадре. Следовательно, известны значения углов $\varphi$ и $\theta$ в промежутках времени $\approx 0.003$ секунды. Такой точности вполне достаточно для данной задачи.

В эксперименте использовался профиль с такими же характеристиками (NACA0015), как и в численном моделировании. Учитывалось также сопротивление элементов конструкции и трение в подшипниках.

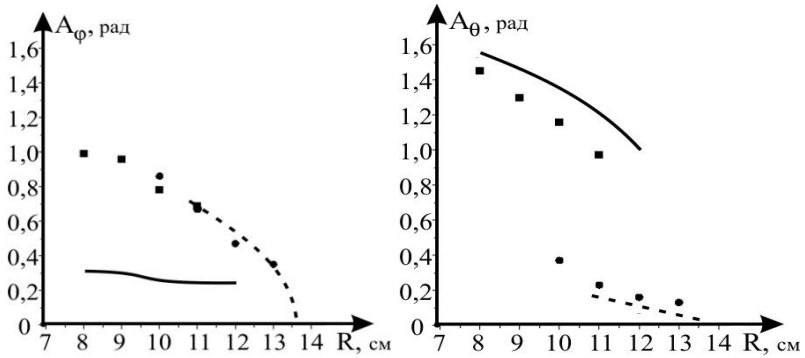



*Рис.2. Амплитуды автоколебаний, в зависимости от R. Линии – результат численного моделирования. Точки – результат эксперимента.*

На рис.2 представлена зависимость амплитуд $A_\varphi, A_\theta$ (первого и второго звеньев соответственно) от расстояния между межзвенным шарниром и центром хорды лопасти R при фиксированной скорости набегающего потока. Пунктирная линия расчёт, точки – эксперимент для циклов I-го типа. Сплошная линия и квадраты – результаты расчёта и эксперимента для II-го типа циклов. Наблюдается достаточно хорошее качественное соответствие эксперимента и моделирования: одновременное существование двух притягивающих циклов; увеличение расстояния R приводит к уменьшению амплитуд автоколебаний.

Как видно из рис.2, наблюдается не только качественное, но и количественное соответствие для циклов I-го типа. Это тот цикл, который рождался при потере устойчивости положения равновесия. Для циклов II-го типа не получилось столь хорошего количественного соответствия.

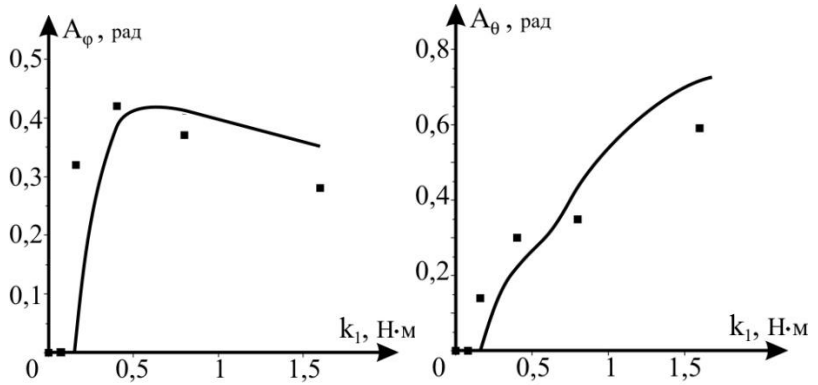



*Рис.3. Амплитуды колебаний маятника в зависимости от жёсткости пружины на первом звене.*
*Сплошная линия – результат численного моделирования.*
*Точки – результаты эксперимента.*

На Рис.3 показана зависимость амплитуд и частоты автоколебаний от жёсткости пружины на первом звене. Приведены результаты численного моделирования и эксперимента. Были выбраны такие R и V (R=16,5 см, V=13 м/с), что при отсутствии пружин положение вдоль потока устойчиво. Увеличение жёсткости пружины на первом звене приводит к потере устойчивости, росту амплитуды и частоты автоколебаний. При достаточно больших $k_1$ амплитуда колебаний первого звена начинает уменьшаться. Это происходит и в моделировании и в эксперименте.

В эксперименте и при численном моделировании был найден лишь один тип циклов. Как видно из Рис 3, он рождается из положения равновесия «по потоку», то есть это цикл I-го типа. Видно, что и при наличии пружин данные эксперимента не только качественно, но и количественно согласуются с результатами численного моделирования для такого типа циклов. Циклы II-го типа не были обнаружены ни в эксперименте, ни в численном моделировании, при наличии пружины на первом звене.

**Заключение.** Описана методика проведения эксперимента (в частности, регистрация движения). Показано, что квазистатическая модель достаточно хорошо подходит для описания циклов I типа, для которых экспериментальные и численные расчёты хорошо согласуются. Для описания циклов II типа квазистатическую модель необходимо дополнить.

*Список использованных источников*

1. Голуб А.П. Параметрический анализ двухзвенного аэродинамического маятника в упругом закреплении // Труды конференции-конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ 10-12 октября, 2016, с. 88-93.

2. Голуб А.П. Динамика двухзвенного аэродинамического маятника в упругом закреплении // Труды конференции-конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ 11-13 октября, 2017, с. 103-107

3. Голуб А.П. Экспериментальное исследование упруго закреплённого двухзвенного маятника // Труды конференции-конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ 15-17 октября, 2018, с. 77-81

4. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д. Двухзвенный маятник в упругом подвесе // Мехатроника, автоматизация, управление, 2018, том 19, № 6, с.380-386.

5. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д. О влиянии жёсткости крепления на динамику двухзвенного аэродинамического маятника // Доклады Академии Наук, 2018, том 481, № 3, с. 254-257.

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПОТОКА НА СКЛОНЕ ОТНОСИТЕЛЬНО КОСЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

*Ю.С. Зайко*

**Аннотация.** В работе получен критерий устойчивости склонового потока относительно двумерных возмущений. Поток движется по склону под действием силы тяжести; течение описывается уравнениями в гидравлическом приближении. Критерий может быть применен к потокам с неньютоновской реологией движущейся среды, режим течения может быть ламинарным или турбулентным. Установлено, что при некоторых параметрах косые возмущения могут приводить к неустойчивости при меньших числах Фруда, чем продольные.

Уравнения в гидравлическом приближении широко используются для моделирования движения таких природных потоков, как лавины, сели и оползни. Неустойчивость движения потока должна быть принята во внимание при численном моделировании; важен выбор численной схемы — она должна верно описывать возникающие в потоке вследствие неустойчивости волновые структуры, например, катящиеся волны. Критерий устойчивости потока относительно двумерных возмущений полезен в случае, когда течение устойчиво относительно продольных возмущений, однако может быть неустойчиво относительно косых. В данной работе рассмотрен пример ламинарного потока среды Хершеля-Балкли со значениями коэффициентов, близкими к значениям, при которых эта среда хорошо описывает движение снежного потока в лотке [1]. Показано, что для такой реологической модели при выбранных коэффициентах косые возмущения приводят к неустойчивости при меньших числах Фруда, чем продольные.

**Введение.** Уравнения в гидравлическом приближении широко используются для моделирования движения природных потоков, а устойчивость потоков, описываемых этими уравнениями, рассматривалась многими авторами. В большинстве работ изучалась устойчивость склоновых потоков по отношению к продольным возмущениям, в частности, в работах [2,3]. Однако, в ряде исследований [4,5] показано, что для потоков неньютоновских сред при некоторых условиях косые возмущения могут быть более опасными, чем продольные.

В данной работе анализируется устойчивость склонового потока относительно возмущений, распространяющихся под произвольным углом к вектору скорости невозмущенного движения. Реология движущейся среды учитывается через функцию, задающую трение на дне потока.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается открытый однородный поток на склоне постоянного уклона. В безразмерной форме уравнения, осредненные по глубине, имеют вид

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \operatorname{div} \bar{h}\bar{\vec{q}} = 0,$$

$$\frac{d\bar{\vec{q}}}{d\bar{t}} = \frac{1}{\mathrm{Fr}^2} \operatorname{tg}\alpha \vec{e} - \frac{1}{\mathrm{Fr}^2} \operatorname{grad} \bar{h} - \bar{F}\bar{\vec{q}},$$

где $h$ — глубина потока, $\vec{q} = \{u, v\}$ — вектор скорости с компонентами $u, v$, $\alpha$ — угол уклона дна к горизонту, $F\vec{q} = \vec{\tau} / (\rho h)$, $F = F(h, q)$, $q = \sqrt{u^2 + v^2}$, $\rho$ — плотность движущейся среды, $\vec{\tau}$ — сила трения на дне, рассчитанная на единицу площади дна, $\vec{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль линии наибольшего спуска по дну, $\mathrm{Fr} = q_0 / \sqrt{g h_0 \cos\alpha}$ — число Фруда, нижний индекс «0» отмечает величины, относящиеся к невозмущенному потоку. Черта обозначает безразмерные переменные. В

качестве размерно-независимых величин выбраны глубина и модуль скорости невозмущенного движения. Заметим, что $\bar{h}_0 = 1, \bar{q}_0 = 1$. Всюду ниже черта будет опущена.

На базовый поток накладываются малые возмущения глубины и скорости. Система, описывающая возмущенное движение, линеаризуется около невозмущенного состояния, ее решение ищется в виде бегущих волн $h' = He^{i(kx-\omega t)}, u' = Ue^{i(kx-\omega t)}, v' = Ve^{i(kx-\omega t)}$ , причем оси координат выбраны так, что ось *x* совпадает с направлением волнового вектора, а невозмущенная скорость составляет с ней угол $\theta$. Условие существования ненулевого решения системы линейных алгебраических уравнений на $H, U, V$ приводит к дисперсионному уравнению. Оно может быть записано через фазовую скорость $C = \omega / k$ следующим образом:

$$D(C,k,\theta) = k^2(C - q_0\cos\theta)(C - a_+)(C - a_-) - F_0A(C - a_{0x}) + ikF_0(C - a_+)(C - a_-) +$$
$$+ ikA(C - q_0\cos\theta)(C - a_{0x}) - ikc_0^2\beta\sin^2\theta = 0.$$

Здесь $a_\pm = q_0 \pm c_0$, $c_0 = 1/\mathrm{Fr}$ — скорость распространения малых мелкомасштабных возмущений относительно частиц среды, $a_{0x} = q_0\cos\theta + N_{0x}$ , $N_0 = -(\partial F / \partial h_0) / A$ — скорость распространения малых крупномасштабных возмущений относительно частиц среды, $A = F_0 + \beta$ , $F_0 = F\big|_{h=1,q=1}$ , $\beta = \partial F / \partial q_0$ , $\partial F / \partial h_0 = (\partial F / \partial h)\big|_{h=1,q=1}$ , $\partial F / \partial q_0 = (\partial F / \partial q)\big|_{h=1,q=1}$.

**2. Критерий устойчивости в общем виде и пример ламинарного течения среды Хершеля-Балкли.** Критерий устойчивости получен аналитически, при этом корни дисперсионного уравнения не выписываются в явном виде, а для нахождения числа корней с положительной мнимой частью (определяющих растущие возмущения) применяется принцип аргумента (подробно-

сти см. в [6]). Для наиболее распространенного случая $A>0$, $\beta>0$ результат анализа устойчивости может быть представлен графически на плоскости параметров $\xi-\beta/A$, где $\xi=N_0/c_0=N_0\mathrm{Fr}$ (рис. 1). При $\beta/A\le 1/2$ критерий устойчивости совпадает с известным [7], полученным ранее для продольных возмущений: $\xi\le 1$. При $\beta/A>1/2$ в области 2 поток неустойчив относительно косых возмущений, тогда как продольные возмущения затухают; критерий устойчивости имеет вид $\xi\le 2\sqrt{\beta/A-(\beta/A)^2}<1$.

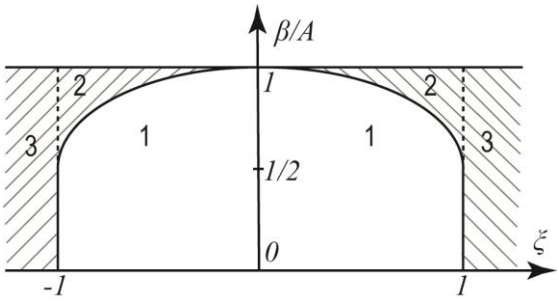



*Рис. 1. Область устойчивости (1) и области неустойчивости (2, 3) склонового потока в плоскости параметров* $\xi-\beta/A$.

Неравенство $\beta/A>1/2$ выполняется, например, для степенной среды Освальда-де Виля и среды Херше-ля-Балкли с показателем степени $n>2$.

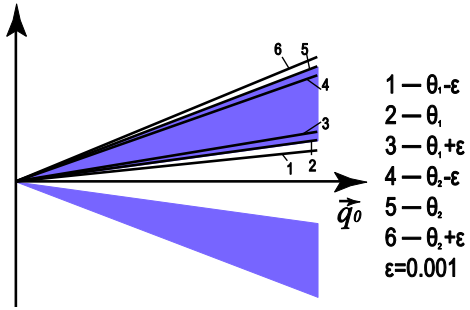


*Рис. 2. Цветом показаны диапазоны углов растущих возмущений для параметров, лежащих в области 2 на рис. 1. Углы, для которых построены зависимости мнимой части фазовой скорости* $\mathrm{Im}\,C$ *от волнового числа* $k$ *на рис. 3, показаны лучами 1 – 6. Углы* $\theta_1, \theta_2$ *лежат на границе диапазона углов растущих возмущений.*

Рассмотрим среду Хершеля-Балкли с показателем степени $n = 2.5$, плотностью $\rho = 500\,\text{кг/м}^3$, индексом консистенции $K = 44.5$ Па·с$^n$, пределом текучести $\tau_y = 1000\,\text{Па}$ на склоне постоянного уклона $\alpha = 17.457^\circ$.

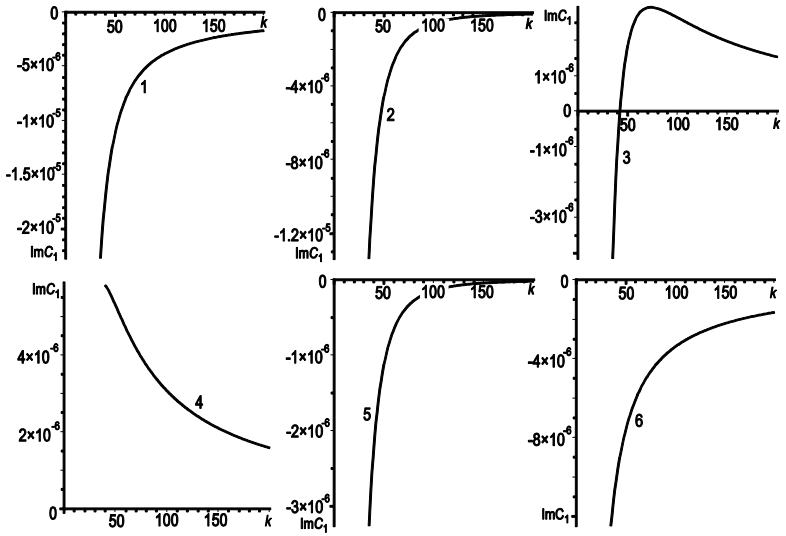



*Рис. 3. Зависимости мнимой части фазовой скорости* $\mathrm{Im}\,C$ *от волнового числа* $k$. *Углы* $\theta_1, \theta_2$ *лежат на границе диапазона углов растущих возмущений. Для удобства визуализации приведены значения* $\mathrm{Im}\,C$, *начиная с k=35. В расчете использовано значение* $\varepsilon = 0.001$.

При глубине $h_0 = 1.415\,\text{м}$ для этого потока $\xi = 0.99$, тогда как $\xi_* = 0.98$, а $\beta / A = 0.6$, следовательно, при рассмат-

риваемых параметрах косые возмущения в некотором диапазоне углов должны расти, а возмущения, распространяющиеся под меньшими и большими углами к невозмущенной скорости потока, должны затухать. Точные выражения для диапазона углов растущих возмущений приведены в [6] и схематично показаны лучами 1 – 6 на рис. 2. На границе выделенной цветом области возмущения не растут, а внутри нее — являются растущими.

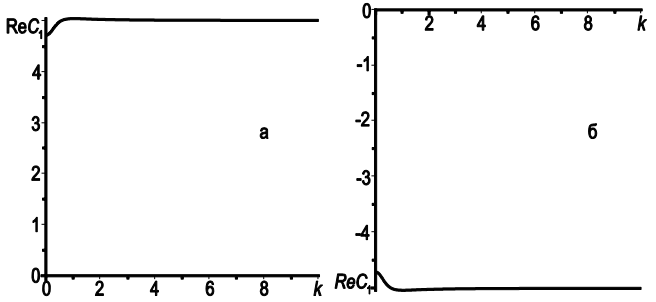



*Рис. 4. Зависимости вещественной части фазовой скорости* $\mathrm{Re}\,C$ *от волнового числа* $k$ *для растущих возмущений, распространяющихся под углами* $\pm(\theta_1+\varepsilon)$ (а), $\pi\pm(\theta_1+\varepsilon)$ (б).

На рис. 3 приведены зависимости от $k$ мнимой части корня дисперсионного уравнения, для которого $\mathrm{Im}\,C$ меняет знак при углах распространения из областей, показанных на рис. 2. Диапазону углов растущих возмущений соответствуют кривые *3*, *4* (см. рис. 2). На рис. 4 показаны зависимости вещественной части фазовой скорости от волнового числа при одинаковых по модулю, но противоположных по знаку $\cos\theta$. При отрицательных $\cos\theta$ ось $x$ (вдоль которой расположен волновой вектор) направлена против вектора невозмущенной скорости, то есть вверх по потоку. Фазовая скорость в этом случае получается отрицательной (рис. 4б). Следовательно, соответствующие возмущения бегут в отрицательном направлении оси $x$, то есть вниз по потоку.

**Заключение.** Проведено исследование устойчивости решений уравнений в гидравлическом приближении, описывающих поток на склоне постоянного уклона, по отношению к двумерным малым возмущениям. Аналитически получен критерий устойчивости, который показывает, что в склоновых потоках косые возмущения могут приводить к неустойчивости, даже если продольные возмущения не растут. В частности, это выполнено для ламинарных потоков дилатантных сред Освальда-де Виля и Хершеля-Балкли с показателем степени $n > 2$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 18-38-00745, 18-29-10020, 18-08-00074.

*Список использованных источников*

1. Kern M., Tiefenbacher F., McElwain, J. The rheology of snow in large chute flows // Cold. Reg. Sci. Technol. 2004. V. 39. P. 181 – 192.
2. Ведерников В.В. Условия на фронте волны попуска, нарушающей установившееся движение реальной жидкости // Докл. АН СССР. 1945. Т. 48. № 4. С. 256 – 259.
3. Эглит М.Э. Неустановившиеся движения в руслах и на склонах // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 96 с.
4. Gupta A.S., Rai L. Note on the stability of a visco-elastic liquid film flowing down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1968. V. 33. P. 87 – 91.
5. Allouche M., Millet S., Botton V., Henry D., Ben Hadid H., and Rousset F. Stability of a flow down an incline with respect to two-dimensional and three-dimensional disturbances for Newtonian and non-Newtonian fluids. // Physical Review E. 2015. V. 92. 063010.
6. Zayko J., Eglit M. Stability of downslope flows to two-dimensional perturbations // Phys. Fluids. 2019. V. 31. 086601.
7. Whitham G. Linear and Nonlinear Waves // Wiley, NY. 1974.

# ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ЗАКРУТКИ ПОТОКА НА ТЕМПЕРАТУРУ АДИАБАТНОЙ СТЕНКИ ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ ТЕЧЕНИЯ

*Н.А. Киселёв*

**Аннотация.** Как известно, температура адиабатной стенки, омываемой незакрученным сжимаемым (высокоскоростным) потоком газа, может существенно отличаться от температуры торможения невозмущенного потока. Ее значение определяет величину и направление теплового потока от тела к газовому потоку. В случае обтекания плоской пластины это отличие тем больше, чем больше скорость потока и чем больше число Прандтля отличается от единицы [1]. Во многих технических приложениях (низкотемпературная сепарация, разгон в соплах форсажных камер и т.п.) сверхзвуковые течения могут иметь определенную степень закрутки, которая может повлиять на значения температуры адиабатной стенки и, следовательно, величину тепловых потоков. В данной работе исследовалось влияние начальной закрутки потока на температуру адиабатной стенки при сверхзвуковых скоростях течения.

Исследования проводились на сверхзвуковой аэродинамической установке НИИ механики МГУ [2]. Рабочая часть представляла собой осесимметричный канал, состоящий из цилиндрического (с небольшим сужением на входе) участка и следующих за ним двух конических и трех цилиндрических участков круглого поперечного сечения, см. рис.1. Общая длина канала составляла 440 мм. Материал стенок канала – латунь. Диаметр критического сечения – 7 мм, максимальный диаметр конической секции – 10мм. Вдоль канала располагались приемники статического давления $p_i$.

Рабочее тело (сухой воздух, влажный воздух) поступало в канал из форкамеры, в которой располагались приемники

полного давления $P_{0\infty}$, температуры торможения $T_{0\infty}$ и датчик относительной влажности потока RH. Также измерялись массовый расход воды, используемой для получения пара, температура перегретого пара, температура сухого воздуха (до смешения с паром).

Исследования проведены для двух значений начальной температуры торможения ($T_{0\infty}$ = 36 °C и 55 °C), начальное давление торможения воздуха $P_{0\infty}$ = 3.0 атм (при данном давлении в форкамере течение в канале без завихрителя всюду сверхзвуковое), начальная относительная влажность воздуха изменялась в диапазоне RH = 7 - 90%, влагосодержание в диапазоне 0.7-35 г/кг.

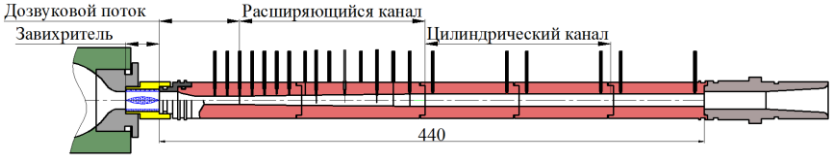


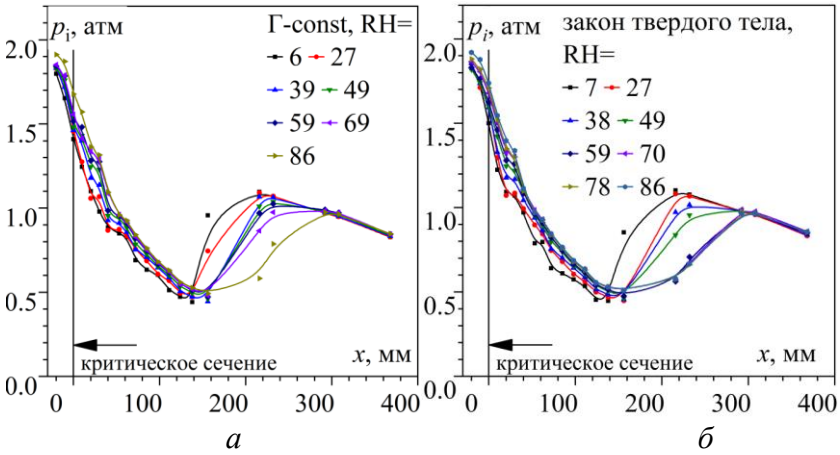

*Рис. 1. Схема рабочего сверхзвуковой аэродинамической установки*

Интенсивность закрутки характеризуется параметром закрутки [3], представляющим собой безразмерное отношение осевой компоненты потока момента количества движения $G_\theta$ к произведению осевой компоненты количества движения $G_x$ на радиус канала. Для рассмотренных завихрителей интенсивность закрутки оставалась постоянной и составляла $S$=0.5. В работе были использованы завихрители с профилированием лопаток по закону постоянной циркуляции (Г-const) и по закону твердого тела.

Экспериментальные исследования проводились следующим образом. Для случая «сухого» воздуха и определенного условиями эксперимента значения температуры торможения экспериментально регистрировалось распределение статического давления вдоль канала и температура внешней поверхности канала. На

следующем этапе «сухой» воздух смешивался с перегретым паром и поступал в форкамеру, где дополнительно подогревался до заданной температуры торможения. В зависимости от расхода перегретого пара изменялась влажность получаемой смеси (влажного воздуха). При этом полное давление и температура торможения влажного воздуха поддерживались одинаковыми для всех значениях начальной (в форкамере) относительной влажности и всех завихрителей. Далее для каждого случая фиксировались распределения статического давления вдоль сверхзвукового канала и температура внешней поверхности канала, которые сравнивались с данными для «сухого» воздуха при идентичных начальных параметрах потоков.

На рис. 2 приведены распределения статического давления и температуры внешней поверхности канала (на стационарном режиме она близка к адиабатной температуре стенки) для двух различных законов профилирования завихрителей. Рост начальной влажности приводил к повышению интенсивности скачка конденсации и смещению его в область меньших чисел Маха (к критическому сечению), как и следует из теории скачков конденсации [4]. Для одинаковых значений начальной относительной влажности интенсивность скачка тем выше, чем выше влагосодержание, т.е. чем выше температура воздуха в форкамере. С ростом влагосодержания увеличивается выделяемая при конденсации теплота и, следовательно, существеннее снижается число Маха потока за скачком конденсации. Также из-за наличия закрутки потери давления по длине канала значительно больше, чем в канале без завихрителя. Как видно из рис. 2, в цилиндрической части канала поток становится дозвуковым. Однако в связи с тем, что с ростом давления снижается влагосодержание при той же относительной влажности, исследования проводились при давлении в форкамере $P_{0\infty} = 3.0$ атм.




*а* *б*

*Рис.2. Распределение статического давления на стенке канала в зависимости от относительной начальной влажности потока для $P_{0\infty}$ = 3.0 атм и $T_{0\infty}$ = 55 °С: а – для канала с завихрителем, профилированным по закону постоянной циркуляции, б – с завихрителем, профилированным по закону твердого тела*

Как видно из рис. 3, на участке разгона потока (первая цилиндрическая и две конические секции) температура стенки «сухого» (с минимально возможной влажностью) воздуха снижалась относительно температуры торможения, а на участке торможения сверхзвукового потока возрастала (черные кривые на рис. 3). Сначала, с ростом начальной влажности значение температуры стенки увеличивалось по сравнению с режимом «сухого» воздуха для обоих законов профилирования. Для $T_{0\infty}$ = 36 °С рост продолжался до значений RH ≈ 50%, для $T_{0\infty}$ = 55 °С – до значений RH ≈ 27%, что существенно меньше, чем значения для потока без закрутки. Далее, с ростом влажности минимальная температура стенки начинала снижать и, при максимальной влажности (RH=84-86%) достигала значений, существенно меньших соответствующей температуры «сухого» воздуха.

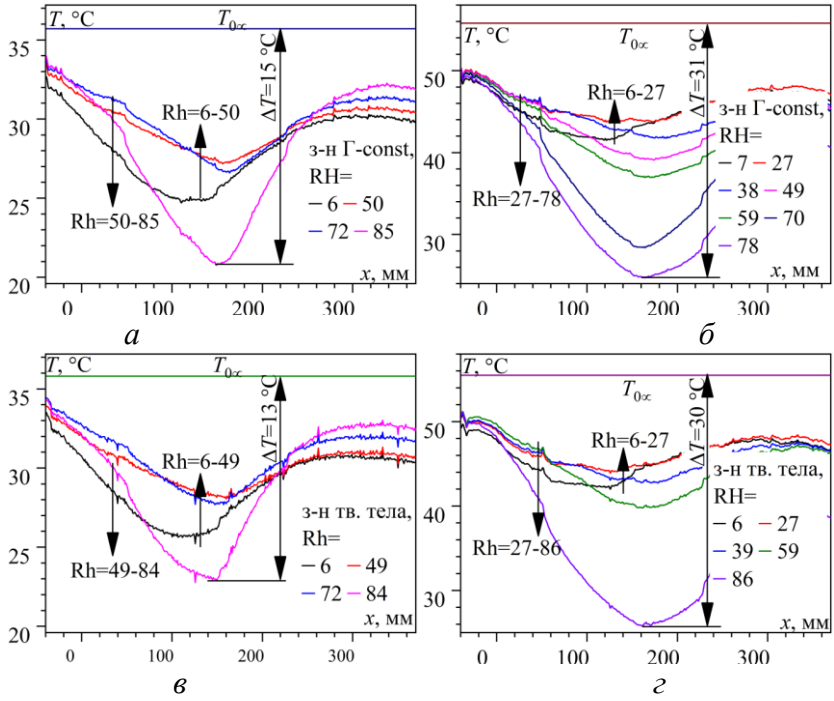



*Рис.3. Распределение температуры стенки канала в зависимости от относительной начальной влажности потока для $P_{0\infty}$ = 3.0 атм и $T_{0\infty}$ = 36 °С (а, в) и 55 °С(б, г): а, б – для канала с завихрителем, профилированным по закону постоянной циркуляции, в, г – с завихрителем, профилированным по закону твердого тела*

Такое поведение адиабатной температуры стенки может свидетельствовать о влиянии образовавшихся капель на распределение температуры в пограничном слое, а также о влиянии закрутки на движение сконденсировавшихся капель. Капли формируются в скачке конденсации, их температура близка к термодинамической температуре в месте возникновения скачка. Попадая в пограничный слой, они испаряются и снижают температуру пристенных слоев. Как видно из рис. 2-3, закон профилирования (при интенсивности

закрутки $S$=0.5) не оказывает существенного влияния как на распределение статических давлений на стенке, так и на температуру адиабатной стенки.

Максимальное снижение температуры стенки (относительно температуры в форкамере) достигало $\Delta T$=15 и 31 °C ($\Delta T$=13 и 30 °C) для канала с завихрителем, профилированным по закону Г-const (по закону твердого тела) при температуре в форкамере $T_{0\infty}$ = 36 °C и 55 °C соответственно. Стоит отметить, что соответствующие значения в канале без закрутки потока совпадают при $T_{0\infty}$ = 36 °C и несколько меньше $T_{0\infty}$ = 55 °C ($\Delta T$ в этом случае составляет 28 °C), что свидетельствует о возможности дальнейшего снижения температуры адиабатной стенки путем использования начальной закрутки потока влажного воздуха.

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект №19-19-00234).

*Список использованных источников*

1. Леонтьев А.И. Температурная стратификация сверхзвукового газового потока // Доклады Академии наук. 1997. Т. 354, № 4. С. 475–477.

2. Здитовец А.Г. и др.. Экспериментальное исследование влияния начальной влажности на энергоразделение сверхзвукового воздушного потока // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. РИЦ БашГУ Уфа, 2019. С. 11–12.

3. Гупта А., Лилли Д., Сайред Н. Закрученные потоки. М.: Мир, 1987. 588 с., ил.

4. Wegener P.P., Mack L.M. Condensation in Supersonic and Hypersonic Wind Tunnels. 1958. P. 307–447.

# СТРУКТУРА АВТОМОДЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНОМ МАХОВСКОМ ОТРАЖЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

*А.Н. Максимов*

**Аннотация.** Численно исследована структура автомодельных течений при отрицательном маховском отражении ударных волн от клина. В зависимости от угла клина зафиксированы режимы двойного, тройного и многократного маховского отражения. Выполнено сравнение формирующихся струйных течений в автомодельном поле скоростей для различных режимов. Исследован переход к регулярному отражению при увеличении угла клина.

**Введение.** В классических работах [1-2] приведена современная классификация различных режимов нерегулярного (маховского) отражения при дифракции ударной волны на клине. Неизменный интерес вызывает проблема перехода от маховского отражения различных типов к регулярному отражению при изменении определяющих параметров задачи [3]. В настоящей работе численно исследованы режимы отрицательного маховского отражения при дифракции ударной волны на клине. При отрицательном отражении падающая и отраженная ударные волны лежат по разные стороны от траектории движения тройной точки (то есть прямой, соединяющей эту точку с вершиной клина). Такие режимы для умеренных значений числа Маха реализуются в газах с показателем адиабаты, близким к единице. Аналитическое исследование областей существования стационарных трехударных конфигураций с отрицательным отражением выполнено в работе [4]. Условия реализации различных режимов двойного маховского отражения, в том числе и отрицательного, изучены в работе [5]. В [6] исследованы эффекты формирования тонких струй вблизи поверхности клина и интенсивных возвратных течений за маховской ножкой.

**Постановка задачи.** Для описания плоских нестационарных течений совершенного идеального газа использовались уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ e\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ (e+p)u\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ (e+p)v\end{pmatrix}=0,$$

$$e=\frac{p}{\gamma-1}+\rho\frac{u^2+v^2}{2},$$

где $e$ – полная энергия единицы объема для совершенного газа, $u, v$ – компоненты скорости вдоль $x, y$ соответственно.

На рис. 1 показана расчетная область. Ось абсцисс совпадает с поверхностью клина. В начальный момент времени ударная волна проходит через вершину клина $x_0 = 1/6$ и наклонена под углом $\pi/2 - \alpha$ (где $\alpha$ – угол клина). Перед ударной волной находится неподвижный газ с параметрами $\rho_0 = 1$, $p_0 = 1$. По заданному числу Маха $M_s$ падающей ударной волны из соотношений Ренкина-Гюгонио вычисляются параметры потока $u_s$, $v_s$, $\rho_s$, $p_s$ за ней.

Постановка задачи является автомодельной, поскольку среди физических определяющих параметров отсутствуют па-

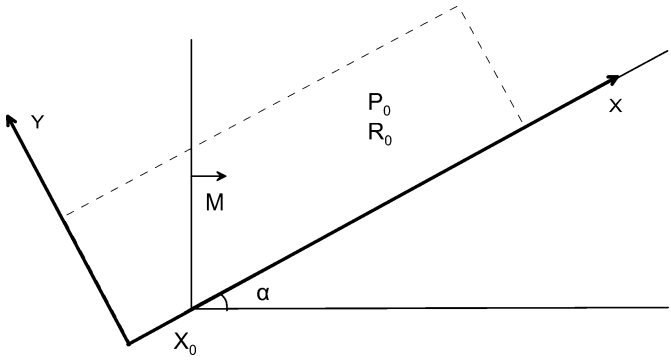



*Рис. 1. Расчетная область и распределение параметров в начальный момент.*

раметры для определения расстояния или времени. Безразмерными определяющими параметрами задачи являются: число Маха падающей ударной волны $M_s$, показатель адиабаты газа $\gamma$ и угол клина $\alpha$. Решение задачи должно быть стационарным в автомодельных переменных $(x-x_0)/t$, $y/t$.

Границы расчетной области выбираются таким образом, чтобы возмущения до них не доходили. Так как положение падающей ударной волны известно в любой момент времени, то можно задать точные условия на верхней и левой границах. На правой границе задано условие свободного вытекания, обеспечивающее отсутствие отражения возмущений, а на поверхности клина - условие непротекания.

Численное исследование выполнено с использованием TVD-модификации явной конечно-разностной схемы Мак-Кормака [7], обеспечивающей сохранение монотонности решения. Стандартное разрешение расчетной сетки составляло $6400\times1600$.

**Режим многократного маховского отражения.** Рассмотрены различные течения при разных углах клина, числах Маха набегающего потока и показателях адиабаты газа, соответствующие режиму отрицательного маховского отражения. В [7] при расчете течения для случая $\gamma = 1.13$, $\alpha = 35°$, $M_s = 4.94$ был обнаружен новый режим – многократное маховское отражение (рис. 2). Данный режим характеризуется наличием в картине течения дополнительных тройных конфигураций, которые в классификациях [1-2] не отмечались. Стационарность режима в автомодельных переменных в [7] проверялась двумя способами: сравнением решений на стандартной и удвоенной сетках в один и то же момент времени $t_1$, а также по траекториям движения тройных точек (которые оказались прямолинейными).

На рис. 2. показано распределение чисел Маха в автомодельном поле скоростей по методике [6]. Для нахождения компонент скорости $(U, V)$ в каждой точке расчетной области

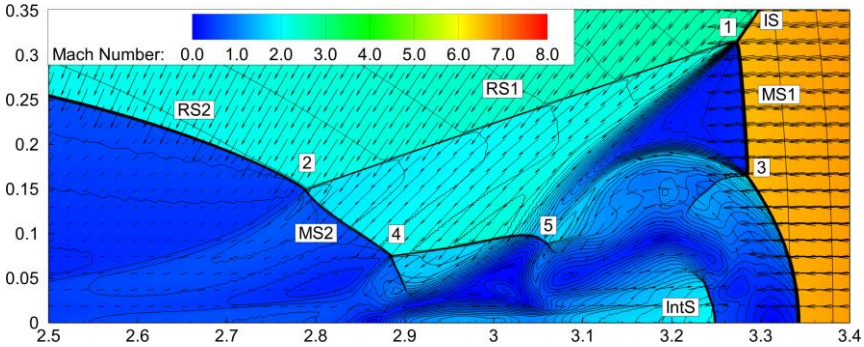



*Рис. 2. Распределение чисел Маха в автомодельном поле скоростей для режима многократного маховского отражения.*

из физического вектора скоростей вычитается вектор «автомодельного расширения», равный по модулю расстоянию до вершины клина, деленному на время:

$$U = u - \frac{x - x_0}{t}, V = v - \frac{y}{t}$$

Автомодельное поле скоростей локально в окрестности любой выбранной точки соответствует физическому полю скоростей в системе отсчета, связанной с этой точкой. Таким образом, данная методика позволяет «остановить» сразу все точки течения и определить направления струйных течений в каждой из трехударных конфигураций.

Основная трехударная конфигурация «1» устроена таким образом, что угол отражения падающей ударной волны IS является отрицательным (относительно траектории тройной точки), и поэтому на отраженном скачке RS1 обязательно появляется вторая «2» трехударная конфигурация, соответствующая двойному маховскому отражению. В области за маховской ножкой MS1 формируется сильное возвратное течение, из-за чего на ней появляется третья «3» трехударная конфигурация. При новом режиме многократного маховского отражения на коротком скачке MS2 возникают новые тройные точки «4» и «5», не наблюдавшиеся ранее. Их наличие позволяет развернуть сверхзвуковой газовый поток так, чтобы обеспечить

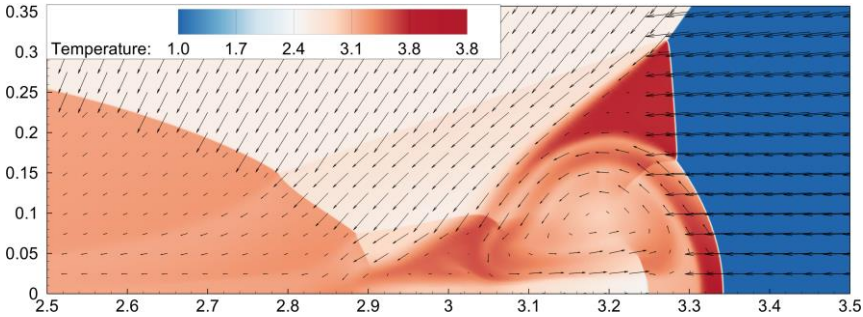
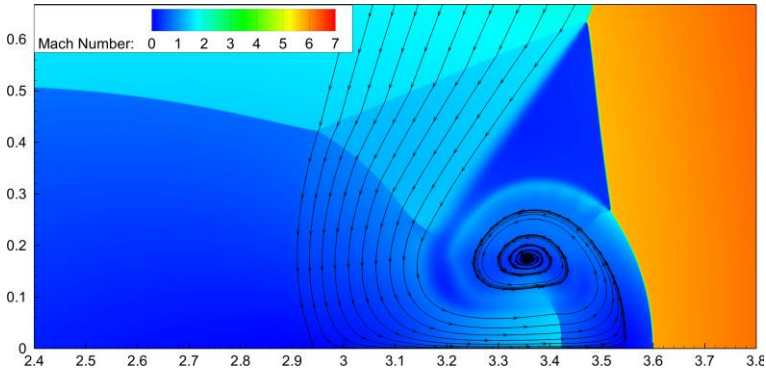



*Рис. 3. Распределение температур в автомодельном поле скоростей.*

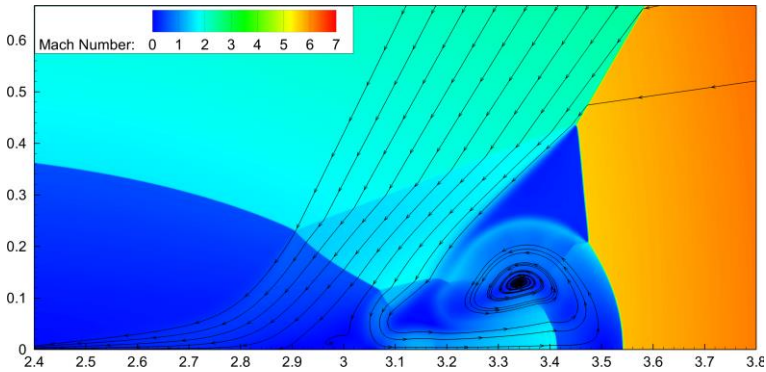
возможность его прохода в узкое «горло» вблизи поверхности клина. При этом около поверхности клина вблизи оси симметрии потока появляется точка растекания струй, направленных вдоль поверхности клина к его вершине и от нее, в сторону основной маховской ножки.

На рис. 3 изображено распределение температур в автомодельном поле скоростей. Показано, что температура возрастает не более чем в 4 раза (по сравнению с начальной). Максимум температуры достигается непосредственно за теми участками маховской ножки, где угол наклона к потоку близок к прямому. При этом температура в области растекания струй на оси симметрии (то есть именно там, где достигаются наибольшие значения давления и плотностей) остается умеренной.

**Переход к многократному маховскому отражению.** Изучен процесс перехода от двойного к многократному маховскому отражению при изменении угла клина. На рис. 4 показано, что при увеличении угла клина в зазоре между контактным разрывом, соответствующему первой трехударной конфигурации, и ударной волной, выходящей из второй тройной точки (согласно описанию структуры течения в предыдущем разделе), постепенно образуется еще одна новая трехударная конфигурация «4» на продолжении которой возникает тройная точка «5», постепенно увеличивающаяся в размерах (рис. 4 б). Кроме того, увеличивается угол наклона отраженной ударной




*а) двойное маховское отражение, $\alpha = 20°$*




*б) многократное маховское отражение, $\alpha = 30°$*

*Рис. 4. Переход к многократному маховскому отражению в автомодельном поле скоростей (показаны числа Маха).*

волны RS1, выходящей из первой трехударной конфигурации, и сильно повышается давление в области, где струя газа ударяет в поверхность клина. В результате этого часть газа, прошедшего через отраженную ударную волну основной маховской конфигурации (показанная на рис. 4 с помощью линий тока), разворачивается в сторону носика клина.

Выполнено исследование перехода к регулярному отражению при изменении угла клина $\alpha$. Показано, что конфигурация с четырьмя тройными точками сохраняется вплоть до перехода (рис. 5). При этом переход к регулярному отражению

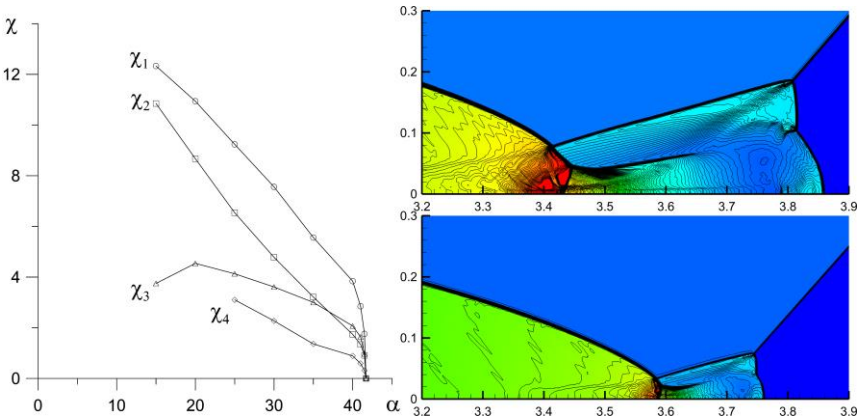



*Рис. 5. Зависимость углов траекторий тройных точек $\chi_1$, $\chi_2$, $\chi_3$, $\chi_4$, от угла клина $\alpha$ (слева); распределения давления (цвет) и плотности (изолинии) для случаев угла клина $\alpha = 41°$ и $\alpha = 41.6°$.*

происходит очень быстро – в диапазоне всего нескольких градусов в диапазоне $\alpha = 40° - 41.7°$. Причем, как видно из рис. 5, при приближении к критическому углу сохраняется подобие газодинамических структур.

**Заключение.** Численно исследована структура автомодельных течений при отрицательном маховском отражении ударных волн от клина. Выполнено сравнение формирующихся струйных течений в автомодельном поле скоростей для различных режимов. Показано, для показателя адиабаты близкого к единице при увеличении угла последовательно реализуются режимы двойного, тройного и многократного маховского отражения. Режим многократного отражения сохраняется вплоть до перехода к регулярному отражению. При этом на завершающей стадии переход происходит резко в диапазоне всего нескольких градусов по углу клина, отмечено подобие газодинамических структур при приближении к критическому углу перехода.

*Список использованных источников*

1. Семенов А.Н., Березкина М.К., Красовская И.В. Классификация разновидностей отражения ударной волны от клина. Части 1, 2 // Журнал технической физики, 2009, 79 (4): 46-58.

2. Ben-Dor G. A State-of-the-Knowledge Review on Pseudo-Steady Shock-Wave Reflections and their Transition Criteria // Shock Waves, 2006, 5 (3-4): 277-294.

3. Bazhenova I.V., Fokeev V.P., Gvozdeva L.G. Regions of various forms of Mach reflection and its transition to regular reflection // Acta Astronautica. 1976, (3): 131-140.

4. Сильников М.В., Чернышов М.В., Гвоздева Л.Г. Аналитическое описание области существования тройных конфигураций с отрицательным углом наклона отраженного скачка // Журнал технической физики. 2016. 86(11): 30-34.

5. Gvozdeva L., Gavrenkov S., Nesterov A. A study of slipstreams in triple shock wave configurations // Shock Waves. 2015. 25: 283-291.

6. Henderson L.F., Vasilev E.I., Ben-Dor G., Elperin T. The wall-jetting effect in Mach reflection: theoretical consideration and numerical investigation // Journal of Fluid Mechanics, 2003, 479: 259-286.

7. Максимов А.Н. Особенности применения методов TVD- и FCT-MacCormack в задачах газовой динамики // Труды конференции-конкурса молодых ученых. 10-12 октября 2016 г. / Под ред. академика РАН А.Г. Куликовского, проф. В.А. Самсонова. М.: МГУ, 2017. С. 133-141.

8. Максимов А.Н. Особенности отрицательного маховского отражения при дифракции ударной волны на клине // Труды конференции-конкурса молодых ученых. 15-17 октября 2018 г. Под ред. академика РАН А.Г. Куликовского, проф. В.А. Самсонова. М.: МГУ, 2019. С. 45-52.

# ЭМПИРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОТОКА НА РОТОР САВОНИУСА

*А.А. Мастерова*

**Аннотация.** В работе предложен эмпирический подход к описанию воздействия потока на ротор Савониуса, позволяющий представить коэффициент аэродинамического момента ротора в виде функции мгновенных значений угла поворота и угловой скорости. Такой подход позволяет расширить за счет средств теоретической механики спектр методов, применимых для решения задач динамики сложных систем, в состав которых входит ротор.

**Введение.** Ротор Савониуса представляет собой вертикально осевую турбину, в самом простом виде состоящую из двух полуцилиндров, закрепленных на одной оси вращения, параллельной образующим этих цилиндров (рис. 1). Крутящий момент создается силами сопротивления, действующими на лопасти ротора. Эти силы зависят от формы лопасти, ее положения в каждый момент времени относительно набегающего потока и скорости его вращения. В результате силы сопротивления на лопастях оказываются различными, что создает крутящий момент вокруг оси вращения ветроколеса.

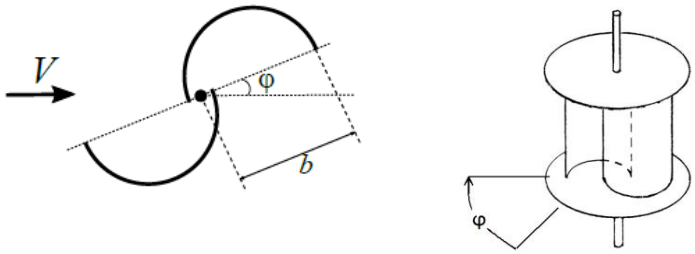



*Рис.1 Схематичное изображение ротора Савониуса (вид сверху и вид сбоку).*

В данной работе модифицируется подход, предложенный в [1], где коэффициент аэродинамического момента ротора определяется из общедоступных экспериментальных данных в виде суммы двух слагаемых, одно из которых зависит только от безразмерной угловой скорости ротора, другое – только от угла его поворота. Возможности использования такого подхода продемонстрированы в [1] на примере исследования динамики малой ветроэнергетической установки на базе ротора Савониуса и в [2] – на примере колесной тележки, в качестве движителя которой используется рассматриваемый тип ротора.

Работы [1, 2] также содержат описание основных характеристик ротора и краткое описание современного состояния исследований в данной области.

Новый метод применим к более широкому классу роторов. Его использование позволяет количественно точнее описывать системы, содержащие роторы рассматриваемого типа. Для демонстрации применимости данного подхода результаты, полученные с его помощью, сравниваются с результатами из [3], полученными с помощью гидродинамического моделирования.

**1. Аэродинамический момент.** В рамках квазистатического подхода, описанного в работе [4], аэродинамический момент выражают по формуле:

$$M_a(\varphi,\omega) = 0.5\rho S b V^2 C_m,$$

где $\varphi$ - угол поворота ротора, $\omega$ - угловая скорость ротора, $\rho$ - плотность среды, $b$ - радиус ротора, $S$ - площадь поперечного сечения ротора, перпендикулярного направлению набегающего потока, $V$ – скорость потока, $C_m$ - безразмерный коэффициент аэродинамического момента. Последний представим в виде усеченного ряда Фурье:

$$C_m(\varphi,\Omega) = b_0(\Omega) + \sum_{k=1}^{N}\left[a_k(\Omega)\sin(2k\varphi) + b_k(\Omega)\cos(2k\varphi)\right].$$

Здесь $\Omega = b\omega/V$ - быстроходность или безразмерная угловая скорость. Значения коэффициентов $a_k(\Omega)$, $b_k(\Omega)$ и число учитываемых гармоник $N$ должны быть определены из экспериментов. На данном этапе ограничимся $N = 1$. Используя данные, взятые из работы [3], получены первые приближения к коэффициентам данного разложения (рис. 2). Точками на рисунке обозначены коэффициенты разложения безразмерного крутящего момента, полученные для разных значений быстроходности из численного моделирования, проведенного авторами работы [3]. Сплошной линией отмечена предлагаемая аппроксимация зависимости коэффициентов от безразмерной угловой скорости ротора.

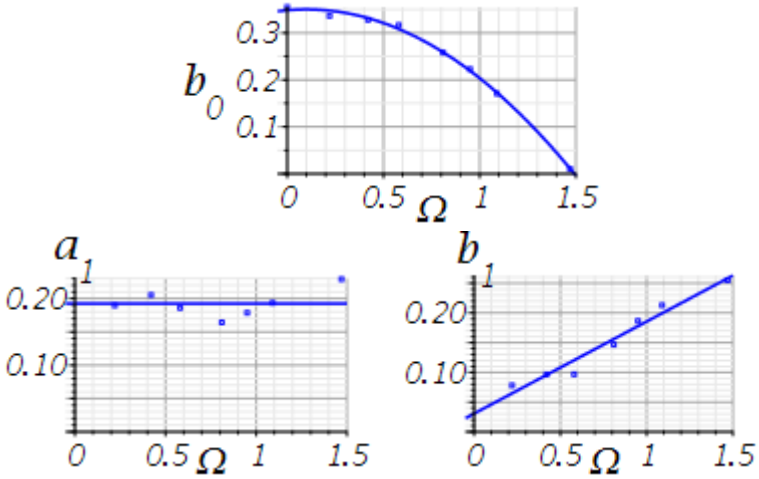



*Рис.2 Зависимость первых коэффициентов разложения аэродинамического момента от быстроходности, полученная из данных работы [3].*

Рассмотрим использование предложенного подхода в применении к модели малогабаритной ветроэнергетической установки, в качестве ветроприемного элемента которой используется ротор Савониуса.

**2. Описание системы и уравнения движения.** Пусть вал ротора жестко соединен с якорем электрогенератора постоянного тока. Угловая скорость вращения якоря генератора совпадает с угловой скоростью вращения ротора Савониуса ($\omega = \dot{\varphi} = \dot{\psi}$, где $\psi$ - угол поворота якоря генератора). Состояние системы описывается углом $\varphi$ вращения ротора, его угловой скоростью $\omega$ и силой тока $I$ во внешней цепи генератора.

Лагранжиан системы имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} LI^2 - \Phi(\psi) I,$$

где $L$ - индуктивность в цепи, а $\Phi(\psi)$ - магнитный поток через рамку якоря. Вслед за [4] производную магнитного потока заменим на ее среднее значение $C$. Параметр $C$ называют коэффициентом электромеханического взаимодействия в генераторе.

Уравнения Лагранжа второго рода для такой системы имеют вид:

$$\begin{cases} J\dot{\omega} = M_a - CI \\ L\dot{I} = C\omega - ZI \end{cases}$$

$Z$ - модуль полного электрического сопротивления, представляющего собой сумму внутреннего сопротивления генератора и сопротивления во внешней цепи якоря.

Перейдем к безразмерному времени $\tau = tV_0/b$, где $V_0$ - характерная скорость набегающего потока. Будем использовать также следующие размерно независимые величины: $\rho Sb$, $b$ и $C_0$, где $C_0$ - характерная величина коэффициента электромеханического взаимодействия. Уравнения движения в безразмерном виде принимают вид:

$$\begin{cases} \varphi' = v\Omega \\ jv\Omega' = v^2 C_m - ci \\ li' = cv\Omega - zi \end{cases}$$

Здесь штрихом обозначена производная по $\tau$ и введены следующие безразмерные параметры:

$$v = \frac{V}{V_0}; \quad j = \frac{2J}{\rho S b^3}; \quad c = \frac{C}{C_0}; \quad i = \frac{2}{\rho S b}\frac{C_0}{V_0^2} I;$$

$$l = \frac{\rho S b}{2}\frac{V_0^2}{C_0^2} L; \quad z = \frac{\rho S b^2}{2}\frac{V_0}{C_0^2} Z.$$

**3. Условия существования положений равновесия.** В положении равновесия необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$C_m\left(\varphi^*, 0\right) = 0.$$

Для ротора из работы [3] данное равенство никогда не выполняется (рис. 3), и, следовательно, в системе с таким ротором нет положений равновесия.

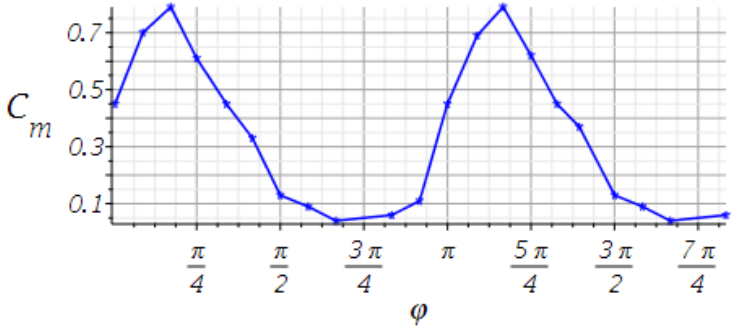
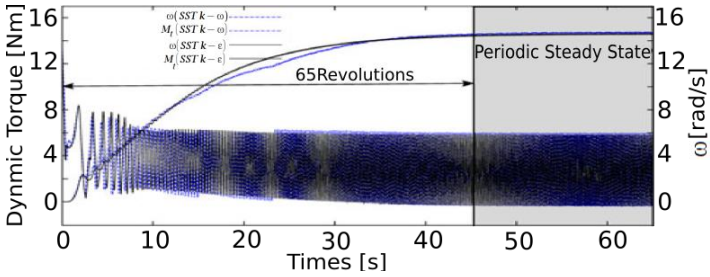



*Рис.3 Зависимость статического ($\Omega = 0$) коэффициента аэродинамического момента для ротора из [3].*

**4. Результаты численного интегрирования.** В программном пакете Maple было проведено численное интегрирование системы. Геометрические и физические размеры ротора, а также скорость набегающего потока соответствуют [3].

Рис. 4 демонстрирует хорошее качественное и количественное соответствие результатов. Стоит отметить, что динамический момент может принимать отрицательные значения, в то время как статический момент всегда больше нуля.

а)




б)

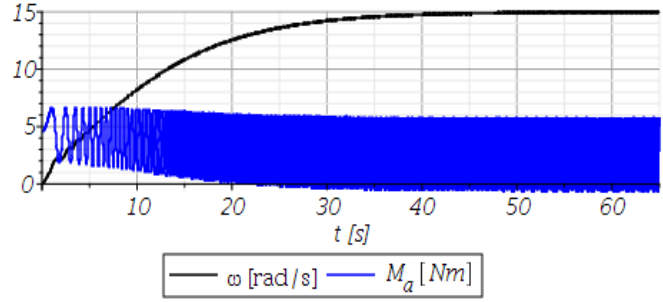



*Рис. 4. Изменение момента $M_a$ и угловой скорости $\omega$ ротора в процессе разгона, подсчитанное с использованием CFD моделирования (с двумя моделями турбулентности) (а) и предложенного подхода (б)*

**5. Экспериментальные данные.** В НИИ механики МГУ был создан и протестирован лабораторный макет ротора Савониуса (рис. 5). Эксперименты с ним проводились в аэродинамической трубе НИИ механики при скоростях потока 4 – 8 м/с.

*Рис. 5. Фото лабораторного макета*

На рис.6 показана зависимость первых коэффициентов разложения аэродинамического момента от быстроходности. Один цвет - серия экспериментов при некоторой постоянной скорости набегающего потока.

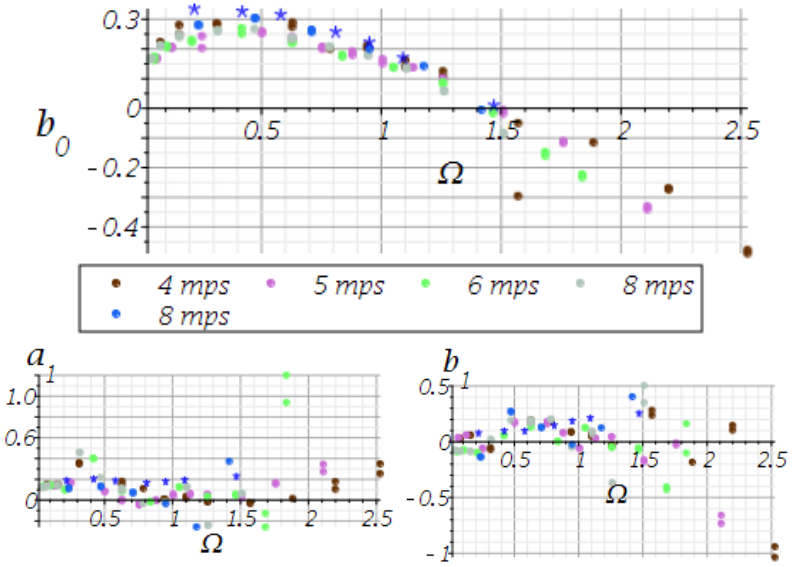



*Рис.6 Зависимость первых коэффициентов разложения аэродинамического момента от быстроходности, полученная из экспериментов в НИИ механике МГУ.*

Как видно из графиков, точность измерений на данном этапе не позволяет использовать полученные данные для расчетов. Необходимо проведение повторных экспериментов с использованием более точных измерительных приборов.

Причина такого разброса коэффициентов в нашем эксперименте по сравнению с результатами из работы [3] видится в том, что коэффициенты из [3] мы могли получить только на уже усредненных данных на нескольких оборотах. Мы же получали коэффициенты для каждого оборота в отдельности, затем находили среднее этих значений, которые, к сожалению, сильно расходились.

**Заключение.** В работе предложен подход, позволяющий приближенно представить коэффициент аэродинамического момента, действующего на ротор Савониуса в потоке, в виде функции обобщенных координат и скоростей системы. Такой подход позволит при решении задач оптимизации оперативно определять область параметров, в которой следует ожидать «оптимального» поведения систем. Затем для параметров в этой области можно будет применить классические методы теории сплошных сред, дающие более точное количественное совпадение, но слишком ресурсоемкие для анализа динамики в широкой области параметров.

Использование такого подхода продемонстрировано на математической модели автономного ветроэлектрогенератора. Проведено численное моделирование динамики такой системы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-31-99973.

*Список использованных источников*

1. Мастерова А.А. Моделирование динамики малогабаритной ветроэнергетической установки на базе ротора Савониуса/ Труды конференции-конкурса молодых ученых. 13-17 октября 2017 г. / М.: Издательство Московского университета, 2018. – 140-147 с.

2. Мастерова А.А. Моделирование динамики колесной тележки, приводимой в движение с помощью ротора Савониуса/ Труды конференции-конкурса молодых ученых. 15-17 октября 2018 г. / М.: Издательство Московского университета – 98-105 с.

3. P. Jaohindy, H. Ennamiri, F. Garde, A. Bastide Numerical investigation of airflow through a Savonius rotor/Wind Energy. – 2014. – № 17. – P. 853-868.

4. Досаев М.З., Кобрин А.И., Локшин Б.Я., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Конструктивная теория МВЭУ. Учебное пособие. Части I-II // М.: Изд-во мехмат ф-та МГУ, 2007. 75с. 88с.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ ИЗ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ В ПЕРЕМЕННЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

*Д.И. Меркулов*

**Аннотация.** В данной работе экспериментально и теоретически исследовано движение тел из намагничивающихся материалов в окружающей немагнитной жидкости на горизонтальной плоскости в однородном переменном магнитном поле. Обнаружено влияние параметров окружающей жидкости на направление движения тел. Построена математическая модель движения данных тел и выполнены численные расчеты. Проведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов.

**Введение.** Тела из намагничивающихся упругих материалов способны деформироваться в магнитном поле [1]. При наличии точек опоры и упругих сил положение центра масс тела при деформации может изменяться. В этом случае возможно возникновение направленного движения тела. В работах [2,3] описаны экспериментальные исследования плавающих микрообъектов, движения которых вызваны внешним магнитным полем. В статье [4] теоретически описана динамика тонкой намагничивающейся нити в переменном магнитном поле. В работе [5] впервые показана возможность создания движения, связанного с изгибной деформацией цилиндрического тела из намагничивающегося эластомера (НЭ) в неоднородном «бегущем» магнитном поле. Тела на основе анизотропных НЭ, движущиеся под действием поля постоянных магнитов, изучены в работе [6]. Принципы создания движения упругих намагничивающихся тел в переменном однородном магнитном поле рассмотрены в статье [7].

В данной работе экспериментально и теоретически исследуется движение тел из намагничивающихся

материалов в переменном однородном магнитном поле. Образцы расположены на горизонтальной плоскости в окружающей вязкой жидкости. Магнитное поле направлено под углом к горизонтали. Экспериментально и теоретически показано влияние свойств окружающей жидкости на направление движения тел.

**Эксперимент.** В экспериментах исследовались движения различных тел из намагничивающихся материалов (автономных движителей) в однородном переменном магнитном поле вдоль дна сосуда, заполненного немагнитной жидкостью. Экспериментальная установка включала в себя катушки Гельмгольца, подключенные к программируемому источнику тока и закрепленные таким образом, чтобы угол между осью катушек и горизонталью составлял *21* градус. Данная система позволяла создать наклонное переменное (прямоугольной конфигурации) однородное магнитное поле напряженностью $H$ до *430* Э. В зоне действия однородного магнитного поля располагалась пластиковая кювета (сосуд) с размерами 9 х 2,5 х 1 см. Кювета в эксперименте заполнялась либо водой с плотностью $\rho = 1$ г/мл и динамической вязкостью $\eta = 0{,}01$ Пуаз, либо глицерином с плотностью $\rho$ = 1,26 г/мл и динамической вязкостью $\eta = 14{,}8$ Пуаз.

Исследовались два вида автономных движителей, приводимых в движение внешним наклонным однородным переменным магнитным полем. На Рис. 1 и Рис. 2 показано движение пружины из НЭ (длина тела – *3,7* см, масса – *2,6* г, шаг пружины – *4,4* мм) в воде и глицерине, соответственно.

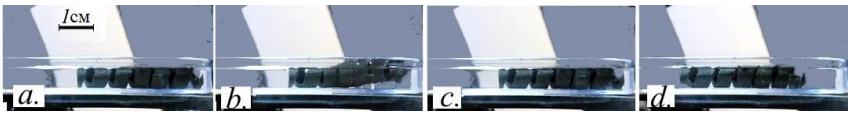



*Рис. 1: Движение пружины из НЭ в воде: (a) t = 0, H = 0; (b) t = 1c, H = 430Э; (c) t = 2c, H = 0; (d) t = 42c, H = 0.*

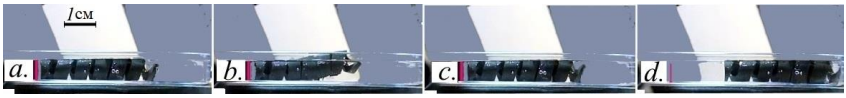



*Рис. 2: Движение пружины из НЭ в глицерине: (a) t = 0, H = 0; (b) t = 1c, H = 430Э; (c) t = 2c, H = 0; (d) t = 42c, H = 0.*

На Рис. 3 и Рис. 4 представлено движение стальных сферических тел (диаметром *2R = 3,1* мм и массой *M = 0,3* г каждое), соединенных упругой связью. Расстояние между центрами сферических тел – *5,1* мм, коэффициенты их трения о дно $k_{fr}$: в воде – *1,28* и в глицерине – *1,15*.

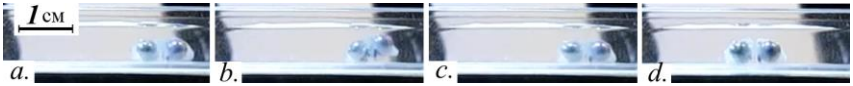



*Рис. 3: Движение стальных сфер в воде: (a) t = 0, H = 0; (b) t = 1c, H = 430Э; (c) t = 2c, H = 0; (d) t = 42c, H = 0.*

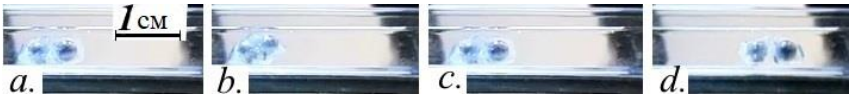



*Рис. 4: Движение стальных сфер в глицерине: (a) t = 0, H = 0; (b) t = 1c, H = 430Э; (c) t = 2c, H = 0; (d) t = 42c, H = 0.*

Обнаружено, что пружина из НЭ и стальные сферические тела с упругой связью в воде движутся влево (если считать вектор напряженности магнитного поля наклоненным вправо от вертикали), а в глицерине движутся вправо. Объяснить влияние свойств окружающей жидкости на направление движения тел можно следующим образом. Рассмотрим движение двух стальных сферических тел, соединенных упругой связью. Включение наклонного магнитного поля приводит к тому, что правое тело поднимается и смещается влево. При этом центр масс системы перемещается влево. В воде при выключении поля правое тело быстро опускается на дно, и затем оба тела под

действием упругой силы расходятся в разные стороны (при этом центр масс сохраняет свое положение). Таким образом, в воде тела движутся влево. В глицерине при выключении поля правое тело медленно опускается и падает на дно, когда упругий элемент полностью разжат. Центр масс системы при этом смещается вправо по отношению к исходному состоянию. Таким образом, в глицерине тела движутся вправо.

Данный эксперимент проводился при различных частотах изменения магнитного поля. На Рис. 5 и Рис. 6 представлены графики зависимости координаты центра масс движителя от времени за первые *2* сек движения при частотах *0,5* Гц и *1* Гц для воды и глицерина, соответственно. Видно, что независимо от частоты изменения магнитного поля эффект влияния свойств окружающей среды на направление движения тела сохраняется: в воде движитель перемещается влево, а в глицерине – вправо.

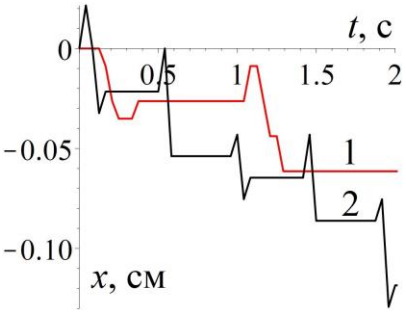



*Рис. 5. Эксп. зависимости координаты центра масс от времени в воде*
*1 – 0,5 Гц, 2 – 1 Гц*

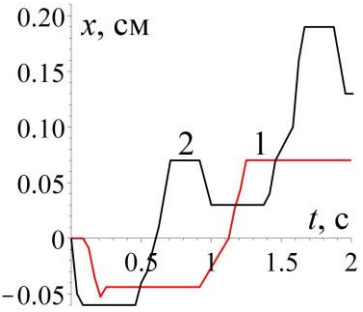



*Рис. 6. Эксп. зависимости координаты центра масс от времени в глицерине*
*1 – 0,5 Гц, 2 – 1 Гц*

**Теория.** В данной работе была предложена математическая модель движения сферических тел с упругой связью под действием магнитных, упругих, вязких сил, сил

сухого трения и тяжести. Далее введены следующие обозначения: $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ – радиус-вектор между центрами тел с началом в центре первого (левого) тела, $l_0$ – начальная длина упругой связи, $V = 4\pi R^3/3$ – объем тел, $\chi$ – магнитная восприимчивость материала тел. Введем декартову систему координат $(x, y, z)$, так что в плоскости $(x, y)$ лежит вектор напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$, ось $y$ перпендикулярна дну и направлена вверх от него, ось $x$ параллельна дну и направлена от первого (левого) тела ко второму (правому) телу в начальный момент времени ($t = 0$), $x = 0$ и $y = 0$ в центре первого тела при $t = 0$. Индексы $i = 1, 2$ обозначают параметры левого и правого тела, соответственно.

Магнитная сила $\boldsymbol{F}^i_m$, действующая на $i$-ое тело, пропорциональна силе взаимодействия двух магнитных диполей ($\boldsymbol{m}$ – магнитный момент):

$$\vec{F}^i_m = (-1)^i A\left[\vec{r}\left(\frac{3m^2}{r^5} - \frac{15(\vec{m}\vec{r})^2}{r^7}\right) + \frac{6\vec{m}(\vec{m}\vec{r})}{r^5}\right],\ \vec{m} = \frac{3\chi V}{3+4\pi\chi}\vec{H},\ i = 1,2 \quad (1)$$

Коэффициент $A = A(r)$ определялся экспериментально путем измерения магнитной силы, действующей между стальными сферическими телами (аналогичными телам, используемым при изготовлении движителя) в однородном магнитном поле.

Сила вязкого трения $\boldsymbol{F}^i_{visc}$, действующая на $i$-ое тело, рассчитывается в приближении Стокса с учетом влияния на движение горизонтального дна, согласно [8]:

$$F^i_{visc} = 6\pi\eta R\left(\frac{v^i_x}{f(y_i)}\vec{e}_x + \lambda(y_i)v^i_y\vec{e}_y\right),\ i = 1,2,$$
$$f(y_i) = 1 - \frac{9}{16}\frac{R}{y_i+R} + \frac{1}{18}\left(\frac{R}{y_i+R}\right)^3 - \frac{45}{256}\left(\frac{R}{y_i+R}\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{R}{y_i+R}\right)^5 \quad (2)$$

Здесь $y_i$ – расстояние от центра $i$-ого тела до дна сосуда, $v^i_x$, $v^i_y$ – скорости $i$-ого тела вдоль дна и перпендикулярно к нему; $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ – векторы базиса декартовой системы координат. Коэффициент $\lambda(y_i)$ представлен в [8] в виде таблицы.

Сумма силы тяжести и Архимедовой силы, действующих на тело, $\boldsymbol{F}_P$ имеет вид:

$$\vec{F}_P = (M - \rho V)\vec{g} \qquad (3)$$

Силу упругости $\boldsymbol{F}^i_e$, действующую на $i$-ое тело со стороны упругой связи, можно записать следующим образом ($k_e$ – жесткость упругой связи):

$$\vec{F}^i_e = (-1)^{i+1} k_e (1 - l_0 / r)\vec{r} \qquad (4)$$

Сила реакции $\boldsymbol{N}^i_P$, действующая со стороны дна сосуда на $i$-ое тело, имеет вид:

$$\vec{N}^i_P = \begin{cases} -(F^i_{my} + F_{Py} + F^i_{ey})\vec{e}_y, & y = 0,\ F^i_{my} + F_{Py} + F^i_{ey} < 0 \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases} \qquad (5)$$

Сила сухого Кулоновского трения $i$-ого тела о дно сосуда $\boldsymbol{F}^i_{fr}$ имеет вид (здесь $\Psi^i = F^i_{mx} + F^i_{ex}$):

$$\vec{F}^i_{fr} = \begin{cases} -k_{fr} \mid N^i_P \mid sign(v^i_x)\vec{e}_x, & v^i_x \neq 0 \\ -\min(\mid \Psi^i \mid, k_{fr} \mid N^i_P \mid) sign(\Psi^i)\vec{e}_x, & v^i_x = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

С использованием выражений для сил (1 – 6) можно выписать уравнение движения центров масс стальных сферических тел, соединенных упругой связью ($i = 1, 2$):

$$(M + \rho V / 2)\dot{\vec{v}}^i = (-1)^i \vec{F}^i_m + (-1)^i \vec{F}^i_e + \vec{F}_P + \vec{F}^i_{visc} + \vec{N}^i_P + \vec{F}^i_{fr} \qquad (7)$$

Начальные условия имеют следующий вид:

$$t = 0: \quad x^{(1)} = 0,\ x^{(2)} = l_0,\ y^{(1)} = y^{(2)} = 0,\ \vec{v}^{(1)} = \vec{v}^{(2)} = 0 \qquad (8)$$

**Численные расчеты.** Уравнение движения стальных сферических тел, связанных упругим элементом, (7) с начальными условиями (8) решалось численно методом Рунге – Кутта 4-го порядка для параметров, совпадающих с экспериментальными. Предполагалось, что в начальный момент времени оба тела находятся в покое, и их положение известно. Полученные теоретические зависимости горизонтальных координат центра масс сферических тел с упругой связью от времени за один цикл изменения магнитного поля для воды (линия 1) и глицерина (линия 2)

представлены на Рис. 7 при частоте изменения магнитного поля 1 Гц. Видно, что теория предсказывает движение тел в противоположных направлениях при использовании параметров, соответствующих воде и глицерину.

Проведено сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными. Экспериментальная (линия 1) и теоретическая (линия 2) зависимости горизонтальных координат центра масс от времени за один цикл изменения магнитного поля для глицерина показаны на Рис. 8 при частоте изменения магнитного поля 1 Гц. Численные результаты качественно совпадают с экспериментальными данными.

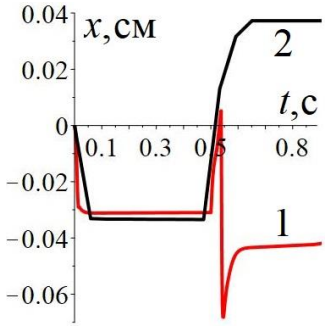



*Рис. 7. Теор. зависимости горизонтальных координат центра масс от времени (1 – вода, 2 – глицерин)*

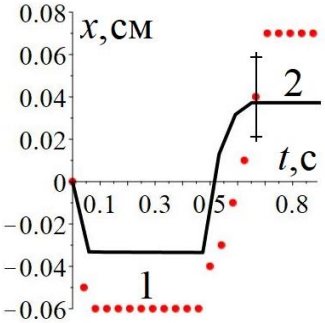



*Рис. 8. Зависимости координат центра масс от времени для глицерина (1 – эксперимент, 2 – теория)*

Согласно численным расчетам сферические тела с упругой связью в воде и в глицерине движутся вдоль дна в противоположных направлениях.

**Заключение.** Экспериментально обнаружено, что в глицерине рассматриваемые тела в переменном однородном магнитном поле движутся вдоль дна в направлении наклона поля, а в воде – в противоположном направлении. Для описания движения тел построена математическая модель,

которая учитывает влияние магнитных, упругих, вязких сил, силы трения и тяжести. В предлагаемой модели проведены численные расчеты, и получено качественное совпадение теоретических и экспериментальных результатов. Показано влияние свойств окружающей жидкости на направление движения тел.

Работа поддержана РФФИ в рамках проектов № 18-31-00066 мол_а, № 18-501-12011 ННИО_а.

*Список использованных источников*

1. Д.И. Меркулов // В сб.: Труды конференции-конкурса молодых ученых, 2017, с. 150 – 157.
2. C. Goubault, P. Jop, M. Fermigier, J. Baudry, E. Bertrand, J. Bibette // Physical Review Letters, 2003, Vol. 91, No. 26, p. 260802.
3. R. Dreyfus, J. Baudry, M.L. Roper, M. Fermigier, H.A. Stone, J. Bibette // Nature, 2005, Vol. 437, No. 7060, pp. 862 – 865.
4. A. Cebers // Magnetohydrodynamics, 2005, Vol. 41, No. 1, pp. 63 – 72.
5. K. Zimmermann, I. Zeidis, V.A. Naletova, V.A. Turkov // Phys. Stat. Solidi., 2004, Vol. 1, No. 12, pp. 3706 – 3709.
6. Yoonho Kim, Hyunwoo Yuk, Ruike Zhao, Shawn A. Chester, Xuanhe Zhao // Nature, 2018, Vol. 558, pp. 274 – 279.
7. Д.А. Пелевина, Д.И. Меркулов, И.М. Зейдис, В.А. Турков, В.А. Налетова // В сб.: XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, 2019, Т. 2, с. 29 – 31.
8. J. Happel, H. Brenner. Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media // Springer Science & Business Media, 2012, 553 p.

# ИССЛЕДОВАНИЕ АДИАБАТНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ СТЕНКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ГАЗО-КАПЕЛЬНОМ ПОТОКЕ

*С.С. Попович*

**Аннотация.** Представлены результаты экспериментального исследования тепловых параметров обтекания сверхзвуковым потоком плоской стенки при наличии в потоке мелкодисперсных водных капель. Относительный массовый расход жидкости (массовая концентрация) варьировался в диапазоне 0.05-0.5%. Жидкость (дистиллированная вода) распылялась через центробежные форсунки в воздушный поток в форкамере. Далее определялась адиабатная температура стенки и коэффициент восстановления температуры для данных условий обтекания. Число Маха набегающего потока составило 3.0, критерий Рейнольдса по длине динамического пограничного слоя – не менее $2 \cdot 10^7$ на срезе сопла перед моделью. Исследования выполнены на экспериментальной базе НИИ механики МГУ.

**Введение.** Вследствие вязкой диссипации в пограничном слое сверхзвукового потока сжимаемого газа с числом Прандтля меньшим единицы (характерно для большинства газов) происходит перераспределение температуры торможения [1]. В результате температура во внутренней части пограничного слоя оказывается ниже, а во внешней части – выше, чем температура торможения в основном потоке (рис. 1). Если стенка теплоизолирована, то температура пристенного слоя газа будет равняться адиабатной температуре стенки $T_{aw}^{*}$ (adiabatic wall temperature). На рис. 1 показаны профили статической (термодинамической) температуры и температуры торможения в пограничном слое при обтекании плоской стенки. При этом, как известно, при увеличении скорости течения термодинамическая температура потока значительно снижается.

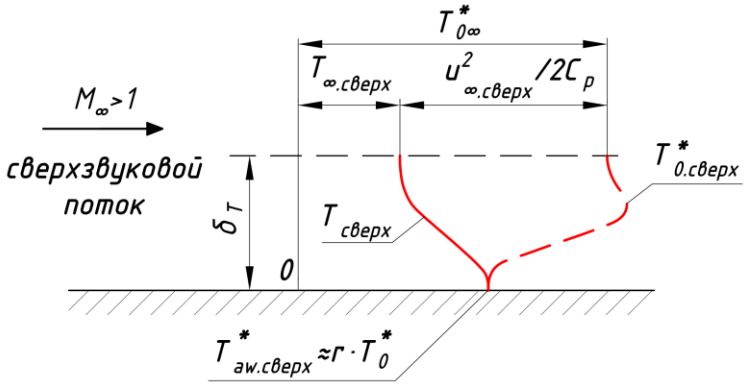



*Рис. 1. Профиль температуры в тепловом пограничном слое при обтекании плоской стенки сверхзвуковым потоком сжимаемого газа*

$M_\infty$ – число Маха набегающего потока; $\delta_T$ – толщина теплового пограничного слоя, мм; $T_{сверх}$ ($T_{\infty.сверх}$) – статическая температура в сверхзвуковом потоке (в невозмущенном потоке), К; $T_{0.сверх}^*$ ($T_{0\infty}^*$) – температура торможения в сверхзвуковом потоке (в невозмущенном потоке), К; $T_{aw.сверх}^*$ – адиабатная температура стенки в сверхзвуковом потоке, К; $u_{\infty.сверх}$ – скорость течения сверхзвукового потока, м/с; $C_p$ – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, Дж/(кг·К); $r$ – коэффициент восстановления температуры

В практике инженерных и научных расчётов адиабатная температура стенки $T_{aw}^*$ определяется через коэффициент восстановления температуры $r$:

$$T_{aw}^* = T_0^* \cdot \frac{1 + r\dfrac{k-1}{2}\mathrm{M}^2}{1 + \dfrac{k-1}{2}\mathrm{M}^2}, \qquad (1)$$

где $T_0^*$ – температура торможения в потоке, К; М – число Маха; $k$ – показатель адиабаты газа.

При турбулентном безотрывном обтекании пластины и тел вращения с гладкими образующими (цилиндр, конус) коэффициент восстановления температуры составляет около 0.89±0.01 [2]. Однако стенка может

нагреваться ($r$ возрастает) или охлаждаться ($r$ снижается) при воздействии градиента давления, усложнении формы поверхности и наличии сильных возмущений в потоке (скачки уплотнения, отрывные течения, фазовые переходы).

В исследованиях сверхзвуковых однофазных потоков уменьшение адиабатной температуры стенки фиксируется при продольном обтекании цилиндра за кольцевым ребром, на плоской стенке за ребром и ступенькой, на конической поверхности за различными обтекателями в форме сферы, цилиндра, конуса или диска [3-6].

В работе [7] экспериментально показано, что адиабатная температура стенки, обтекаемой сверхзвуковым потоком влажного пара, может быть равна термодинамической температуре потока, если в потоке присутствуют капли воды определенного размера и концентрации. В работе [8] показано, что наличие даже очень малой концентрации капель в основном потоке может приводить к значительному снижению температуры адиабатной стенки.

Целью данной работы является экспериментальное изучение охлаждения стенки при обтекании её сверхзвуковым потоком за счет использования свойств газокапельных жидкостей с малой массовой концентрацией (до процента) жидкой фазы. В таком случае жидкая фаза практически не влияет на свойства основного газового потока, при этом сами капли могут охлаждаться до термодинамической температуры потока. Организовав выпадение охлажденных капель на стенку, возможно удастся добиться снижения температуры ее поверхности.

**1. Модели и условия проведения экспериментов.** Проведена серия экспериментальных измерений темпа охлаждения плоской модели, обтекаемой сверхзвуковым воздушно-капельным потоком на сверхзвуковом аэродинамическом стенде АР-2 (рис. 2). Число Маха набегающего потока M=3.0. Относительный массовый расход

жидкости варьировался в диапазоне 0.05-0.5%. Жидкость (дистиллированная вода) распылялась через центробежную форсунку в воздушный поток в форкамере.

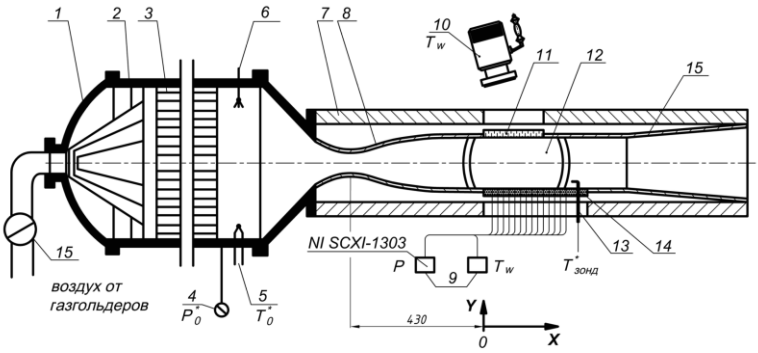



*Рис. 2. Схема проведения эксперимента: $T_0^*$ – полная температура набегающего потока; $P_0^*$ – полное давление в форкамере; $P_w$ – статическое давление на стенке; $T_w^*$ – температура адиабатной стенки*

Сверхзвуковая установка АР-2 оснащена закрытой рабочей частью и плоским регулируемым сверхзвуковым соплом [9]. Размеры рабочего канала: длина – 450 мм, ширина – 70 мм, высота – 98 мм. В экспериментах регистрировалось изменение температуры обтекаемой поверхности (темп охлаждения). Измерения проводились на поверхности нижней стенки (тепловизором FLIR ThermaCAM SC-3000 и термопарами), непосредственно стыкуемой к сверхзвуковому соплу. Визуализация картины течения осуществлялась теневым методом при помощи прибора Теплера ИАБ-451. Также при помощи лазерного ножа и фотоаппаратуры визуализировалось распределение капель в поперечных и продольных сечениях канала.

Жидкость (дистиллированная вода) распылялась в воздушный поток в форкамере, через центробежные форсунки немецкой фирмы Lechler с факелом распыла в

форме полого конуса. Распыл осуществлялся через одну форсунку, расположенную на оси форкамеры. Данные о распределении капель по размерам в зависимости от перепада давления на форсунках предоставлены фирмой-изготовителем.

**Результаты.** В начальный момент времени температура торможения сухого воздуха и давление торможения в форкамере составляли $T_0^*$=294 К и $P_0^*$=0.6 МПа, соответственно. Подача воды осуществлялась при избыточном давлении 300 и 600 кПа, которое поддерживалось постоянным в течение около 2 минут. Массовый расход воды составил до 0.5% от массового расхода воздуха (рис. 3).

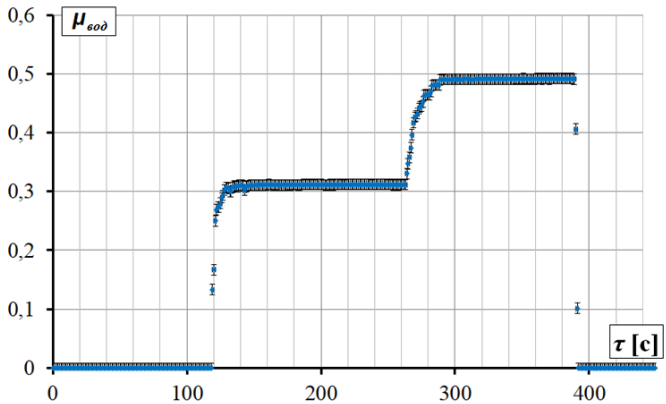



*Рис. 3. График изменения в процессе эксперимента относительного массового расхода воды $\mu_{вод}=G_{вод}/G_{взд}$*

При подаче воды появлялась довольно интенсивная неравномерность в распределении адиабатной температуры стенки по поверхности модели. Локальное снижение температуры составляло до 8 градусов в сравнении с течением сухого воздуха. Наличие капель в потоке приводило к образованию ледяных наростов на обтекаемой поверхности, которые в свою очередь становились ис-

точником скачков уплотнения, что вызывало сильную неравномерность в изменении статического давления и температуры на поверхности модели (рис. 4, 5).

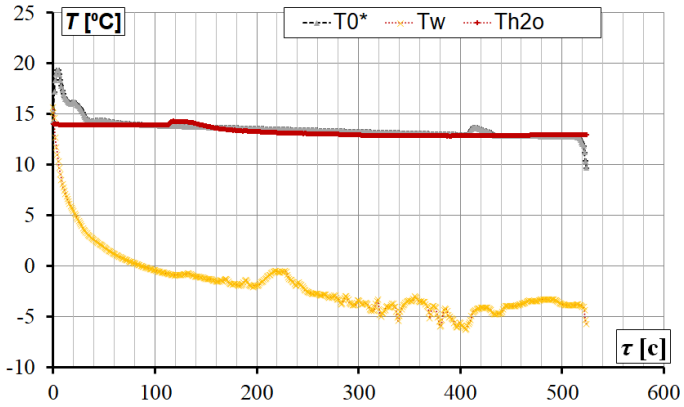



*Рис. 4. График изменения температуры стенки при течении газо-капельного потока на плоской стенке*

На режимах относительного расхода воды 0.2-0.3% существенно возрастала нестационарность течения воздушно-капельного потока, а именно частота появления сгустков жидкости в потоке. Наличие жидкости в потоке было видно невооруженным глазом. Визуализация картины течения лазерным ножом (рис. 5) показала, что после прохождения сверхзвукового сопла большая часть капель сосредоточена вблизи оси канала в виде пятна, форма и размеры которого зависят как от начальной массовой концентрации жидкости, так и от начального числа Маха потока.

С ростом массовой концентрации до 0.4-0.5% на поверхности канала появлялись ледяные «хвосты» (рис. 5). Они приводили к неравномерности в распределении температуры поверхности. Так температура поверхности свободной ото льда была фактически равна температуре

поверхности, обтекаемой однофазным воздушным потоком с идентичными начальными параметрами. Температура поверхности в области образования ледяных «хвостов» была на 6-8 К ниже.

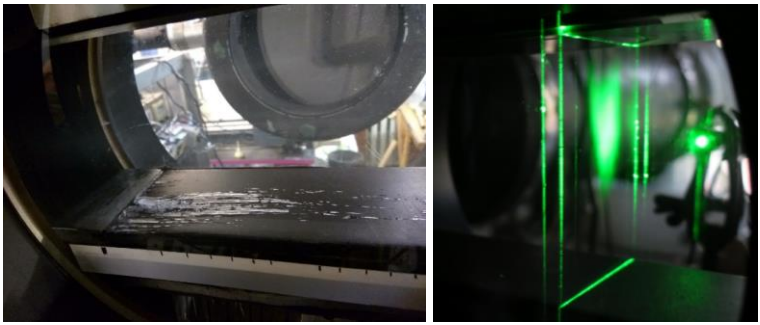


*Рис. 5. Выпадение конденсата из сверхзвукового воздушно-капельного потока на поверхность модели (слева); визуализация течения лазерным ножом (справа)*

**Заключение.** Приведены результаты измерения температуры плоской теплоизолированной (непроницаемой для теплового потока) поверхности, обтекаемой сверхзвуковым потоком с числом Маха M=3.0. Исследовались два режима обтекания. Первый – однофазный поток сухого воздуха, второй – воздушно-капельный поток, состоящий из смеси сухого воздуха и мелкодисперсных водных капель. Наличие капель в потоке приводило к образованию ледяных наростов на обтекаемой поверхности, что вызывало сильную неравномерность в изменении температуры на поверхности модели.

Автор выражает благодарность А.И. Леонтьеву, А.Г. Здитовцу, Ю.А. Виноградову, М.М. Стронгину и Н.А. Киселеву за ценные замечания и помощь в подготовке и проведении экспериментов.

Работа выполняется в рамках госбюджетной темы АААА-А16-116021110200-5 НИИ механики.

*Список использованных источников*

1. Бурцев С.А., Леонтьев А.И. Исследование влияния диссипативных эффектов на температурную стратификацию в потоках газа (обзор) // Теплофизика высоких температур. 2014. Т. 52, № 2. С. 310-322.
2. Лапин Ю.В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа // Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1970, 344 стр.
3. Brinich P.F. Recovery temperatures and heat transfer near two-dimensional roughness elements at Mach 3.1 // NACA TN4213. 1958.
4. Чжен П. Отрывные течения. М.: Мир. Т. 3. 1973. 335 с.
5. Leontiev A.I., Popovich S.S., Vinogradov Y.A., Strongin M.M. Experimental research of heat transfer in supersonic separated compressible gas flow // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1129, N. 012022. P. 1–4.
6. Попович С.С. Аэродинамическое охлаждение стенки при течении сверхзвукового потока в следе за обратным уступом // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2019. Т. 20, № 1. С. 1–11.
7. Игнатьевская Л.А. Исследование двухфазного пограничного слоя на плоской стенке // Дисс. к.т.н. МЭИ. 1971.
8. Леонтьев А.И., Осипцов А.Н., Рыбдылова О.Д. Пограничный слой на плоской пластине в сверхзвуковом газокапельном потоке. Влияние испаряющихся капель на температуру адиабатической стенки // ТВТ. 2015. Т.53, №6. С. 910-917.
9. Попович С.С. Экспериментальное исследование теплоотдачи при течении сверхзвукового потока за уступом // Труды конференции-конкурса молодых ученых. 15–17 октября 2018 г. / Под ред. академика РАН А.Г. Куликовского, проф. В.А. Самсонова. Изд-во Моск. ун-та. М, 2019. С. 114–121.

# О ДИНАМИКЕ АЭРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТОМ

*Д. Сакано*

**Аннотация.** В работе рассмотрено движение упруго закрепленного крыла, соединенного с пьезоэлементом. Построена математическая модель системы. Получены условия неустойчивости тривиального положения равновесия. Проведено численное моделирование динамики системы. Исследованы периодические режимы движения в зависимости от параметров. Такие режимы можно использовать, чтобы пьезоэлемент вырабатывал энергию.

**Введение.** Исследованию колебаний, возникающих в аэроупругих системах, посвящено значительное количество работ (например, [1-4]). В последнее время активно исследуются возможности использования таких систем в качестве возобновляемых источников энергии. Так, в работе [5] изучается система, в которой энергия колебаний преобразуется в электроэнергию с помощью пьезоэлемента. В данной работе рассмотрена система, в которой для преобразования энергии потока в электричество используются как колебания, так и ротация рабочего элемента.

**1. Описание системы и уравнения движения.** Схема рассматриваемой механической системы представлена на рис. 1. Крыло может двигаться поступательно вдоль некоторой неподвижной горизонтальной прямой $\ell$ и вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку $A$ хорды (будем считать, что эта точка находится на прямой $\ell$). Крыло соединено с пьезоэлементом таким образом, что перемещение крыла вдоль $\ell$ приводит к деформации пьезоэлемента и, соответственно, выработке напряжения. Пусть система помещена в поток среды, скорость которого на бесконечности постоянна, перпендикулярна $\ell$ и равна $V$.

Введем неподвижную систему координат $O_{xy}$, направив ось $O_y$ вдоль прямой $\ell$, а ось $O_x$ – против скорости $V$.

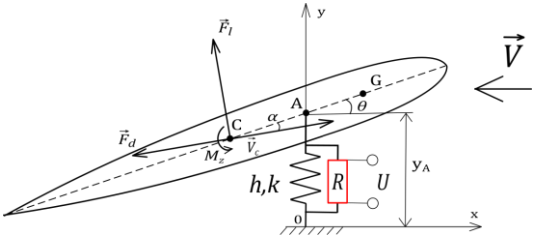



*Рис.1 Схема механизма (вид сверху).*

Состояние рассматриваемой электромеханической системы можно задать тремя переменными: координатой $y_A$ точки $A$, углом $\theta$ между хордой крыла и осью $x$ и напряжением $U$, вырабатываемым пьезоэлементом.

Представим аэродинамическое воздействие на крыло в виде подъемной силы $\vec{F}_l$ и силы лобового сопротивления $\vec{F}_d$, приложенных в середине $C$ хорды, а также аэродинамического момента $M_z$. В рамках квазистатического подхода эти величины определяются следующими формулами:

$$F_d = \frac{\rho S}{2} V_c^2 C_d(\alpha),\ F_l = \frac{\rho S}{2} V_c^2 C_l(\alpha)\ ,\ M_z = \frac{\rho S}{2} b V_c^2 C_m(\alpha)$$

Здесь $S$ – характерная площадь крыла, $b$ – хорда крыла, $m$ – масса крыла, $\rho$ – плотность воздуха, $V_c$ – воздушная скорость точки $C$, $C_d(\alpha)$, $C_l(\alpha)$ и $C_m(\alpha)$ – безразмерные коэффициенты лобового сопротивления, подъемной силы и момента относительно $C$.

Тогда уравнения движения примут следующий вид:

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} + ml\,\ddot{y}_A \cos\theta =$$

$$= \frac{\rho S}{2} V_C^2 (bC_m - r(C_d \cos\alpha + C_l \sin\alpha) + l(C_d \cos\Theta + C_l \sin\Theta))$$

$$m(l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta + \ddot{y}_A) =$$

$$= \frac{\rho S}{2} V_c^2 (C_d \sin\Theta + C_l \cos\Theta) - k y_A - h\dot{y}_A + cU$$

$$C_p \dot{U} + U/R + c\dot{y}_A = 0$$

Здесь $\Theta = \theta - \alpha$, $R$ – внешнее сопротивление в цепи пьезоэлемента, $k$ и $h$ – коэффициенты эффективной жесткости и демпфирования пьезоэлемента, $J$ – момент инерции крыла относительно точки $A$, $c$ – коэффициент электромеханического взаимодействия и $C_p$ – эффективная емкость пьезоэлектрического элемента.

Для упрощения записи проведем обезразмеривание:

$$\tau = V_* t/b, \bar{V}_c = V_c/V_* \quad , \quad \bar{V} = V/V_* \quad , \quad \bar{U} = C_p U/cb \quad ,$$

$$\bar{m} = 2m/\rho Sb \ , \ \bar{l} = l/b \ , \ \bar{r} = r/b \ , \ \bar{y}_A = y_A/b \ , \ \bar{k} = 2kb/\rho S V_*^2 \ ,$$

$$\bar{R} = C_P V_* R/b \ , \ \mathrm{X} = 2bc^2/\rho S V_*^2 C_p \ , \ \bar{J} = 2J/\rho S b^3 \ , \ \bar{h} = 2h/\rho S V_*$$

Здесь $V_*$ – некоторая характерная скорость.

Запишем уравнения движения в безразмерном виде:

$$(\bar{J} + \bar{m}\bar{l}^2)\ddot{\theta} + \bar{m}\bar{l}cos\theta\ddot{\bar{y}}_A = \bar{V}_c^2 (C_m - \bar{r}(C_d sin\alpha + C_l cos\alpha))$$

$$\bar{m}\bar{l}\,(\cos\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2) + \bar{m}\ddot{\bar{y}}_A + \bar{h}\dot{\bar{y}}_A =$$

$$-\bar{V}_c^2 (C_d \sin\Theta - C_l \cos\Theta) - \bar{k}\bar{y}_A + \mathrm{X}\bar{U}$$

$$\dot{\bar{U}} + \bar{U}/\bar{R} + \dot{\bar{y}}_A = 0$$

Здесь точка обозначает производную по $\tau$.

В силу симметрии в системе существует тривиальное положение равновесия ($\theta = \theta_0 = 0$, $\bar{y}_A = \bar{y}_{A0} = 0$, $\bar{U} = \bar{U}_0 = 0$).

Уравнения движения, линеаризованные вблизи этого равновесия, имеют следующий вид:

$$(\bar{J} + \bar{m}\bar{l}^2)\Delta\ddot{\theta} - \bar{V}\bar{r}B_1\Delta\dot{\theta} - \bar{V}^2 B_1\Delta\theta + \bar{l}\bar{m}\Delta\ddot{\bar{y}}_A + \bar{V}B_1\Delta\dot{\bar{y}}_A = 0$$

$$\bar{m}\bar{l}\,\Delta\ddot{\theta} - \bar{V}\bar{r}B_2\Delta\dot{\theta} - \bar{V}^2 C_l^{\alpha}\Delta\theta + \bar{m}\Delta\ddot{\bar{y}}_A + (\bar{h} + \bar{V}^2 B_2)\Delta\dot{\bar{y}}_A + \bar{k}\,\Delta\bar{y}_A$$
$$-\mathrm{X}\Delta\bar{U} = 0$$

$$\dot{\bar{y}}_A + \dot{\bar{U}} + \bar{U}/\bar{R} = 0$$

Здесь $C_d^0 = C_d(0)$, $C_m^{\alpha} = dC_m/d\alpha\big|_{\alpha=0}$, $C_l^{\alpha} = dC_l/d\alpha\big|_{\alpha=0}$, $B_1 = C_m^{\alpha} - \bar{r}(C_d^0 - C_l^{\alpha})$, $B_2 = C_d^0 - C_l^{\alpha}$.

**2. Эволюция корней характеристического полинома.** Характеристический полином оказывается достаточно громоздким. Поэтому рассмотрим частный случай. Будем считать, что крыло тяжелое ($\bar{m} = \bar{m}_0/\varepsilon^2$, $\bar{J} = \bar{J}_0/\varepsilon^2$). Здесь $\varepsilon$ малый параметр ($\varepsilon \ll 1$). Из экспериментов известно, что $C_d^0$ мал. Пусть $C_d^0 = \varepsilon C_{d0}$.

Предположим также, что центр масс и точка крепления пружины совпадают ($\bar{l} = 0$).

Будем искать корни характеристического многочлена в виде $\lambda = \lambda_0' + \varepsilon\lambda_1' + \varepsilon^2\lambda_2' + o(\varepsilon^2)$.

Тогда корни характеристического полинома описываются следующими приближенными формулами:

$$\lambda_1 = -1/\bar{R} + O(\varepsilon)$$

$$\lambda_{2,3} = \pm\varepsilon i\sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{m}_0}} - \frac{\varepsilon^2}{2\bar{m}_0}\left((\mathrm{X}\bar{R} + \bar{h}) - \frac{\bar{J}_0\bar{k}\bar{V}C_l^{\alpha}}{\bar{m}_0\bar{V}^2 D - \bar{J}_0\bar{k}}\right) + o(\varepsilon^2)$$

$$\lambda_{4,5} = \pm\varepsilon i\bar{V}\sqrt{\frac{D}{\bar{J}_0}} - \frac{\varepsilon^2 D}{2}\left(\frac{\bar{r}}{\bar{J}_0} + \frac{C_l^{\alpha}}{\bar{m}_0\bar{V}^2 D - \bar{J}_0\bar{k}}\right)\bar{V} + o(\varepsilon^2)$$

Здесь $D = \bar{r}C_l^{\alpha} - C_m^{\alpha}$.

Отсюда следует, что если $D < 0$, то имеет место неустойчивость. Если $D \geq 0$, то возможна асимптотическая устойчивость.

Проследим за эволюцией корней характеристического уравнения на комплексной плоскости при изменении скорости потока.

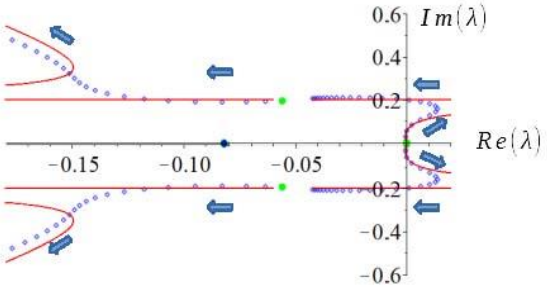



*Рис.2. Эволюция корней характеристического уравнения*

Для расчетов выберем следующие значения параметров: $\bar{h} = 8.8$, $\bar{k} = 3.2$ , $\bar{R} = 12$ , $\mathrm{X} = 0.06$ , $\bar{r} = 0.01$ , $\bar{m} = 80$, $\bar{J} = 16$, $\bar{V} = 0 \sim 5$ (при этом $D > 0$).

Точками на рис. 2 обозначены численные решения, а линиями – решения, которые мы получили при помощи приближенной формулы. Стрелки соответствуют увеличению скорости. Зеленые точки – это численное решение при $\bar{V} = 0$. Стрелки указывают направление перемещения корней при увеличении скорости потока.

Видно, что приближенные формулы в достаточно широком диапазоне скорости ветра дают значения, близкие к точным.

**3. Периодические режимы.** Если положение равновесия неустойчиво, то в системе могут возникнуть периодические решения. Исследуем их численно.

Рассмотрим зависимость амплитуд угла поворота крыла, смещения точки $A$ крепления пружины к крылу и вырабатываемого напряжения от параметра $\bar{l}$ .

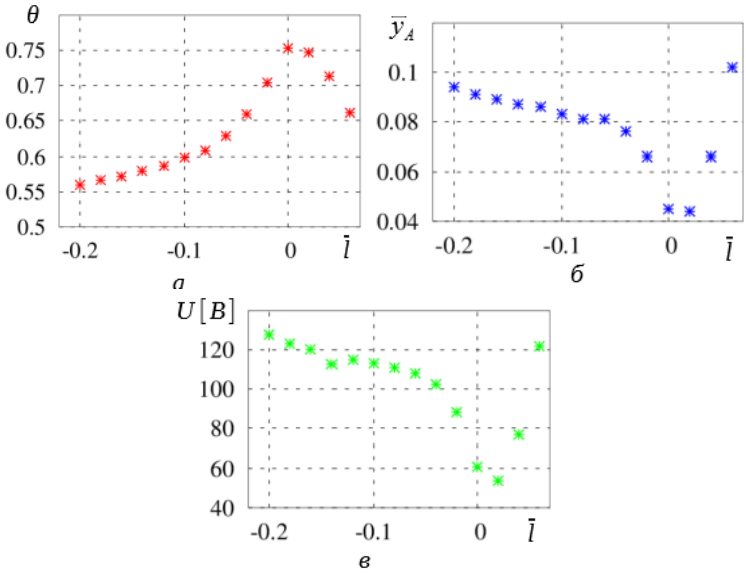



*Рис.3.а) амплитуда угла поворота крыла; б) амплитуда смещения точки A; в) амплитуда вырабатываемого напряжения*

При $\bar{V} = 1.5$, $\bar{r} = 0.1$ и $\bar{l} \le 0.06$ имеет место неустойчивость, и в системе существует колебательный режим. При $\bar{l} > 0.06$ цикл исчезает.

Помимо колебаний, крыло может совершать полный оборот вокруг точки $A$ (ротацию). Проведем численное исследование таких авторотационных режимов.

Рассмотрим зависимость средней угловой скорости крыла, смещения точки $A$ крепления пружины и вырабатываемого напряжения от параметра $\bar{l}$.

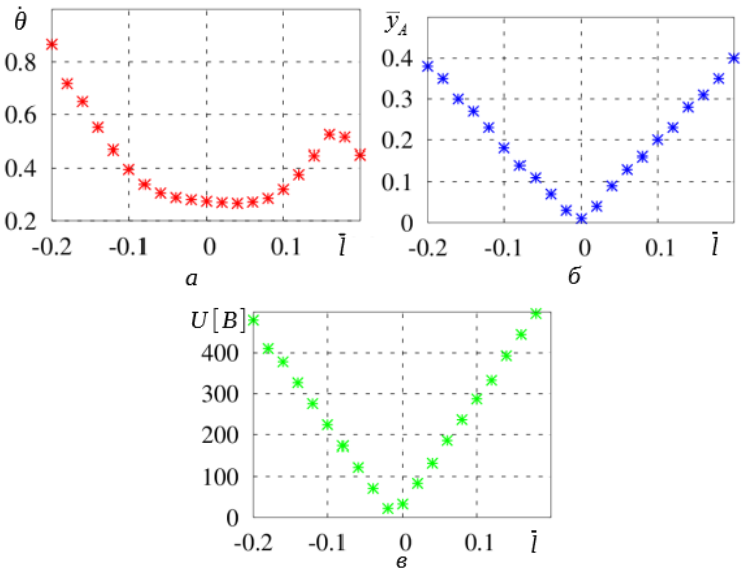



*Рис.4. а) амплитуда средней угловой скорости крыла; б) амплитуда смещения точки А; в) амплитуда вырабатываемого напряжения*

При $\bar{r} = -0.25$ положение равновесия неустойчиво ($D < 0$), и существует ротационный режим.

Отметим, что амплитуда поступательных колебаний крыла достаточно быстро возрастает с ростом абсолютной величины параметра $\bar{l}$. При таких значениях $y_A$ необходимо учитывать нелинейность пружины.

**Заключение.** Исследована динамика аэроупругой системы с пьезоэлементом. Получены условия неустойчивости тривиального положения равновесия. Исследованы колебательные и авторотационные режимы движения системы.

*Список использованных источников*

1. C. C. Marsden, S. J. Price. The aeroelastic response of a wing section with a structural freeplay nonlinearity: An experimental

investigation // Journal of Fluids and Structures 21 (2005) 257-276
2. X. Amandolese, S. Michelin, M. Choquel. Low speed flutter and limit cycle oscillations of a two-degree-of-freedom flat plate in a wind tunnel // Journal of Fluids and Structures 43 (2013) 244-255
3. Б.Я. Локшин, В.А. Привалов, В.А. Самсонов. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. 86 с.
4. В.А. Самсонов, С.В. Цыпцын. Параметрический анализ в задаче об устойчивости равновесия упруго закрепленного тела в потоке среды // Проблемы современной механики. К юбилею Л.И. Седова. 1998. С. 87–93.
5. A. Abdelkefi, M. Ghommem, A. O. Nuhait, M. R. Haji. Nonlinear analysis and enhancement of wind-based piezoaeroelastic energy harvesters // Journal of Sound and Vibration 333 (2014) 166-177

# ФОРМИРОВАНИЕ МАГМАТИЧЕСКОГО ОЧАГА ПРИ ВНЕДРЕНИИ МАГМЫ В ЗЕМНУЮ КОРЫ

*И.С. Уткин*

**Аннотация.** В работе построена модель, позволяющая исследовать процесс формирования магматического очага при последовательном внедрении порций магмы. Модель основана на уравнении теплопроводности и учитывает реальные диаграммы плавления магмы и пород. Перемещение пород при поступлении порции магмы описывается аналитическим решением задачи нагружения внутренним давлением эллиптической трещины, находящейся в бесконечной среде. Показано, что размер очага существенно превышает размер области внедрения магмы вследствие перемещения магмы и пород земной коры, их прогрева и плавления.

**Введение.** Основным механизмом транспорта магматического расплава в земной коре является образование трещин, по которым магма поднимается к поверхности [1]. Эти трещины называются дайками. Прорывы даек на поверхность сопровождаются лавовыми извержениями, характерным примером которых является Большое Трещинное Толбачинское извержение (БТИИ, 1975–76 гг.) на Камчатке. Тогда на поверхность поступило более 1 км$^3$ магмы [2].

Дайки поднимаются с глубин, составляющих десятки километров, иногда 150–200 км [3]. Ширина даек варьируется от нескольких сантиметров до десятков метров. Подъем магмы в трещинах контролируется силами плавучести и тектоническим полем напряжений. Большинство даек не доходит до поверхности, а блокируется на уровне нейтральной плавучести [4], либо структурными барьерами в виде более прочных слоев пород. В результате многократного внедрения магмы в виде даек в приповерхностную область земной коры (на глубину порядка нескольких километров) происходит ее

плавление с образованием магматических очагов, способных достигать в объеме тысяч кубических километров.

Процесс роста магматического очага изучается с помощью как глобальных геодинамических моделей [5], так и более детальных локальных моделях, где рассматривается внедрение индивидуальных даек и теплообмен между магмой и вмещающими породами [6,7].

Модели первого типа применяются в случае областей с характерным размером в десятки километров и шагом расчетной сетки в несколько сотен метров. Такие модели позволяют оценить размеры и положение магматических очагов, но не учитывают тонкие теплообменные процессы происходящие при реальном транспорте отдельных порций магмы.

Модели второго типа рассматривают либо заранее заданное расположение даек в пространстве, либо произвольное расположение, но не учитывают упругую реакцию пород на поступление магмы. В настоящем исследовании предлагается модель, в которой описанные ограничения частично смягчены [8].

**1. Постановка задачи.** Задача решается в плоской постановке. Рассматривается прямоугольная расчетная область, в начальный момент времени $t = 0$ заполненная породой. В последующие моменты времени, при $t > 0$, в расчетную область внедряются дайки, заполненные магмой. Внедрение дайки считается мгновенным, поскольку характерное время распространения трещины пренебрежимо мало по сравнению с рассматриваемым процессом формирования очага.

Параметры даек, а именно длина, величина раскрытия (ширина), расположение и ориентация в пространстве выбираются случайным образом из заранее заданных интервалов значений, характерных для исследуемого процесса. Частота возникновения трещин, то есть количество даек, внедренных в область на единицу времени, рассчитывается таким обра-

зом, чтобы средний расход магмы соответствовал заданному значению.

Теплообмен магмы с вмещающими породами описывается следующей системой уравнений:

$$\rho C\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{V}\mathrm{grad}(T)\right)=\mathrm{div}\left(k\,\mathrm{grad}(T)\right)+\rho L\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}+\mathbf{V}\,\mathrm{grad}\;\alpha=0, \qquad (2)$$

$$\rho C=\rho_{\mathrm{r}}C_{\mathrm{r}}(1-\alpha)+\rho_{\mathrm{m}}C_{\mathrm{m}}\alpha, \qquad (3)$$

$$k=k_{\mathrm{r}}(1-\alpha)+k_{\mathrm{m}}\alpha, \qquad (4)$$

$$\beta_{\mathrm{r}}=\beta_{\mathrm{r}}(T),\quad \beta_{\mathrm{m}}=\beta_{\mathrm{m}}(T). \qquad (5)$$

Здесь: $T$ – температура; $\mathbf{V}$ – вектор скорости; $L$ – скрытая теплота кристаллизации; $k_i$, $\rho_i$, $C_i$ и $\beta_i$ – коэффициенты теплопроводности, плотности, удельные теплоемкости и концентрации кристаллов, соответственно, магмы (индекс m) и пород (индекс r); $\alpha$ – объемная доля магмы.

Уравнение (1) описывает изменение температуры за счет адвекции материала, теплопроводности и выделения/поглощения скрытой теплоты кристаллизации. Для объемной доли магмы выполнено условие вмороженности в жидкую частицу (2). Теплоемкость (3) и теплопроводность (4) осредняется с учетом объемной доли магмы. Концентрации кристаллов в породах и магме (5) вводятся как полиномиальные зависимости от температуры и получаются путем аппроксимации экспериментальных данных (см. [9, 10]).

В начальный момент времени $t = 0$ задается геотермальный градиент температуры: $T = T_0 + z\Delta\mathrm{T}$, $\Delta\mathrm{T} = 40$ C°, а также отсутствие магмы: $\alpha = 0$. На горизонтальных границах в течение расчета поддерживается постоянная температура, значения которой определяются из начальных условий, на вертикальных границах задано условия отсутствия потока тепла.

**2. Расчет поля перемещений.** Поле скорости **V** рассчитывается на основе поля перемещений **W** = (*u*, *v*), определяемого из задачи о раскрытии плоской трещины избыточным над литостатическим давлением $\Delta p$. Поскольку внедрение дайки считается мгновенным, перемещение пород и магмы происходит за один шаг по времени $\delta t$: **V** = **W**/$\delta t$.

Рассматривается задача плоского деформирования бесконечной линейно-упругой среды с трещиной эллиптического сечения, имеющего полуоси $a_0$ и $b_0 = 0$. На бесконечности напряжения считаются равными нулю, на свободной поверхности трещины задано нормальное напряжение $\Delta p$. На Рис. 1 показан пример эллиптической трещины, цветом показана величина перемещений.

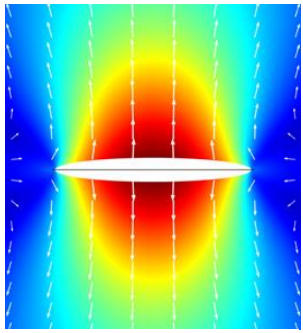


*Рис. 1 Дайка в виде эллиптической трещины*

У поставленной задачи существует точное решение, описанное в работе [11]. При этом искомое решение является суперпозицией трех решений: первое получено для одноосного растяжения напряжением S = $-\Delta p$, действующим на бесконечности и направленным вдоль трещины; второе – для одноосного растяжения с напряжением S = $-\Delta p$, перпендикулярным трещине; третье – для равномерного нагружения на бесконечности всей области давлением $\Delta p$. Все выражения записываются в эллиптических координатах $\eta$, $\xi$, связанных с декартовыми координатами соотношениями: $X = a_0 \cosh\xi \cos\eta$ , $Z = a_0 \sinh\xi \sinh\eta$ .

Для первых двух решений используется общая формула для распределения перемещений при одноосном растяжении напряжением S, приложенным на бесконечности под углом $\varphi$ к трещине:

$$u = \frac{Sa_0}{4nG}\left[A \cdot \sinh\xi \cos\eta + B \cdot \cosh\xi \sin\eta\right],$$
$$v = \frac{Sa_0}{4nG}\left[A \cdot \cosh\xi \sin\eta - B \cdot \sinh\xi \cos\eta\right], \quad (6)$$

где A и B – функции, приведенные в [11], зависящие от $\eta$, $\xi$, $\varphi$, $K$. Здесь $K = 3 - 4\nu$; $n = \cosh 2\xi - \cos 2\eta$; $G$ и $\nu$ – модуль сдвига и коэффициент Пуассона вмещающих пород (в настоящем исследовании они считаются постоянными). Вместо $\varphi$ подставляются его значения 0 и 90° для первого и второго решения соответственно. Для третьего решения выражения для перемещений принимают следующий вид:

$$u = \frac{\Delta p a_0}{8G}[K \cosh\xi \sin\eta - \cosh\xi \sin\eta],$$
$$v = \frac{\Delta p a_0}{8G}[K \sinh\xi \sin\eta - \sinh\xi \sin\eta]. \quad (7)$$

Избыточное над литостатическим давление $\Delta p$ вводится при помощи приведенных выше уравнений так, что после внедрения дайка имеет форму эллипса с полуосями $a$ и $b$:

$$\Delta p = 2G\frac{b}{a}.$$

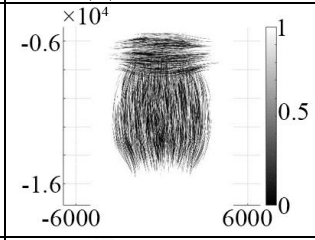
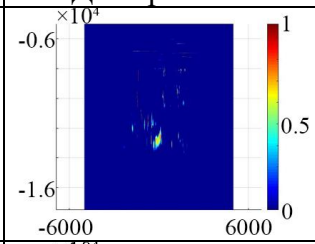
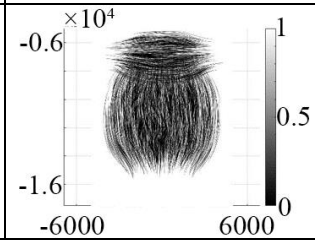
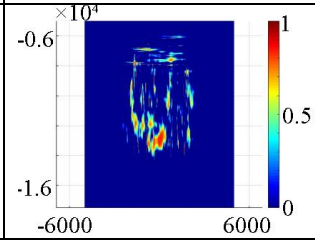
**4. Результаты.** Дискретизация уравнений производится на прямоугольной декартовой сетке с шагом меньшим, чем характерная ширина дайки. Для минимизации численной диффузии при расчете адвективного переноса пород используется гибридный метод PIC/FLIP, в котором моделируемая сплошная среда, кроме сетки, дискретизируется набором частиц-маркеров [12]. Уравнение теплопроводности решается методом дробных шагов [13].

На Рис. 2 показаны результаты расчета формирования магматического очага при расходе втекающей магмы $Q$ = 1 м$^3$/с. Дайки внедряются вертикально в диапазоне глубин от 12 до 5 км. Если центр дайки находится на глубине от 6 до 4 км, то внедрение объема магмы – горизонтальное (силлы).

Такая ситуация характерна для областей активного вулканизма.

До 3 тысяч лет каждая порция магмы после поступления кристаллизуется, и объемная доля расплава оказывается небольшой. Перемещение вещества выводит дайки за пределы очага. Без подпитки теплом они достаточно быстро остывают, так что область, занятая дайками, существенно больше областей, содержащих расплав.

Далее формируются две области, обогащенные расплавом: на глубинах 12–14 км, где магма внедряется в наиболее горячие породы, и в приповерхностной области, где происходит изменение направления внедрения. Между этими областями образуется протяженная система каналов, по которым может происходить подпитка приповерхностного очага, однако данный процесс в текущей модели не рассматривается.

| Время | Доля магмы | Доля расплава |
|---|---|---|
| 2000 лет |  |  |
| 3000 лет |  |  |

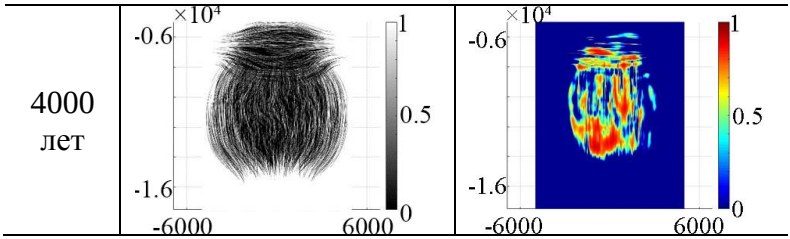



*Рис. 2. Результат расчета формирования магматического очага.*

**Заключение.** Построена модель роста магматического очага путем многократного внедрения магмы во вмещающие породы. Показано, что при характерных для реальных вулканических систем наборах параметров, описывающих размеры, пространственное расположение и ориентацию даек, магматический очаг формируется в виде набора большого количества связанных друг с другом областей с высокой концентрацией расплава.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00352.

*Список использованных источников*

1. Rubin A.M. Propagation of magma-filled cracks // Annual Review of Earth and Planetary Sciences, 1995, vol. 23, no. 1, pp. 287-336.
2. Большое трещинное Толбачинское извержение. Камчатка. 1975-1976 / *под. ред. С.А. Федотова, Г.Б. Флерова, А.М. Чиркова*. М.: Наука, 1984. 637с.
3. Lensky N.G. et al. Bubble nucleation as a trigger for xenolith entrapment in mantle melts // Earth and Planetary Science Letters, 2006, vol. 245, no. 1-2, pp 278-288.
4. Walker G.P.L. Gravitational (density) controls on volcanism, magma chambers and intrusions // Australian Journal of Earth Sciences, 1989, vol. 36, no. 2, pp. 149-165.
5. Colon D.P., Bindeman I.N., Gerya T. V. Thermomechanical modeling of the formation of a multilevel, crustal ‐ scale magmatic system by the Yellowstone plume // Geophysical Research Letters, 2018, vol. 45, no 9, pp. 3873-3879.

6. Annen C. From plutons to magma chambers: Thermal constraints on the accumulation of eruptible silicic magma in the upper crust // Earth and Planetary Science Letters. – 2009, vol. 284, no. 3-4, pp. 409-416.
7. Dufek J., Bergantz G. W. Lower crustal magma genesis and preservation: a stochastic framework for the evaluation of basalt–crust interaction // Journal of Petrology, 2005, vol. 46, no. 11, pp. 2167-2195.
8. Уткин И.С., Мельник О.Э. Формирование магматического очага при внедрении магмы в земную кору // Вычислительная механика сплошных сред, 2018, т. 11, №. 4, с. 409-416.
9. Piwinskii A.J., Wyllie P.J. Experimental studies of igneous rock series: a zoned pluton in the Wallowa batholith, Oregon // The Journal of Geology, 1968, vol. 76, no 2, pp. 205-234.
10. Martel C. et al. Effects of $f_{O_2}$ and $H_2O$ on andesite phase relations between 2 and 4 kbar // Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 1999, vol. 104, no. B12, pp. 29453-29470.
11. Brown D.K. A computer program to calculate the elastic stress and displacement fields around an elliptical hole under any applied plane state of stress // Computers & Structures, 1977, vol. 7, no. 4, pp. 571-580.
12. Brackbill J.U., Ruppel H. M. FLIP: A method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations of fluid flows in two dimensions // Journal of Computational physics, 1986, vol. 65, no. 2, pp. 314-343.
13. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1967, 196 с.

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ПУЗЫРЕМ ГАЗА ПОВЫШЕННОЙ ПЛОТНОСТИ ВБЛИЗИ ТВЕРДОЙ СТЕНКИ

*Р.Р. Хабибуллин*

**Аннотация.** В рамках уравнений Эйлера численно исследуется падение прямой ударной волны в воздухе на стенку при наличии вблизи нее цилиндра – «двумерного пузыря» – газа повышенной плотности. Описан процесс преломления и фокусировки ударной волны – отражения поперечных скачков уплотнения от плоскости симметрии течения и от стенки. Обнаружено, что в зависимости от определяющих параметров задачи реализуются качественно различные режимы течения, в которых фокусировка волны на плоскости симметрии происходит до или после начала отражения волны от стенки. Определена зависимость пикового значения давления, достигаемого на стенке, от числа Маха падающей волны, плотности газа в пузыре и начального положения пузыря. Обнаружено, что присутствие пузыря многократно увеличивает ударно-волновую нагрузку, оказываемую падающей волной на стенку, при этом пиковое давление нелинейно зависит от числа Маха падающей волны, и немонотонно зависит от плотности пузыря.

**Введение.** Взаимодействие ударных волн с газовыми пузырями широко исследуется в связи широким распространением таких течений [1]. Ключевыми эффектами взаимодействия являются деформация пузыря [2], генерация завихренности и турбулентное перемешивание газов [3], а также преломление падающей волны и фокусировка поперечных скачков уплотнения [4]. Известно, что в зависимости от параметров задачи реализуются два режима течения – внешняя и внутренняя фокусировка скачков – и интенсивность фокусировки существенно зависит как от числа Маха падающей волны, так и от плотности и формы пузыря [5]. При расположении пузыря

вблизи твердой стенки наблюдается усиление завихренности течения и интенсификация перемешивания за счет прохождения отраженной волны по деформированному пузырю [6]. Практически не исследованным остается влияние присутствия газового пузыря на ударно-волновую нагрузку на стенку, чему посвящена настоящая работа.

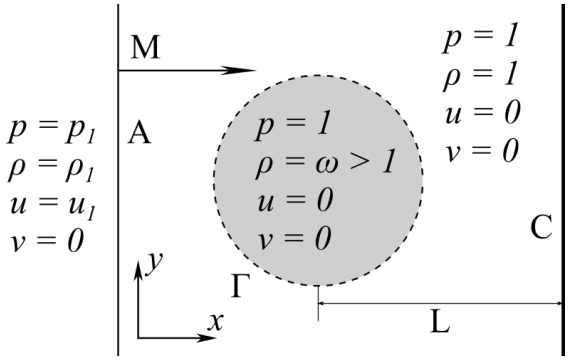



*Рис. 1. Схема начальных условий задачи. А – ударная волна, Г – граница пузыря, С – твердая стенка, L – расстояние между центром пузыря и стенкой.*

**Постановка задачи и численный метод.** Плоская ударная волна (скачок уплотнения) распространяется слева направо по покоящемуся однородному совершенному газу, содержащему цилиндрическую область – «двумерный пузырь» – газа повышенной плотности вблизи твердой непроницаемой стенки, перпендикулярной к направлению распространения волны (рис. 1). Давление и плотность газа перед ударной волной приняты за единицу, а параметры за волной определяются из соотношений Ранкина-Гюгонио. Определяющими параметрами задачи являются число Маха M падающей волны, плотность газа в пузыре ω, расстояние L от центра пузыря до стенки, отнесенное к диаметру пузыря, и показатель адиабаты газа ɣ = 1.4. На правой границе расчетной области – твердой стенке – установлено условие непротекания, на остальных границах – неотражающие условия.

Для описания плоских двумерных нестационарных течений идеального совершенного газа используется модель на основе уравнений Эйлера. Численное моделирование проводится с помощью конечно-разностной схемы с WENO-аппроксимацией потоков 5-ого порядка и методом Рунге-Кутта 3-его порядка аппроксимации по времени на равномерной квадратной расчетной сетке с разрешением 1024 узла на диаметр пузыря. Для ускорения вычислений применялось MPI- распараллеливание, расчеты проводились на кластере «Ломоносов».

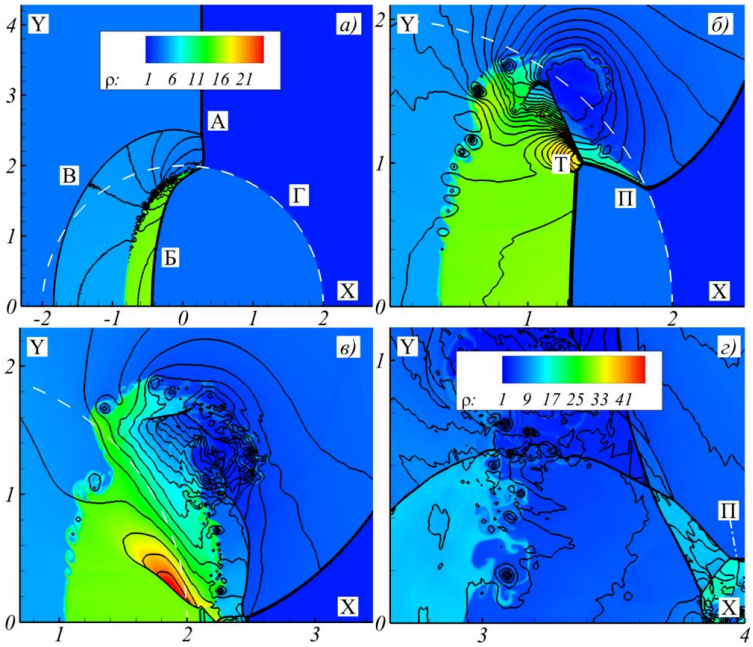



*Рис. 2. Основная структура течения: поле плотности, изолинии давления с шагом (с шагом Δp = 1 на рисунках а-в и с экспоненциальным распределением на рисунке г) для M = 3, ω = 3.5, L = 1.0 Нижняя граница рисунка – плоскость симметрии. Стенка находится в точке x = 4.0. а) ранняя стадия преломления, б) формирование поперечных скачков, в) фокусировка скачков на плоскости симметрии, г) отражение скачков от стенки. А – невозмущенный участок падающей волны, Б, В – прошедшая и отраженная волны, Т, П – трехударные конфигурации и поперечные скачки.*

**Структура течения.** Типичная ударно-волновая картина течения приведена на рис. 2. За счет меньшей скорости распространения ударная волна в пузыре приобретает вогнутую форму, формируются трехударные конфигурации (тройные точки) Т и поперечные скачки уплотнения П. Поперечные скачки и тройные точки движутся по диагонали к плоскости симметрии, отражаются от нее (фокусируются) и результирующая сложная ударно-волновая конфигурация затем достигает стенки. В зависимости от параметров течения – в первую очередь расстояния между пузырем и стенкой – возможен качественно иной режим фокусировки и отражения волны от стенки – «прекумулятивный» (рис. 3), при котором сначала плоский участок прошедшей волны Б отражается от стенки, а затем распространяющиеся вдоль стенки поперечные скачки отражаются от плоскости симметрии.

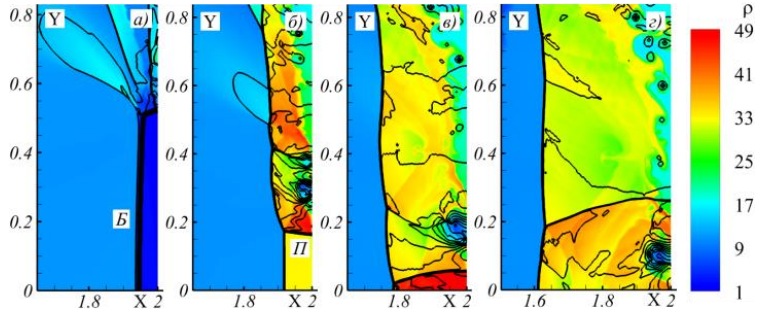



*Рис. 3. Прекумулятивный режим отражения волны от стенки при M = 3, ω = 2.5, L = 0.5. Изолинии давления с шагом Δp = 10. Последовательные моменты времени: а) до отражения прошедшей волны Б от стенки, б) сразу после отражения волны Б от стенки, в-г) после отражения поперечных скачков от плоскости симметрии.*

**Зависимость давления на стенке от параметров задачи.** Отражение ударной волны от стенки приводит к резкому повышению давления на ее поверхности, дополнительно усиливающемуся за счет эффекта фокусировки волны при взаимодействии с пузырем тяжелого газа. На рис. 4а, 4б приведены «осциллограммы давления» – графики зависимости давления в центральной точке стенки

от времени для различных значений L, M. В большинстве случаев при ближнем расположении пузыря от стенки (L = 0.5, рис. 4а) реализуется прекумулятивный режим фокусировки и наблюдаются два последовательных скачка давления: 1) в момент отражения плоской прошедшей волны Б и 2) в момент прихода поперечных скачков П к центру стенки.

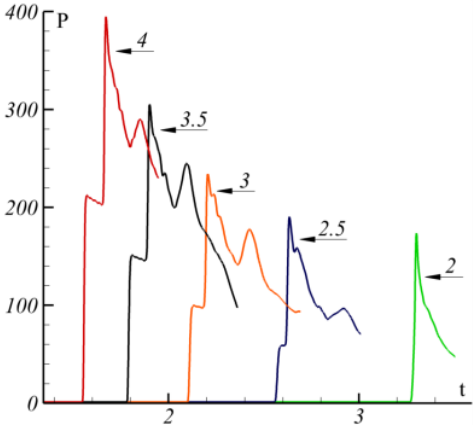



*Рис. 4а. Зависимость давления в центре стенки от времени для ω = 3, M = 2 – 4, L = 0.5.*

При более удаленном расположении пузыря (L = 1.0, рис. 4б), как правило, реализуется посткумулятивный режим фокусировки (рис. 2), и после первого выраженного скачка график давления имеет хаотический характер за счет сложной картины отражения вторичных и третичных скачков от стенки. На рис. 5 приведена зависимость пикового давления в центре стенки от числа Маха волны при ρ = 3 для двух расположений пузыря: L = 0.5 и L = 1.0, а также при отсутствии пузыря. В обоих случаях пиковое давление нелинейно возрастает с увеличением числа Маха, однако при ближнем расположении пузыря (L = 0.5) пиковое давление в несколько раз выше, чем при дальнем расположении (L=1.0). Данный эффект вызван, по-видимому, тем, что в прекумулятивном режиме давление повышается при последовательном отражении нескольких волн, тогда как в посткумулятивном

режиме основная часть процесса фокусировки скачков уплотнения проходит вдали от стенки.

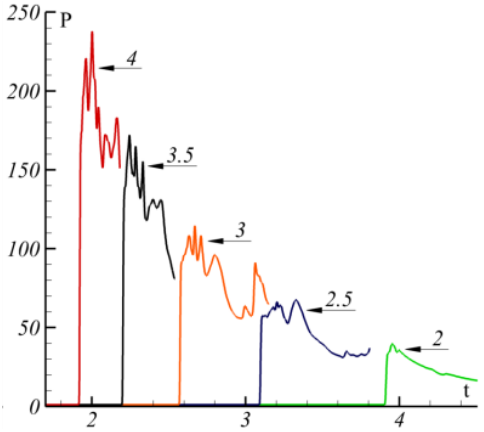



*Рис. 4б. Зависимость давления в центре стенки от времени для $\omega = 3$, $M = 2 - 4$, $L = 1.0$.*

Во всех наблюдаемых случаях наличие пузыря у стенки многократно (в 2 – 10) раз усиливает локальную ударно-волновую нагрузку на стенку по сравнению с падением невозмущенной ударной волны. Характер роста нагрузки на стенку при увеличении числа Маха существенно отличается для различных ρ и L (рис. 6а, 6б).

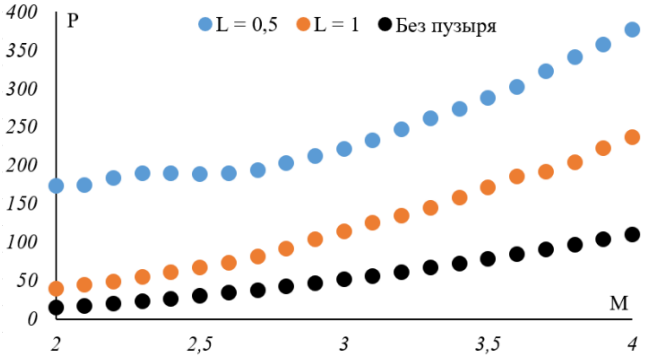



*Рис. 5. Зависимость пикового давления $P_{max}$ на стенке от $M$ при $\rho = 3$, $L=0.5$ и $L=1.0$. Черным отмечено давление на стенке при падении волны без пузыря.*

При бóльшей плотности газа в пузыре скорость роста пикового давления выше, причем начальное значение (при M = 2) ниже, чем при меньшей плотности (рис. 6а).

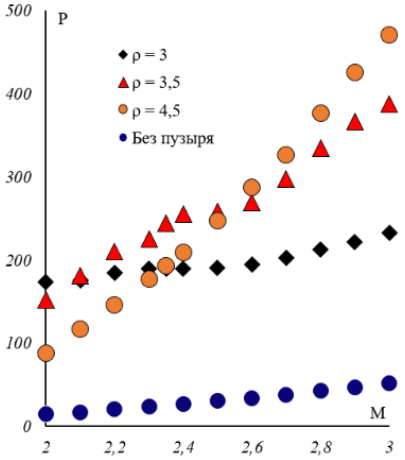



*Рис. 6а. Зависимость пикового давления на стенке от M для ρ = 3, 3.5 и 4.5 при L = 0.5.*

Таким образом, оказывается возможным достижение большего пикового давления при меньшем числе Маха и меньшей плотности пузыря (например, $P_{max} = 145.5$ при M = 2.2, ρ = 4.5 и $P_{max} = 173$ при M = 2.0, ρ = 3.0). Данный эффект вызван переходом от прекумулятивного режима отражения волны к посткумулятивному при повышении плотности пузыря. При дальнем расположении пузыря различие в характере роста пикового давления для различных плотностей пузыря выражено существенно слабее (рис. 6б), так как во всех исследованных случаях реализуется посткумулятивный режим отражения волны.

**Заключение.** Описан процесс преломления и фокусировки ударной волны – отражения поперечных скачков уплотнения от плоскости симметрии течения и от стенки. Обнаружено, что в зависимости от определяющих параметров задачи реализуются качественно различные ре-

жимы течения, в которых фокусировка волны на плоскости симметрии происходит до или после начала отражения волны от стенки.

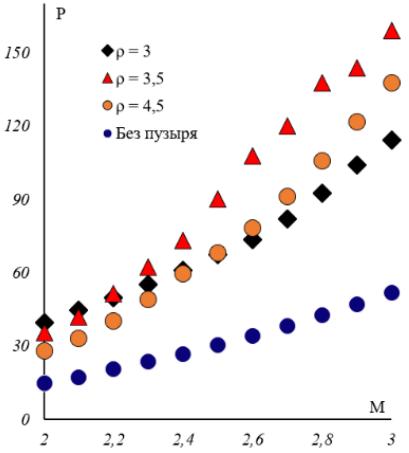



*Рис. 6б. Зависимость пикового давления на стенке от M для ρ = 3, 3.5 и 4.5 при L = 1.0.*

Определена зависимость пикового значения давления, достигаемого на стенке, от числа Маха падающей волны, плотности газа в пузыре и начального расстояния от пузыря до стенки. Присутствие пузыря у стенки многократно увеличивает локальную ударно-волновую нагрузку на стенку. В большинстве случаев при ближнем расположении пузыря пиковое давление в несколько раз выше, чем при дальнем расположении. В некоторых случаях возможно достижение большего пикового давления при меньшем числа Маха падающей волны и меньшей плотности пузыря за счет перехода к прекумулятивному режиму фокусировки. Полученные данные о многократном повышении ударно-волновой нагрузки на стенку при наличии неоднородности плотности представляют ценность для задач взрывобезопасности, а также могут найти применение в перспективных устройствах контролируемого ударно-волнового инжектирования или перфорирования.

*Список использованных источников*

1. D. Ranjan, J. Oakley, R. Bonazza. Shock-bubble interactions // Annual Review of Fl. Mech. 2011. Vol.1. №43. pp. 117-140.

2. G. Rudinger, L.M. Somers. Behavior of small regions of different gases carried in accelerated gas flows // J. Fluid Mech. 1960. №7. pp. 161-176.

3. Picone J.M., Boris J.P. Vorticity Generation by Shock Propagation through Bubbles in a Gas // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 189. pp. 23-51.

4. Сутырин О.Г. Фокусировка ударных волн при взаимодействии с эллиптическими газовыми пузырями // Труды конференции-конкурса молодых ученых, 13-17 октября 2014г, под ред. академика РАН А.Г. Куликовского, профессора В.А. Самсонова. – М.: Изд-во МГУ, 2016. С. 34-41.

5. Georgievskiy P.Y., Levin V.A., Sutyrin O.G. Interaction of a shock with elliptical gas bubbles // Shock Waves. 2015. V. 25(4). pp. 357–369.

6. Haehn N., Weber C., Oakley J., Anderson M., Ranjan D., Bonazza R. Experimental study of the shock–bubble interaction with reshock // Shock Waves. 2012. V. 22(1). pp. 47-56.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМОВ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

*С.А. Халявин*

**Аннотация.** Исследуются переходные режимы двухфазной фильтрации в трещиновато-пористой среде. Предполагается, что поровое пространство среды имеет различные масштабы – высокопроницаемые трещины и расположенные между ними низкопроницаемые блоки. Фильтрация в подобных средах может происходить в отсутствии локального капиллярного равновесия между трещинами и блоками, что обуславливается сопоставимыми характерными временами капиллярной пропитки блоков и течения по среде. В работе аналитическими методами определены распределения параметров в асимптотических случаях, соответствующих начальным и поздним стадиям закачки воды в трещиновато-пористую среду, насыщенную нефтью. Методом численного моделирования исследованы переходные режимы фильтрации между отмеченными асимптотическими распределениями.

**Введение.** Рассмотрим одномерное двухфазное течение в трещиновато-пористой среде [1] (рис. 1). Параметр $n$, характеризует геометрию течения. В частном случае $n = 2$ (осесимметричная задача) схема течения изображена на рис. 1. Предполагается, что распределение трещин является однородным и изотропным, т. е. не зависит от направления. Через совершенную вертикальную скважину в пласт (т. е. в область $r > 0$) с заданным расходом $Q$ нагнетается вода. Практическая значимость исследования данного течения связана с тем, что схожие процессы происходят при заводнении нефтяных пластов.

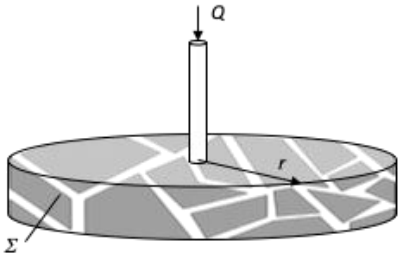



*Рис. 1. Схема задачи при n = 2*

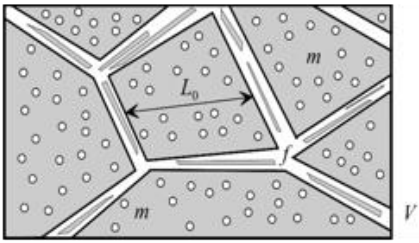



*Рис. 2. Элементарный объем V среды, содержащей трещины f и низкопроницаемые блоки m. Характерный размер блоков – $L_0$*

Исследование течения будем проводить в рамках многоконтинуального подхода, в рамках которого трещиновато-пористая среда представляется в виде двух взаимопроникающих континуумов – $\Phi^f$ и $\Phi^m$, соответствующих трещинам и блокам соответственно (рис. 2). В начальный момент времени пласт насыщен нефтью, т. е.

$$t = 0, \quad r > 0: \quad s_1^j = 0, \quad s_2^j = 1$$

Здесь и далее $s$ – обозначает насыщенность фазы (т. е. ее объемную долю), нижний индекс $i = 1, 2$ обозначает параметры $i$-ой фазы (1 – вода, 2 – нефть), а верхний индекс $j = f, m$ – параметры в трещинах и блоках соответственно.

При $t = 0$ в область $r > 0$ через скважину начинается закачка воды с объёмным расходом $Q$ (рис. 1). Предполагается, что вода и нефть несжимаемые среды. Это означает, что объемный поток двухфазной смеси сохраняется при любом $r = const$, т. е.

$$Q = \int_\Sigma \Omega d\sigma \qquad (1)$$

где $\Omega(r)$ – полная скорость фильтрации, т. е. сумма скоростей воды и нефти, а поверхность $\Sigma$ задается уравнением $r = const$ (рис. 1). Например, в случае $n = 2$ $\Sigma$ есть поверхность цилиндра радиуса $r$. Следовательно, граничные условия имеют вид

$$r \to 0: \quad s_1^f = s_1^m = 1,$$
$$\boldsymbol{w}_2^f = \boldsymbol{w}_2^m = 0, \ \boldsymbol{w}_1^f + \boldsymbol{w}_1^m = \frac{Q}{\Psi_n r^{n-1}} \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{w_i}$ – скорость фильтрации фазы $(i = 1,2)$, $\Psi_n$ – соответствующая симметрии течения константа: $\Psi_1 = 1$, $\Psi_2 = 2\pi$, $\Psi_3 = 4\pi$.

Постановка данной задачи схожа с постановкой классической задачи Баклея-Леверетта [1–3]. Схожая постановка задачи, в частном случае $n = 1$ рассматривалась в работе [4]. В настоящей работе исследуется общий случай произвольного значения параметра $n$.

**Замкнутая система уравнений.** Получение замкнутой системы уравнений подробно описано в статье [5]. В данной работе приведена лишь безразмерная система уравнений

$$(-1)^{i+1}\Gamma\frac{\partial s^f}{\partial t} + \frac{(1-\kappa)M_i}{r^{n-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(-K_{r_i}^f r^{n-1}\frac{\partial P^f}{\partial r}\right) = \frac{M_i}{\mathrm{B}} K_{r_i}^{fm}(P_i^m - P^f) \quad (3)$$

$$(-1)^{i+1}(1-\Gamma)\frac{\partial s^m}{\partial t} + \frac{\kappa M_i}{r^{n-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(-K_{r_i}^m r^{n-1}\frac{\partial P_i^m}{\partial r}\right) = \frac{M_i}{\mathrm{B}} K_{r_i}^{fm}(P_i^m - P^f) \quad (4)$$

$$P_2^m - P_1^m = CP_c^m, \ P^f = P_1^f = P_2^f \qquad (5)$$

со следующими параметрами подобия

$$\Gamma = \frac{\gamma\phi^f}{\bar{\phi}}, \qquad \kappa = \frac{K^m}{\bar{K}}, \quad M_i = \frac{\bar{K}P_0L^{n-2}}{\mu_i Q},$$
$$B = \frac{1}{\kappa\sigma L^2}, \ C = \frac{P_{max}}{P_0}, \ E = \frac{B}{C} \qquad (6)$$

Далее текст работы посвящен исследованию течения при различных значениях указанных выше параметров подобия.

**Течение при конечных $X$.** Ранее в работе [4] был описан характер течения в двух предельных случаях: $X \to 0$ и $X \to \infty$. Важным также является рассмотрение того, каков характер течения при переходе от одного асимптотического случая к другому, т. е. исследование так называемых переходных режимов – течения двухфазной жидкости в трещиновато пористой среде при конечных $X$. Было установлено, что в зависимости от определенных значений параметров подобия $E$, $C$ и $B$ будут возникать различные переходные режимы. Далее подробно исследуется случай

течения, когда $E_0 \gg C_0$, т. е. когда существенен неравновесный массообмен между $\Phi^f$ и $\Phi^m$. Отметим, что в работе [4] при $n$ = 1 рассматривался случай $C_0 \gg E_0$. Для расчета переходных режимов использовались следующие значения параметров (табл. 1).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | 0.12 | $\sigma$ | 74667 | $\Gamma$ | 0.214 |
| $\phi^f$ | 0.5 | $\mu_1$, Па·с | 0.001 | $M_1$ | 0.215 |
| $\phi^m$ | 0.25 | $\mu_2$, Па·с | 0.01 | $\kappa$ | 0.7 |
| $K^f$, mD | 300 | $Q$, м$^2$/сут. | 0.05 | $C_0$ | 0.09 |
| $K^m$, mD | 700 | $P_{max}$, бар | 0.01 | $E_0$ | 11.4 |

*Табл. 1 Значения параметров для расчёта*

В общем случае, возможны три режима с соответствующими значениями параметров подобия: $E_0 \gg C_0$ (преобладание неравновесности в течении), $E_0 \sim C_0$ (влияние неравновесности и капиллярного давления на течение одинаковы) и $E_0 \ll C_0$ (преобладает влияние капиллярных сил на течение). Для удобства и наглядности возьмем логарифм по основанию 10 от $C$ и $E$ и построим графики полученных прямых в зависимости от $\log X$ (Рис. 3). При $n$ = 1 графики $\log C$ и $\log E$ от $\log X$ параллельны (рис. 3а). Следовательно, если $C_0 > E_0$, то при любом $X$ влияние капиллярных сил преобладает над массообменом между средами (случай рассмотрен в [4]). Если же $C_0 < E_0$, то наоборот неравновесный обмен при любом $X$ существеннее. При $n$ = 2 и $n$ = 3 (рис. 3б и в) графики прямых $\log C$ и $\log E$ пересекаются при некотором $X_*$. Причем при $X < X_*$ преобладают неравновесные эффекты, а при $X > X_*$ преобладает влияние капиллярных сил на распределение параметров в пространстве. Далее подробнее рассмотрен случай $n$ = 2 и $E_0 \gg C_0$, так как он позволяет исследовать при малых $X$ –

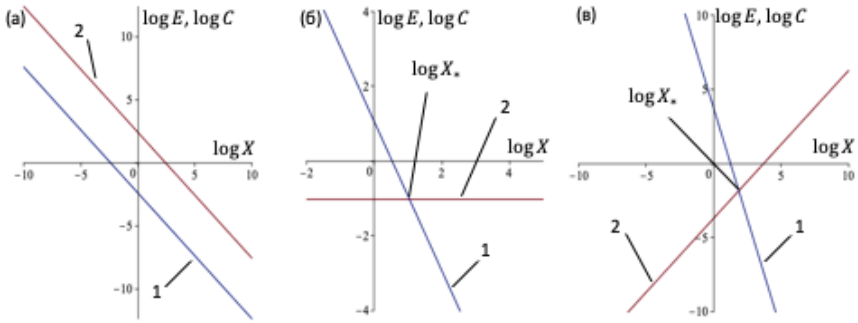



*Рис. 3 Логарифмические графики зависимостей параметров E (прямая 1) и C (прямая 2) от X при n = 1, 2 и 3 (а–в)*

неравновесность течения, а при больших $X$ – преобладание влияния на течения капиллярных сил. То есть, можно сделать следующий вывод: при малых масштабах по времени (по длине) течение неравновесное, влияние капиллярных сил мало, с другой стороны, при увеличении масштаба по времени (длине) или при больших $X$ наблюдается большое влияние капиллярных сил на характер течения, которые преобладают над неравновесностью.

В соответствии с зависимостью параметров $E$ и $C$ от $X$ при $n = 2$ имеем $E = E_0 X^{-2}$, $C = C_0$. Параметр $E$ при больших $X$ мал, следовательно, при $X \to \infty$ решение полной задачи для трещиновато-пористой среды несущественно отклоняется от асимптотического распределения (рис. 8, 9). При малых $X$ наблюдается неравновесный процесс – перетоки между $\Phi^f$ и $\Phi^m$ минимальны, $q^{mf} \to 0$ (рис. 4, 5). Отметим, что протяженность фронта вытеснения (переходного слоя, в котором существенно изменяется насыщенность), образованного неравновесными процессами ($C = 0$, $E \neq 0$), с ростом $X$ убывает как $1/X^2$ [4], тогда как толщина зоны вытеснения, обусловленного капиллярными силами ($C \neq 0$, $E = 0$), не изменяется в зависимости от $X$. Следовательно, параметры меняются непрерывно за счёт постоянного влияния

капиллярного давления на распределение насыщенности в пространстве.

На рис. 4, 5 представлены распределения насыщенностей в континуумах $\Phi^f$ и $\Phi^m$ и распределение эффективной насыщенности при конечных $X$. При малых $X$, в частности, в случае $X$=0.5 (рис. 4) наблюдается неравновесность течения. Фронт вытеснения, соответствующий $\Phi^f$, распространяется быстрее фронта, соответствующего $\Phi^m$, т. к. жидкость при

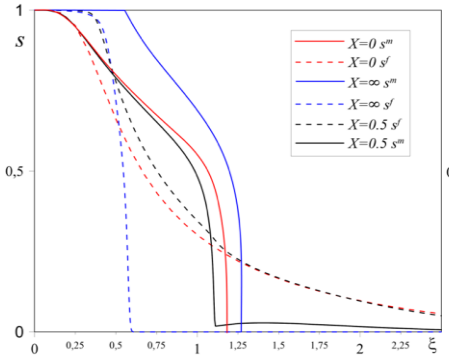



*Рис. 4 Распределение насыщенности при X=0.5 в континуумах $\Phi^f$ и $\Phi^m$*

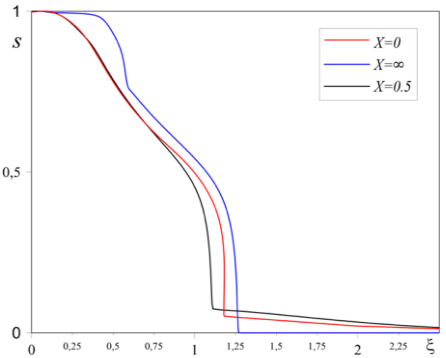



*Рис. 5 Распределение эффективной насыщенности при X=0.5 в континуумах $\Phi^f$ и $\Phi^m$*

малых масштабах времени слабо впитывается в блоки, а распространяется в основном по трещинам.

При промежуточных значениях $X$, в частности при $X$=5, течение приближается к состоянию локального капиллярного равновесия. За счет действия капиллярных сил большая часть воды, попадающая в трещины, впитывается в блоки, и фронт вытеснения в блоках $\Phi^m$ обгоняет фронт в трещинах $\Phi^f$ (рис. 6, 7). При данных $X$ жидкость начинает быстрее распространяться по блокам. При достаточно больших $X$ между $\Phi^f$ и $\Phi^m$ устанавливается капиллярное равновесие. При этом заметно установление двух фронтов вытеснения в $\Phi^f$ и $\Phi^m$ (рис. 8). Распределение эффективной насыщенности хорошо совпадает с распределением насыщенности, соответствующим

асимптотической ($X \to \infty$) модели одинарной пористости при заданных, исходя из предположений, параметрах (рис. 9).

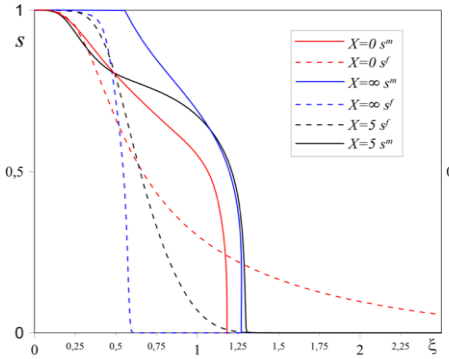



*Рис. 6 Распределение насыщенности при X=5 в континуумах $\Phi^f$ и $\Phi^m$*

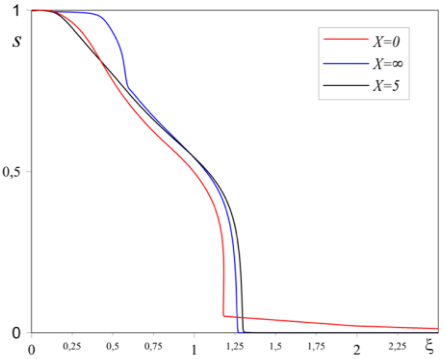



*Рис. 7 Распределение эффективной насыщенности при X=5 в континуумах $\Phi^f$ и $\Phi^m$*

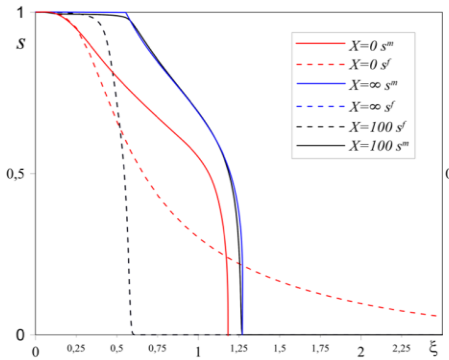



*Рис. 8 Распределение насыщенности при X=100 в континуумах $\Phi^f$ и $\Phi^m$*

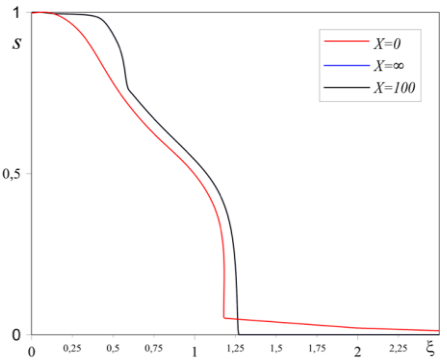



*Рис. 9 Распределение эффективной насыщенности при X=100 в континуумах $\Phi^f$ и $\Phi^m$*

**Заключение.** Показано, что зависимость параметров от характерного пространственного масштаба течения определяется симметрией течения, т. е. параметром $n$. В частности, при $n = 2$ один из параметров, $C$, характеризующий влияние капиллярных сил на распределение в пространстве,

остаётся неизменным, а параметр $E$, характеризующий неравновесность течения, квадратично убывает с увеличением характерного масштаба пространства и времени. Проведены расчеты переходных режимов течения на промежуточных этапах закачки жидкости. Продемонстрировано, что распределения параметров течения в переходных слоях, соответствующих данным фронтам, определяется не только капиллярным давлением, но и неравновесными перетоками между трещинами и блоками.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (МД-3567.20181).

*Список использованных источников*

1. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 852–864.

2. Buckley S.E., Leverett M.C. Mechanism of fluid displacement in sands // Trans. AIME. 1942. V. 146. P. 107–116.

3. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.

4. Афанасьев А.А. Осредненная асимптотическая модель двухфазной фильтрации в трещиновато-пористых средах // Изв. РАН МЖГ. 2019. №5. С. 83–92

5. Халявин С. А., Афанасьев А. А. Численное моделирование переходных режимов двухфазной фильтрации в трещиновато-пористой среде // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2019, Т. 20, вып. 3. http://www.chemphys.edu.ru

# ГИСТЕРЕЗИС ТУРБУЛЕНТНОГО ОБТЕКАНИЯ ОВАЛЬНЫХ ЛУНОК

*А.Ю. Чулюнин*

**Аннотация.** В работе в рамках численного моделирования исследованы механизмы, определяющие структуру турбулентного обтекания несжимаемой жидкостью овальной лунки, расположенной на плоской стенке поперек прямоугольного канала. В случае коротких лунок, включая сферическую, существует три равновесных состояния осредненного по Рейнольдсу течения: одно – симметричное и два зеркально несимметричных «моносмерчевых».

При увеличении длины цилиндрической части лунки происходит стабилизация симметричного состояния течения, а возможные несимметричные равновесные состояния становятся неустойчивыми. В результате обтекание приобретает квазистационарный характер. При дальнейшем увеличении длины сохраняется квазистационарный характер обтекания, но усложняется топология структуры внутренних течений внутри лунки.

**Введение.** Проблема взаимодействия потоков вязкой несжимаемой жидкости с рельефами различной формы была и остается важной проблемой современной механики. Особое внимание уделяется исследованию течений в каналах с нанесенными на их дно луночными рельефами. Известно, что подобные углубления являются хорошими интесификаторами теплообмена, не вызывающими, при этом существенного роста гидравлического сопротивления [1, 2]. На практике это свойство применяется при разработке теплообменных устройств макро- и микро-масштабов. Кроме того, в ряде работ показано, что нанесение луночных углублений на гладкие поверхности (например, на сферу или профиль NACA) позволяет снизить значение коэффициента сопротивления тела [3,4].

В зависимости от отношения максимальной глубины H и диаметра пятна D принято различать мелкие (H/D<0.125), умеренные (0.125 <Δ< 0.25) и глубокие (H/D>0.25) лунки. Ламинарные и осредненные по Рейнольдсу турбулентные течения в мелких лунках и в большинстве умеренных являются симметричными относительно их диаметральной плоскости параллельной вектору скорости набегающего потока. При этом в мелких лунках течение безвихревое, а в умеренных – возникают характерные вихревые структуры в виде симметричной двухъячеистой области рециркуляционного течения. Соответствующие течения наблюдаются в экспериментах и хорошо воспроизводятся в рамках вычислительных технологий URANS (см., например, [5]).

В глубоких лунках стационарные схемы течения оказываются неустойчивыми, наблюдается формирование нестационарного течения с непериодическим чередованием «левостороннего» и «правостороннего» несимметричных режимов [6,7]. При этом время существования этих режимов может отличаться на порядки, что делает затруднительным исследование их гидравлических и тепловых свойств. В работах [8] экспериментально и численно показано, что с помощью малого пассивного элемента управления – лопатки, установленной на дне лунки можно добиться воспроизведения различных стационарных режимов и исследовать их свойства.

В последнее время все больше работ посвящено исследованию характеристик овально-траншейных лунок. В частности, в [9] показано, что суммарная теплоотдача от участка с длинной овальной траншеей более чем в три раза превышает теплоотдачу от участка со сферической лункой с одинаковой площадью пятна. Однако в этих работах исследуются лунки небольшой глубины и, как следствие, со стационарными структурами. В настоящей работе на базе численного моделирова-

ния исследуется структура течения в глубоких овально-траншейных лунках.

**Постановка задачи.** Рассматривается турбулентное обтекание вязкой несжимаемой жидкостью каверны в виде овальной в плане траншеи на стенке плоскопараллельного канала прямоугольного поперечного сечения. Траншея расположена на нижней стенке канала симметрично по отношению к его боковым стенкам и представляет собой две половинки полусферической лунки радиуса R, соединенных между собой полуцилиндрической вставкой, длина которой C варьируется от 0 до 6R, а ось остается перпендикулярной к боковым стенкам канала. Указанные два параметра полностью характеризуют геометрию траншеи: глубина $h = R$, ширина в плоскости стенки канала $D = 2R$, длина $L = C+2R$. Безразмерная относительная глубина траншеи $\Delta = h/D$ постоянна, а удлинение цилиндрической вставки $\lambda = C/D$ изменяется. При $\lambda = 0$ получается обычная полусферическая лунка с $\Delta = 0.5$.

Размеры расчетной области соответствовали геометрии канала с каверной на нижней стенке. Высота канала – 0.83 *D*. Расстояние от боковой стенки канала до ближайшей кромки траншеи составляло 1.5 D при всех $\lambda$. Входная граница расчетной области располагалась на расстоянии 4.5 *D* от передней кромки траншеи, выходная – на расстоянии 4.5 *D* вниз по потоку от задней кромки.

В настоящей работе были использованы два подхода к моделированию турбулентных течений. Первый основан на использовании осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, которые замыкаются с помощью двухпараметрической модели турбулентности SST [7, 9]. При втором подходе используется модификация метода отсоединённых вихрей IDDES (The Improved Delayed Detached Eddy Simulation) [10].

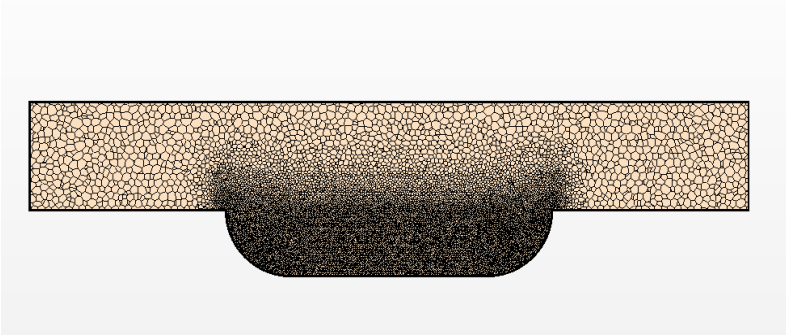


*Рис. 1. Фрагмент сеточной модели расчетной области в сечении, перпендикулярном набегающему потоку и проходящему через центр лунки*

Для дискретизации расчетной области применялась неструктурированная сетка многогранного типа со сгущением в окрестности лунки и в ее следе (рис.1). На стенках, для лучшего разрешения пограничного слоя, применялись призматические ячейки с линейным ростом по высоте. Высота первой ячейки слоя выбиралась таким образом, чтобы безразмерный параметр $y^+<1$, что объясняется требованиями применяемых моделей турбулентности. Общий размер сеточной модели, в зависимости от длинны цилиндрической части лунки варьировался от 18 до 25 млн. элементов. В качестве рабочей жидкости использовался воздух со значением плотности $\rho=1.205$ кг/м$^3$, коэффициентом динамической вязкости $\mu=1.855\cdot10^5$. Число Рейнольдса вычисленное по скорости набегающего потока и диаметру начального пятна лунки равняется $Re=8\cdot10^4$. На выходной границе канала ставятся «мягкие» граничные условия, на стенках условия прилипания. В рамках IDDES подхода для уменьшения численной диссипации на грубых сетках, для аппроксимации конвективных членов используется схема MUSCL 3-го порядка.

**Результаты.** Выполненная серия расчетов показывает, что с увеличением длины цилиндрической части лунки от 0 до L=R происходит стабилизация течения,

при этом возможны два устойчивых стационарных состояния с ярко выраженными наклонными одноядерными вихревыми структурами, начинающимися на внутренних стенках концевых сферических скруглений траншеи и выходящих во внешнюю пристеночную область течения в районе противоположных концов траншеи. (рис.1). Конкретный вид установившегося течения зависит от предыстории установления, в частности – от начальных условий задачи, таким образом наблюдается своеобразный гистерезис структуры течения внутри лунки. Данный результат получен численно в рамках URANS и DES технологий моделирования.

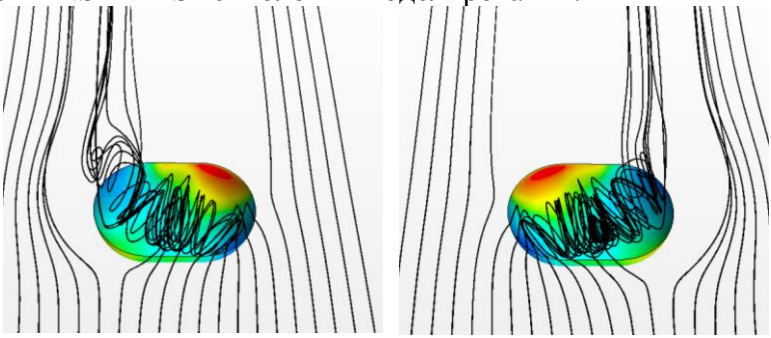
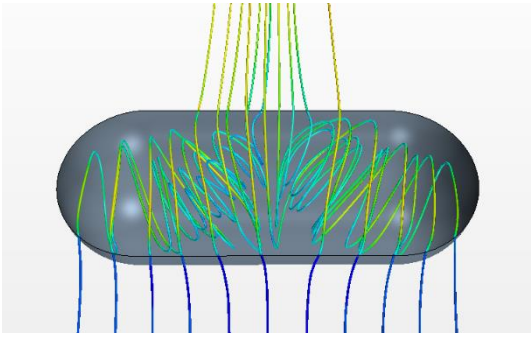


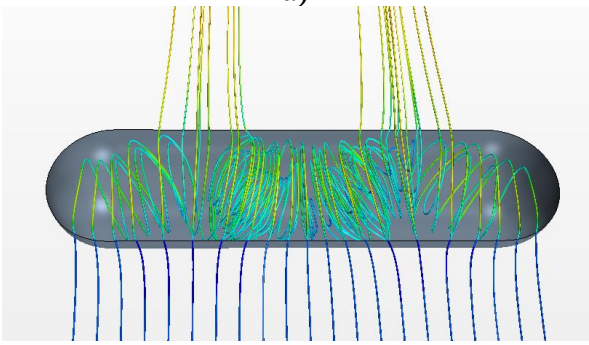
*Рис.2. Две различных структуры квазиустановившегося обтекания овальной лунки при L=R и Re=80 000, полученные при разных начальных условиях*

При дальнейшем увеличении длины лунки (λ=1.5) гистерезисный характер течения пропадает. Так при L=3R устанавливается единственное стационарное течение, но существенно иной конфигурации: формируется симметричная двухядерная структура, берущая начало на внутренних стенках концевых скруглений лунки и выходящая во внешний поток над подветренной кромкой центральной части траншеи (рис.3а). Отсутствие других равновесных состояний течения может означать, что действительное обтекание такой каверны будет квазистационарным. Полученное течение в траншее уме-

ренной длины можно интерпретировать как столкновение двух встречных закрученных струй от противоположных концов траншеи. Подпитка расхода этих струй осуществляется вдоль стенок траншеи за счет притока из внешнего потока в районе задних кромок концевых скруглений.



а)



б)

*Рис.3. Структура потока внутри овальной лунки: а) λ=1.5, б) λ=3*

Увеличение длины лунки до значения параметра λ=3 приводит к дальнейшим качественным изменениям структуры обтекания лунки. Это течение также симметричное, но имеет качественные отличия от предыдущего случая. Между встречными закрученными струями, распространяющимися от противоположных концов траншеи, появляется буферная структура в виде двух вторичных закрученных струй, распространяющихся в раз-

ные стороны от плоскости симметрии траншеи. Подпитка расхода в этих вторичных струях осуществляется из внешнего потока над центральной частью траншеи. Часть слоя смешения разворачивается и заходит внутрь, образуя вихреисточник в плоскости симметрии траншеи. В результате периферийные закрученные струи от противоположных концов траншеи сталкиваются не между собой, а со встречными центральными струями.

**Заключение.** В рамках настоящего исследования выявлено, что увеличение длины цилиндрической части лунки приводит к существенной перестройке течения. Забор среды в глубокую овальную траншею может происходить либо поочередно в области концов каверны с выходом наружу у противоположных концов (сферические лунки и короткие траншеи), либо одновременно с обоих концов (умеренные и длинные траншеи) и выходом в спутный поток из срединной части траншеи. При этом, в случае длинных траншей, возможен дополнительный забор среды из слоя смешения над их центральной частью, что приводит к образованию буферной зоны между встречными концевыми струями.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-01-00242).

*Список использованных источников*

1. Дзюбенко Б.В., Кузма-Кичта Ю.А., Леонтьев А.И., Федик И.И., Холпанов Л.П. Интенсификация тепло- и массообмена на макро-, микро- и наномасштабах. - М.: ФГУП “ЦНИИАТОМИНФОРМ”, 2008, с цв.вкладкой

2. Быстров Ю.А., Исаев С.А., Кудрявцев Н.А., Леонтьев А.И. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб. СПб, Судостроение, 2005. 398с

3. Jin Choi, Woo-Pyung Jeon, and Haecheon Choi, Mechanism of drag reduction by dimples on a sphere // Physics of Fluids 2006, Volume 18, Issue 4.

4. V. D'Alessandro, G. Clementi, L. Giammichele, R. Ricci Assessment of the dimples as passive boundary layer control technique for laminar airfoils operating at wind turbine blades root region typical Reynolds numbers // Energy, Volume 170, 2019, pp 102-111

5. С. А. Исаев, А. И. Леонтьев, Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена при турбулентном обтекании сферической лунки на стенке узкого канала, ТВТ, 2003, том 41, выпуск 5, 755–770

6. V.Voskoboinick, N.Kornev, J.Turnow Study of Near Wall Coherent Flow Structures on dimpled surfaces using unsteady pressure measurements // Flow Turbulence Combust, 2013, Volume 90, Issue 4, pp 709–722

7. Turnow J., Kornev N., Isaev S., Hassel E. Vortex Mechanism of Head Transfer Enhancement in a Channel With Spherical and Oval Dimples. Heat and Mass Transfer, 2011, vol. 47, no. 3, pp. 301-313.

8. Chulyunin A. Y., Kubenin A. S., Syrovatsky D. A. Transport of inertial particles in a turbulent flow around spherical dimples // Doklady Physics. — 2017. — Vol. 62, no. 4. — P. 208–212.

9. S.A. Isaev, A.I. Leontiev, O.O. Milman, I.A. Popov, A.G. Sudakov, Influence of the depth of single-row oval-trench dimples inclined to laminar air flow on heat transfer enhancement in a narrow micro-channel // International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 134, 2019, Pages 338-35

10. Gritskevich, M.S., Garbaruk, A.V., Schuetze, J.M., Florian, R. Development of DDES and IDDES formulations for the k-omega shear stress transport model // Flow Turbulence Combustion, 2012, Vol. 88, pp. 431-449

# СФЕРИЧЕСКОЕ ТЕЛО ИЗ НАМАГНИЧИВАЮЩЕГОСЯ ЭЛАСТОМЕРА НА СЛОЕ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*О.А. Шарова*

**Аннотация.** В данной работе экспериментально и теоретически рассматривается движение намагничивающегося сферического тела, частично погруженного в магнитную жидкость, на горизонтальной плоскости в однородном приложенном вертикальном магнитном поле с учетом силы тяжести и силы вязкого трения.

**Введение.** Магнитные жидкости (MF) - коллоидные растворы мелких (диаметром порядка $10^{-6}$ см) магнитных однодоменных частиц, покрытых слоем поверхностно-активного вещества (ПАВ) в жидкости-носителе. Сила, действующая на намагничивающиеся среды (MF и намагничивающиеся тела) в магнитном поле, связана с неоднородностью магнитного поля и неоднородностью или разрывами магнитных характеристик среды. Основы гидродинамики и общие принципы построения моделей сред, взаимодействующих с электрическим или магнитным полями, разработаны в [1]. В [2, 3] изложены различные модели MF и приведены решения классических задач феррогидродинамики.

Благодаря уникальным свойствам MF находят широкое применение в технике, биологии, медицине и при разработке новых технологий. В частности, изменение формы поверхности MF в неоднородных магнитных полях может применяться в технике (например, при создании движителей, насосов, клапанов, при неоднородной закалке металлов). В работе [4] экспериментально и теоретически исследовано взаимодействие магнита и малого объема MF. Неоднородное магнитное поле может быть создано телами из

намагничивающихся материалов в присутствии однородного магнитного поля. В работе [5] исследуется статика намагничивающегося сферического тела в MF на горизонтальной подложке в однородном вертикальном магнитном поле, построены зависимости высоты левитации тела и формы объема MF от объема магнитной жидкости и значения приложенного магнитного поля.

В данной работе аналитически получено выражение для горизонтальной составляющей силы, действующей на намагничивающееся сферическое тело, со стороны тонкого прямоугольного слоя MF. Под действием этой силы тело может двигаться вдоль слоя (такое движение наблюдается в эксперименте). Исследовано влияние параметров задачи на зависимость положения тела от времени. Проведено сравнение теоретических и экспериментальных результатов.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим взаимодействие сферического тела массы $M_b$, радиуса $R_b$ из намагничивающегося материала левитирующего в капле MF объемом $V_f$, имеющей контакт с горизонтальной подложкой радиуса $R_d$, и слоя MF. Для упрощения решения задачи пренебрежом сложной формой слоя и будем считать, что слой MF имеет форму прямоугольного параллелепипеда: ширины $w_l$, высоты $h_l$, длины $l_l$. Параметры капли MF, окружающей среды, тела и слоя MF обозначаются индексами *f, s, b* и *l* соответственно.

Неподвижная система координат x, z введена следующим образом: ось z – вертикально вверх, ось x – горизонтально вдоль слоя магнитной жидкости (рис. 1).

Задача решалась в предположении, что магнитная проницаемость тела много больше магнитной проницаемости MF $\mu_b >> \mu_f$, окружающая среда не намагничивающаяся $\mu_s=1$.

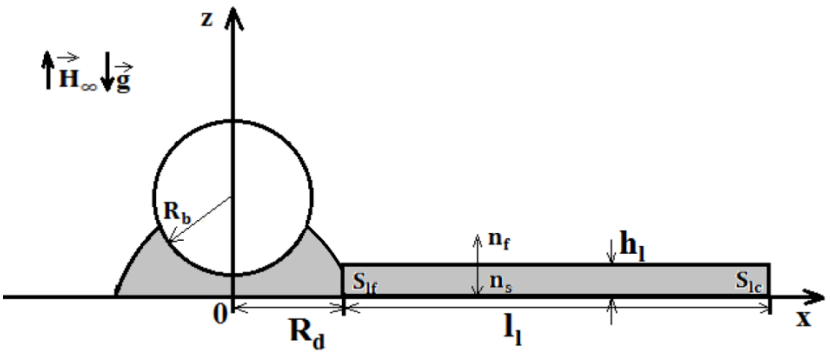



*Рис. 1. Схема взаимодействия намагничивающегося сферического тела и тонкого слоя магнитной жидкости.*

Уравнение движения для тела, увлекающего за собой каплю MF, вдоль горизонтальной плоскости, в случае, когда мы пренебрегаем течением MF в слое:

$$\left(M_b + \frac{\rho_s V_b}{2} + \left(\rho_f + \frac{\rho_s}{2}\right) V_f(t)\right) \ddot{x_b} = F_{fr} + F_x, \qquad (1)$$

$$F_{fr} = -\left(6\pi R_b \eta_s + 6\pi R_d \eta_s \frac{2\eta_s + 3\eta_f}{3\eta_s + 3\eta_f}\right) \dot{x}. \qquad (2)$$

Здесь $V_f(f)$ – объем капли MF под телом, $F_{fr}$ – проекция силы вязкого трения на ось x, $F_x$ – горизонтальная составляющая магнитной силы, $\rho_{s,f}$ – плотности окружающей среды и MF, $\eta_{s,f}$ – динамический коэффициент вязкости. Для описания медленного движения сферы и капли MF в вязкой жидкости использовалось приближение Стокса.

Предполагаем, что слой имеет форму прямоугольного параллелепипеда, которая не меняется в процессе движения. Сила, действующая на тело со стороны тонкого слоя, в проекции на ось x, в случае, когда магнитная проницаемость MF постоянна $\mu_f = const$, имеет вид:

$$F_x = \frac{\mu_f - 1}{8\pi}\left(\int_{S_{lf}} H^2 dS - \int_{S_{lc}} H^2 dS\right). \qquad (3)$$

Здесь $S_{lf}$, $S_{lc}$ – поверхности левого и правого торцов слоя. Предполагаем, что форма поверхности контакта свободной поверхности капли MF со слоем жидкости близка к $S_{lf}$.

Выражение для магнитного поля $H$ около сферического намагничивающегося тела в безындукционном приближении ($M << 4\pi H$) имеет вид [6]:

$$H = H_\infty \left( \frac{9(z-z_b)^2\left((x-x_b)^2+y^2\right)D^2}{((x-x_b)^2+y^2+(z-z_b)^2)^5} + \left(1 + \frac{D}{((x-x_b)^2+y^2+(z-z_b)^2)^{3/2}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{3(z-z_b)^2 D}{((x-x_b)^2+y^2+(z-z_b)^2)^{5/2}}\right)^2\right)^{1/2}, \quad D = R^3 \frac{\mu_s-\mu_b}{2\mu_s+\mu_b}. \qquad (4)$$

**2. Численные расчеты.** Для численного решения задачи была написана программа, которая рассчитывает движение центра сферического тела под действием магнитной силы и силы вязкого трения методом Рунге-Кутта 4 порядка в пакете программ Maple.

При расчетах вертикального положения тела и формы капли MF от объема MF $V_f(t)$ использовались результаты исследования статической левитации хорошо намагничивающегося шара в магнитной жидкости в однородном вертикальном магнитном поле [5].

В предположении, что вся жидкость из тонкого слоя собирается вокруг тела, то есть за телом нет остаточного слоя, из (3) может быть получена численная зависимость горизонтальной составляющей силы $F_x$ от положения тела $x_b$ (рис. 2. а).

В расчетах использовались следующие значения параметров: масса тела $M_b=0.16$ г, радиус тела $R_b=0.25$ см, магнитные проницаемости тела, жидкости, среды $\mu_b=3.62$, $\mu_f=1.38$, $\mu_s=1$, динамическая вязкость среды $\eta_s=0.32$ г/см с, начальный объем MF под телом $V_{f0}=0.0418$ см$^3$, $h_l=0.00425$ см, $l_l=1.6$ см, $d_l=1.2$ см, значение приложенного магнитного поля $H_\infty=384.4$ Э. Начальные условия $x_b(t=0)=0$, $\dot{x}_b(t=0)=0$. Полученная зависимость положения тела $x_b$ от времени $t$ представлена на рисунке (рис. 2. б).

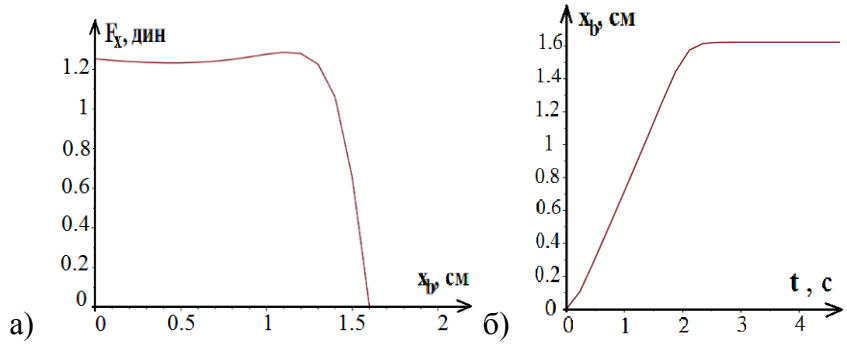



*Рис.2. а) Зависимость горизонтальной составляющей силы $F_x$ от положения тела $x_b$.*

*б) Зависимость положения тела $x_b$ от времени t.*

На рис. 2. б. видно, что зависимость положения тела от времени близка к линейной в некоторый промежуток времени. Когда тело собирает всю MF из слоя, магнитная сила Fx становится равной нулю и тело останавливается под действием сил вязкого трения.

Также было проведено исследование движения тела при различных параметрах (рис. 3).

На графиках видно, что при увеличении ширины (рис. 3. а) или глубины слоя магнитной жидкости тело движется быстрее. Длина слоя практически не влияет на начальную скорость движения тела (рис. 3. б). При большем значении магнитного поля $H_\infty$ тело движется быстрее (рис. 3. в).

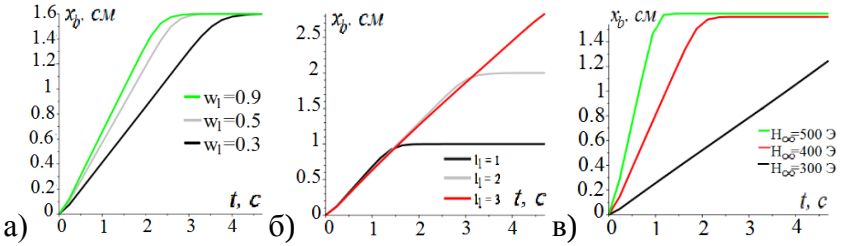



*Рис.3. Зависимость положения тела $x_b$ от времени t:*

*а) для различной ширины слоя $w_l$; б) для различной длины слоя $l_l$; в) для различных значений приложенного магнитного поля $H_\infty$.*

**3. Экспериментальное исследование движения тела.** Был проведен эксперимент по исследованию движения сферического тела. На горизонтальную подложку помещался объем MF. Затем прикладывалось однородное вертикальное магнитное поле, создаваемое катушками Гельмгольца. В объем MF погружалось тело из намагничивающегося материала. Далее тело с MF смещалось по прямой на некоторое расстояние, при этом за телом оставался тонкий слой MF. При отпускании тела наблюдалось горизонтальное движение вдоль слоя.

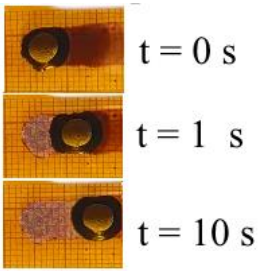



*Рис.4. Положение сферического тела при его движении вдоль горизонтального слоя MF в моменты времени t=0 сек, t=1 сек, t=10 сек. Вид сверху.*

Эксперимент был проведен для MF на основе воды с магнетитовыми частицами. Параметры сред в расчетах совпадают с экспериментальными и указаны выше. В качестве окружающей среды было взято трансформаторное масло. В жидкость погружалось намагничивающееся сферическое тело из намагничивающегося эластомера на силиконовой основе с микрочастицами магнетита. Тело смещалось по прямой на расстояние $l_l$=*1.6* см, ширина слоя $d_l$=*0.7* см.

Были проведены расчеты для экспериментальных параметров. Сравнение теоретических и экспериментальных данных приведено на рисунке (рис. 5. а).

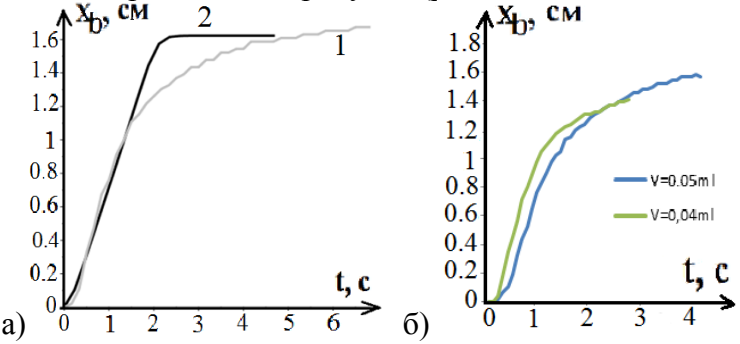



*Рис. 5. а) Сравнение зависимостей положения тела от времени;. 1 – экспериментальные данные, 2 - теоретические.*

*б) Зависимость положения тела $x_b$ от времени $t$ при различных значениях объема $V_f$.*

Также были проведены исследования зависимости движения тела от различных значений объема MF. На рисунке (рис. 5. б) представлены зависимости положения тела $x_b$ от времени $t$ для объемов $V_f=0,05$ мл и $V_f=0,06$ мл при значении приложенного магнитного поля $H_\infty=372$ Э. На графике видно, что при большем объеме MF тело движется медленнее.

Не совпадение теории и эксперимента может быть объяснено влиянием изменения формы слоя и движение MF в слое на магнитную силу и движение тела.

**4. Заключение.** В работе найдено аналитическое выражение для горизонтальной составляющей магнитной силы, действующей на тело. Численно решена задача о движении сферического тела в вертикальном однородном приложенном магнитном поле с учетом силы тяжести и силы вязкого трения. Исследовано влияние параметров задачи на зависимость положения тела от времени. Проведено экспериментальное исследование движения тела вдоль

тонкого слоя в однородном магнитном поле, а также сравнение теоретических и экспериментальных результатов.

*Список использованных источников*

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1983. 1,2.
2. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1989.
3. Налетова В.А. Лекции по феррогидродинамике. М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2005.
4. Налетова В.А., Турков В.А., Пелевина Д.А., Кобзев М.М. Левитация магнита в слое магнитной жидкости. Proceedings of 11-th International Conference on Modern Problems of Electrophysics and Electrohydrodynamics (MPEE-2015) peterhof, June 29 - July 3 2015. p. 284-286.
5. Шарова О.А., Сила, действующая на намагничивающийся шар, в магнитной жидкости в однородном магнитном поле. Труды конференции-конкурса молодых ученых НИИ Механики МГУ, 2018, с. 178-185
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992.

# ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА НОВОМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ СТЕНДЕ НИИ МЕХАНИКИ МГУ

*О.П. Щендригина*

**Аннотация.** В работе описаны цели изучения поведения материалов. Рассмотрены способы этого изучения на основе метода Кольского с использованием разрезного стержня Гопкинсона. Выписаны соотношения, которые используются для подсчета напряжений и деформаций, возникающих в образце. Описан метод расшифровки напряженно-деформированного состояния (НДС). Приведены различия поведений материала при высокоскоростном нагружении и в статическом эксперименте, а так же изображения, полученные с помощью оптических методов распознавания изображения DIC (Digital Image Correlation) в опыте на динамическое растяжение. Выделены основные трудности проводимого эксперимента.

**Введение.** В настоящее время безопасности уделяется огромное внимание. При проектировании изделий, конструировании двигателя самолета, важно знать свойства используемых материалов. В связи с участившимися в последнее время техногенными и природными катастрофами, террористическими актами, которые сопровождаются интенсивными ударными и взрывными нагрузками, уже на стадии проектирования зданий и сооружений следует учитывать эти динамические воздействия. Для рационального проектирования и анализа работы динамически нагружаемых конструкций необходимо знание механических свойств материалов, из которых они изготовлены, при высоких скоростях деформации, а так же их предельных нагрузок.

**Основная часть.** Для оснащения известных моделей поведения материалов необходимыми параметрами и константами, а также для разработки новых математических моделей требуются экспериментальные данные по динамическим свойствам новых материалов.

Из известных экспериментальных методик (метод Тейлора, копровые испытания, баллистические ударные тесты и т.д.) метод Кольского на основе разрезного стержня Гопкинсона является наиболее востребованной экспериментальной схемой для исследования динамического поведения материалов различной природы (от металлов до новых композиционных материалов). Это связано, в первую очередь, с его относительной простотой, а также с возможностью его различных модификаций для реализации требуемых НДС в испытуемых образцах.

Стандартная схема испытаний по методу Кольского в опыте на одноосное динамическое сжатие представлена на рис.1. Для расшифровки НДС в образцах обычно используются простые соотношения:

$$\varepsilon_s(t) = -\frac{2C}{L_0}\int_0^t \varepsilon^R(t)dt$$

$$\sigma_s(t) = \frac{EA}{A_s}\varepsilon^T(t) = \frac{EA}{A_s}\left(\varepsilon^I(t) + \varepsilon^R(t)\right)$$

$$\dot{\varepsilon}_s(t) = -\frac{2C}{L_0}\varepsilon^R(t),$$

где $\varepsilon^I(t)$ – нагружающий импульс, $\varepsilon^R(t)$ – отраженный импульс, $\varepsilon^T(t)$ – проходящий импульс, C – скорость продольной волны, $L_0$ – начальная длина образца, A – площадь поперечного сечения стержней, $A_s$ – площадь поперечного сечения образца. Диапазон, реализуемых скоростей деформаций в образцах, составляет от 500 до 10000 обратных секунд.

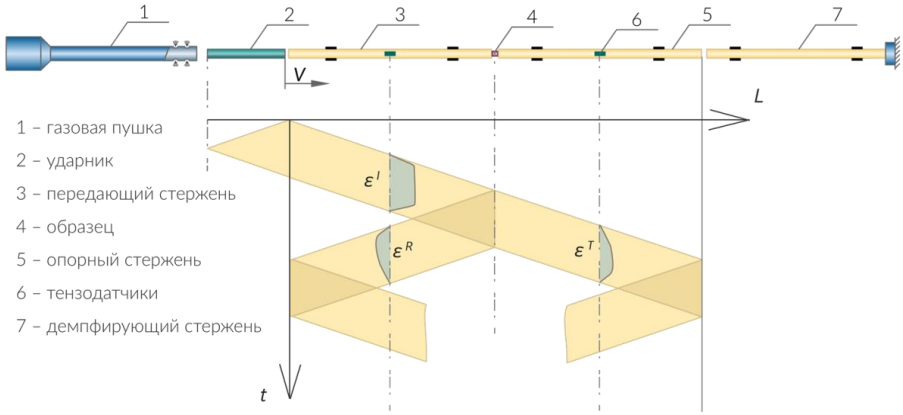



*Рис. 1. Схема метода Кольского*

Эксперименты по методу Кольского проводились на новом экспериментальном стенде рис. 2 и включали следующие типы испытаний: статические (растяжение, кручение и кручение совместно с растяжением), а также динамические (растяжение, сжатие и сдвиг). Опыты ставились на титановых сплавах ВТ20, ВТ3 и ВТ8, используемых в авиационной отрасли. Испытания на динамический сдвиг проводились по следующей схеме рис. 3 с использованием формул:

$$\sigma_s = \frac{\sqrt{3}E \cdot A}{A_s} \cdot \frac{(\varepsilon^I)^2 - (\varepsilon^R)^2 - (\varepsilon^T)^2}{\varepsilon^I - \varepsilon^R - \varepsilon^T}$$

$$\gamma = \frac{C}{\sqrt{3}h} \int_0^{t_{imp}} (\varepsilon^I - \varepsilon^R - \varepsilon^T) dt \quad ,$$

где $\varepsilon^I(t)$ – нагружающий импульс, $\varepsilon^R(t)$ – отраженный импульс, $\varepsilon^T(t)$ – проходящий импульс, C – скорость продольной волны, $L_0$ – начальная длина образца, A – площадь поперечного сечения стержней, $A_s$ – площадь поверхности сдвига образца, $\gamma/2 = \varepsilon_{12}$ –угловые деформации, $t_{imp}$ – длительность нагружающего импульса, h – высота поверхности сдвига образца.

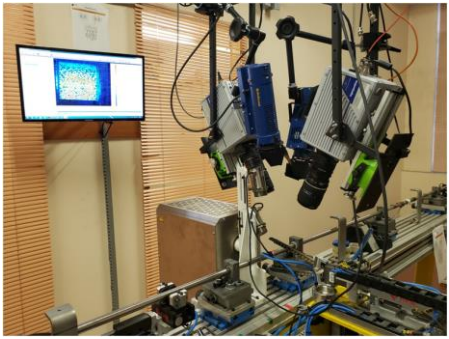


*Рис. 2. Экспериментальный стенд в НИИ механики МГУ*

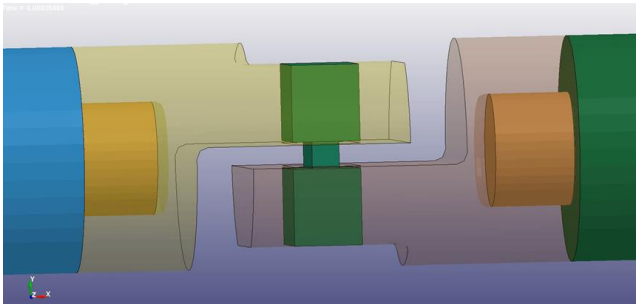


*Рис. 3. Схема эксперимента на динамический сдвиг*

Целями исследования являлись построение динамических диаграмм нагружения (кривых, связывающих интенсивности напряжений и деформаций в зависимости от скорости деформаций), а также определение предельных характеристик для изучаемых материалов. Расшифровка НДС в образцах осуществлялась с использованием программного модуля, разработанного А.В. Инюхиным (НИИ механики МГУ).

Приведем примеры результатов, полученных с помощью программы А.В. Инюхина, в эксперименте на динамическое растяжение рис. 4, рис. 5, рис. 6, а так же для сравнения приведем диаграмму деформирования для статического растяжения.

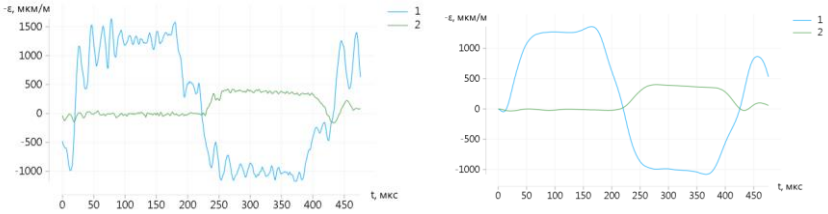



*Рис. 4. Несглаженные и сглаженные первичные данные в опыте на динамическое растяжение*

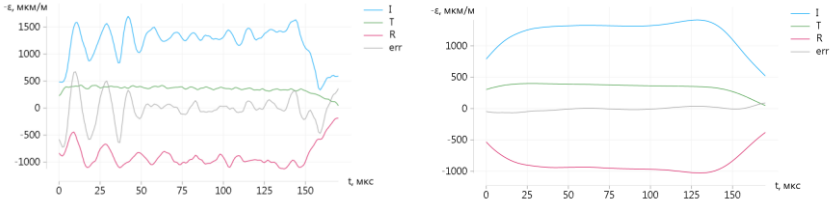



*Рис. 5. Несглаженные и сглаженные импульсы в опыте на динамическое растяжение*

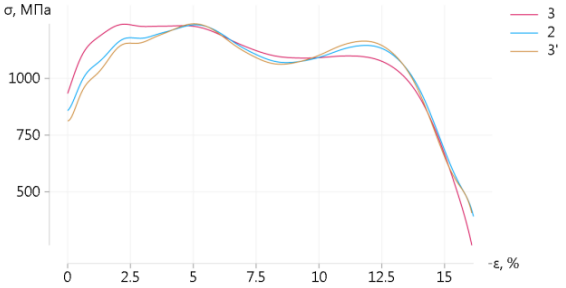



*Рис. 6. Кривая деформирования в опыте на динамическое растяжение*

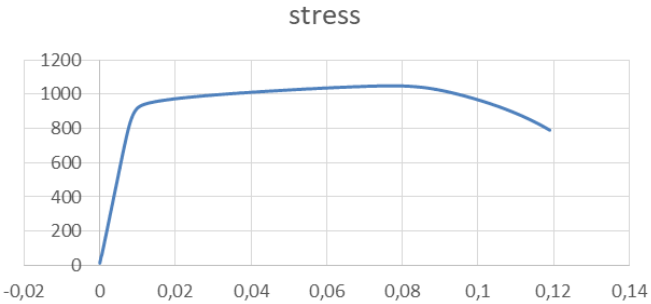
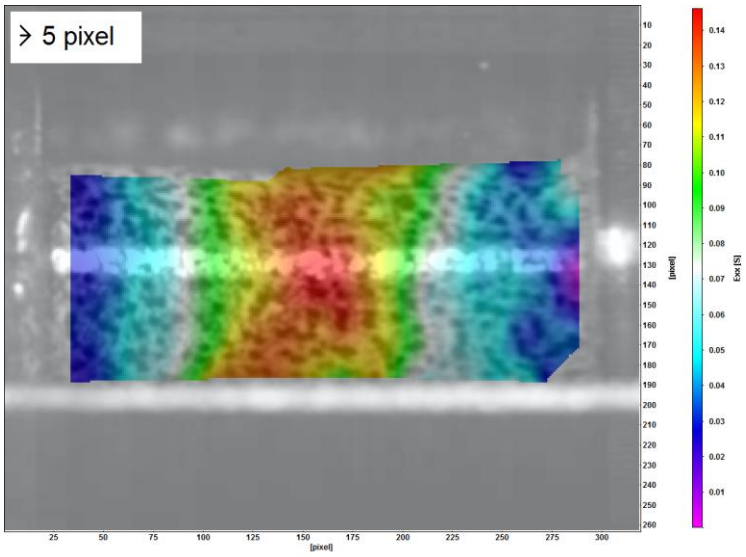



*Рис. 7. Кривая деформирования в опыте на статическое растяжение*

Для определения предельных деформационных параметров материалов в условиях неоднородной деформации в образцах (например, в шейке при растяжении) использовался DIC метод (корреляции цифровых изображений), позволяющий с применением высокоскоростной съемки идентифицировать кинематические поля на поверхности образцов. Примеры изображений, полученных с помощью DIC можно видеть на рис. 8.



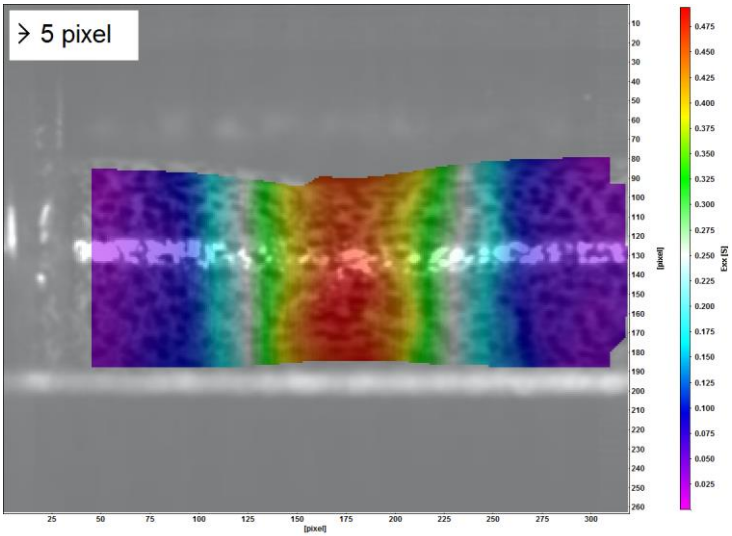



*Рис. 8. Изображения, полученные с помощью DIC в опыте на динамическое растяжение*

На протяжении всей работы приходилось преодолевать большое количество трудностей. Вот основные из них:

Первая проблема – это расположение высокоскоростных камер. Образец, который используется в опытах, очень маленький, порядка двух см, поэтому и камеры должны находить близко к образцу. Однако массивность установки не позволяла достичь необходимого расстояния между камерами и образцом.

Вторая проблема – это защита камер от образца, т.к. во время проведения эксперимента при больших скоростях, когда материал доводится до разрушения, осколки этого самого материала разлетаются в разные стороны так же с большими скоростями. При этом защита должна спокойно убираться, ведь испытанный образец необходимо постоянно доставать, а на его место ставить другой.

Третья проблема – это свет, т.к. во время эксперимента образец должен хорошо освещаться. При этом надо не

допустить появление бликов на образе, которые мешают анализу эксперимента.

Четвертая проблема – краска, наносимая на образец. При высокоскоростном деформировании краска слетает с образца. При нанесении слишком толстого слоя краски, наблюдается растяжение краски, что мешает наблюдению за образцом.

**Заключение.** В качестве основных результатов, полученных в работе, можно выделить:

Для исследуемых материалов (ВТ20, ВТ3 и ВТ8) построены динамические диаграммы в диапазоне скоростей деформаций 500 – 2000 с-1. Установлено, что в условия высокоскоростного нагружения, свойства исследуемых материалов существенно отличны от наблюдаемых в статике;

Применительно к динамическим испытаниям по методу Кольского и его модификациям адаптирована высокоскоростная схема DIC;

С использование DIC установлены предельные деформационные параметры материалов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-08-00334 А

*Список использованных источников*

1. Моссаковский П. А., Костырева Л. А. О новом способе экспериментального исследования материалов на динамический сдвиг при высокоскоростном деформировании // Проблемы прочности и пластичности. — 2018. — Т. 80, № 1. — С. 127–135