2. *Аллахвердиев Дж.Э.* О полноте собственных и присоединённых элементов несамосопряженных операторов близких к нормальным // ДАН СССР, **115**;2 (1957), 210-213.

3. *Джабарзаде Р.М.* О полноте системы собственных и присоединенных элементов операторов, квадратично зависящих от спектрального параметра// Изв. АН Аз. ССР, 1 (1977), 41-45.

4. *Jabrailova A.N.* On multiple completeness of a system of eigen and adjoint elements of operator sheaf in Hilbert spaces// Proceedings of IMM of NASA, **15**:23 (2001), 94-99.

5. *Jabrailova A.N.* M.V.Keldysh multiple completeness of a system of root vectors of the higher order operator bundle// Transactions of NASA **24**:1 (2004), 143-148.

6. *Jabrailova A.N.* On fourfold completeness of root vectors of one class of fourth order operator bundles depending on parameters // Transactions of NASA **24**:7 (2004), 81-86.

7. *Jabrailova A.N.* On double completeness of part of root vectors of a class of polynomial operator bundles of the fourth order. Transactions of NASA , **25**:7 (2005), 55-60.

О ГЛАДКИХ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С N СДВИГАМИ

Н.В. Зайцева

n.v.zaiceva@yandex.ru

УДК 517.956.32, 517.929

Для двумерного гиперболического дифференциально-разностного уравнения с n сдвигами по пространственной переменной построено однопараметрическое семейство гладких решений. Доказана теорема, что полученные решения являются классическими, если вещественная часть символа разностного оператора, входящего в уравнение, положительна.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, классическое решение, гладкое решение.

On smooth classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with n translations

A one-parameter family of smooth solutions of a two-dimensional differential-difference hyperbolic equation with n translations with respect to the spatial variable is constructed. The theorem is proved that the obtained

Зайцева Наталья Владимировна, старший преподаватель, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Natalya Zaitseva (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

solutions are classical if the real part of the symbol of the difference operator of the equation is positive.

Keywords: hyperbolic equation, differential-difference equation, classical solution, smooth solution.

Впервые дифференциально-разностное уравнение было изучено J. Bernoulli [1] в задаче о невесомой натянутой струне конечной длины, вдоль которой распределены равные и равноудаленные массы. Уравнение, рассмотренное им, встретилось при разработке теории звука и привлекло внимание многих других математиков (см., напр., [2] и имеющуюся там библиографию). В книге [3] приведен обширный материал по теории линейных дифференциально-разностных уравнений с постоянными коэффициентами, часто встречающимися в теории автоматического регулирования.

Изучение задач механики сплошных сред привело в дальнейшем к рассмотрению дифференциально-разностных уравнений с частными производными. В настоящее время подробно исследованы задачи для указанных уравнений в ограниченных областях (см., напр., [4] и имеющуюся там библиографию). В неограниченных областях изучены задачи для параболических [5] и эллиптических дифференциально-разностных уравнений [6–8]. Гиперболические дифференциально-разностные уравнения ранее были исследованы для случая, когда операторы сдвига в уравнении действуют по переменной времени [9].

Пусть a_j и h_j $(j = \overline{1,n})$ – заданные вещественные числа. Рассмотрим в полуплоскости $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial^2 u(x-h_j,t)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

которое, согласно терминологии [3], будем называть дифференциально-разностным уравнением.

Введем по аналогии с работами [10, 11] однопараметрическое семейство функций

$$G(x,t;\xi) := \sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) + \theta(\xi) + \xi x\right)e^{\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)} + \\ + \sin\left(\rho(\xi)\xi t\cos\theta(\xi) - \theta(\xi) - \xi x\right)e^{-\rho(\xi)\xi t\sin\theta(\xi)},$$

где

$$\rho(\xi) := \left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\cos(h_j\xi)\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\sin(h_j\xi)\right)^2\right)^{1/4}$$

и

$$\theta(\xi) := \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\sin(h_j\xi)}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\cos(h_j\xi)}.$$

Теорема. *При выполнении условия* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \cos(h_j\xi) > 0$ *функция* $G(x,t;\xi)$ *удовлетворяет уравнению* (1) *при любом вещественном значении параметра* ξ.

Литература

1. *Bernoulli J.* Meditationes. Dechordis vibrantibis // Commentaril Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, **3** (1728), 13-28.

2. *Burkhardt H.* Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik // Jahresber. Deutsch. Math.-Ver., **10** (1908), 1-1804.

3. *Pinney E.* Ordinary Difference-Differential Equations. — Berkeley and Los Angeles: University of California press., 1958.

4. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.

5. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Соврем. мат. Фундам. направл., **52** (2014), 3-143.

6. *Муравник А.Б.* Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений // Матем. заметки, **100**:4 (2016), 566-576.

7. *Muravnik A.* On the half-plane Diriclet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms // Math. Model. Nat. Phenom., **12**:6 (2017), 130-143.

8. *Муравник А.Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Матем. заметки, **105**:5 (2019), 747-762.

9. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Соврем. мат. Фундам. направл., **30** (2008), 3-173.

10. *Зайцева Н.В.* Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения, **56**:6 (2020), 745-751.

11. *Зайцева Н.В.* О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Докл. АН, **491**:2 (2020), 44-46.