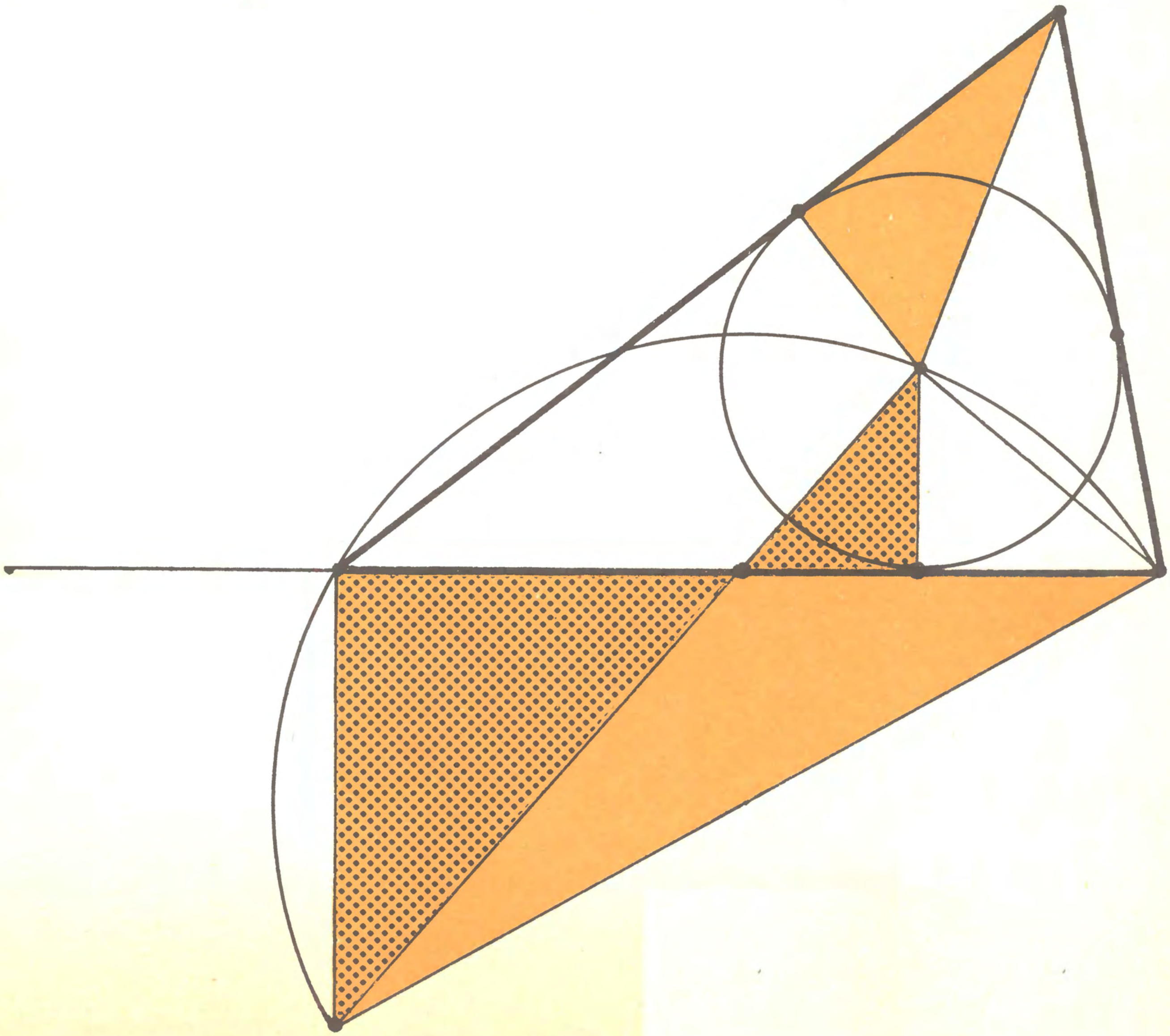
ISSN 0130—9358

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ

Научно-методический журнал Государственного комитета СССР по народному образованию

4 · 90



ФИЛДСОВСКАЯ ПРЕМИЯ

Эту награду Международный математический конгресс присуждает раз в 4 года молодым ученым за особые достижения в области математики. Ее часто называют Нобелевской премией по математике. Как известно, Нобелевские премии стали присуждаться с 1901 г. по завещанию шведского инженера-химика, изобретателя динамита, промышленника и миллионера Альфреда Бернхарда Нобеля (1833–1896). Премия присуждается за выдающиеся работы в области физики, химии, медицины, физиологии, экономики, за литературные произведения, за деятельность по укреплению мира. Первоначально в этом списке была названа и математика, но потом Нобель сам исключил математиков из перечня возможных претендентов. В научных кругах этот поступок расценили как по меньшей мере странный.

Существуют несколько версий, объясняющих причины решения Нобеля. Но ни одну из них нельзя доказать документами. В среде математиков утвердилось мнение, что недружелюбный жест миллионера объясняется личной неприязнью Нобеля к известному шведскому математику М. Г. Миттаг-Леффлеру. Магнус Густав Миттаг-Леффлер (1846–1927) занимался вопросами теории аналитических функций и получил ряд важных результатов. Именно он пригласил Софью Ковалевскую читать лекции в Стокгольмском университете, чем немало способствовал расцвету ее математического таланта.

Миттаг-Леффлер основал математический журнал и сумел привлечь к его работе многих выдающихся математиков. Один этот факт характеризует ученого как инициативного и общительного человека. К тому же известно, что он был очень хорош собою. Такие люди обычно легко наживают себе как врагов, так и друзей. Прочная и продолжительная дружба связывала Миттаг-Леффлера с канадским математиком Дж. Ч. Филдсом. "Именно от Филдса,--писал секретарь оргкомитета международных математических конгрессов Дж. Л. Сайн,–я впервые услышал о трениях между Нобелем и Леффлером. Полагаю, что это было вызвано взаимной завистью..." Как бы то ни было, но пробел, созданный Нобелем, впоследствии заполнил Дж. Ч. Филдс.

Джон Чарльз Филдс (1863–1932) родился в г. Гамильтоне на юге Канады. Окончил университет в Торонто, затем более 10 лет провел в Европе, где продолжил свое образование и завязал дружеские отношения со многими математиками. С 1902 г. работал в Торонтском университете (профессор). Основные труды относятся к теории алгебраических функций и теории абелевых интегралов. Дж. Ч. Филдс был президентом Канадского королевского общества, членом Лондонского королевского общества, членом-корреспондентом АН СССР. С 1924 по 1932 г. занимал пост президента Международного математического союза.

Это было время, когда математики разных стран оказались разобщенными в результате первой мировой войны. Традиция математических конгрессов, регулярно проводившихся в 1897–1913 гг., нарушилась. В этих условиях предложение Филдса награждать математиков разных стран за выдающиеся достижения получила горячую поддержку научных обществ Америки, Франции, Италии, Швейцарии и Германии...

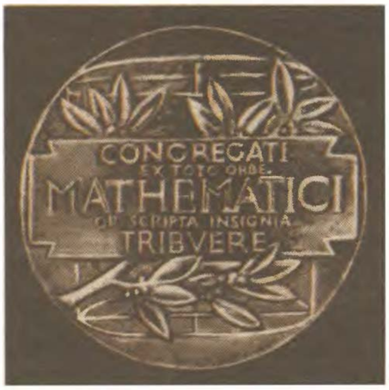
В 1932 г. Филдс составил меморандум, в котором подробно охарактеризовал статут новой премии. Он подчеркивал, что премия должна быть интернациональна и объективна. "Она ни под каким видом не должна включать упоминание о какой-либо стране, институте и личности". Филдс выступал против того, чтобы награда называлась чьим-то именем. Будь он жив, то, скорей всего, возражал бы против названия "Филдсовская премия". Тем на менее это название утвердилось и, как видим, совершенно справедливо.

До формального учреждения премии Дж. Ч. Филдс не дожил. Согласно завещанию значительная часть его состояния перешла в фонд премии. Премией не только отмечаются заслуги того или иного лица, но и стимулируется его дальнейшая деятельность в области математики. Поэтому согласно уставу она присуждается исследователям, не достигшим 41 года.

Вместе с премией (1500 канадских долларов) лауреату вручается и золотая медаль. Лицевая сторона медали (аверс) и ее оборотная сторона (риверс) показаны на рисунках. На аверсе изображена голова Архимеда. Перед ней надпись по гречески: "Архимед". Надпись вокруг головы гласит: "Превзойти человеческие возможности и познать Вселенную". На риверсе написано по-латыни: "Математический мир приветствует шаг к познанию". На заднем плане – сфера, вписанная в цилиндр,–чертеж к знаменитой теореме Архимеда. Надписи составлены профессором Т. Норвудом из Торонтского университета.

Первые лауреаты Филдсовской премии были названы в 1936 г. За минувшие 53 года эта премия была присуждена 30 математикам.

(Продолжение см. в этом номере журнала.)



Научно-методический журнал
Государственного комитета СССР
по народному образованию

МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ

4-90

Москва «Педагогика»
Издается с мая 1934 года
Выходит один раз
в два месяца

Июль-август

Содержание

Сдано в набор 8.06.90.
Подписано в печать 10.07.90.
Формат 84×108 1/16. Печать высокая.
Бумага тип. № 2. Усл. печ. л. 8,4.
Усл. кр.-отт. 9,24. Уч.-изд. л. 11,23.
Тираж 425 835 экз. Заказ 6070.
Цена 45 коп.

Издательство «Педагогика»
Академии педагогических
наук СССР и Государственного комитета
СССР по печати.

Адрес издательства:
107847, Москва, ГСП, Б-05,
Лефортовский пер., д. 8.
Адрес редакции: 129278,
Москва, ул. Павла Корчагина, д. 7
Телефон: 283-85-83.

Набрано в ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Государственного комитета СССР по печати. 142300, г. Чехов Московской обл.

Отпечатано в Московской типографии № 13 ПО «Периодика» Государственного комитета СССР по печати. Заказ 190
107056, Москва
Денисовский пер., д. 30.

ЧИТАТЕЛЬ РАЗМЫШЛЯЕТ, ПОДДЕРЖИВАЕТ, ВОЗРАЖАЕТ, ВНОСИТ СВОИ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Публикуемые в прессе материалы по проблеме реформы математического образования продолжают вызывать общий интерес и оживленные отклики учителей и преподавателей высшей школы.

Продолжаем публикацию статей, отражающих основные направления редакционной почты по этой проблеме.

Обсуждаем «Концепцию развития школьного математического образования»[1]

Предлагаемый документ крайне необходим, тщательно продуман и в целом прогрессивен, но все же в нем есть немало мест, вызывающих противоречивые чувства. Заметим прежде всего, что «Концепция» должна быть более лаконичной, без неоправданных длиннот и непринципиальных частностей.

Весьма убедительно изложено введение («Анализ ситуации»), хотя о многом в нем следует сказать гораздо жестче. Это относится, например, к констатации того факта, что средний уровень квалификации учителей весьма невысок. Сегодня уже пора признать, что ни система теоретической, ни система профессионально-педагогической подготовки учителей математики не выдерживают никакой критики. Заказ общества на учителей математики превышает возможности существующей формы их воспроизводства, и это несоответствие мы испытываем, начиная с набора. От половины до двух третей поступающих на физико-математические факультеты педвузов подготовлены по математике едва лишь удовлетворительно. Поэтому рассчитывать на высокий уровень получаемой в педвузе квалификации бессмысленно — нельзя начинать обучение основам математики в 17—18 лет!

И именно отсюда, от слабой теоретической подготовки будущего учителя идет пресловутая рецептурность методики: спрос рождает предложение, а значительная часть учителей не стремятся к творческому преподаванию, им надо суметь только грамотно пересказать действующий сегодня учебник.

Необходимо поставить вопрос о государственных мерах помощи в формировании контингента педвузов. Видимо, именно на подготовку будущих учителей в средней школе и в педагогических вузах следует требовать увеличения инвестиций — они быстро окупятся. Тезисом «вуз готовит студентов в школе» (гл. II, п. 12, с. 7) нельзя ограничиваться, хотя и этот тезис, по-видимому, встретит немалое сопротивление общественности, прежде всего вузовской. Однако в обозримом будущем диспропорции в системе «выпуск из средних школ — набор на первый курс» сохранятся, и при нынешнем падении престижа высшего образования вообще, а педагогического в особенности, поиск абитуриентов становится анахронизмом. Все большее значение приобретает многолетняя работа с будущими студентами вузов еще в школе.

В «Концепции» следовало бы точнее охарактеризовать и положение дел с учебно-методической литературой и литературой для внеклассной и внешкольной работы. Нехватка книг объясняется не только и не столько удаленностью большинства учителей и учеников от центров математической культуры и не ошибками издательского планирования и определения тиражей. У нас отсутствует система обеспечения литературой. Книги «уходят между пальцев». Пора понять простую истину — учебник, книга для внеклассной работы, методическое пособие есть инструменты учителя, следовательно, соответствующие органы о б я з а н ы обеспечивать будущего и действующего учителя этими инструментами (разумеется, за плату). А пока мы все время «достаем» книги, как и прочий дефицит. Достают учителя, достают студенты. Неужели нельзя, скажем, начиная с III курса выдавать каждому студенту комплект основных учебников и задачников, десяток книжек для школьников, десяток-другой книг по методике? И не надо бояться, что к выпуску из вуза учебники сменятся. Сама по себе частая смена учебников еще не порочна, порочна смена о б я з а т е л ь н ы х учебников, порочно требование менять учебник по команде сверху. Давно известно, что грамотный учитель может преподавать по любому учебнику (и вовсе без учебника). Вот и надо дать ему полную свободу выбора учебника при обязательном условии выполнения основных требований программы.

Кстати, нельзя не поддержать идею о возвращении к системе учебник-задачник, как и к мысли о создании «учительских» вариантов учебника. При этом едва ли стоит ограничиваться в «учительском» варианте лишь «небольшими по объему комментариями». Сегодня нужны именно обстоятельные комментарии, не рецепты к каждому параграфу, а комментарии, раскрывающие систему внутрипредметных и межпредметных связей, структуру понятий и суждений, дающие рекомендации по организации повторения и т. д. и т. п.

Очень своевременна мысль авторов «Концепции» о возрождении сборника «Математическое просвещение». Достаточно вспомнить, как в конце 50-х — начале 60-х гг. вышедшие тогда шесть сборников способствовали развитию творческого подхода к делу, формированию современных взглядов на преподавание математики и у учителей, и у всей нашей математической общественности. Что же касается высказанного в «Концепции» предложения о моратории на массовое внедрение новых учебных пособий (с. 12), то его надо ввести не временно, а постоянно — достаточно уж с нас массовых внедрений. Дайте учителю право и возможность внедрять в собственную практику то, что соответствует его знаниям и убеждениям!

Наибольшие сомнения в «Концепции», естественно, вызывают конкретные рекомендации содержательного характера, особенно когда авторы категоричны в своих суждениях. Проявляется это, во-первых, в явной перегруженности содержания базового курса математики и, во-вторых, в ряде частностей.

Например, утверждение «желательно, чтобы уравнения предшествовали формулам» (гл. II, п. 6, с. 5) далеко не бесспорно. С тем же успехом можно считать, что более логична и естественна именно буквенная запись алгоритма

[1] См.: Математика в школе. 1990. № 1. С. 2—13.

вычислений в виде формулы еще до появления неизвестных и составления уравнений для решения задач. Зачем навязывать жесткие рекомендации в подобных случаях?

А вот понятие прямого угла, по существу (без формального определения) известное еще дошкольнику, наверное, не следует откладывать до V — VI классов, как и простейшие измерения при помощи линейки. Вообще, следует отметить, что и в действующих учебниках и программах, и в «Концепции» (правда, в меньшей степени) наглядная и практическая геометрия очень запаздывают. Это является психологической ошибкой, затрудняющей введение систематического курса геометрии, который оказывается этапом «абстрактного мышления» без «живого созерцания».

В связи с обсуждением «Концепции» стоило бы вернуться к обсуждению вопроса о пробеле в системе развития логического мышления учащихся, возникшем с устранением «действительно устаревших арифметических задач» (с. 6). Это очень непростой вопрос. Так называемые типовые задачи, решение которых в замаскированном виде повторяло те же операции, что и при решении уравнений или их систем, действительно относятся к анахронизмам. Но задачи на сообразительность никакими уравнениями не заменишь, они должны быть предусмотрены в задачниках в той же степени, что и задачи на построение с помощью циркуля и линейки, тоже в известном смысле архаичные.

Не вполне справедливо утверждение о неизбежной «скучности» начальных утверждений и бедности, искусственности построенных на их сюжетах задач на первом году обучения геометрии при аксиоматическом ее изложении (с. 6). Конечно, если в качестве одного из первых утверждений геометрии вводить аксиому Паша, в которой, по-видимому, не ощущали необходимости ни Гаусс, ни Лобачевский, ни Клейн (но ученик VII класса почему-то обязан испытывать в ней необходимость), то авторы правы. Если же геометрию базировать на солидном наглядном курсе, если ее изложение не ограничивать аксиоматической стерильностью, то ничего страшного не произойдет. В этом смысле очень не помешает обратиться к классике, взглянув хотя бы на бóльшую часть предложений первой книги «Начал» Евклида.

Тем не менее идея о полной перестройке начальных глав систематического курса геометрии представляется заслуживающей обсуждения.

Вообще, не продолжая списка позиций «Концепции», по которым можно высказать ряд сомнений, хотел бы предложить Гособразованию СССР организовать обсуждение этого документа не только на страницах печати. Проблема достаточно серьезна. Для ее решения можно пойти на созыв представительного совещания по типу дореволюционных съездов учителей математики.

Л. Ф. Пичурин (г. Томск)

◆

«Концепция развития школьного математического образования», предложенная ВНИК при Гособразовании СССР, обсуждалась на методическом семинаре преподавателей математического факультета Кировского педагогического института им. В. И. Ленина. В обсуждении приняли участие кандидаты педагогических наук М. В. Крутихина, А. И. Глушкова, С. М. Окулов, доцент М. Г. Лускина, преподаватель Е. М. Канина, профессор кафедры математического анализа и методики преподавания математики Е. С. Канин, и. о. профессора кафедры геометрии Я. П. Понарин. Ниже изложены основные выводы этого обсуждения.

Мы разделяем мнение авторов «Концепции» о всеобщем среднем образовании как о равной возможности каждого получить среднее образование. Соглашаемся с предложенной структурой математического базового девятилетнего образования, фуркацией в X — XI классах. ВНИК правильно считает, что в связи с этим необходима широкая дифференциация обучения математике, особенно в старших классах.

Мы согласны с тем, что качество учебных пособий по математике невысокое, однако решающим фактором обучения считаем не качество пособий, а квалификацию учителей. Вместе с тем мы признаем, вслед за авторами «Концепции», что в настоящее время средний уровень квалификации учителей довольно низок.

«Концепция» написана многословно и далеко не всегда четко и убедительно. Такой документ должен учитывать широкие перспективы математического образования. Но обсуждаемый вариант предусматривает лишь близкую перспективу, а во многом только следует за имеющимися практическими достижениями в преподавании математики. Терминология обсуждаемой публикации иногда воспринимается неоднозначно, а авторы не разъясняют содержание некоторых терминов. Например, неясным остается термин «общекультурные цели». Включает ли он цели развития знаний, мышления, интеллекта — этих неотъемлемых составных частей понятия культура? Вызывает сожаление, что именно неразъясненным термином «общекультурные цели» оправдывается большая часть содержания «Концепции».

Предложенная концепция касается не только развития математического образования в СССР. Разделы IV — V относятся фактически к общим вопросам народного образования, и потому их обсуждение только в связи с математическим образованием едва ли достаточно. На наш взгляд, концепция математического образования должна исходить из общей концепции образования, которая должна предусматривать гуманитарное, техническое и физико-математическое направления образования.

«Введение» написано в целом объективно, но уж очень многословно: оно составляет 20 % всего текста. Разделяя в основном положения этого раздела, мы хотим отметить его некоторые нечеткости и неясности. Для чего нужна общесоюзная система контрольных испытаний? Опять всех учащихся стричь под одну гребенку? А как связать дифференциацию с такой системой контроля? Осуществление предлагаемой системы контроля потребует немалых средств и едва ли окупится полученными результатами.

Раздел II («Содержание базового курса математики в школе») и III («Дифференциация в обучении математике») являются, пожалуй, основными. Рассмотрим сначала II раздел. Можно согласиться с авторами в том, что в первых шести классах предполагается единый курс математики, а в VII — IX классах — отдельные предметы: алгебра и геометрия. Сомнения вызывает единый курс математики в X — XI классах. Трудно излагать в виде одного курса геометрию, математический анализ и элементы теории вероятностей, так как слишком различны идеи, на которых они построены, а той идеи, которая могла бы объединить их, авторы не излагают. Поэтому проблема создания такого курса трудноразрешима и не ясно, стóит ли ее решать. Доводы авторов о сохранении отдельных курсов алгебры и геометрии в VII — IX классах полностью относятся и к курсам геометрии и начал анализа в X — XI классах. Получается, что ВНИК противоречит сам себе. Тезис о невозможности разделения геометрии и начал анализа в X — XI классах ничем не подтвержден и поэтому не является убедительным, тем более что традиционно эти математические курсы излагаются как различные.

Осуществленное в «Концепции» выделение пяти разделов школьного курса математики (раздел II, п. 4) кажется спорным и неполным. В самом деле, в X—XI классах появляется теоретико-вероятностный раздел, шестой, о котором, однако, не говорилось в первых пунктах II раздела. Вызывает сомнения разделение разделов «вычисление» и «числовые системы». Может быть, не стóит искусственно отделять теорию чисел от ее приложений при вычислениях? Мы предлагаем вернуться к традиционному делению школьного курса математики на пять следующих разделов: числовые системы, алгебра, геометрия, начала анализа, элементы теории вероятностей.

Содержание математических курсов «Концепция» во многих случаях не раскрывает. Если вопросы числовых систем и вопросы геометрии рассмотрены достаточно подробно для V—IX классов, то все, относящееся к алгебре, изложено схематично, а содержание стереометрии и анализа вовсе не раскрыто. Слабо очерчена функциональная линия. Пойдет ли речь об общем понятии функции, свойствах и классах функций? Будут ли изучаться в девятилетней школе линейная, степенная и другие функции, знание которых и умение применять при решении практических задач относятся, несомненно, к общекультурным целям? Рассмотрение лишь графиков зависимостей (каких?) имеет скорее прикладное, чем общекультурное значение. Предполагается ли исследование функций, исследование их с помощью производной? На эти вопросы нет ответа в публикации. А что будет с такими понятиями, как степени и корни? В тексте упоминаются только отрицательные степени.

Мы полностью разделяем мнение авторов «Концепции» о роли геометрии, в частности геометрических задач, в общем и математическом образовании, об особенностях и трудностях этого курса. Однако мы высказываемся против изучения начал стереометрии в VII—IX классах: опыт 60-х гг. дал отрицательные результаты. А тем учащимся, которые не будут продолжать учиться в X классе, стереометрия и не нужна. Обзор геометрических форм в природе и искусстве сам по себе ничего дать не может, кроме извращенного представления о геометрии как науке. Он должен вкрапливаться в геометрический курс.

На основе имеющегося опыта мы пришли к твердому убеждению, что от аксиоматического метода как такового в школьной геометрии следует открыто отказаться. Его применение обременяет курс, а результаты иллюзорны. Аксиоматика декларируется, но не работает. Понятие же об аксиоматическом методе разъяснить необходимо, но это может быть темой одного из «модулей» в X—XI классах.

Мы высказываемся против идеи популярных обзоров и простейших иллюстраций (п. 10) в геометрическом курсе. Без доказательств и применения в задачах сообщаемые факты скоро забудутся, а поверхностное отношение к изучаемому материалу может отрицательно повлиять на воспитание школьников.

Нельзя обойти молчанием вопросы методики обучения. Надо поддержать ВНИК в предложении ослабить сложности, связанные с формой записи математических рассуждений, а также в том, чтобы многое из ныне действующей программы старших классов не включалось в базовый курс. Надо лишь выделить то, что же именно не будет в него включено. В этой связи вызывает возражения явно просматривающаяся в «Концепции» тенденция к сокращению усилий по развитию мышления учащихся, попытка формировать логическую культуру в основном при решении задач. Подтверждая положение об огромной роли задач в формировании мышления, мы все же считаем, что доказательства теорем необходимы для обучения математике, для развития мышления и служат достижению общекультурных целей.

В обсуждаемом документе весьма робко говорится о роли компьютеров и микрокалькуляторов в обучении математике. В концепции развития школьного математического образования следует предусмотреть и расширение использования компьютеров в обучении математике, а не только в выполнении вычислений. Роли компьютера как средства обучения должно быть уделено гораздо больше внимания.

В п. 6 раздела II сказано: «В связи с десятичными дробями появляются отрицательные степени, иррациональные числа, суммирование бесконечной геометрической прогрессии...» Не рановато ли изучать все это в V—VI классах? Может получиться, что учащиеся будут знакомиться с иррациональными числами ранее изучения рациональных, с бесконечной геометрической прогрессией —до знакомства с прогрессиями вообще и т. п. Видимо, этот пункт недостаточно продуман. Сомнительно и рекомендуемое в п. 7 приближенное решение уравнений (методом последовательных приближений или более современными методами). Приближенное решение уравнений можно осуществлять на компьютере.

Если курс стереометрии будет построен путем ослабления аксиоматической линии и переноса акцента на наглядную геометрию, а начала анализа даны лишь в популярном обзоре (п. 10), то становится неясным, куда пристыковывать «модули». Может получиться набор весьма разнообразных сведений из математики без достаточных связей и обоснований, и, следовательно, курс математики как таковой исчезнет.

Заслуживает критики список предлагаемых «модулей». Его нужно расширить. Он должен включать разделы (темы) математики, легко пристыковывающиеся к базовому курсу.

В разделе III («Дифференциация в обучении математике») высказываются разумные мысли о тесном слиянии базового курса с внеклассной и внешкольной работой учащихся по математике. Заслуживают одобрения и гибкие учебные планы, и программы по математике с гибкими же подпрограммами внеклассных занятий, а также модульная организация обеспечения программами и учебниками (п. 7). Указаны практически все распространенные формы внеклассной и внешкольной работы с учащимися по математике.

Однако в самом толковании дифференциации обучения ВНИК не учел практику работы учителей: дифференциация обучения в ходе уроков математики авторами не предусмотрена, а учителя давно ее осуществляют. Поэтому необходим более серьезный подход к дифференциации обучения математике, включающий дифференциацию обучения на уроках, и не только уровневую дифференциацию (п. 5). Совсем не обязательно открытое разделение учащихся на группы, поскольку в некоторых случаях это обидно и оскорбительно для учеников. На уроках оказывается полезной скрытая дифференциация, когда ученик и не знает о разделении класса на группы уровней. Едва ли целесообразно производить открытое разделение учащихся на группы только по их выбору. Необходимо учитывать и советы обучающих. Без дифференциации обучения математике на уроках трудно осуществить все последующие стадии дифференциации, которые предусмотрены в «Концепции».

Вызывает сомнение рекомендация ВНИК об организации школ и классов с углубленным изучением математики лишь для X—XI классов. Имеется положительный опыт обучения в таких школах с VIII—IX классов (например, школа-интернат № 45 при ЛГУ, школа № 35 г. Кирова).

Поддерживая широкую вариативность методов и форм обучения, декларируемую ВНИКом, мы высказываемся за создание методических пособий, исключающих копирование и развивающих творческую активность учителей математики.

Целиком поддерживая идею дифференциации обучения математике, мы считаем, что она должна пониматься и осуществляться шире и глубже. При этом следует учитывать, что к внеклассным и внешкольным занятиям математикой традиционно сложилось отношение необязательности. Поэтому надо предусмотреть повышенную оплату учителю за внеклассную учебную работу, а также широкую пропаганду школьными работниками, преподавателями и студентами вузов, профессиональными математиками всех видов внеклассного и внешкольного изучения математики.

В «Концепции» четко просматривается очень важная проблема поиска и развития математических талантов. Но это лишь одна сторона дифференциации обучения математике. О других же сторонах дифференциации говорится неохотно и вскользь. Существенно замечание о том, что обучение должно быть близко к потолку возможностей ученика (п. 4). Это верно для учащихся с различными математическими способностями. Поэтому следует предусмотреть и дифференциацию обучения различных групп учащихся, не исключая и детей со способностями средними или чуть выше средних.

Несколько замечаний к двум последним разделам, IV и V. Мы поддерживаем предложения, касающиеся повышения квалификации учителей математики и увеличения зарплаты учителям математики, работающим по программам повышенного уровня. Вполне уместны и предложения об учреждении периодических изданий по математике для учащихся младшего и среднего возраста, о переходе к общественно-государственной или государственно-общественной (надо хорошо взвесить, какой из этих двух подходов принять) системе управления в области математического образования. Но имеются и некоторые возражения.

Во-первых, следует предусмотреть радикальную перестройку в обучении будущих учителей математики, существенно повысив требования к их математической, методической и психолого-педагогической подготовке, особенно в периферийных вузах.

Во-вторых, предложение о защите диссертаций преимущественно по опубликованным работам (раздел IV, п. 3) ставит в более выгодное положение жителей центральных городов, где сосредоточены издательства и издания.

В-третьих, серьезные сомнения вызывает привлечение кооперативов к развитию математического образования. Всякий раз, когда кооператоры берутся за какое-либо дело, цены на их продукцию немедленно и резко повышаются. Можно прогнозировать повышение цен и на литературу по математике в кооперативных изданиях, на оплату «образовательных услуг» кооператоров, но нельзя гарантировать качество того и другого.

Мы хотели бы надеяться, что высказанные выше соображения помогут усовершенствовать содержание обсуждаемого документа.

Е. С. Канин и Я. П. Понарин (г. Киров)

◆

Следует прежде всего положительно оценить сам факт публикации «Концепции школьного математического образования», поскольку давно назрела необходимость привести в какую-то систему предпринимаемые попытки вывести школьное математическое образование в нашей стране из того кризисного состояния, в котором оно очутилось. Поспешные решения, принимаемые в настоящий момент руководителями народного образования, могут оказаться неэффективными и даже усугубляющими недостатки. Таким ошибочным, по нашему мнению, решением явилась публикация рекомендаций по разгрузке учебной программы по математике. Эта «разгрузка» приведет к выхолащиванию ведущих идей курса, за внедрение которых боролись в течение многих лет прогрессивные математики и педагоги. Следует подчеркнуть недопустимость келейного принятия столь важных решений, касающихся народного образования. Ведь многие вопросы, которые сейчас предлагается исключить (например, геометрические преобразования, свойства векторов и др.), были введены по решению авторитетных программных комиссий АН и АПН СССР и явились результатом длительных и широких обсуждений.

Итак, необходимость разработки четкой концепции перестройки общего математического образования не вызывает сомнений. Такая концепция должна определять пути перестройки, которые могут привести к коренному улучшению математической подготовки выпускников средней школы. Следует отметить, однако, что в материалах «Концепции» не учитываются ранее опубликованные разумные предложения, реализация которых, по нашему мнению, могла бы существенно улучшить положение с математическим образованием. Мы имеем в виду в первую очередь предложения, содержащиеся в следующих статьях:

Болтянский В. Г., Глейзер Г. Д. К проблеме дифференциации школьного математического образования // Математика в школе 1988. № 3.

Глейзер Г. Д., Черкасов Р. С. Школе необходима концепция общего математического образования // Математика в школе. 1988. № 6.

В первой из них критикуется примитивизм в обучении математике и указываются возможные меры, которые помогут его избежать. Во второй статье сформулирован, в частности, принцип непрерывности математического образования. Этот принцип чрезвычайно важен, однако в «Концепции» он даже не упоминается, хотя для развития системы непрерывного образования в нашей стране имеются необходимые условия: достаточно высокий образовательный уровень населения, развитые средства массовой информации, широкая система высших учебных заведений.

Проблема непрерывного образования возникла первоначально в связи с массовым развитием образования взрослых. Это отражено как в советских, так и в зарубежных педагогических исследованиях. В ряде работ ученых многих стран образование взрослых, к которому сводилось и понимание непрерывного образования, рассматривалось только как необходимое условие для компенсации недостатков и упущений школьной подготовки, а также для пополнения знаний в связи с требованиями производства. Такая трактовка характерна для публикаций 50-х и начала 60-х гг. Когда же стало все более отчетливо проявляться воздействие НТР на производство, внимание исследователей начало постепенно переключаться на проблему повышения квалификации или перемены профессии. Разрабатывались вопросы функционального образования, организации различных форм повышения квалификации, главным образом применительно к сфере деятельности обучаемых. Характерной была прикладная направленность с целью добиться более эффективного участия человека в производстве.

В дальнейшем идея непрерывного образования увязывалась с получением квалификации, необходимой для работы в различных отраслях производства. Однако и такой подход вскоре оказался недостаточным. Становилось все более очевидным, что функциональное образование имеет очень узкую сферу применения и не годится в тех условиях, когда социально-экономическое и научно-техническое развитие все больше требует интеграции профессионального и общего образования. В середине 70-х гг. все активнее стал обсуждаться вопрос о таком непрерывном образовании, которое дает человеку возможность приспособиться к жизни в современном обществе.

В нашей стране непрерывное образование выступает как условие (и процесс) всестороннего развития личности, обогащения ее творческого потенциала. Оно направлено не только на подготовку, но и на постоянное развитие личности как активного субъекта труда, познания, общения. Оно становится важнейшей характеристикой образа жизни советского человека.

В условиях научно-технической революции, когда происходит качественный скачок производительных сил, наука вообще (и математика в особенности) превращается в ведущую силу производства, значение которой увеличивается с каждым годом.

Неоценим вклад математического образования в интеллектуальное развитие человека, в формирование его культурного уровня. Кроме того, математическое образование является существенно важным фактором в формировании готовности человека к непрерывному общему и профессиональному образованию во многих сферах человеческой деятельности.

Однако в настоящее время вклад математики в общекультурное и профессиональное становление человека учитывается все меньше и меньше. Раздаются даже призывы перейти в средней школе на необязательное изучение математики. Авторы таких призывов не предвидят, что неполноценность математического развития неминуемо приведет к неспособности человека продолжить свое образование или получить необходимые профессиональные знания путем самообразования.

Особенно большое значение математическое образование выпускников средней школы приобретает сейчас, в период перестройки. Ясно, что научно-технический прогресс не может быть обеспечен только силами интеллектуальной элиты. Внедрение новых научных идей в практику производства существенно зависит от уровня математической образованности основной массы трудящихся.

Итак, построение школьного математического образования на принципе непрерывности предполагает:

изучение математики как важного и самостоятельного предмета на всех ступенях средней школы;

отбор такого содержания математического образования, которое обеспечивает общекультурные потребности людей, способствует активному интеллектуальному развитию подростков; обеспечивает успешное усвоение смежных учебных предметов;

дифференциацию математической подготовки учащихся, обеспечение послешкольного общего и профессионального образования и самообразования в соответствии с их интересами, склонностями, способностями.

Указанные аспекты должны быть четко отражены в концепции школьного математического образования.

А. С. Адыгозалов (Баку)

◆

«Концепция развития школьного математического образования» содержит немало интересных и многообещающих идей. Выскажем свои соображения по поводу возможностей реализации некоторых из них при обучении математике в малокомплектной школе — доминирующем типе сельских общеобразовательных школ России.

Дифференциацию обучения математике в школе следует отнести, на наш взгляд, к тем принципиально важным установкам, без которых учебно-воспитательный процесс в малочисленных классах сельских школ не может быть эффективно организован. Как, к примеру, построить обучение математике в классе, состоящем из двух учеников, один из которых успевает на «хорошо» и «отлично», а другой, затрачивая максимум усилий, еле-еле дотягивается до «троечных рубежей»? Как обеспечить высокий уровень трудности и ситуацию успеха каждому из учеников в таких неравных условиях обучения, встречающихся в практике малокомплектных школ довольно часто? Ответ однозначен: на основе дифференциации обучения. Ориентация учебного процесса на среднестатистического учащегося (до сих пор господствующая в школьной практике) не создает нормальных условий развития ни для первого, ни для второго ученика. Лишь их совместное обучение на разных уровнях и есть тот правильный путь, по которому должно идти математическое просвещение.

Модульное построение содержания школьного математического образования, которое, по мнению авторов обсуждаемой концепции, способно учесть разнообразие образовательных ситуаций в школах страны, может оказаться полезным для ознакомления учащихся с приложениями математики в разнообразных сферах общественного производства. Так, учащимся сельских школ сослужили бы хорошую службу такие дополнительные модули к базовому курсу, которые раскрывали бы приложение элементарной математики в различных областях сельскохозяйственного производства: растениеводстве, животноводстве, хранении и переработке продуктов. Это позволило бы отказаться от большого количества текстовых задач, практический характер которых весьма сомнителен и зачастую не только не способствует сельскохозяйственному просвещению школьников и развитию их познавательных интересов, но и лишает эти задачи прямой дидактической ценности.

Что касается возвращения в системе «учебник плюс задачник», то нельзя не согласиться с теми доводами «за», которые приводятся в обсуждаемой концепции. Вместе с тем следует помнить, что отдельный задачник потребует от учителей значительно большей самостоятельности в решении вопросов организации учебной деятельности учащихся при их работе с задачником. Кроме того, прежняя структура учебника довольно удобна для организации самостоятельной работы учащихся, при самообразовании детей, что имеет немаловажное значение для малокомплектной школы. Но все же задачники, содержащие дополнительные задачи — поисковые, логические, повышенной трудности, исследовательского характера и т. п.,— безусловно, необходимы.

При создании методических пособий по математике нельзя забывать, что учителя малокомплектных школ работают в условиях многопредметного преподавания и, как правило, имеют ежедневно не по две-три, а по пять-шесть подготовок, зачастую по разным учебным предметам. Ситуация еще более осложняется в тех случаях, когда учителю приходится вести работу с классами-комплектами. В этих условиях учителя математики малокомплектных школ не могут категорично отказаться от поурочных методических разработок. Другое дело, что необходимо добиваться изменения отношения к таким разработкам со стороны учителей: не копировать, не механически следовать им от начала до конца, а принимать как возможный вариант, как основу для творческого преобразования с учетом специфики конкретного класса. Мы разделяем мнение, высказанное Г. Ф. Суворовой, о необходимости восстановления в правах таких методических разработок применительно к преподаванию всех предметов в малокомплектной школе (см.: Советская педагогика. 1981. № 2. С. 50).

Высказанная в «Концепции» мысль о развитии заочных и очно-заочных форм повышения квалификации учителей представляется весьма плодотворной. Использование в этих целях радио- и телепередач, новых информационных каналов позволит, на наш взгляд, существенно облегчить условия «педагогического одиночества», в которые попадают многие учителя малокомплектных школ из сельской глубинки.

М. И. Зайкин (Арзамас)

◆

Понятие базового образования, широко применяемое в обсуждаемой публикации, требует расшифровки по отношению к каждой учебной дисциплине. Для математики это особенно актуально, поскольку наблюдается большой разброс в желаниях и готовности школьников изучать этот предмет. При таком разбросе не удивительно, что многие родители учащихся выступают за уменьшение числа часов на математику. Иногда это мнение поддерживается даже деятелями культуры. Вопрос достиг такой остроты, что совершенно очевидным стало давление на высшие органы народного образования со стороны той части общественности, которая хотела бы освободить большинство школьников от систематических занятий математикой. Поэтому особенно ценно, что, судя по официальным учебным планам, люди, занимающиеся их составлением, пока выдерживают натиск «антиматематических» сил. Однако долго ли они смогут противостоять этим силам? Здесь мы выходим на вопрос о количественном аспекте базового математического образования. По нашему мнению, нельзя урезать число часов, отводимых в школе на математику. Освобождение от регулярных занятий математикой означало бы освобождение учащихся от необходимости учиться не только логическим рассуждениям, но и простому усердному размышлению, упорному стремлению к намеченной цели.

Мы считаем, что недавно образованная ассоциация учителей математики должна выступить в широкой печати в защиту полноценного математического образования для всех категорий учащихся.

Однако систематические занятия математикой вовсе не должны быть одинаковыми для всех школьников. Какие-то учащиеся должны продвигаться быстрее, другие — медленнее. Одни ученики могут глубже изучить математику, другим достаточно овладеть определенным минимумом. Но для тех и для других базовое математическое образование должно занимать одно и то же строго определенное число учебных часов, допустим, 5—6 ч в неделю.

Теперь естественно поставить вопрос о качественной стороне базового математического образования. Каким оно должно быть? В настоящее время математический багаж, который учащиеся приобретают в школе, состоит в основном из многочисленных разрозненных фактов и приемов доказательства. Впрочем, нельзя утверждать с уверенностью, что школьники действительно овладевают приемами доказательства. Скорее, они постигают приемы запоминания доказательств. Учителя настолько сжились с «вдалбливанием» в сознание учащихся определенного набора сведений, что воспринимают как новаторские те методы обучения, в которых основную роль играют приемы запоминания, а необходимость «вдалбливания» декларируется совершенно откровенно.

По нашему мнению, базовое математическое образование целесообразно сделать более свободным от накопительских тенденций. Разум учащегося не должен представляться учителю некоторым складом, куда он, учитель, обязан сложить побольше ценностей. Главное — убедить учащегося в том, что знание и есть самая большая жизненная ценность. Учащиеся должны вынести из школы не перечень некоторых математических фактов, а глубокие представления о математических методах. Они обязаны хорошо уяснить, что такое доказательство, для чего оно нужно, по каким законам может быть построено. Очень важно, чтобы выпускники школы понимали, почему математика помогает разгадывать загадки природы и преобразовывать человеческое общество. Ответы на эти вопросы предполагают формирование знаний о математическом моделировании природных явлений. В то же время очень важно включить в базовое образование информатику как науку, способствующую перестройке человеческой деятельности под воздействием компьютера и обеспечивающую построение информационного общества.

А. Т. Тажмаганбетов, В. Е. Серикбаева,
(г. Кзыл-Орда)

Об уровне математической культуры выпускников средней школы

Много лет я преподаю математику в высших учебных заведениях, готовящих учителей. В 50-е гг., когда я начал работать, уровень математической подготовки приходивших на I курс выпускников средней школы оставлял желать лучшего; а с того времени он еще снизился, и весьма ощутимо. Сейчас их математический багаж состоит из большего или меньшего числа слабо связанных между собой догматически усвоенных сведений и лучше или хуже закрепленных навыков выполнения некоторых стандартных операций и типовых заданий, занявших место задач. Представление о математике как о единой науке со своим предметом и методом у них отсутствует. И что всего хуже — полностью исчезла культура логических рассуждений.

Чтобы эти утверждения не выглядели голословными, приведу результаты двух маленьких работ, которые я провел на I курсе физико-математического факультета Шуйского пединститута (на разных потоках). Работы проводились без предупреждения и были анонимными: подписывать листки не разрешалось. Всем давалось одно и то же задание, и не все, конечно, выполнили его вполне самостоятельно; но, если бы удалось устранить взаимные консультации и списывание (о чем я не заботился), общая картина могла бы стать только хуже.

В первой работе было предложено одно задание: «Доказать, что сумма двух натуральных чисел тогда и только тогда четна, когда эти числа оба четны или оба нечетны». Работу выполнили 29 человек. Из них 26 не поняли смысла слов «тогда и только тогда» и доказывали более слабое утверждение: сумма двух чисел одинаковой четности четна. Правильно доказали это 7 человек.

Во второй работе также был предложен один вопрос: «Почему нельзя делить на нуль?» На этот вопрос я получил 44 ответа. Лучшим из них был следующий: «Потому что если $a:b=c$, то $c\cdot b=a$, а в случае, если $b=0$, $c\cdot 0=0$». Еще в одном случае можно предположить, что автор понимал суть дела, но не смог выразить свою мысль. Остальные 42 человека сути дела явно не понимали.

Как ни красноречивы эти результаты, я не стал бы делать из них выводы общего характера, если бы они не совпадали с теми, которые можно сделать из опыта постоянного общения со студентами. Какие же это выводы? Главный из них, по-моему, состоит в том, что, за редкими исключениями, выпускники средней школы имеют лишь весьма смутное представление о математическом рассуждении. Они никогда не упражнялись в рассуждении сами, а только заучивали рассуждения из учебников. Обычно они даже не представляют себе, для чего эти рассуждения нужны, и воспринимают их скорее всего как некие обязательные ритуалы, которыми математики неизвестно почему обставляют свои действия. Формулировки, напечатанные в учебнике жирным шрифтом, специфические слова и обороты, такие, как «аксиома», «противоречие», «произвольная точка», «тогда и только тогда», звучат для них как заклинания, которые, если произнести их в нужный момент, смягчают сердца экзаменаторов и обеспечивают хорошую оценку. А фразу «математика — наука точная» некоторые учащиеся воспринимают как требование точно, буква в букву, воспроизводить эти заклинания. И не случайно многие из них склонны понимать невозможность деления на нуль как своего рода табу, не подлежащее обсуждению и рациональному объяснению. («Потому что есть такое правило»; «Нельзя, и всё!»; «Этому учат с I класса»; «Это математическая аксиома, которой нас учили очень долго, а математика — наука точная»). Характерно, что в некоторых ответах непреложность запрета делить на нуль обосновывалась его давностью: «Это аксиома, сформулированная нашими дедами-прадедами», «Нас не было, когда это выводили».

Одним словом, математические рассуждения в глазах учащихся превращаются в своего рода магическое действо. Реальный смысл в математике имеют для них только формулы и правила, и математическая деятельность состоит для них по преимуществу или даже исключительно в выполнении выкладок по этим формулам и правилам. Но выкладки, не подкрепленные рассуждениями, неизбежно принимают механический характер, а это часто приводит к некорректному использованию математической символики и в конечном счете к грубым ошибкам.

Второй вывод, тесно связанный с первым: выпускники школы совершенно не умеют говорить и тем более писать на математические темы, не умеют выражать свои мысли словами. В школе их этому не учили; «развитие математической речи», которым там занимаются, сводится, как правило, к затверживанию штампов, сильно отдающих канцеляритом и даже не всегда грамотных. Своими словами они не умеют выразить ни одно математическое утверждение, даже такое, смысл которого им вполне ясен, и тем более цепочку умозаключений, хотя бы совсем простую. А в более сложных случаях это существенно затрудняет понимание, потому что понять по-настоящему математическое рассуждение — значит быть в состоянии его воспроизвести и притом воспроизвести не форму рассуждения, а его содержание, т. е. пересказать своими словами. (Разумеется, корни этой беды не только в математической подготовке, но и в общем развитии.)

Третий вывод: на развитии математической культуры школьников крайне вредно сказывается расхожее представление о разделении учебного материала по математике на «теоретический» и «задачный», при котором «теория» мыслится как совокупность сведений, которые нужно выучить, а задачи — как область приложения «теории». Это представление совершенно несостоятельно: математика вся целиком есть теория, но изучить ее можно, только решая задачи, в том числе достаточно трудные. Решение задач — это не применение теории, а важнейшая составная часть процесса ее изучения. Проведение в жизнь такого разделения приводит к тому, что изучение теории приобретает догматический и едва ли не схоластический характер, а в качестве реакции на это возникает тенденция отводить ей второе место, так что чем дальше, тем в большей степени ученики и даже учителя проникаются убеждением, что теория нужна постольку, поскольку позволяет решать задачи. Но при таком отношении к теории как раз решение задач — в настоящем смысле этого слова — становится невозможным, и они уступают место, как я говорил уже в начале статьи, типовым заданиям. Нынешние школьники не знают даже, что такое задачник, а учителю не нужно теперь подбирать задачи к урокам: ему достаточно задавать подряд задачи из учебника. Учебник же этот, снабженный типовыми заданиями и едва ли не разбитый на уроки, перестал уже, в сущности, быть учебником и превратился в ту самую «рабочую книгу», от сползания к которой предостерегал когда-то А. Я. Хинчин (см. его предисловие к переработанному им учебнику А. П. Киселева «Арифметика», изданному в 1948 г.).

К этим печальным выводам можно добавить еще одно наблюдение: существенно хуже, чем прежде, сейчас обстоит также дело с культурой вычислений и тождественных преобразований. Особенно сильно пострадала культура устного счета, не в последнюю очередь из-за распространения калькуляторов. Сейчас выступать против использования калькуляторов в школе не принято; считается, что это всё равно, что выступать против прогресса, за возвращение в пещеры. Между тем пора уже сказать во всеуслышание, что польза, которую могут принести калькуляторы в школе, ничтожна по сравнению с тем вредом, который они приносят уже сейчас, не говоря о том вреде, какой они могут принести в будущем.

Ну, а что ждет нас дальше? Похоже, что ничего хорошего. Никто не бьет тревогу по поводу катастрофического падения уровня математической культуры школьников. А совсем недавно Главное учебно-методическое управление общего среднего образования Гособразования СССР опубликовало разработанные лабораторией обучения математике НИИ СиМО АПН СССР «Методические рекомендации по разгрузке программы» (см.: Математика в школе. 1989. № 4), выполнение которых неминуемо приведет к еще более глубокому падению этого уровня. В предисловии к рекомендациям от имени Главного учебно-методического управления высказано утверждение о необходимости разгрузки школьных программ по всем предметам с той целью, чтобы учащиеся могли «углубиться в избранную область, больше времени уделять интересующим их предметам». И далее в качестве одного из способов разгрузки программ по математике предлагается рассматривать ряд вопросов «в ознакомительном плане», т. е. без воспроизведения учащимися доказательств, без запоминания формулировок, выработки соответствующих навыков. В следующих затем рекомендациях содержится длинный перечень понятий, формул, доказательств и целых разделов, которые предлагается изучать таким образом. Сюда входят, например, доказательства признаков равенства треугольников, теорем косинусов и синусов, формул приведения, нахождение абсолютной и относительной погрешности, действия над приближенными значениями, ряд вопросов дифференциального исчисления, все доказательства из интегрального исчисления. Но изучение любых доказательств «в ознакомительном плане», без установки на воспроизведение, неизбежно станет изучением без установки на понимание, поскольку, как уже говорилось, невозможно понять математическое рассуждение, не умея его воспроизвести. Не больше смысла и в «ознакомительном» изучении вопросов, требующих выработки навыков, например приближенных вычислений.

Представьте себе, что при изучении иностранного языка ученики только слушают учителя и им не нужно ни говорить самим, ни переводить или пересказывать услышанное или еще как-нибудь реагировать на слова учителя, ни читать что-нибудь на изучаемом языке. Именно так предлагается изучать большое число вопросов программы, в том числе очень важных. Бессмысленность подобного «изучения» выяснится немедленно, и у учителей не останется лучшего выхода, чем опустить эти вопросы совсем. Это придаст изучению математики в школе уже откровенно рецептурный характер; и он будет еще в значительной степени усилен выполнением других рекомендаций, касающихся просто изъятия ряда вопросов, в первую очередь как раз тех, которые важны для формирования математической культуры и представления о предмете и методе математики. Очень характерна первая фраза раздела о разгрузке курса геометрии VII—IX классов: «Основная разгрузка курса достигается в результате исключения из рассмотрения геометрических вопросов, не находящих непосредственного применения при решении задач». Эта фраза наглядно подтверждает существование упомянутой выше тенденции отводить «теории» подчиненное место по сравнению с «задачами».

В предисловии к рекомендациям оговорено, правда, что они не являются обязательными требованиями. Но все мы слишком хорошо знаем, что всякую рекомендацию из центра начальство на местах по традиции воспринимает как директиву, и традиция эта пока еще не нарушена. Да и не только начальство, а и среда будет сильно давить на тех учителей, которые откажутся следовать рекомендациям. И еще одна оговорка сделана в самом конце предисловия: «Учащимся, проявляющим интерес к математике, в частности предполагающим сдавать вступительные экзамены в вузы, должна быть предоставлена возможность овладения материалом на более высоком уровне». Это означает, в сущности, требование преподавать одновременно по двум программам: повышенной — для «проявляющих интерес» и пониженной — для остальных. Учитель, у которого 40 человек в классе, делать это заведомо не сможет, и «предоставление возможности овладения на более высоком уровне» останется на бумаге. (Да и как угадать в VI или даже в VIII классе тех, кто захочет сдавать вступительные экзамены в вузы по математике после окончания XI класса?) Так что в результате проведения в жизнь этих предложений рекомендуемый в них минимум быстро станет всеобщей нормой. А еще через какое-то время, скорее всего не слишком долгое, этот минимум будет восприниматься как чрезвычайно большой и чрезмерно «теоретический» максимум; и тогда последуют новые рекомендации по разгрузке с таким же эффектом.

Особенно грустно думать о том, что результаты работ, о которых шла речь в начале статьи, относятся не к случайной выборке из множества выпускников средней школы, а к тем, которые пожелали стать учителями математики и физики и сдали вступительные экзамены. Некоторые из них, конечно, потом отсеялись, но большинство осталось, и именно они будут в ближайшие десятилетия преподавать математику в школе. Среди них не так уж мало способных, и большая часть — люди добросовестные. В институте они учатся пять лет, и за это время мы могли бы многому их научить, помочь овладеть началами математической культуры, развить внутреннюю потребность учиться всю жизнь. Сейчас нам это удается лишь в очень малой степени и далеко не всегда, сколько мы ни прилагаем усилий. Главная причина этого — порочность всей нашей системы педагогического образования, нацеленной не на выращивание духовно независимых, думающих, образованных учителей, способных учить и воспитывать детей так, как велят совесть и разум, а на «выковывание» послушных и безликих исполнителей, без рассуждений выполняющих все инструкции и указания начальства.

Общественные, педагогические и методические дисциплины в том виде, в каком они у нас преподаются, служат почти исключительно цели воспитания нерассуждающих исполнителей, и даже специальные дисциплины нередко в конечном счете льют воду на ту же мельницу. Вылечить нашу тяжелобольную школу не удастся без решительного изменения системы подготовки учителей. Это изменение должно прежде всего включать в себя:

сокращение и перестройку на совершенно новых началах дисциплин общественного, психолого-педагогического и методического циклов;

коренное изменение характера педагогической практики;

резкое сокращение обязательной учебной нагрузки преподавателей и студентов и полное освобождение их от неучебной нагрузки;

прекращение не на словах, а на деле борьбы за успеваемость и против отсева;

радикальную перестройку преподавания всех курсов в направлении усиления роли самостоятельной работы и повышения ответственности студента[1];

ликвидацию бюрократической системы управления, введение фактической выборности руководителей и предоставление вузу, факультету и кафедре права самостоятельно решать все свои дела.

Только при этих условиях можно надеяться приостановить движение к всеобщему невежеству.

После того как эта статья была написана, я познакомился с разработанной временным научно-исследовательским коллективом «Школа» концепцией развития школьного математического образования (см.: Математика в школе. 1990. № 1), которая навела меня на новые грустные размышления. Из 34 страниц полного текста этого документа всего одна страничка посвящена «комплексу мер по перестройке подготовки учителей». Эти меры либо обрисованы весьма неопределенно и неконкретно («введение дополнительных материальных и моральных стимулов», «разработка учебных планов, программ»), либо носят характер бюрократических процедур («проведение... аттестации всех пединститутов и университетов, готовящих учителей»). Необходимости принципиального изменения всей системы подготовки учителей авторы не видят. Но без такого изменения любые концепции школьного математического образования будут совершенно бесполезны.

Пора уже отдать себе отчет хотя бы в том, что проведенная в начале 70-х гг. реформа преподавания математики в школе, преследовавшая, безусловно, правильные цели и подготовленная группой высококвалифицированных математиков и педагогов во главе с крупнейшим математиком нашего времени А. Н. Колмогоровым, потерпела неудачу именно потому, что не затронула систему подготовки учителей[2].

До сих пор причину этой неудачи чаще всего видят в том, что реформаторам не удалось создать хорошие учебники. (Находились даже люди, в лучших традициях 30-х гг. обвинявшие их в намеренной разработке сложных учебников по заданию то ли Ватикана, то ли международного сионизма!) В действительности эти учебники хотя и имели много недостатков, но при наличии большого числа высокообразованных учителей их несомненно, удалось бы со временем устранить. На основе колмогоровских учебников в будущем можно было бы создать другие доброкачественные учебники. А при нынешнем положении создать хороший учебник вообще невозможно. (Да и что такое, собственно, хороший учебник? Одна и та же книга может оказаться превосходным учебником при одном культурном и педагогическом климате и никуда не годным при другом.)

Наивная вера во всемогущество учебника — оборотная сторона порожденного многолетним господством административно-командной системы недоверия к учителю. Командно-административные стереотипы вообще укоренились в сознании людей глубже, чем кажется на первый взгляд. Ярким примером может служить постановление Бюро отделения математики Президиума Академии наук СССР «О состоянии математического образования в педвузах СССР» (см.: Математика в школе. 1989. № 3). Это типичный директивный документ. Таких документов наши пединституты, равно как и школы, и без того получают очень много от всевозможных руководящих инстанций, и польза от каждого из них (независимо от его содержания) в лучшем случае равна нулю. Авторитетное научное общество, озабоченное низким уровнем преподавания в школе и плохим качеством подготовки учителей, должно было бы не входить в роль еще одного директивного органа, а обратиться к ученым и лучшим студентам университетов со страстным призывом идти работать в школы и педагогические институты. И члены этого общества должны были бы показать пример. Но им еще не поздно это сделать!

А. В. Гладкий (г. Шуя)

Преодолеть формализм в обучении математике

Для всех проявлений формализма характерно следующее: в сознании и памяти учащихся привычное, внешнее выражение математического факта неправомерно доминирует над содержанием этого факта. Многие учителя и методисты разделяют ту точку зрения, что развитию формализма в немаловажной степени способствует сама методика преподавания математики в школе. Особенно много упреков заслуживает претендующее на формально-логическую строгость изложение систематического курса геометрии, проводимое в подростковом возрасте, когда у учащихся еще не созрела потребность в строгом логическом доказательстве. Этот факт А. Я. Хинчин считал насилием над естественным возрастным состоянием, которое ведет лишь к тому, что формально-логическое обоснование предметно-очевидных истин воспринимается уча-

---

[1] Например, студент-математик должен начиная с I курса получать индивидуальные задания по чтению математической литературы с обязательным пересказом или конспектированием. В ходе изучения каждого математического курса он должен выполнить несколько курсовых работ, требующих решения трудных задач. Обучение должно заканчиваться написанием дипломной работы и сдачей трех государственных экзаменов — по алгебре, геометрии и анализу.

[2] Однако несомненным успехом «колмогоровского движения» было создание математических школ и классов; не будь их, математическое образование в нашей стране пришло бы уже в окончательный и необратимый упадок. И главная причина успеха не расширение программы, а тот факт, что учителя, преподающие в этих школах и классах, как правило, лучше знают математику и больше ее любят. (Программы играют здесь роль своеобразного фильтра при отборе учителей.)

щимися как нечто по существу ненужное, как мудрствование, которому приходится следовать лишь во избежание плохих отметок. В усвоении этих ненужных, с точки зрения подростка, геометрических рассуждений он непроизвольно идет по линии наименьшего сопротивления: сохраняет в памяти лишь внешнюю, формальную их структуру.

При этом, по словам А. Я. Хинчина (Педагогические статьи. М., 1963), из преподаваемого геометрического материала выбрасывается все то, что может способствовать живому, активному интересу к предмету, а тем самым и его содержательному, свободному от формализма усвоению, и, напротив, сохраняется и усиливается то, что может быть усвоено лишь с преодолением вполне естественного для подростка отвращения.

Эта точка зрения подкрепляется и свидетельством Альберта Эйнштейна, который вспоминал, что в 12-летнем возрасте его привлекало в геометрии то, что в ней с уверенностью, исключавшей какие-либо сомнения, доказывались далеко не очевидные вещи (например, теорема о точке пересечения высот треугольника). Будущего ученого отнюдь не интересовала строгость аксиоматического построения этой науки. Ему было вполне достаточно того, что в своих доказательствах он мог опираться на положения, справедливость которых представлялась ему бесспорной.

Формализм зачастую поддерживается требованиями, предъявляемыми к школьникам на экзаменах. Весьма часто встречаются случаи, когда инструкции по проведению экзаменов содержат скрупулезные требования к оформлению экзаменационных работ. Характеризуя одну из таких инструкций, относящихся к 40-м гг., Я. С. Дубнов писал: «В качестве примерного ученика нам рисуют молодого человека, хорошо знающего формулы и приемы решения стандартных задач, еще лучше усвоившего требуемые схемы письменного изложения, но 1) не уверенного в своих «математических правах» (боится упростить уравнение), 2) лишенного инициативы, 3) слепо следующего правилам, 4) готового делать ненужную работу ради «схемы», 5) логически слабого, 6) не способного (или не умеющего) критически отнестись к условию задачи, 7) с хитрецой (где не сумею объяснить, возьму апломбом)» (Беседы о преподавании математики. М., 1965).

Отмеченные недостатки полностью характерны и для настоящего времени.

Для устранения причин, вызывающих формализм в знаниях учащихся, А. Я. Хинчин рекомендовал придать целеустремленность тем разделам курса математики в школе, где это легко можно сделать, а те разделы, которые в пределах школы не находят себе достаточных применений, удалить из школьных программ, перенеся их для тех, кому они понадобятся, на внеклассную работу и в курс высшей школы.

Он советовал также проводить через курс арифметики, алгебры и тригонометрии идею функциональной зависимости, а также широко использовать в этих курсах неравенства, изучая их параллельно с решением уравнений соответствующих степеней. На протяжении всего курса он рекомендовал производить исследование уравнений, не выделяя этого вопроса в отдельную тему.

Наконец, и это самое существенное, А. Я. Хинчин предлагал ввести пропедевтический курс геометрии, структура которого должна определяться не логическими, а предметными и педагогическими соображениями. В основе этого курса должен лежать открытый и принципиальный отказ от формально-логических доказательств. Доказательства в этом курсе должны вводиться лишь постепенно, с большой осторожностью и только в тех пунктах, где учащиеся способны ощутить в них потребность. И лишь в старших классах А. Я. Хинчин предлагал ввести систематический курс геометрии, где все заключения должны быть логически обоснованы.

К сожалению, эти идеи выдающегося математика и замечательного методиста не были должным образом учтены ни во время проведения реформы школьного математического образования, ни в последующий период.

Разумеется, к X классу интеллект учащихся созревает настолько, что они уже могут хорошо воспринимать довольно сложные логические рассуждения. Поэтому нам представляется более перспективным показывать аксиоматическое строение геометрии на примере стереометрии. В учебнике стереометрии можно достаточно строго доказать все теоремы. Но и при таком подходе следует поддержать предложение А. Д. Александрова о разбиении стереометрических доказательств на три категории — выучиваемые всеми учениками, разбираемые в классе, но не требующие выучивания и, наконец, те, которые могут быть разобраны учащимися по желанию в зависимости от их уровня (эти теоремы должны быть изложены в учебнике в виде дополнений).

В преодолении формализма естественно опираться на принцип сознательности и активности учащихся в процессе обучения математике. Сознательно усвоить материал — это значит не только выучить соответствующие формулировки, но и понять связь этого материала с внешним миром. Только тогда можно считать, что ученик сознательно освоил предмет, когда он умеет применить его на практике. Например, ученик должен не только знать свойства скалярного произведения, но и понимать, что сила — это вектор, перемещение — вектор, скорость — вектор, а работа силы на данном отрезке пути вычисляется как скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения.

Еще пример. Изучение симметрии предполагает знакомство с симметричными фигурами в природе, технике и различных искусствах. Учащиеся должны не только знать определение понятия симметрии, но и понимать его связь с понятием движения, а также легко опознавать симметричные фигуры и находить их оси симметрии и центры симметрии.

В алгебре тоже есть пути преодоления формализма. Так, изучение темы о разложении многочленов на множители станет более сознательным, если сначала показать учащимся, как операция разложения на множители облегчает нахождение корней уравнения.

Формализм знаний учащихся часто бывает следствием формализма в преподавании математики. Многие учителя недостаточно подготовлены к тому, чтобы вести этот курс на современном уровне. Из-за своей слабой математической и методической подготовки они боятся отступить от текста учебника, дословно его повторяют, не сопровождая изучаемый материал необходимыми разъяснениями и иллюстрациями.

Сознательное изучение правил, определений и теорем зависит прежде всего от качества объяснения учителем нового материала. Учитель должен предвидеть, что учащиеся могут забыть какие-то факты, которые необходимы для дальнейшего, и не поймут объяснение, если не напомнить им все термины и факты, используемые в данном разделе. Вводить новые термины нужно не спеша, приводя соответствующие вспомогательные примеры.

Необходимо добиваться, чтобы учащиеся не пытались запомнить новый материал наизусть, а в максимальной степени активно работали над ним. Для этого следует насыщать изучение материала элементами самостоятельного исследования, твердо памятуя, что самая усердная, самая усидчивая и напряженная работа учащегося не даст ему ничего, кроме мертвого формального знания, если она будет состоять только в пассивном восприятии. Надо стараться всеми мерами стимулировать и поощрять всякое проявление самостоятельности. Учащийся должен привыкать к применению иных обозначений, иного расположения чертежа, чем в учебнике. Учащийся должен быть уверен, что учитель поощрит его поиски пути решения задачи или доказательства теоремы, отличного от предложенного в учебнике, не будет пресекать (как это делают иные малоопытные учителя) самостоятельные перефразировки определений и формулировок теорем (разумеется, при условии, что они не приводят к неверным определениям или к ложным выводам). Только такие приемы способны изжить «трафаретность» обучения, которая ведет к ущербности самостоятельного мышления школьника, а тем самым и к формализму его знаний.

Р. К. Таварткиладзе (Тбилиси)

О профессионализме в подготовке учителя математики

В журнале «Математика в школе» (1989, № 4) опубликован ряд заметок, в которых обсуждаются предложения академика С. П. Новикова и постановление бюро Отделения математики Президиума Академии наук СССР «О состоянии математического образования в педвузах СССР» (Математика в школе. 1979. № 3). Все авторы заметок единодушны в трех положениях: 1) необходим курс элементарной математики; 2) дифференциация дипломов нецелесообразна; 3) вузам следует дать больше самостоятельности. Наиболее любопытным из них является дружная оппозиция рекомендации определять уровень квалификации соответствующим дипломом (с правом преподавания в старших классах или только в среднем звене). В отличие от авторов заметок в этой части рекомендаций я полностью согласен с С. П. Новиковым.

Дифференциация дипломов целесообразна по следующим причинам. Всем известно, что уровень подготовки выпускников физико-математических факультетов пединститутов различен, выдавая же одинаковый диплом, мы стараемся скрыть этот факт. Не честнее ли будет выдавать документ, отвечающий уровню квалификации выпускника? Освободиться же от студентов, обучающихся на «удовлетворительно», как это советуют некоторые авторы статей, мы не можем из-за большой потребности в учителях математики, низкого конкурса на физико-математическом факультете, невысокой математической подготовки абитуриентов. Далее, в связи с увеличением классов с углубленным изучением математики, с усилением внимания к факультативам возникает потребность в учителях с более высокой математической подготовкой. Наличие различных дипломов будет стимулировать желание студентов лучше учиться и получить диплом более высокого достоинства. Учитель с дипломом, дающим ему право обучать математике на первой ступени, может при соответствующей подготовке претендовать на диплом более высокой «пробы».

Курс элементарной математики введен в новые учебные планы, по которым в этом году уже занимаются вторые курсы пединститутов. Поэтому надо говорить не о его необходимости, а о том, как им наиболее эффективно распорядиться. Думаю, С. П. Новиков прав, предлагая отвести на него на I курсе до 50 % времени, занимаемого математическими дисциплинами. Ясно, что число часов в каждом конкретном случае зависит от уровня знаний студентов. Целью этого курса являются не только ликвидация пробелов в знаниях за среднюю школу, систематизация, углубление знаний, но и повышение математической культуры до уровня, на котором можно изучать специальные математические дисциплины. В Мордовском пединституте, например, в этом году в течение сентября студенты-математики I курса из математических дисциплин изучают только элементарную математику, изучение математических дисциплин начинается с октября. Подчеркну, что количество лекционных, семинарских часов, последовательность прохождения дисциплин и даже формирование учебных планов — компетенция кафедр и факультетов. Так что не ясно, о какой самостоятельности вузов мечтают авторы некоторых заметок. Суть в другом — вузы до сих пор не пользуются этой самостоятельностью.

Многие вузовские преподаватели сейчас сетуют на низкую подготовку выпускников средних школ, забывая о том, что в школах работают выпускники пединститутов и университетов, т. е. учителя, воспитанные недовольными вузовскими педагогами.

Должен сказать, что изменение учебных планов и увеличение доли математических дисциплин в этих планах положение с подготовкой учительских кадров в педвузах вряд ли поправят. Демократизация учебы — вот основной путь, идя по которому мы можем поднять уровень подготовки выпускников. Демократизация учебно-воспитательного процесса — это сотрудничество педагогов и студентов в самом учебно-воспитательном процессе, причем не авторитарное, а равноправное сотрудничество коллег, одинаково ответственных за качество этого процесса. Нахождение вот таких точек взаимодействия между преподавателями вузов и студентами в учебно-воспитательном процессе и есть путь демократизации последнего. Только на этом пути мы сможем обеспечить право студентов на полноценное профессиональное образование. Кстати, понятие профессионализма нуждается в уточнении.

Даже до сих пор держится мнение о том, что профессионализм учителя определяется хорошим знанием своего предмета. Не отрицая этого, подчеркнем, что главное в работе учителя — организация учебной деятельности и общения школьников в процессе учебного труда. Такая концепция профессионализма уже по-другому ставит акценты в его подготовке. Главным становится обучение организации учебной деятельности школьников, общению между ними, педагога с ними, воспитание ученика как личности. Между тем именно этой стороне подготовки учителя в вузе не уделяется должного внимания. Зачастую лекции превращаются в пересказ, порой равнодушный, страниц учебника (или учебников), на практических занятиях используются примитивные методы обучения, отсутствует дифференциация и индивидуализация в обучении студентов. Ведь до сих пор преподаватели вузов растеряны перед организацией самостоятельной работы студентов. Отмечу и то, что на занятиях зачастую преобладает обучение фактам, а не обучение методологии и технологии явлений.

Хотелось бы обратить внимание еще на одно обстоятельство, вне которого немыслим учитель. Речь идет о культуре. И здесь мы должны признаться, что культурный уровень студента за время его обучения в вузе не претерпевает серьезных изменений. Это делает выпускника вуза беспомощным в общении с учащимися и их родителями.

Что же, по нашему мнению, может активизировать демократизацию учебно-воспитательного процесса в вузе?

Во-первых, серьезная организация педагогического и психологического всеобуча преподавателей педвузов. Ясно, что пробелы в работе наших выпускников — следствие наших пробелов. Учить студента не только математике, физике и т. д., но и профессии учителя невозможно без хорошего знания педагогики, психологии, методик и владения технологиями различных педагогических явлений.

Во-вторых, обобщение передового педагогического опыта и его распространение через методические комиссии факультетов, вузов и четко организованные взаимные посещения занятий, введение творческих отчетов преподавателей вузов перед широкой аудиторией (студенты, учителя, преподаватели, методисты ИУУ).

В-третьих, совершенствование связи со школой, создание настоящей базовой школы института, которая явилась бы подразделением института, где в качестве учителей работали бы его преподаватели, где начинали бы свой путь педагогические исследования; введение стажировки в школах для всех преподавателей, не работавших в школе.

В-четвертых, усиление внимания к воспитательной работе со студентами. Необходимо продумать ее различные формы, дать высококвалифицированные образцы воспитательных мероприятий, развернуть учебные курсы, научно-исследовательскую работу по реализации воспитательной функции учебного процесса.

В-пятых, повышение личной ответственности каждого из вузовских педагогов.

И наконец, отношения между преподавателями, преподавателями и студентами. Они должны основываться на взаимном уважении, доброжелательности, заинтересованности в успехах коллег, милосердии. Мы не должны забывать о том, что наши отношения во многом определяют поведение в коллективе наших выпускников.

Г. И. Саранцев (г. Саранск)

Формирование профессиональных умений и навыков будущих учителей

Повышение качества подготовки учителя — ответственная задача педвуза. Опыт работы преподавателей кафедры математики Тернопольского пединститута им. Я. А. Галана показывает, что улучшению профессиональной подготовки учителей математики способствует организация такого объединения: преподаватель кафедры методики, он же учитель класса, студенческая группа, класс. Учитель, добиваясь развития мышления школьников, вооружая их знаниями, формируя умения и навыки, уча каждого ученика учиться, должен сделать студенческую группу своим помощником, непосредственным участником процесса обучения, сопричастным к своим поискам, ответственным за полученные результаты. Вся работа учителя в классе проводится при участии студенческой группы.

Программой по методике математики предусматривается на лабораторных занятиях проводить наблюдение в классе за процессом проведения урока и анализ урока, изготавливать наглядные пособия и т. д. Наша методика позволяет сделать студента не наблюдателем, а участником и исполнителем всех видов работы учителя.

Мы строим свою методику проведения лабораторных и практических занятий по методике математики, исходя из деятельностного подхода к формированию профессиональных умений и навыков будущих учителей. Как показывает опыт, эта деятельность должна быть управляемой, в нее должны вноситься коррективы руководителем занятий. Деятельность, формирующая профессиональные умения будущего учителя,— это обучение математике школьников. Она может быть осуществлена на уроке или после уроков. Для организации такой деятельности желательно, чтобы преподаватель методики математики был учителем в школе. Тогда он сможет руководить работой студентов на уроке, направляя и организуя совместную деятельность студентов и учащихся.

Студент на таком уроке выступает в роли обучаемого (он учится учить), в то же время он учитель для школьника. Результат работы зависит от деятельности и студента и преподавателя. Составляющие объединения: преподаватель, группа, класс — взаимосвязаны между собой. Преподаватель, он же учитель, может достичь результатов в работе по обучению студентов и учащихся только через совместную деятельность школьников и студентов.

Лабораторные и частично практические занятия по методике преподавания математики мы проводим так. Студентам за 2 недели до урока в школе предлагается составить развернутый план-конспект урока на определенную тему, подготовить дидактический материал, наглядные пособия, а за 2—3 дня до урока проводится консультация, на которую они приходят с подготовленными материалами. Сначала преподаватель отвечает на вопросы, затем студенты обмениваются мнениями по содержанию и организации урока. Свои пожелания и советы высказывает преподаватель. После консультации студенты корректируют свои конспекты. На консультации преподаватель дает конкретные задания студентам, которые они должны подготовить к уроку, а также советы, как следует себя вести на отдельных этапах урока.

На лабораторном занятии, проводимом в классе, каждый студент (11 человек в подгруппе) имеет трех подопечных учащихся. Сидят они группами по 4 человека (трое учащихся, один студент). Учитель (он же преподаватель методики в этой подгруппе) ведет урок, дает задание ученикам и краткое указание своим ассистентам (студентам). Отдельные этапы урока — это уроки студентов со своими мини-классами. У каждого студента имеется журнал учета успеваемости своей группы. За выполнение домашнего задания, а также за письменную работу в классе он ставит оценку каждому ученику в тетрадь.

Студенты выступают и в роли консультантов. К каждому студенту прикрепляются 1—2 ученика, и со всеми вопросами по учебному материалу ученик может обратиться как к учителю, так и к ассистенту, а студенты разрешают свои проблемы с преподавателем в часы консультации согласно графику кафедры.

Студент сначала изучает своего подопечного. Он должен знать уровень его знаний, умений и навыков по математике, его способности, наклонности, интересы. Следует побеседовать о планах ученика на будущее, побывать дома и побеседовать с родителями. Для каждого ученика следует составить перспективный план, в котором может быть указано, какие пробелы следует ликвидировать, над чем необходимо работать, наметить ближайшую и дальнюю перспективы.

С целью тематического учета знаний, умений и навыков школьников мы проводим зачеты. Студентам дается задание составить перечень вопросов по данной теме по двум направлениям: что ученики должны знать и что должны уметь, причем должны быть предусмотрены упражнения для учащихся, усвоивших материал на «3», «4», «5». Студенты работают над этим заданием неделю, затем на практическом занятии по методике математики обсуждаются подготовленные материалы и разрабатывается методика проведения зачета. По заданию преподавателя двое студентов готовят материал по теме зачета для стенда в кабинете математики. Все студенты записывают сценарий проведения зачета. Предусматривается, что определенная часть работы на зачете будет проведена учителем со всем классом, а часть — ассистентами по группам.

Перед зачетом ассистенты проводят консультацию с учащимися по вопросам, вынесенным на зачет. Зачет может быть проведен как общественный смотр знаний. Готовят его ассистенты.

По теме проводится итоговая контрольная работа. Все студенты составляют по два варианта контрольной работы. На лабораторных занятиях по методике преподавания эти тексты обсуждаются: продумываются возможные изменения, чтобы было не менее шести вариантов. Учащиеся пишут контрольную работу по этим текстам, ассистенты ее проверяют, а затем просматривает преподаватель и беседует с каждым ассистентом, который допустил неточности при проверке.

На уроке анализа контрольной работы общий анализ проводит учитель, а затем ассистенты анализируют работу каждого ученика, при этом предлагают упражнения, аналогичные тем, в которых ученики допустили ошибки.

Учитель вместе с ассистентом выставляет итоговую оценку по теме каждому ученику. Если ученик хочет иметь лучшую оценку, он может встретиться с ассистентом или учителем после урока и попробовать пересдать материал темы.

Студентам поручается оформление стенда в кабинете математики. К каждой теме готовится материал по таким вопросам: 1) немного истории, 2) базовые задачи темы, 3) обязательные задачи по теме, 4) общие советы и конкретные указания по решению задач, 5) обобщающие схемы, 6) подумай, прочитай, 7) это интересно знать, 8) лист по учету знаний, умений и навыков по теме. Готовит материал для стенда 6 человек. Студенты должны глубоко изучить материал, решить задачи, познакомиться с методической и научно-популярной литературой, вопросами истории математики, составить черновой вариант стенда и прийти на собеседование к преподавателю. После окончательной подготовки материала преподаватель еще раз просматривает весь материал и дает разрешение на оформление стенда.

Студенты проводят и внеклассную работу со школьниками. Это и занятия кружка, и школьная математическая олимпиада, и неделя математики, которая включает разные формы работы (КВН, конференция, эстафета, конкурс газет и наглядных пособий, часы занимательной математики, математические игры и т. д.).

Такая форма работы позволяет осуществить постоянный контакт студента и ученика и повышает их совместную ответственность за результаты работы.

А. М. Янченко, М. В. Пидручная (г. Тернополь)

Об изучении в педвузах школьной математики

Высказывая крайнюю обеспокоенность состоянием математического образования в педагогических институтах нашей страны, Бюро Отделения математики Президиума АН СССР в своем постановлении (см.: Математика в школе. 1989. № 3) отметило необходимость «ввести большой курс углубленного изучения школьной математики». Вместе с тем в этом постановлении предлагается «исключить из педвузовских программ курсы математической логики и числовых систем». Видимо, следствием таких рекомендаций явилось то, что в учебном плане для пединститутов 1988 г. по специальности «учитель математики и информатики» дисциплина «Числовые системы» уже отсутствует. Это, по нашему мнению, является большой ошибкой, так как курс «Числовые системы» как раз и служит для углубленного изучения школьной математики в отношении чисел. Точнее было бы сказать, должен служить.

Число — одно из основных понятий математики вообще и школьной математики в частности, поэтому углубленное знакомство с этим понятием является важнейшей составной частью математического образования будущего учителя математики.

Знакомство с числами начинается в школе, именно там закладываются интуитивные знания о числах и их свойствах. Но чтобы грамотно закладывать эти знания, школьный учитель должен усвоить их научные основы. С этой целью и введен курс «Числовые системы». В нем последовательно рассматриваются натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные числа и кватернионы. Доказывается, что если представление о числе ограничить определенными рамками, то других чисел нет.

В разных математических книгах порой используются различные определения одних и тех же чисел. Рассмотреть наиболее распространенные из этих определений и доказать их эквивалентность — также задача курса «Числовые системы».

В школе свойства операций над числами не доказываются, а лишь поясняются на примерах. Вместе с тем школьный учитель должен быть готовым рассказать в популярной форме любознательному ученику о возможности и последовательности таких доказательств. В курсе «Числовые системы» исходя из аксиоматического определения тех или иных чисел строго доказываются все известные их свойства.

Кроме того, в этом курсе подробно обосновывается целый ряд понятий, используемых в школьной математике. Так, при изучении натуральных чисел устанавливается принцип полной математической индукции, имеющий важнейшее значение в математике и используемый в старших классах. Дается обоснование индуктивного (рекуррентного) задания последовательности (именно так в школе задаются арифметическая и геометрическая прогрессии). Уточняется школьное понимание конечного множества как такого, элементы которого можно пересчитать: пересчитать — значит установить взаимно однозначное отображение этого множества на начальный отрезок натурального ряда. Основываясь на этом определении, доказываются основные свойства конечных множеств.

Для целых чисел исходя из их аксиоматического определения среди прочих свойств доказывается однозначная представимость всякого целого числа в десятичной системе счисления. Для всякого рационального числа, а потом и для всякого действительного числа устанавливается его однозначная представимость в виде десятичной дроби. Обосновываются понятия степени и логарифма.

Все это школьные вопросы.

В курсе «Числовые системы» рассматриваются также основные идеи развития понятия о числе.

Этот курс очень жестко логически связан. Его нельзя разорвать и дать по частям в разных дисциплинах, так как неизменно нарушается взаимная зависимость его частей и он перестает быть действительно обоснованием школьной математики в отношении чисел.

Курс «Числовые системы» следует читать на старших курсах, по нему надо иметь вариативные учебники. По нашему глубокому убеждению, на младших курсах доказательства утверждений для чисел должны основываться на их интуитивном понимании, а не на аксиоматических определениях. Для понимания требований строгости студент должен созреть. Только когда прослушаны основные курсы алгебры и теории чисел, геометрии и математического анализа, студенту следует предложить посмотреть на школьную математику с новых позиций, осознать ее нестрогость в ряде мест, обнаружить и устранить пробелы в школьных доказательствах, перевести интуитивные знания о числах на твердую основу доказательств, исходя из аксиом.

Таким образом, курс «Числовые системы» играет чрезвычайно важную роль в математическом образовании будущего учителя математики и его необходимо сохранить в учебном плане, придав ему школьную направленность.

Что касается углубленного изучения остальных разделов школьной математики, то нужно внимательно посмотреть, как это целесообразно сделать: отдельным курсом или, что, пожалуй, лучше, в соответствующих дисциплинах. Ясно одно — углубленное изучение школьной математики не должно быть ликбезом на младших курсах, а должно венчать образование школьного учителя. Одновременно нужно проследить, чтобы каждая тема школьной математики нашла свое место в программах изучаемых дисциплин, была в них явно указана и обеспечена соответствующим количеством часов.

С. В. Ларин (г. Красноярск)

Больше внимания методической подготовке студентов

Мы, педагоги, в своей работе постоянно сталкиваемся с фактами низкого уровня знания учащихся по математике в школе, некачественной подготовки учителя математики для школы в педвузах. Об этом же пишут в своих статьях академик АН СССР С. П. Новиков, профессор кафедры математического анализа Шуйского педагогического института А. В. Гладкий, академик АН УССР Б. В. Гнеденко и другие (см.: Математика в школе. 1989. № 3).

Можно сказать, что школа и институт в деле обучения и воспитания учащихся и студентов незаметно зашли в тупик. Чтобы вывести их из этого тупика, следует, по нашему мнению, курс углубленного изучения элементарной математики включить в вузовскую программу. Тогда будущие учителя средней школы будут вооружаться глубокими знаниями и получать необходимые навыки для работы в школе. Сейчас студенты, поступившие на математический факультет, в первый год обучения по действующему учебному плану не изучают курс школьной математики, они сразу же приступают к изучению курса высшей математики. Это приводит к большим затруднениям студентов, не имеющих представления о многих положениях элементарной математики, которые они не получили в школе.

Надо отметить, что по действующему вузовскому учебному плану студенты должны изучать такие трудные предметы, как математическая логика, числовые системы и некоторые другие. Но изучая эти курсы, студенты не понимают, как можно применять их в дальнейшем, работая в школе. Поэтому в течение 2—3 лет они эти знания полностью утрачивают. Желательно не создавать в вузовской программе разделяющей стены между элементарной и высшей математикой.

В практике преподавания не устранено дублирование. Например, многие вопросы педагогики повторяются в курсе общей части методики преподавания предмета. При создании новых учебников и учебных пособий такое дублирование необходимо устранить.

Б. В. Гнеденко предлагает: «Курсы методики математики, истории педагогики, педагогической психологии должны быть достаточно краткими» (Математика в школе. 1989. № 3. С. 21). По нашему мнению, объем курса методики преподавания математики ни в коем случае нельзя сокращать, а, наоборот, необходимо обогатить его более конкретными материалами.

Опыт работы показывает, что преподаватели общественных и специальных дисциплин ведут работу в основном со студентами-активистами или проявляющими повышенный интерес к науке. Но другие студенты остаются вне их поля зрения. Они кончают вуз, не сделав за время обучения ни одного доклада, не подготовив ни одного выступления. Что от них можно ожидать в дальнейшем? Как же они будут в школе требовать от своих учеников творческого отношения к учебе? Полагаем, что все преподаватели факультета обязаны привлекать студентов к самостоятельной подготовке докладов на семинарах и конференциях.

Е. Саитов, А. Е. Саидов (г. Бухара)

Новые книги

Монографии. Пособия для высшей школы. Справочники

Задачи по математике. Начала анализа: Справочное пособие / В. В. Вавилов и др.— М.: Наука, 1990.— 607 с.— 2 р. 40 к. 150 000 экз.

Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени / Пер. с нем.— М.: Наука, 1989.— 336 с.— 1 р. 90 к. 12 400 экз.

Руководство к решению задач по высшей математике. Ч. 2: Для втузов / Под ред. Б. И. Гурского.— Минск: Вышэйшая школа, 1990.— 400 с.— 1 р. 23 500 экз.

Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Нежесткие задачи / Пер. с англ.— М.: Мир, 1990.— 512 с.— 2 р. 20 к. 14 000 экз.

Научно-популярная литература

Белонучкин В. Е. Кеплер, Ньютон и все-все-все...— М.: Наука, 1990.— 124 с.— (Б-чка «Квант»).— 30 к. 16 000 экз.

Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды.— М.: Наука, 1990.— 287 с.— (Б-чка «Квант»).— 65 к. 130 000 экз.

Лоберг Р., Лутц Т. Домашний компьютер / Пер. с нем.— М.: Дет. лит., 1990.— 95 с.— 40 к. 100 000 экз.

Рыбников К. А. Профессия — математик: Для учащихся старших классов.— М.: Просвещение, 1990.— 447 с.— 95 к. 1 480 000 экз.

Пособия и учебники для учителя и учащихся средних учебных заведений

Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: Для техникумов.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.: Высшая школа, 1990.— 495 с.— 1 р. 10 к. 100 000 экз.

Брадис В. М. Четырехзначные математические таблицы.— 57-е изд.— М.: Просвещение, 1990.— 95 с.— 15 к. 1 000 000 экз.

Мавашев Д. А. Внеклассная работа по математике.— Ташкент: Укитувчи, 1989.— 103 с.— 10 к. 14 000 экз.

Мельников И. И., Сергеев И. Н. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. М.: Изд-во МГУ, 1990.— 303 с.— 95 к. 40 000 экз.

Рогановский Н. М. Методика преподавания математики в средней школе: Для пед. ин-тов.— Минск: Вышэйшая школа, 1990.— 267 с.— 85 к. 16 000 экз.

Ф. М. Шустеф (Минск)

Дифференциация в обучении математике[1]

Г. В. Дорофеев, Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, В. В. Фирсов

1. Концепция общего среднего образования, принятая учительским съездом, определила основные направления перестройки советской школы. Среди них дифференциация обучения выделяется как составная часть и необходимое условие гуманизации и демократизации образования, его перевода на новую культурообразующую базу. В концепции отмечено, что дифференциация образования является залогом предоставления каждому учащемуся равно высокого шанса достичь высот культуры, залогом максимального развития детей с самыми разными способностями и направлениями интересов.

Под дифференциацией понимают такую систему обучения, при которой каждый ученик, овладевая некоторым минимумом общеобразовательной подготовки, являющейся общезначимой и обеспечивающей возможность адаптации в постоянно изменяющихся жизненных условиях, получает право и гарантированную возможность уделять преимущественное внимание тем направлениям, которые в наибольшей степени отвечают его склонностям.

В обучении математике дифференциация имеет особое значение, что объясняется спецификой этого учебного предмета. Математика объективно является одной из самых сложных школьных дисциплин и вызывает субъективные трудности у многих школьников. В то же время имеется большое число учащихся с явно выраженными способностями к этому предмету. Разрыв в возможностях восприятия курса учащимися, находящимися на двух «полюсах», весьма велик.

Заметим, что в преподавании математики накоплен определенный опыт дифференцированного обучения. Он относится в основном к обучению сильных школьников (в стране имеется широкая сеть школ и классов с углубленным изучением математики, практикуются также факультативные занятия). Однако дифференциацию обучения нельзя рассматривать исключительно с позиций интересующихся математикой учащихся и по отношению лишь к старшему звену школы. Ориентация на личность ученика требует, чтобы дифференциация обучения математике учитывала потребности всех школьников — не только сильных, но и тех, кому этот предмет дается с трудом или чьи интересы лежат в других областях.

2. Дифференция затрагивает все компоненты методической системы обучения и все ступени школы. Она может проявляться в двух основных видах. Первый выражается в том, что, обучаясь в одном классе, по одной программе и учебнику, школьники могут усваивать материал на различных уровнях. Определяющим при этом является уровень обязательной подготовки. Его достижение свидетельствует о выполнении учеником минимально необходимых требований к усвоению содержания. На его основе формируются более высокие уровни овладения материалом. По отношению к этому виду дифференциации в последнее время получил распространение термин «уровневая дифференциация».

Второй вид дифференциации — это дифференциация по содержанию. Она предполагает обучение разных групп школьников по программам, отличающимся глубиной изложения материала, объемом сведений и даже номенклатурой включенных вопросов. Этот вид дифференциации иногда называют *профильной дифференциацией.* Разновидностью профильного обучения является углубленное изучение математики, которое отличает достаточно продвинутый уровень математической подготовки, что позволяет добиваться высоких результатов. Одновременно высокий уровень учебных требований естественным образом ограничивает число учащихся, охваченных этой формой обучения. Профильное же обучение является более демократичной и широкой формой фуркации школы на старшей ступени.

Оба вида дифференциации — уровневая и профильная — сосуществуют и взаимно дополняют друг друга на всех ступенях школьного математического образования, однако в разном удельном весе. В основной школе ведущим направлением дифференциации является уровневая, хотя она не теряет своего значения и в старших классах. На старшей ступени школы приоритет отдается разнообразным формам профильного изучения предметов. Вместе с тем дифференциация по содержанию может проявляться уже и в основной школе, где она осуществляется через систему кружковых занятий (во всех классах) и факультативных курсов (в VIII—IX классах). Эти формы предназначены для школьников, проявляющих повышенный интерес к математике, имеющих желание и возможность работать больше отводимого расписанием времени.

[1] При подготовке статьи использованы материалы обсуждения концепции математического образования сотрудниками лаборатории обучения математике НИИ СиМО АПН СССР (И. А. Лурье, И. Ф. Шарыгин и др.)

Кроме того, начиная с VIII могут формироваться классы с углубленным изучением математики.

Остановимся более подробно на каждом из выделенных видов дифференциации.

3. **Уровневая дифференциация.** Проблема дифференцированного подхода к учащимся исследуется давно, в педагогике и методике ей всегда уделялось значительное внимание. Однако выдвижение и развитие за последние годы новых концептуальных идей, в частности идеи планирования обязательных результатов обучения математике, приводит к постепенной перестройке всей методической системы, в том числе позволяет по-новому взглянуть на проблему дифференцированного обучения. Предлагаемая ниже концепция уровневой дифференциации — это принципиально новая концепция, учитывающая современные результаты и достижения методической науки, требующая пересмотра традиционных взглядов, отказа от сложившихся стереотипов.

Термин «уровневая дифференциация» вошел в педагогический лексикон недавно, взамен термина «внутренняя дифференциация», что обусловлено некоторыми особенностями нового подхода. Традиционно дифференцированный подход основывался на психолого-педагогических различиях школьников, при этом конечные учебные цели остаются для всех учащихся едиными, а для многих заведомо непосильными. Сущность дифференциации состояла в поиске приемов и способов обучения, которые индивидуальными путями вели бы всех школьников к одинаковому овладению программой. А эта задача не всегда разрешима. Необходимо также отметить отсутствие адекватных механизмов дифференцированного подхода в традиционном его понимании, которые позволяли бы объективно формировать группы учащихся в зависимости от особенностей их развития и психики. Поэтому оценка индивидуальных возможностей школьников целиком зависит об субъективного мнения учителя, что часто ведет к методическим ошибкам и снижает эффективность дифференцированной работы.

Принципиальное отличие нового подхода состоит в том, что уровневая дифференциация основывается на планировании результатов обучения: явном выделении уровня обязательной подготовки и формировании на этой основе повышенных уровней овладения материалом. Сообразуясь с ними и учитывая свои способности, интересы, потребности, ученик получает право и возможность выбирать объем и глубину усвоения учебного материала, варьировать свою учебную нагрузку.

Достижение обязательных результатов обучения становится при таком подходе тем объективным критерием, на основе которого может видоизменяться ближайшая цель в обучении каждого ученика и перестраиваться в соответствии с этим содержание его работы: или его усилия направляются на овладение материалом на более высоких уровнях, или продолжается работа по формированию важнейших опорных знаний и умений. Именно такой подход приводит к тому, что дифференцированная работа получает прочный фундамент, приобретает реальный, осязаемый и для учителя, и для ученика смысл. Резко увеличиваются возможности работы с сильными учениками, так как учитель уже не связан необходимостью спросить все, что он давал на уроке, со всех школьников. И наконец, отпадает необходимость постоянно разгружать программы и снижать общий уровень требований, оглядываясь на слабых школьников.

Необходимо отметить, что принцип выделения уровня обязательной подготовки как основы дифференциации обучения находит поддержку в мировом опыте. В настоящее время во многих странах идет процесс расширения списка обязательных школьных предметов и установления минимальных обязательных требований, представляющих собой государственный стандарт образования, соответствие которому дает школьнику право на получение документа о среднем образовании. При этом требования к усвоению математики в той или иной форме задаются в конечном счете в виде конкретных задач (например, тесты минимальной компетентности в США; «цели достижения» в национальных программах Англии и Уэльса).

Перечислим ряд важных условий, выполнение которых необходимо для успешного и эффективного осуществления уровневой дифференциации. Первое состоит в том, что выделенные уровни усвоения материала и в первую очередь обязательные результаты обучения должны быть открытыми для учащихся. Как и успех учебного процесса в целом, успех дифференцированного подхода в обучении существенно зависит от познавательной активности школьников, от того, насколько они будут заинтересованы в своей деятельности. Ясное знание конкретных целей при условии их посильности, возможность выполнить требования учителя активизируют познавательные способности школьников, причем на разных уровнях. Если цели известны и посильны ученику, а их достижение поощряется, то для подростка нет ничего естественнее, как стремиться к их выполнению. Поэтому открытость уровней подготовки является механизмом формирования положительных мотивов учения, сознательного отношения к учебной работе, позволяет привлечь самооценку ученика при организации дифференцированной работы.

Следующее важнейшее условие — это наличие определенных ножниц между уровнем требований и уровнем обучения. Не следует отождествлять уровень, на котором ведется преподавание, с обязательным уровнем усвоения материала. Первый должен быть в целом существенно выше, иначе и уровень обязательной подготовки не будет достигнут, а учащиеся, потенциально способные усвоить больше, не будут двигаться дальше. Каждый ученик должен пройти через полноценный учебный процесс. Так, он должен в полном объеме услышать предлагаемый материал со всеми доказательствами и обоснованиями, ознакомиться с образцами рассуждений, на каких-то этапах участвовать в решении более сложных задач. Иными словами, уровневая дифференциация осуществляется не за счет того, что одним ученикам дают меньше, а другим больше, а в силу того, что, предлагая ученикам одинаковый объем материала, мы устанавливаем различные уровни требований к его усвоению. С этой точки зрения представляются несостоятельными предложения о создании для основной школы разных учебников, отвечающих разным уровням требований. Ученик должен иметь в руках учебник, в котором были бы предусмотрены (и явно выделены) все уровни усвоения материала (в том числе и минимально обязательный).

Еще одно важнейшее условие, дополняющее предыдущее, состоит в том, что в обучении должна быть обеспечена последовательность в продвижении ученика по уровням. Это означает, что в ходе обучения не следует предъявлять более высоких требований тем учащимся, которые не достигли уровня обязательной поготовки. Надо, чтобы трудности в учебной работе были для таких школьников посильными, соответствующими индивидуальному темпу овладения материалом на каждом этапе обучения. В то же время если для одних учащихся необходимо продлить этап отработки основных, опорных знаний и умений, то других не следует необоснованно задерживать на этом этапе.

Содержание контроля и оценка должны отражать принятый уровневый подход. Контроль должен предусматривать проверку достижения всеми учащимися обязательных результатов обучения как государственных требований, а также дополняться проверкой усвоения материала на более высоких уровнях. При этом достижение уровня обязательных требований целесообразно оценивать альтернативной оценкой (например: «зачтено» — «не зачтено»), для более высоких уровней целесообразно разработать соответствующую шкалу оценивания (например, отметки «4» и «5»).

И наконец, укажем еще одно условие, реализация которого существенно усиливает эффективность дифференцированного обучения,— добровольность в выборе уровня усвоения и отчетности. В соответствии с ним каждый ученик имеет право добровольно и сознательно решать для себя, на каком уровне ему усваивать материал. Именно такой подход позволяет формировать у школьников познавательную потребность, навыки самооценки, планирования и регулирования своей деятельности.

Уровневую дифференциацию можно организовать в разнообразных формах, которые существенно зависят от индивидуальных подходов учителя, от особенностей класса, от возраста учащихся и др. В качестве основного пути осуществления дифференциации обучения предлагается формирование мобильных групп. Деление на группы осуществляется прежде всего на основе критерия достижения уровня обязательной подготовки. Работа этих групп может проходить в рамках обычных уроков. Их можно также временно выделить для отдельных занятий. В первом случае целесообразно не ограничиваться дифференцированным подходом в процессе самостоятельной деятельности учащихся, а варьировать характер работы групп (самостоятельная или фронтальная под руководством учителя) в зависимости от этапа изучения темы, от потребности в помощи учителя. Во втором случае целесообразно предусмотреть работу и с группами выравнивания, и с группами повышенного уровня, создать соответствующие программы и методику обучения.

Предлагаемый подход имеет целый ряд преимуществ перед традиционным. Он дает учителю четкие ориентиры для отбора содержания дифференцированной работы и позволяет сделать ее целенаправленной. Деление учащихся на группы в зависимости от достижения ими уровня обязательной подготовки носит объективный характер. Организуемая учителем дифференцированная работа выглядит объективной и в глазах ученика и поэтому не создает почвы для обид. Важно, что ученик может самостоятельно оценить свои возможности и выбрать для себя тот уровень целей, который соответствует его возможностям и потребностям в данный момент времени. Ориентация на обязательные результаты обучения постоянно поддерживает подготовку ученика на опорном уровне. Это позволяет ученику при возможности и возникшем интересе перейти на более высокие уровни на любом этапе обучения. Все это является гарантией оперативности, гибкости, мобильности дифференциации, создает в классе атмосферу взаимного доверия между учителем и учениками, способствует активному введению положительных мотивов учения для разных категорий учащихся. Именно такой подход к дифференциации обучения является существенным условием демократизации и гуманизации образования.

Необходимо отметить, что применение критерия достижений уровня обязательной подготовки вполне согласуется с имеющимися подходами к организации дифференцированной работы на основе измерения уровня обученности школьников. Однако, в отличие от понятия «уровень обученности», которое каждым учителем толкуется по-своему, указанный критерий носит объективный характер. Это позволяет ставить вопрос об эквивалентности среднего образования, что чрезвычайно важно в условиях многонациональной школы. Надо сказать, что вопросы эквивалентности образования сейчас широко поднимаются и решаются в общеевропейском масштабе.

Заметим также, что применение указанного критерия вовсе не исключает возможности учитывать такие качества школьников, как самостоятельность, работоспособность, интерес к учению, уровень мышления, внимательность и др. Более того, уровневый подход к дифференциации позволяет учитывать эти индивидуальные качества в большей степени, не рассматривать их как уже заданные для деления учащихся на группы, а развивать и формировать их у всех школьников в ходе дифференцированной работы.

4. **Профильная дифференциация.** На старшей ступени (X—XI классы) дифференциация образования приобретает систематический характер. В соответствии с Государственным базисным учебным планом она осуществляется через курсы по выбору и профильное обучение. Математика входит в число обязательных учебных предметов, однако она может иметь разный удельный вес в общеобразовательной подготовке ученика по времени, отводимому на ее изучение, а также по глубине и охвату рассматриваемого материала.

Заметим, что вопрос о том, быть или не быть математике на старшей ступени школы предметом, обязательным для всех, стоял достаточно остро. Учебным планом он решен положительно, что соответствует современным тенденциям в образовании, прослеживаемым в мировой практике. Это решение продиктовано ролью математики в прогрессе общества в целом и теми функциями, которые выполняет изучение математики по отношению к развитию индивидуальных качеств личности.

Специфика математики позволяет утверждать, что теоретический уровень мышления в его чистом виде, максимально удаленном от конкретной эмпирики, наиболее естественно формируется именно при изучении математики, хотя и остальные школьные предметы, безусловно, могут внести в его формирование определенный вклад. Прерогатива и обязанность математики — развитие абстрактного и логического мышления, т. е. качеств личности, необходимых для освоения новых областей знаний, для облегчения адаптации к постоянно меняющимся условиям жизни. Безусловно, ведущая роль принадлежит математике в формировании алгоритмического мышления, в воспитании умений действовать в соответствии с заданными алгоритмами, а также конструировать новые, т. е. тех умений, которые необходимы для свободной ориентации в «компьютеризированном мире». Однако развитие мышления — от эмпирического к теоретическому, от конкретного к абстрактному, от синкретического к логическому — длительный процесс, темпы и эффективность которого определяются в целом возрастными особенностями человека. По данным некоторых психологических исследований, логическое мышление ребенка формируется не ранее, чем к 14—15 годам, а в большинстве случаев — к более позднему возрасту. Поэтому прекратить «питание» интеллекта математикой, оборвать математическую деятельность у значительной части учащихся на выходе из основной школы было бы неверным. Правильным решением вопроса становится резкая дифференциация обучения математике в старшем звене, введение курсов разного объема и уровня.

В зависимости от той роли, которую математика может играть в образовании человека, выделяются два типа школьных курсов для завершающей ступени школы: *курс общекультурной ориентации* (назовем его курсом A), рассчитанный на учащихся, склонных рассматривать математику только как элемент общего образования и не предполагающих использовать ее непосредственно в своей будущей профессиональной деятельности, и *курсы повышенного типа,* обеспечивающие дальнейшее изучение математики и ее применение в качестве элемента профессиональной подготовки.

Целесообразно выделить два основных курса повышенного типа. Первый из них (курс B) предназначен для учащихся, выбравших для себя те области деятельности, в которых математика играет роль аппарата, специфического средства для изучения закономерностей окружающего мира. Второй (курс C) ориентирован на тех учащихся, для которых собственно математика является одной из основных целей познания.

Таким образом, для старшей ступени школы целесообразно наличие трех основных математических курсов — A, B и C, которые призваны предоставить каждому ученику возможность изучать математику на уровне, соответствующем его интересам, способностям, склонностям. Этих трех курсов в целом достаточно для преподавания математики по профилю любого направления.

Курс *А* может быть выбран теми учащимися, которых интересуют, например, языки, искусство, художественное творчество, спорт или предметно-практическая деятельность. Его специфической особенностью должна быть явно выраженная гуманитарная направленность, т. е. специальная ориентация на умственное развитие человека, на знакомство с математикой как с областью человеческой деятельности, на формирование тех знаний и умений, которые необходимы для свободной ориентации в современном мире.

Однако при этом курс *А* не должен сводиться к «прогулкам по саду математики», но, безусловно, опираться на традиционные для школьного курса разделы. Обязательные требования по усвоению курса *А* фактически должны совпадать с базовым уровнем математической подготовки выпускников средней школы.

Курс *В* ориентирован на учащихся с научным стилем мышления, выбравших для себя профили естественнонаучных и научно-гуманитарных направлений: химический, биологический, географический, исторический, социологический, экономический и др. Заметим, что математизация соответствующих наук касается лишь отдельных их областей, в основном наиболее современных, тогда как другие области практически не используют математических знаний. Поэтому курс *В* должен быть построен с учетом того, что математика для учащихся указанной категории является хотя и необходимым, но не самым важным предметом. Этот курс должен обеспечивать овладение конкретными математическими знаниями, позволяющими, в частности, выработать представления о применении математики в профилирующей науке и достаточными для изучения математики в вузе соответствующего направления. Однако в не меньшей степени необходимо и специальное внимание к гуманитарной направленности этого курса, обеспечивающей общекультурное развитие школьников.

Заметим, что в принципе можно было бы ставить вопрос о разделении курса *В* на два в соответствии с особенностями процесса математизации в естественнонаучных и научно-гуманитарных областях знаний. Сущностью математизации естественных и гуманитарных наук является, безусловно, математическое моделирование. В естественных науках главную роль играют в настоящее время количественные описания реальных процессов и соответствующие количественные модели, для исследования которых необходимы традиционные разделы математики, наряду с началами математического анализа и элементами теории вероятностей и математической статистики. Иное дело — гуманитарные науки. В них наибольшее значение имеют структурные модели, построение и исследование которых требует привлечения разделов математики, более современных и весьма далеких от нынешнего школьного курса математики, и прежде всего дискретной математики (достаточно упомянуть построение грамматических моделей в лингвистике, создание информационных систем в приложениях различных гуманитарных наук).

Тем не менее нам представляется, что в настоящее время выделение научно-гуманитарного направления нецелесообразно и математические потребности конкретной профилирующей науки должны удовлетворяться в основном в рамках внеклассной работы. Это связано, в частности, с тем обстоятельством, что учащиеся, проявляющие склонность к математизированным областям естественных и гуманитарных наук, прежде всего нуждаются в знании традиционных разделов математики, составляющих основу программы для поступающих в высшие учебные заведения на специальности, соответствующие этим областям: структурная и прикладная лингвистика, психология, социология, экономика и пр. Эта ситуация сохранится, по-видимому, и в достаточно отдаленном будущем, а решать одновременно две задачи — освоение и традиционных, и специализированных разделов математики — вряд ли возможно.

Курс *С* — наиболее строгий и полный курс математики — ориентирован на учащихся, выбравших для себя деятельность, непосредственно связанную с математикой, и — как следствие — какой-то профиль из группы профилей «математического направления». В эту группу вместе с математическим мы объединяем такие профили, как физический, компьютерный. Дело в том, что процесс математизации знаний исторически начался с математизации физики, а современное состояние и развитие физики, как и всего физического цикла наук, неразрывно связано с математическим аппаратом и математическим мышлением. Современная наука информатика, обязанная своим происхождением вычислительной математике и математической логике, целиком основана на математическом стиле мышления, в том числе и в разделах, которые содержательно с математикой не связаны. Эти особенности физики и информатики и позволяют объединить их в одну группу с математическим профилем с точки зрения целей обучения математике.

Основой учебно-методического обеспечения по математике этой группы профилей и должен быть курс *C*, ориентированный на овладение учащимися необходимым объемом конкретных математических знаний и формирование в этом процессе интеллектуальной культуры личности. Вторая задача, как нам кажется, не нуждается в специальном акцентировании: практика углубленного изучения математики и физики показывает, что гуманитарное воздействие математики проявляется в достаточной мере автоматически, что вытекает из самой природы математической деятельности.

Следует подчеркнуть, что особенности конкретного профиля могут потребовать включения в соответствующий курс материала, расширяющего основной курс и углубляющего его. Так, для развития абстрактного и логического мышления учащихся какого-либо профиля научно-гуманитарного направления целесообразно повышенное внимание к аксиоматическому методу (и не обязательно в геометрии), для нужд технического и архитектурного профилей, может быть, следует усилить внимание к стереометрии или даже предусмотреть знакомство с элементами начертательной геометрии.

Если изучение математики в профиле чисто математическом является фактически самоцелью, то в профиле физическом изучение математики проводится, прежде всего, с целью создания необходимого для физики аппарата, а в профиле с уклоном в информатику математика формируется как основа решения специфических задач этой области знаний. Поэтому, например, изучение основ теории вероятностей и математической статистики, составляя весьма специфическую область математических знаний, представляется обязательным в физическом профиле, но вряд ли необходимым в математическом, поскольку основы соответствующей науки являются в большей степени функцией высшего образования. Аналогично основы математической логики, не являясь столь существенной частью математической науки, чтобы ее изучение в школе могло считаться обязательным, естественно рассматривать как необходимые в профиле с уклоном в информатику.

Отсюда следует, что программу по каждому из курсов *A*, *B* и *C* целесообразно строить по «модульному» принципу. Каждая программа должна состоять из двух частей: инвариантной (обязательной для изучения всеми, кто выбрал этот курс) и вариативной. Вариативная представляет собой набор разделов, из которых учитель может составить материал, дополняющий основную часть курса. Соответственно «модульный» принцип должен быть положен и в основу создания учебников.

Необходимо сказать специально о возможности профильного обучения в основной школе, которое может осуществляться в рамках углубленного изучения математики начиная с VIII класса. Важно правильно понимать роль и место этих классов в системе профильного обучения, различие целей углубленного изучения в VIII—IX классах и в старшем звене школы.

К VIII классу некоторые учащиеся уже имеют возможность оценить привлекательность математики, ее интеллектуальную эстетику, широкое разнообразие интересных математических задач. Развитие их интереса к математике до познавательного уровня дает им возможность в этом возрасте выбрать математику как предмет для последующего углубленного изучения.

Разумеется, выбор учащегося может оказаться ошибочным, неадекватным его истинным склонностям и возможностям, и поэтому организация углубленного изучения математики в VIII—IX классах, содержание обучения и требования, предъявляемые на этой ступени, должны быть максимально гибкими. Они должны обеспечивать возможность исправления допущенной ошибки. В не меньшей степени это касается и учащихся, которые осознали свои склонности к изучению математики в более поздний период, так что возможность интеграции в систему углубленного изучения и этих учащихся должна быть обеспечена.

Эти обстоятельства определяют роль VIII—IX классов в системе углубленного изучения математики как ориентационного этапа, основной целью которого является диагностика. Эти же обстоятельства предопределяют необходимость вариативности содержания обучения, которое, с одной стороны, должно предусматривать возможность изучения достаточно стройного и последовательного курса математики, а с другой стороны, позволять при желании практически избежать всякого тематического расширения общеобразовательного курса, достигая углубления только с помощью повышения уровня сложности и развивающей ценности решаемых задач.

Требования, предъявляемые к математической подготовке учащихся VIII—IX классов с углубленным изучением математики, вытекают из ориентационного характера этого этапа. Учащиеся, безусловно, должны владеть всем материалом, входящим в общеобразовательный курс математики, при этом минимальный уровень требований должен совпадать с уровнем требований к учащимся общеобразовательных классов. В то же время достижение учащимся лишь обязательного уровня требований на первом этапе углубленного изучения должно служить сигналом того, что нецелесообразно на следующей ступени обучения выбирать профили, связанные с повышенными курсами математики.

В заключение отметим, что для практической реализации идеи дифференциации в обучении математике требуется серьезная перестройка всей методической системы. Необходимо создать разноуровневые и профильные программы, учебно-методическое обеспечение, направленное на организацию дифференцированного обучения на уроках, а также на групповых и индивидуальных занятиях с учащимися разных способностей и разного уровня обученности, и т. д. В то же время очевидно, что такой переход школы в качественно новое состояние будет осуществляться постепенно, по мере накопления теоретических разработок и практического опыта. Поэтому необходимо уже сейчас настойчиво искать и внедрять в практику преподавания методические решения, отвечающие идее дифференциации.

Профильная дифференциация обучения математике

Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова (Москва)

До недавнего времени считалось, что главная задача школы состоит в том, чтобы дать каждому школьнику общее среднее образование в рамках государственной программы, независимо от его склонностей и способностей. Подразумевалось, что склонности и способности школьник может развивать на факультативных, внеклассных занятиях или самостоятельно; в очень небольшом количестве существовали школы и классы с углубленным изучением некоторых предметов. К чему привело такое положение, всем хорошо известно.

Школа сегодняшнего дня делает попытку повернуться к личности ребенка, к его индивидуальности, создать наилучшие условия для развития и максимальной реализации его склонностей и способностей в настоящем и будущем. Одним из путей решения проблемы индивидуализации обучения является его дифференциация.

В соответствии с предлагаемой НИИ СиМО концепцией школьного математического образования в основной школе (I—IX классы) предполагается осуществление уровневой дифференциации: по одним и тем же программам и учебникам учащиеся достигают разных конечных целей, соответствующих их возможностям и склонностям. При этом предполагается, что все учащиеся должны достичь установленного сверху обязательного уровня подготовки, а затем уже решать, обучаться дальше или остановиться на достигнутом.

Индивидуализация обучения в старшем звене средней школы предполагает предоставление учащимся возможности получить образование в различных направлениях, по разным учебным планам и программам, т. е. осуществление *профильной дифференциации* на базе фуркации[1]. Но и при условии обучения учащихся по выбранным ими направлениям, учитывая возможности каждого подростка, предполагается обеспечить достижение каждым из них некоторого обязательного (базового) уровня знаний по тому или иному предмету.

Такова в общих чертах принципиальная схема дифференциации школьного обучения, которую предполагается реализовать в современной советской школе.

Попытаемся теперь осмыслить отечественный и зарубежный опыт прошлого и настоящего, связанный с профильной дифференциацией школьного обучения.

В школе дореволюционной России проблема профильной дифференциации решалась весьма своеобразно. В определенной степени она обеспечивалась наличием различных типов учебных заведений, дающих среднее образование: гимназий, реальных училищ (технических и коммерческих), кадетских корпусов и пр. Каждый тип учебного заведения имел свой учебный план и свои программы, посредством которых и осуществлялась дифференциация обучения. Более того, в начале XX в. обсуждалось несколько различных проектов типологии учебных заведений. Так, проектом министра просвещения того времени Н. П. Боголепова предлагалась следующая типология: гимназия с двумя древними языками (латинским и греческим); гимназия с одним латинским языком; гимназия, допускающая принцип индивидуализации (для учащихся, обнаруживших успехи по тому или иному предмету, разрешалось усиление занятий по этому предмету, т. е. педагогический совет располагал большей свободой в распределении занятий с учащимися); реальное училище; так называемая школа нового типа (здесь предусматривались дополнительные занятия для детей, проявивших интерес и склонности к изучению языков или естественных наук; на старшей ступени предполагалась фуркация по трем на-

[1] Фуркация — построение учебного плана старших классов средней общеобразовательной школы по уклонам (гуманитарным, естественно-математическим и др.) с преимущественным вниманием к определенной группе учебных предметов // СЭС.

правлениям: классическому, естественному и гуманитарному); средняя школа с бифуркацией (гуманитарным отделением и реальным отделением) — по существу, предполагалось соединение в одной школе двух типов учебных заведений: гимназии и реального училища.

На наш взгляд, особый интерес представляет распределение недельных часов на изучение математики по классам в перечисленных выше типах учебных заведений.

Из строк 3, 4 и 6 таблицы видно, что в данных типах школ с определенного класса учебный план становится гибким: математика изучается в том объеме, который соответствует выбранному направлению обучения; в то же время в гимназиях и реальном училище (строки 1, 2 и 5) число часов на математику жестко фиксировано учебным планом (число со звездочкой в таблице означает число часов, отводимое на уроки черчения).

Ограничимся только этим примером, который показывает, что проблема дифференциации обучения была в центре внимания педагогической общественности и находила решение в русской дореволюционной школе через фуркацию на старших ступенях обучения.

Следует отметить, что и в советской школе накоплен определенный опыт обучения учащихся по различным учебным планам и программам, т. е. определенный опыт дифференциации обучения.

Так, в примерных учебных планах для I и II ступеней единой трудовой школы 1920 г. допускалось различное содержание обучения (правда, тесно связанное с географическим местом положения и условиями работы школы): городская школа с промышленной ориентацией; сельская школа с ориентацией на сельское хозяйство.

Несколько позже на северо-западе России в школах было организовано и обучение по уклонам. Так, в 1924 г. 69 школ II ступени Ленинграда (42 % всех школ города) перешли на обучение детей по следующим уклонам: индустриальному (5 ч математики в неделю); промышленно-экономическому (4 ч математики в неделю); педагогическому (3 ч математики в неделю).

В других городах и селах северо-запада школы имели также уклоны сельскохозяйственный, экономический, кооперативный (в зависимости от нужд хозяйства той местности, где находилась школа).

Однако в отмеченных случаях профильная дифференциация школьного обучения более походила на профессионализацию, так как основывалась на соображениях скорейшей подготовки специалистов среднего звена для быстро развивающейся промышленности и для сельского хозяйства.

Вряд ли такую профильную дифференциацию можно считать серьезным средством индивидуализации обучения, так как особенности личности ученика, его склонности не всегда могли проявиться при выборе из узко ограниченного набора профилей обучения, который определялся прежде всего потребностями государства в специалистах. Может быть, поэтому попытка профессионализации старшего концентра средней школы фактически себя не оправдала. Кроме того, предлагаемая интеграция общеобразовательной и профессиональной подготовки школьников оказалась недостаточной и для успешного обучения в вузе (здесь

	Тип школы	Классы								Всего	Примечания
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		
1.	Гимназия с двумя древними языками	4	4	3	4	4	4	3	3	29	
2.	Гимназия с одним латинским языком	3	4	4	4	4	4	4	3	30	
3.	Гимназия, допускающая принцип индивидуализации	4	4	4	4	4	3	3	3	29	Для изучающих оба древних языка
								3	0	26	Для обнаруживающих особые успехи по древним языкам
								1	0	24	
4.	Школа нового типа	3	4	4	4	4	3 (4)	4 (4)	3 (4)	29 ?	Дополнительные уроки для натуралистов по усмотрению педсовета
5.	Реальное училище	3	4	4	4+2*	5	5	5	5	35+2*	
6.	Школа с бифуркацией: гуманитарное отделение	3	4	4+1*	4	4	4	4	3	30+1*	
	реальное отделение				4+1*	5	5	5	5	35+2*	

сказалось и обилие программ, не подкрепленных необходимыми учебными пособиями, и отсутствие достаточного количества квалифицированных преподавательских кадров).

Однако государство остро нуждалось в специалистах высокой квалификации, особенно в индустрии. Такому социальному заказу не способствовал ни разнобой в программах, ни уровень подготовки выпускников школ. В этих условиях и в связи с усиливающейся централизацией всего народного хозяйства в 1934 г. вышло постановление ЦК ВКП(б) и Совета Народных Комиссаров СССР «О структуре начальной и средней школы в СССР». С тех пор в школе жестко стабилизировались учебные программы по всем предметам. В частности, в 1935 г. была разработана программа по математике, которая просуществовала 20 лет. По существу, школа вернулась к дореволюционным традициям. За основу был взят тип русской школы с бифуркацией, в котором естественное и гуманитарное отделения слились. Казалось бы, произошло весьма негативное событие. Однако установившаяся затем стабильность содержания обучения, использование советской школой многих высококачественных учебников (по математике широко использовались известные учебники А. П. Киселева, задачники Н. А. Рыбкина и др.) сыграли весьма позитивную роль. Фактически поколение, обученное в то время, открыло космическую эру развития техники.

И правильно, на наш взгляд, высказался профессор Н. Скатов на страницах газеты «Правда» о том, что система школьного образования, действовавшая у нас в 1940—1950 гг., была достаточно эффективной, может быть, еще и потому, что она была «воссоздана» на позитивных традициях русской дореволюционной школы (см.: Правда. 1989. 13 нояб.).

В послевоенные годы стало шириться движение за реформу школьного образования в самых различных аспектах (совместное или раздельное обучение мальчиков и девочек, одиннадцатилетнее или десятилетнее обучение, производственная или сельскохозяйственная ориентация всех выпускников, появление факультативных занятий и т. д.).

В последние годы требование индивидуализации обучения в какой-то мере реализовывалось через сеть специализированных школ, ПТУ, классов с углубленным изучением отдельных предметов. Но и здесь формально расширялись лишь программы по определенному предмету (в основном за счет увеличения числа часов), по существу, не отражаясь на комплексе программ по другим предметам.

Анализ опыта работы русской и советской школ показывает:

1) профильная дифференциация обучения может осуществляться благодаря наличию различных типов учебных заведений, при этом каждый тип заведения имеет свой учебный план и свои программы (в частности, по математике);

2) профильная дифференциация, основанная на чисто прагматических началах, без учета склонностей и способностей учащихся, не приводит к позитивным результатам;

3) частичная фуркация, т. е. изменение учебного плана и программ только в отношении одного предмета, без коренной перестройки всего учебного плана и всех учебных программ, нецелесообразна.

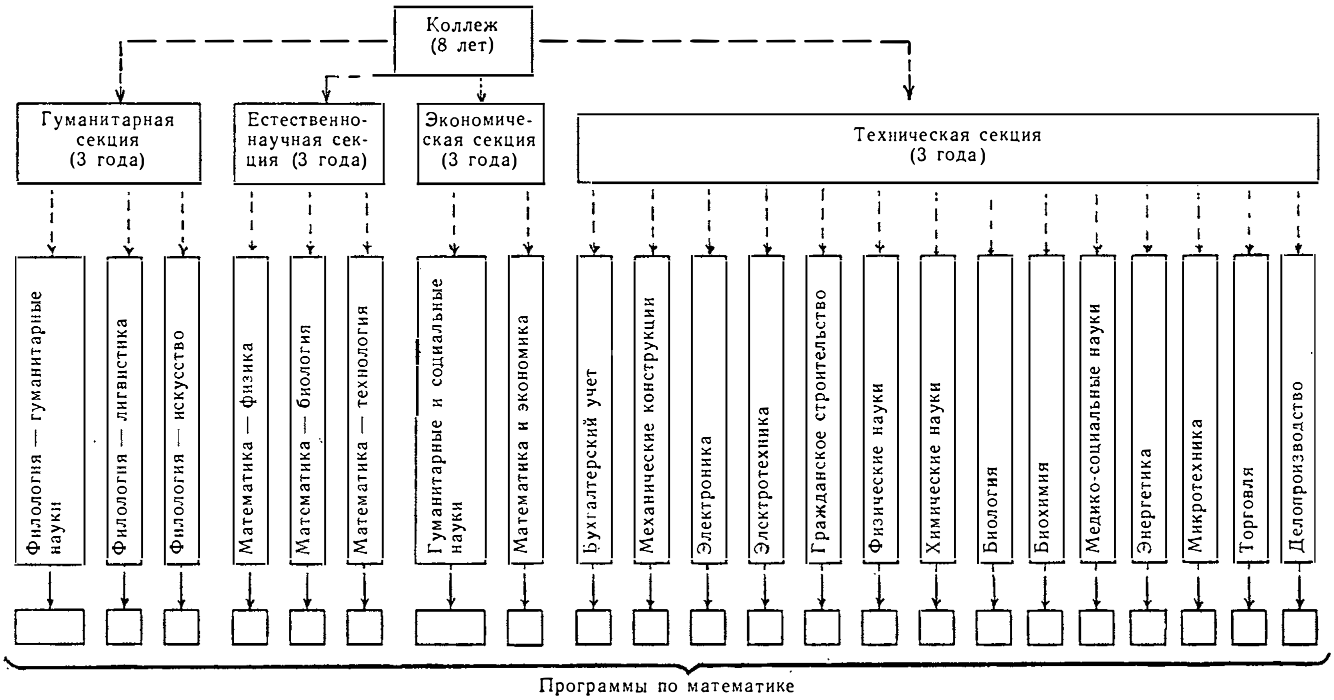
Рассмотрим кратко, как осуществляется профильная дифференциация во Франции, Японии, США. В этих странах педагоги пошли по пути полифуркации, т. е. по пути возможно более широкого разнообразия уклонов и направлений.

Так, в школах Франции после обучения по общей для всех программе в коллеже (что условно соответствует нашей неполной средней школе) учащиеся переходят в лицей, где обучение длится 3 года. Причем лишь на двух последних годах обучения происходит дифференциация по нескольким секциям (гуманитарная, естественнонаучная, экономическая, техническая), каждая из которых делится на подсекции (например, экономическая делится на подсекции гуманитарных и социальных наук, математики и экономики). Во всех секциях математика изучается всеми лицеистами, но в различных секциях она изучается в разном объеме.

В японской школе также после 9 лет обучения по общей для всех программе учащиеся переходят в высшую среднюю школу. Здесь они выбирают курс обучения из предлагаемых им более чем двадцати направлений, условно разделенных на три потока: общий поток, академический (готовит к поступлению на естественные и гуманитарные факультеты университета), профессиональный (подготовка идет по нескольким блокам). В японской школе всех направлений разработано несколько различных по содержанию и уровню изложения курсов математики. Учащийся может ограничиться одним общим обязательным курсом или выбрать еще один или несколько других.

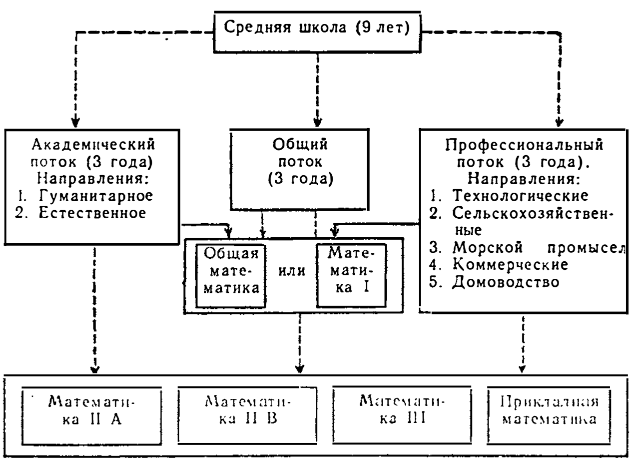
В старшей средней школе США существуют три различных учебных плана, соответствующих трем разным потокам: академическому, профессиональному (практическому) и общему. Академический поток готовит к колледжу и содержит большее количество академических предметов (обязательных и по выбору; математика в число обязательных не входит). На общем и практическом потоках больше утилитарных, профессиональных курсов, курсов по выбору (обязательным на практическом потоке является курс прикладной математики). Таким

Франция



образом, учащийся может выбрать для изучения один, два или несколько курсов математики, но может не выбрать ни одного. Следует заметить, что такой подход привел к снижению уровня математической подготовки выпускников средней школы. В связи с этим в 1987 г. Национальный совет учителей математики США предложил для обсуждения программу по математике, общую для всех учащихся. В ней предусматриваются различные методические подходы при обучении учащихся, выбравших различные направления обучения, и формулируются дополнительные темы, углубляющие или расширяющие основной курс (для тех, кто будет продолжать обучение или планирует связать в дальнейшем свою профессиональную деятельность с математикой).

Япония



Схематически способы дифференциации обучения во Франции, США и Японии с последующей реализацией ее в математическом образовании изображены на схемах (принятое обозначение: ——→ обязательный выбор, - - → выбор по желанию).

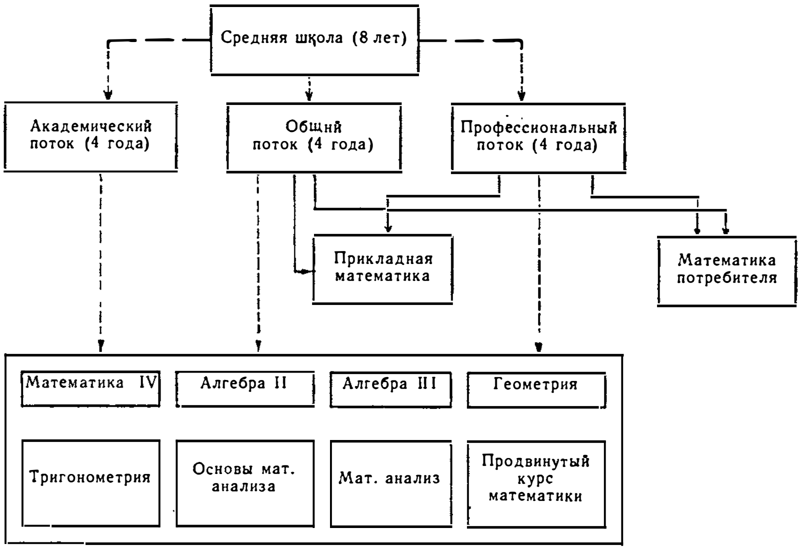
Краткая характеристика организации профильного обучения в трех рассмотренных капиталистических странах с многолетним опытом дифференциации обучения в старшем звене школы позволяет сделать следующие выводы:

1) обилие и разнообразие направлений обучения в старших классах позволяют учитывать склонности и способности практически всех учащихся, а также потребности государства в различных специалистах;

2) ориентация курсов математики на тот или иной общий профиль в значительной мере направлена на возможно более полное удовлетворение склонностей учащихся при овладении ими будущей специальностью (однако любая математическая подготовка в старшем звене базируется на единой подготовке в среднем звене школы);

3) наличие большого количества курсов математики по выбору учащихся в сочетании с минимальным обязательным курсом, на наш взгляд, в недостаточной мере может обеспечить полноценное базовое математическое образование;

США[2]



4) способности и склонности детей могут быть учтены не только в момент выбора профиля обучения (или типа учебного заведения), но и в ходе обучения за счет гибкости учебных планов и программ.

Разрабатывая перспективные подходы к системе дифференцированного профильного обучения в советской школе и определяя место математики в этой системе, следует максимально использовать лучшие традиции дореволюционной русской, советской и зарубежной школ.

Страны с многолетним опытом профильной дифференциации *вводят обучение по направлениям,* как показано выше, *лишь после того, как школьники получат достаточное единое базовое образование и утвердятся в своих склонностях.*

Это положение мы считаем первым и основным принципом, положенным в основу и предлагаемой нами системы дифференциации школьного обучения.

Обоснованность этого решения подтверждают психологические и психофизиологические исследования. Так, в раннем подростковом возрасте общей возрастной особенностью детей является художественное видение, эмоциональное отношение к окружающему миру. Подросток не может до конца понять себя, а взрослые не имеют достаточно объективных данных, чтобы помочь ему в этом еще и потому, что юный человек не готов к утверждению своих склонностей физиологически. Как известно, склонности к деятельности типа «техника» или «знаковая система» больше связаны с функциональными особенностями левого полушария мозга, а склонность к деятельности типа «человек» или «художественный образ» ярче проявляются у людей с правополушарной мозговой активностью. Для раннего же подросткового возраста распределение функций по полушариям нетипично. Все это говорит о целесообразности соотнесения профильной дифференциации со старшим подростковым возрастом, а также о необходимости вести профориентацию в ходе базового школьного обучения.

При выборе профиля обучения подросток должен иметь возможность наилучшим образом использовать свои склонности и способности. Это не только приведет к его более быстрой социальной адаптации в обществе, но и принесет, несомненно, бóльшую пользу обществу, которое получит не только знающего, но и заинтересованного в своей деятельности работника. Отсюда вытекает второй принцип: *на старшей ступени обучения следует обеспечить возможно большее количество направлений обучения или продолжения образования через широкую систему учебных заведений различных типов.*

Так как многие профили будут иметь сходные цели и задачи обучения по определенным учебным предметам, то целесообразно сгруппировать такие направления в блоки и разрабатывать для них единую базовую программу по каждому учебному предмету или группе предметов (при этом следует иметь в виду, что по одному предмету в блоки могут быть объединены одни профили, а по другому — другие). Отсюда вытекает третий принцип: *по каждому учебному предмету целесообразно объединять различные направления обучения в блоки по принципу сходства целей и задач обучения*

[2] Программы по математике штата Пенсильвания // Педагогика и народное образование за рубежом. М.: Изд-во АПН СССР, 1989. Вып. 7.

в этих направлениях для создания единых программ для каждого блока.

И наконец, так как учащиеся, выбирающие определенный профиль обучения, отличаются психологическими и физиологическими особенностями (присущими людям, склонным именно к этому виду деятельности), то *при составлении программ и учебников, выборе форм и методов обучения следует учитывать возрастные особенности подростков, склонных к данному виду деятельности, и в то же время не исключать возможности изменить профиль обучения подростку при ошибке в его выборе.*

Бытует мнение, что математика как учебный предмет гуманитариям не нужна. Это, на наш взгляд, глубоко ошибочное суждение. Действительно, весь мир вступил в эпоху «математизации научных знаний», в эпоху широкого применения ЭВТ. Кроме того, математика более, чем любой другой учебный предмет школы, способна помочь в развитии логического мышления, в развитии многих качеств научного мышления, таких, как критичность, обобщенность, способность к анализу и синтезу и т. д. Наконец, такие качества речи, как краткость, сжатость и ясность, более всего воспитываются математикой. Сказанное приводит к следующему основному принципу, который нужно положить в основу дифференцированного профильного обучения: *математика должна входить в набор обязательных учебных предметов любого из профилей* (физико-математического, технического и гуманитарного). Содержание и объем учебного математического материала должны отражать специфику данного направления.

Реализуя указанные принципы в практике подготовки конкретных программ, учебно-методических пособий, а также в ходе поискового эксперимента, коллектив ученых НИИ школ, МГУ и МФТИ, методистов и учителей при лаборатории математики НИИ школ МНО РСФСР пошел по следующему пути.

Все многообразие возможных профилей обучения мы условно объединили в три блока, названных нами гуманитарным, техническим и физико-математическим. Каждый из этих блоков объединил школы и классы определенных конкретных профилей, для которых курс математики был относительно одним и тем же по целям, содержанию и объему. Специфика каждого конкретного профиля отражалась в подборе специальных для каждого профиля прикладных задач, в акцентах методики преподавания, в применяемых средствах обучения. Проиллюстрируем это на примере гуманитарного блока.

В гуманитарный блок объединены следующие профили гуманитарного цикла, по которым НИИ школ ведет поисковый эксперимент: гуманитарный, психолого-педагогический, юриспруденция, художественно-эстетический, культуроведение, историко-филологический.

Мы считаем, что математическое образование всех гуманитарных профилей должно подчиняться общей цели — обеспечить усвоение системы математических знаний и умений, которые фактически являются элементами общей культуры; развить логическое мышление и пространственное воображение; сформировать представление о прикладных возможностях математики; сообщить сведения об истории развития науки; дать знания, необходимые для применения в быту и в выбранной специальности.

При составлении программ и написании учебников для гуманитариев мы руководствовались, в частности, особенностями данного типа школьников (их можно условно отнести к представителям «художественного» типа высшей нервной деятельности). Эти школьники обычно обладают способностью к яркому и наглядному запечатлению объекта в памяти, более развитыми чувственно-конкретными формами мышления (в том числе и оперативного), и в то же время могут испытывать трудности в произвольной регуляции поведения и оперировании абстрактными категориями.

Это означает, что при составлении программ по математике для гуманитариев нельзя руководствоваться принципом «урезывания» более сложной программы, сокращения ее объема и «облегчения». Следует подойти качественно по-иному: изменить номенклатуру изучаемых вопросов курса, форму подачи учебного материала и т. п. Вместе с тем в программе должны быть представлены и традиционные вопросы курса математики, с одной стороны, имеющие общеобразовательную ценность, а с другой — дающие школьнику возможность «отступления» на другой профиль в случае ошибки в выборе. Поэтому в программу по математике для гуманитарных направлений (предполагающую выделение 2—3 ч на уроки математики в неделю) включены как привычные для школы вопросы (развитие понятия числа, функции, представление о производной и интеграле, знакомство со взаимным расположением прямых и плоскостей в пространстве, многогранники и круглые тела, вычисление их площадей поверхностей и объемов), так и нетрадиционные для нашей школы темы: элементы статистики и теории вероятностей, знакомство с персональным компьютером, применение математики в повседневной жизни. Приведем краткое содержание курса математики для классов с гуманитарными направлениями.

1. Знакомство с персональным компьютером

Клавиатура, дисплей компьютера. Работа в режиме калькулятора. Знакомство с языком Бейсик. Команды PRINT, END, RUN, LIST, CLS, INPUT, GOTO, IF...THEN, LET.

Знакомство с работой персонального компьютера в графическом режиме. Представление об алгоритмах и программах. Сведения о применении компьютера на практике.

2. **Элементы статистики и теории вероятностей**

Организация данных. Таблицы, диаграммы, графики. Гистограммы. Частотная таблица. Выборка. Генеральная совокупность.

Центральные тенденции: мода, медиана, среднее.

Относительная частота события. Статистическая вероятность. Классические примеры вероятностных задач. Случайные события. Независимые события.

3. **Числа**

Натуральные числа. Свойства действий над натуральными числами. Целые числа. Рациональные числа. Действительные числа; изображение действительных чисел на числовой прямой. Числа π и e. Представление о пределе числовой последовательности.

Проценты (простые и сложные). Понятие логарифма числа. Десятичные и натуральные логарифмы.

Комплексные числа. Операции над комплексными числами в алгебраической форме. Изображение числа на комплексной плоскости. Решение квадратных уравнений.

4. **Функции**

Понятие функции. Функции возрастающие, убывающие, четные, нечетные, периодические. Экстремумы функции.

Основные элементарные функции: линейная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические.

Понятия обратной и сложной функций.

5. **Стереометрия**

Прямые и плоскости в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Прямая, параллельная плоскости. Параллельность плоскостей.

Перпендикулярность прямой и плоскости. Перпендикулярность плоскостей.

Понятие многогранника. Призма, пирамида, усеченная пирамида. Правильные многогранники.

Симметрия в пространстве.

Понятие поверхности и тела вращения. Цилиндр, конус, усеченный конус.

Сфера. Шар. Сечение сферы и шара плоскостью, касательная плоскость к сфере.

Площадь поверхности и объем призмы, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра, конуса, усеченного конуса, шара.

6. **Элементы математического анализа**

Понятие производной. Геометрический и физический смысл производной. Дифференцирование многочлена. Таблица производных некоторых элементарных функций.

Исследование функции с помощью производной. Простейшие задачи на оптимизацию.

Понятие первообразной. Нахождение первообразной многочлена. Таблица первообразных некоторых элементарных функций.

Площадь криволинейной трапеции.

Представление об интеграле. Применение интеграла для нахождения площадей фигур и объемов тел.

Примеры дифференциальных уравнений.

7. **Знакомство с некоторыми приложениями математики.**

Представление о налогообложении. Расчеты при кредитовании и ссудах. Некоторые операции Госстраха. Бюджет семьи. Арендные платы. Акция и облигация. Договорные расчеты. Банковские операции.

При написании экспериментальных учебников по программе для учащихся классов с гуманитарными направлениями мы руководствовались следующими положениями:

изложение теоретического материала ведется на индуктивно-практической основе: от конкретных жизненных ситуаций к теоретическому обобщению (рассуждению), а от него к применению;

оптимально используется принцип наглядности и художественная иллюстративность;

в явном виде применяются образные формы изложения учебного материала (диалог, беседа, сказка и т. п.);

там, где возможно, предлагаются мнемонические правила запоминания содержательной части учебного материала;

традиционная система упражнений (формирующая практические навыки) заменяется системой творческих и практических заданий; даются советы редающему задачу;

с целью знакомства с развитием математической науки используются исторические сведения;

для расширения математического кругозора учащихся к учебнику предполагается разработать приложение (научно-популярные статьи крупных ученых-математиков, некоторые сведения из истории математики, биографии ученых-математиков, темы творческих рефератов, занимательные и исторические задачи и т. д.).

Ясно, что преподавание математики в классах гуманитарного профиля имеет свою специфику, а следовательно, требует определенной методической подготовки учителей. Последнее — предмет особого разговора. Здесь же в заключение укажем на предполагаемый состав учебно-методического комплекса по математике для школ и классов гуманитарного профиля: учебник для учащихся (с приложениями); пакет прикладных программ; методическое пособие для учителя; книга для внеклассного чтения по математике; задачники-практикумы по решению прикладных задач для конкретных профилей гуманитарного цикла; сборник тестов «Проверь свои способности».

Индивидуализация учебной деятельности учащихся как основа дифференцированного обучения математике в средней школе

В. А. Гусев (Москва)

Решение проблемы дифференциации обучения часто видят в открытии школ и классов с углубленным изучением математики. Это, конечно, очень интересное и важное направление, но оно не решает поставленной проблемы. Во-первых, начинать такую дифференциацию целесообразно только с VIII—IX классов (в нашей стране она часто начинается и с X класса), а интерес учащихся к математике должен формироваться значительно раньше. Во-вторых, далеко не во всех районах и поселках нашей страны можно открыть «математические» классы и школы. В-третьих, специализированные школы и классы тоже нуждаются в дифференциации, соответствующей способностям учащихся.

Сказанное заставляет думать о методах обучения математике, учитывающих задачи развития личностных качеств всех учащихся, а также получения ими необходимого базового математического образования. Эти методы должны также способствовать выявлению и развитию математических способностей тех учащихся, для которых математика стала (или станет) сферой их основных интересов. Эти методы и приемы могут разрабатываться, опираясь на индивидуальный подход к учебной математической деятельности учащихся или групп учащихся.

Что же можно и нужно делать сейчас, не дожидаясь новой модели (или моделей) школы.

I. Прежде всего необходимо отказаться от командного стиля обучения, который, к сожалению, проник и в процесс изучения математики в школе. Отсутствие вариативности, обсуждения возможных путей поиска решения (доказательства), сравнения полученных результатов ведет к потере интереса к предмету и учебному процессу в целом. Необходимо учиться помогать учащимся делать «математические открытия» для себя, максимально повышая вклад самого ученика в это «открытие».

Поясним сказанное примером. В школе много времени уходит на вывод формул площадей фигур, а результат обучения крайне скуден: школьники знакомятся с формулами, которые могли бы узнать из любого справочника и без помощи учителя. Главная идея о возможности вычисления площади фигуры путем ее достраивания и перекраивания остается неразвитой.

При изучении темы «Площадь треугольника» учитель должен прежде всего поставить перед классом такие вопросы: «Чем вызвана потребность дополнения треугольника до параллелограмма? Почему дополнять следует именно так, как показано на рис. 1, а не иначе?» Здесь

Рис. 1

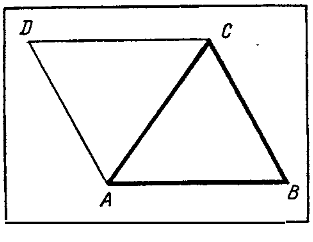
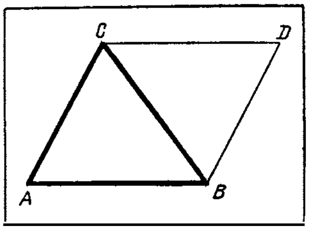


Рис. 2



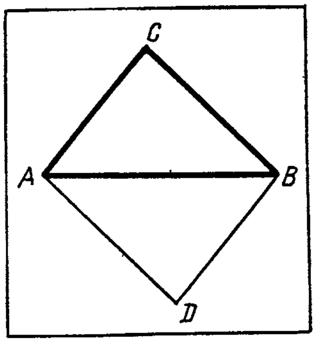


Рис. 3

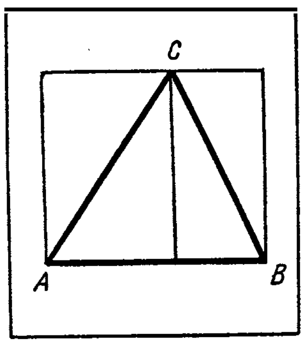


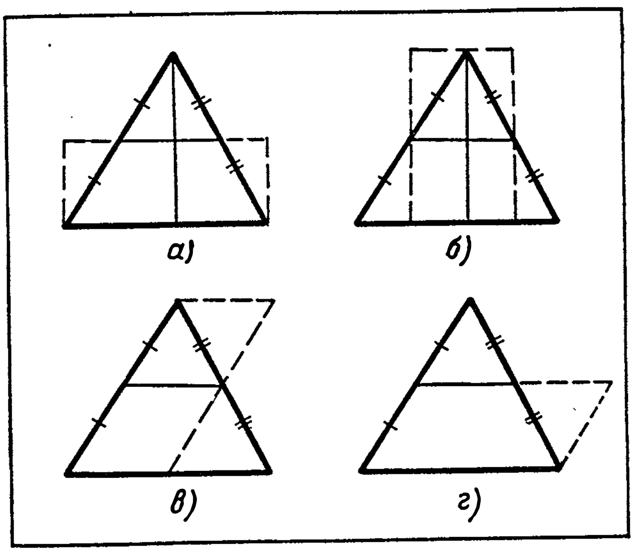
Рис. 4

именно появляется возможность индивидуального подхода к учащимся. Некоторые из них достроят треугольник до параллелограмма так, как на рис. 2, другие так, как на рис. 3. Большая группа учащихся обычно предлагает другое построение, а именно дополнение до прямоугольника (рис. 4).

Здесь возникает (может возникнуть) интересная идея «перекроить» данный треугольник в прямоугольник или параллелограмм. Такой вопрос можно поставить как проблему для домашней самостоятельной работы, если нет времени разбирать его на уроке.

Перекрой связан с проведением средней линии. Если никто из учеников не догадался, то учитель может сам предложить провести среднюю линию треугольника. Помощь существенная, но все же не прямая подсказка, так как после проведения средней линии «перекрой» еще нужно придумать, причем возникают четыре варианта (рис. 5). После выполнения чертежей получение самой формулы не вызывает труда.

Рис. 5



Этот пример заставляет задуматься еще над одним вопросом, который психологи называют дозой помощи. Учитель должен уметь оказать ученику помощь, которая не является командой, а служит направлением к действию, к поиску.

II. Необходимо перевести обучение математике на *деятельностный подход*. Очень часто ученик (особенно не имеющий склонностей к математике) просто не понимает, что следует делать, когда ему дают те или иные задания: «докажи», «подумай», «выдели главное», «прочти внимательно», «проанализируй текст задачи» и т. п. Мало того что эти задания сформулированы в командном стиле, особая сложность заключается в том, что деятельность ученика в таких случаях не адекватна его возможностям и он не понимает сути этой деятельности.

Проиллюстрируем сказанное примером. В учебном пособии [1] учащимся, только пришедшим в V класс, предлагается п. 1.1 («Чтение и запись натуральных чисел»), который требует выполнить в системе упражнений пять видов действий:

а) Прочти следующие числа...

б) Запиши следующие числа цифрами...

в) Запиши число в виде суммы разрядных слагаемых...

г) Запиши числа...

д) Составь многозначное число...

Про все эти действия в тексте пункта практически ничего не сказано. Значит, это должен объяснить учитель. Отметим, что объяснить сущность определенного вида деятельности бывает иногда труднее, чем дать определение математического понятия.

Основу учебной математической деятельности составляют два приема: синтез и анализ, которые характеризуют и любую другую деятельность человека. На их базе формируются уже более тонкие виды деятельности: анализ через синтез и синтез через анализ. Нам представляется целесообразным систематически, целенаправленно и дифференцированно формировать умения учащихся использовать в своей работе синтез и анализ.

Опишем в общих чертах стратегию такого обучения.

Синтез. Пусть рассматривается какое-то математическое понятие, задача или теорема. Учащимся следует предложить следующие вопросы: «Что мы знаем про указанное понятие (про данные в задаче или теореме объекты)? Какими свойствами оно (они) обладает? Какие следствия из имеющихся данных мы можем получить?»

Анализ. Допустим, в задаче требуется что-то доказать или построить, вычислить. Учащиеся должны ответить на следующие вопросы: «Какие факты для этого н у ж н о знать? (На первых этапах обучения понятия *необходимо* и *достаточно* целесообразно заменять простыми и понятными словами «нужно», «можно».)

Есть много публикаций о значении обучения анализу и синтезу для становления мышления учащихся, но в них не так часто встречаются попытки показать систему практической работы по обучению этим приемам. А между тем работа должна начинаться с самых первых шагов обучения математике и продолжаться постоянно в процессе всего изучения курса.

Рассмотрим эту работу на примере формирования понятия отрезка в V и в VII классах. Системы упражнений на отработку этого понятия в V и в VII классах практически совпадают, но в V классе упражнения выполняются на уровне «правдоподобных рассуждений», а в VII классе появляется логическая аргументация, которая должна дифференцироваться в соответствии с возможностями учащихся.

Разделим упражнения на две группы: те, в которых речь идет об отрезке как геометрической фигуре, и те, где говорится об измерении отрезков.

Отрезок как геометрическая фигура

Синтез.

1. Даны две (три, четыре) различные точки. Как они могут быть расположены? Сколько при этом образуется отрезков?

2. Дана прямая a и на ней три точки. Сколько отрезков получилось на прямой? Выпишите их. Каким свойством обладают эти отрезки? (Можно рассмотреть также случай, когда на прямой даны 4, 5, 10, n точек.)

3. Даны два отрезка. Как они могут быть расположены один относительно другого? Могут ли у них быть точки пересечения, и если могут, то сколько таких точек? Почему?

4. Даны отрезок и прямая. Каково может быть их взаимное расположение? Могут ли у них быть общие точки и сколько? Почему? Далее можно предложить упражнения № 16—20 из пособия [2].

Анализ.

1. На прямой нужно получить три отрезка. Сколько для этого следует поставить точек на данной прямой? (Вопрос можно усложнить, предложив некоторым учащимся рассмотреть случаи, когда надо получить 20, 25, 30, 50, 100 и т. д. отрезков.)

2. Можно ли расположить на плоскости 8 отрезков так, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими? (Тот же вопрос для семи отрезков. Решение этой задачи можно найти в пособии [3], с. 74.)

Здесь же можно предложить серию упражнений о пересечении отрезка и прямой.

3. Что нужно знать, чтобы утверждать, что

отрезок пересекает прямую?

4. Что нужно знать, чтобы утверждать, что отрезок не пересекает прямую?

5. Что нужно знать, чтобы утверждать, что отрезки пересекаются?

В системе изложения А. В. Погорелова эти упражнения весьма актуальны. Они могут казаться сложными учащимся, не имеющим склонностей к математике, но в то же время будут весьма полезны способным к математике учащимся.

Измерение отрезков

Синтез.

Упражнения по этой теме можно систематизировать так:

1. Упражнения, имеющие следующую исходную формулировку: «Три точки... лежат на одной прямой...» Например: «Точки A, B, C лежат на одной прямой. Известно, что $AB=12$ см, $BC=13,5$ см. Какой может быть длина отрезка AC?» ([4], № 32).

К задачам такого типа можно отнести: в пособии [2] — № 14; в пособии [4] — № 32, 33, 38, 75, 79*; в пособии [5] — № 55.

2. Упражнения, имеющие следующую исходную формулировку: «На отрезке... дана точка...» Например: «На отрезке AB длиной 15 м отмечена точка C. Найдите длины отрезков AC и BC, если: 1) отрезок AC на 3 м длиннее отрезка BC; 2) отрезок AC в два раза длиннее отрезка BC; 3) точка C — середина отрезка BC; 4) длины отрезков AC и BC относятся как 2:3» ([2], № 15).

К задачам такого типа можно отнести: в пособии [2] — № 15; в пособии [4] — № 30, 31, 34, 37, 39, 74 (в этом пособии есть еще задачи № 40, 76, 77, в которых на отрезке рассматриваются две и три точки); в пособии [5] — № 10, 28, 29.

3. Упражнения, имеющие такую исходную формулировку: «Точка... лежит на прямой... между точками... и...». Например: «Точка M лежит на прямой CD между точками C и D. Найдите длину отрезка CD, если: 1) $CM=2,5$ см, $MD=3,5$ см; 2) $CM=3,1$ дм, $MD=4,6$ дм; 3) $CM=12,3$ дм, $MD=5,8$ м» ([2], № 14).

В пособиях [4] и [5] таких формулировок задач нет.

Анализ.

1. Упражнения с такой формулировкой: «Лежат ли точки... на одной прямой?» Например: «Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $AC=5$ см, $AB=3$ см, $BC=4$ см?» ([4], № 36).

К упражнениям такого типа можно отнести: в пособии [2] — № 12, 13; в пособии [4] — № 36.

2. Упражнения, имеющие такую исходную формулировку: «Принадлежит ли точка... отрезку...?» Например: «Является ли точка B серединой отрезка AC, если точки A, B и C расположены так, что $AB=BC$?» ([5], № 35).

К задачам этого типа можно отнести: в пособии [2] — № 10; в пособии [5] — № 36.

3. Упражнения, имеющие такую формулировку: «Лежит ли точка... между точками... и...?», «Может ли точка... разделять точки... и...?» Например: «Точки A, B и C лежат на одной прямой. Может ли точка B разделять точки A и C, если: $AC=7$ м, $BC=7,6$ м? Объясните ответ» ([2], № 11).

К задачам этого типа можно отнести: в пособии [2] — № 9, 11; в пособии [6] — № 42.

Учитель должен управлять процессом выбора каждым учащимся упражнений, соответствующих индивидуальным особенностям школьников.

III. Для обеспечения всех видов и форм дифференцированного обучения необходимо иметь полную ясность по отношению к предметному содержанию курса обучения. Как же понять, какой материал нужен для всех учащихся, какой — для углубленного обучения (при этом и здесь возможна и необходима дифференциация). С этой целью мы вводим так называемые цепочки новой информации, которые или помогают прослеживать последовательность изучения какого-то понятия, способы представления изучаемых фактов в задачах, или дают дополнительную занимательную информацию, обеспечивающую мотивацию обучения математике.

Наиболее существенную роль в организации дифференцированного обучения играют цепочки задач, несущих новую информацию. Они могут быть различных видов. Продемонстрируем каждый из этих видов на задачах по теме «Параллелограмм». Заметим, что если какая-либо из приведенных задач взята из пособия [2], то в скобках указывается ее номер. Если задача в пособии [2] приведена как теорема, то это указывается в скобках буквой «Т» с номером, который имеет эта теорема в пособии [2].

Задачи, составляющие основу обязательного теоретического материала.

1. Докажите, что сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°.

2. Докажите, что сумма углов параллелограмма равна 360°.

3. Докажите, что если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм. (Т. 6.1.)

4. Докажите, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся

пополам. (Т. 6.2.)

5. Докажите, что каждая диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.

6. Докажите, что у параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны. (Т. 6.3.)

Задачи, результаты которых используются постоянно в дальнейшем учебном материале. (Они являются также элементами базового математического образования, но никак не выделены в учебном пособии.)

7. Докажите, что если у четырехугольника противолежащие стороны равны или противолежащие углы равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

8. Докажите, что если у четырехугольника две противоположные стороны параллельны и равны, то он является параллелограммом. (№ 18.)

9. Докажите, что если в четырехугольнике каждая диагональ делит его на два равных треугольника, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Задачи, находящие применение при решении более сложных задач, или задачи, содержащие интересные факты, являющиеся достижениями математической мысли прошлого. (Ясно, что эти задачи предназначены для углубленного изучения.)

10. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая. Докажите, что отрезок ее, заключенный между параллельными сторонами, делится в этой точке пополам. (№ 6.)

11. Докажите, что если в четырехугольнике $ABCD \angle A + \angle D = 180°$ и $BC \parallel AD$, то $ABCD$— параллелограмм.

12. На продолжении противоположных сторон параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки AK и CL и проведены отрезки BL, KD. Докажите, что четырехугольник $LBKD$ — параллелограмм.

13. В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны BC, а F — середина стороны AD. Докажите, что четырехугольник $BEDF$ — параллелограмм. (№ 17.)

14. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ средняя линия содержит точку пересечения диагоналей и делится этой точкой пополам. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

15. Пусть E и F — середины параллельных сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые BE и FD делят диагональ AC на три равных отрезка.

16. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B. Докажите, что прямая BP пересекает диагональ AC в точке Q такой, что $AQ = \frac{1}{n+1} \cdot AC$.

Задачи, которые дают учащимся сведения об изучаемом объекте, но решение их не может проходить параллельно с изучением данного объекта (так как для этого нужны новые факты и методы, рассматриваемые позднее).

17. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов сторон.

18. Докажите, что если каждая диагональ четырехугольника делит его на треугольники равных площадей, то этот четырехугольник — параллелограмм.

19. Докажите, что если через противоположные вершины параллелограмма провести две пары параллельных между собой прямых, то получим новый параллелограмм, центр которого совпадает с центром данного.

20. Диагонали параллелограмма пропорциональны его непараллельным сторонам. Докажите, что углы между диагоналями равны углам параллелограмма.

21. Докажите, что сумма двух смежных сторон параллелограмма меньше суммы его диагоналей, но больше их полусуммы.

22. Докажите, что параллелограмм любой прямой, проходящей через точку пересечения его диагоналей, делится на две равные части.

23. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри параллелограмма, до его сторон есть величина постоянная для данного параллелограмма.

Предложенная «цепочка» является «стволом дерева», на котором располагается вся учебная работа, связанная с изучением параллелограмма и его свойств как на уровне базового математического образования, так и на любом более высоком его уровне.

Литература

1. *Нурк Э. Р., Тельгмаа А. Э.* Математика 5. М.: Просвещение, 1989.

2. *Погорелов А. В.* Геометрия 7—11. М.: Просвещение, 1989.

3. *Гусев В. А., Орлов А. И., Розенталь А. Л.* Внеклассная работа по математике в 6—8 классах. М.: Просвещение, 1984.

4. *Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Позняк Э. Г.* Геометрия 7. М.: Просвещение, 1989.

5. *Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.* Геометрия 6. М.: Просвещение, 1984.

6. Планирование обязательных результатов обучения математике / Сост. В. В. Фирсов. М.: Просвещение, 1989.

Чертеж учит думать

В. А. Далингер (г. Омск)

В школьном курсе геометрии выделяют три вида чертежей:

чертежи, иллюстрирующие содержание вводимого понятия;

чертежи, образно представляющие условие задачи или рассматриваемого математического предложения;

чертежи, иллюстрирующие преобразования геометрических фигур.

Мы будем рассматривать главным образом работу с чертежами первых двух видов, поскольку они имеют более общее назначение.

Формируя у учащихся умение работать с чертежом, учитель должен помнить, что если ограничиваться стандартными чертежами, то школьники достаточно быстро начнут связывать формируемое понятие только с фигурами определенного вида и положения. «Стандартный» чертеж вызывает у учащихся неверные ассоциации, в результате которых в содержание понятия вносятся лишние признаки, являющиеся частными признаками демонстрируемой фигуры. Приведем примеры.

Выполняя задания на распознавание углов, некоторые учащиеся VI класса называют углом лишь фигуру, изображенную на рис. 1, *б*. Фигуры на рис. 1, *а, в* эти учащиеся не считают углами, так как часто видят только те изображения углов, которые аналогичны рис. 1, *б*. Школьники «попадают в плен» к наглядности.

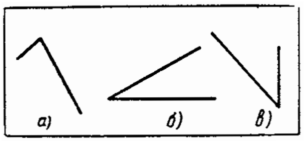


Рис. 1

Бывают случаи, когда шестиклассники считают смежными углы на рис. 2, *б*, но не относят к смежным углы на рис. 2, *а, в*.

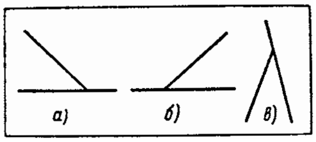


Рис. 2

«Какой из углов больше на рис. 3, *а, б*: угол 1 или угол 2?» На этот вопрос ученики VI класса часто дают ошибочный ответ: «Угол 1

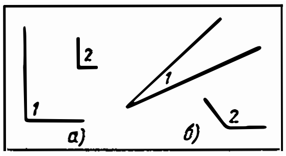


Рис. 3

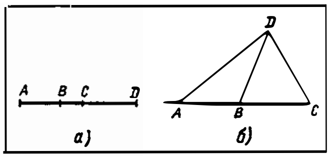


Рис. 4

больше угла 2». Значит, у таких ребят не сформированы понятия о стороне угла, о величине угла и учащиеся пользуются житейскими представлениями, которые вступают в противоречие с геометрическими знаниями.

Эффективность формирования у учащихся понятий, которые можно представить наглядно, в значительной степени зависит от того, в каком виде произошло первое знакомство с ним, т. е. каким оказался **первый** зрительный образ, ставший затем носителем данного понятия (сила первого впечатления). Поэтому в начале изучения понятия надо показывать как можно больше чертежей, в которых варьируются несущественные признаки понятия.

Конечно, на построение различных вариантов одного и того же чертежа уходит много времени. Рекомендуем поступить следующим образом. Из куска линолеума вырезать круг и закрепить его на классной доске так, чтобы он мог вращаться вокруг своего центра. К этому кругу приделать небольшую ручку, с помощью которой можно его поворачивать. Всякий раз, когда уже построенный чертеж учитель захочет показать в другом положении, ему останется лишь повернуть круг, на котором чертеж изображен. Это приспособление полезно еще и тем, что позволяет внедрять в сознание учащихся ту важную мысль, что при движении сохраняются основные свойства фигур.

Ученики обычно привыкают соотносить какую-либо фигуру **с одним** понятием, не умея переосмыслить фигуру в плане другого понятия. Для развития мышления учащихся нужно потратить много усилий на формирование у них умения вычленять из элементов новые фигуры, не упомянутые в тексте условия задачи. В. И. Зыкова отмечает: «Чтобы устранить трудности при выполнении операции переосмысливания, следует обращать внимание учащихся на случай соответствия фигур двум и более понятиям» [1, с. 89].

Для формирования операции переосмысливания фигур можно использовать задания такого рода:

1. Сколько отрезков изображено на рис. 4, *а*? Сколько углов на рис. 4, *б*?

2. Элементом каких фигур является отрезок *AB* на рис. 5 и 6?

3. Назовите все треугольники и все четырехугольники, изображенные на рис. 7.

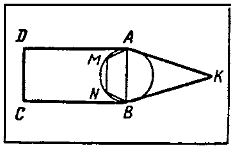


Рис. 5

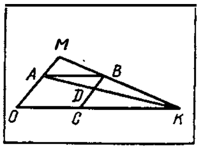


Рис. 6

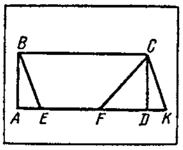


Рис. 7

Чертежи и рисунки — эффективное средство формирования у учащихся умения подмечать закономерности на основе наблюдений, вычислений, преобразований, сопоставлений. Обращаясь к учителям математики, Д. Пойа писал: «Результат творческой работы математика — доказательное рассуждение, доказательство, но доказательство открывают с помощью правдоподобных рассуждений, с помощью догадки... Преподаватель должен показать, что догадки в области математики могут быть разумными, серьезными, ответственными... Давайте учить догадываться!» [2, с. 389].

Приведем примеры заданий-рисунков, нацеленных на обучение умению подмечать закономерности.

4. На рис. 8 указаны восемь вариантов комбинирования одного большого и двух маленьких кругов. Вместо девятого варианта поставлен знак вопроса. Рассмотрите фигуры на рис. 9, *а—е* и укажите, какую из них можно было бы изобразить на рис. 8 вместо знака вопроса, не нарушая закономерности комбинирования кругов.

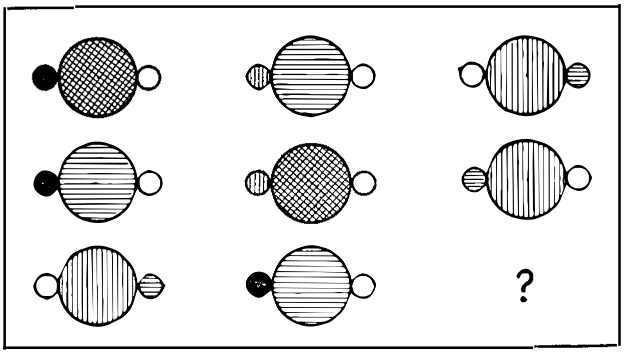
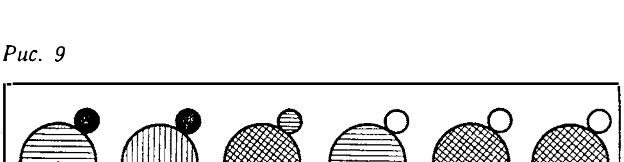


Рис. 8

Рис. 9



Учащиеся должны заметить, что большие круги, заштрихованные в клетку, располагаются на рис. 8 по диагонали. Значит, на месте знака вопроса должен быть большой круг, заштрихованный в клетку. Количество черных маленьких кружочков уменьшается от столбца к столбцу: сначала их два, потом один, а в третьем столбце, стало быть, они не должны появиться. Наоборот, количество кружков, заштрихованных в линейку, возрастает: в первом столбце такой кружочек один, во втором — их два, тогда в третьем их должно быть три. Наконец, количество светлых кружочков в первых двух столбцах одно и то же — три. Следовательно, и в третьем столбце должно быть всего три светлых кружочка. Таким образом, вместо знака вопроса на рис. 8 могла бы стоять фигура, изображенная на рис. 9, *д*.

5. Укажите лишние треугольники на рис. 10.

На рис. 10 четыре тупоугольных треугольника и только два нетупоугольных (*в, д*). Следовательно, треугольники *в, д* можно считать лишними. Конечно, в данном случае ответ может быть и другим. Например, на рис. 10 только один треугольник *в* равносторонний. Значит, он и лишний.

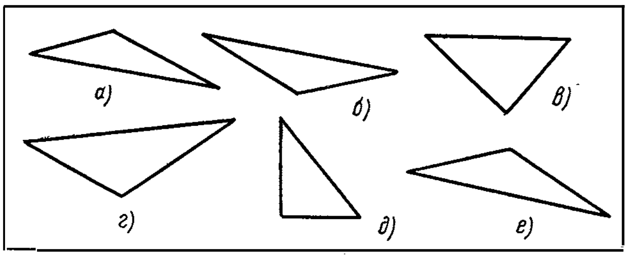


Рис. 10

6. На рис. 11, *а—и* девять фигур. Составьте из них группы, объединенные общими признаками.

В данном случае могут быть самые различные основания для распределения фигур по группам. Можно, например, объединить в первую группу фигуры, состоящие из четырехугольников (*г, д, е, з*). Ко второй группе можно отнести фигуры, составленные из окружностей (*б, в*). К третьей — фигуры из треугольников (*а, и*). К четвертой — те фигуры, элементами которых являются трапеции (*ж*). Можно группировать фигуры в зависимости от штриховки: заштрихованные полностью (*е, и*) — первая группа, заштрихованные частично (*а, б, д*) — вторая группа, незаштрихованные (*в, г, ж, з*) — третья и т. д.

До сих пор речь шла об умении подмечать закономерности безотносительно к математиче-

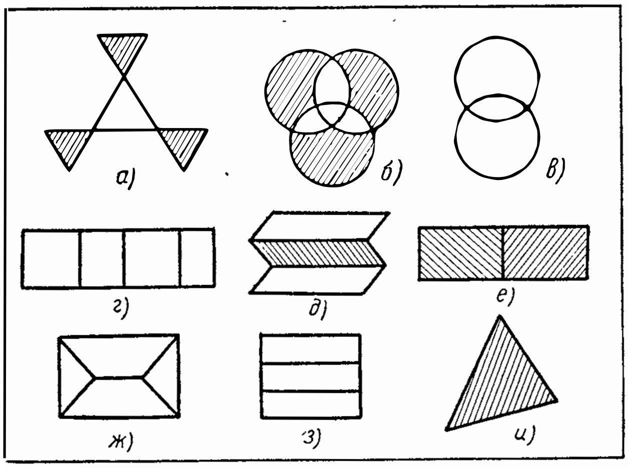


Рис. 11

ским сведениям. Покажем теперь, как чертеж позволяет наглядно представить учащимся важную математическую идею или подвести их к осознанию неочевидного факта. В самом деле, приведенное ниже задание 7 является пропедевтикой изучения понятия о движении. Следующие задания, 8 и 9 подготавливают учащихся к самостоятельному «открытию» формул для вычисления площади треугольника и площади трапеции.

7. На рис. 12 показано, как фигура перемещается по плоскости. Она последовательно занимает положения *а* — *г*. Не вращая чертежа, отметьте положение крестика в случаях *б* — *г*.

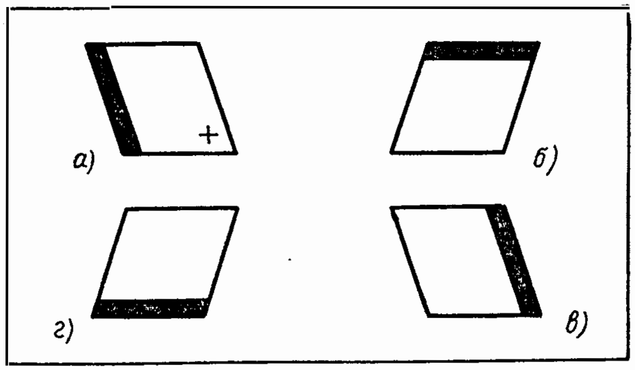
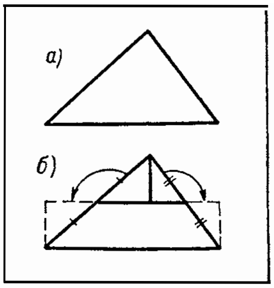


Рис. 12

8. Разрежьте треугольник на рис. 13, *а* так, чтобы из получившихся частей можно было сложить прямоугольник. [Ответ показан на рис. 13, *б*.]

9. Трапецию на рис. 14, *а* разрежьте на две части так, чтобы из них можно было сложить треугольник. [Решение см. на рис. 14, *б*.]



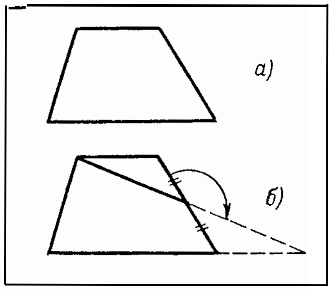


Рис. 13 Рис. 14

Учащимся обычно свойственны переоценка роли чертежа и излишнее доверие ему. В результате при решении задач часто используются не те данные, оперирование которыми ведет к успеху, а совсем другие, не нужные для данного этапа решения. Такой момент мы покажем в задании 10. Анализ его учит школьников отсекать второстепенное и выделять главное.

10. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенузу AB разделили на n частей и на каждой части как на гипотенузе построили маленький прямоугольный треугольник (рис. 15). Известно, что $BC=3$ см, $AC=4$ см, $AB=5$ см. Катеты маленьких треугольников образуют некоторую ломаную. К какому числу стремится длина ломаной при неограниченном увеличении числа точек деления гипотенузы AB?

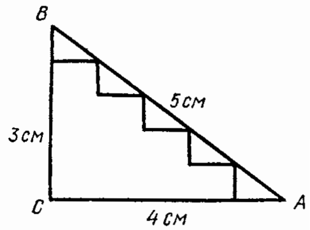


Рис. 15

Чертеж к этой задаче (рис. 15) как бы навязывает сравнение длины ломаной с длиной гипотенузы AB, так как при увеличении n вершины ломаной, не лежащие на катетах и на гипотенузе AB приближаются к AB. Поэтому учащиеся спешат сообщить, что при увеличении n длина ломаной приближается к числу 5, т. е. к длине гипотенузы AB. Но если учитель попросит ребят посмотреть на катеты и мысленно провести через вершины ломаной прямые, параллельные катетам, то учащиеся сами увидят, что при любом числе точек деления сумма длин маленьких вертикальных катетов постоянна и равна 3, а сумма длин маленьких горизонтальных катетов равна 4. Значит, длина получаемой ломаной постоянна и равна 7 см. Для решения задачи сведения о длинах катетов оказались нужными, а о длине гипотенузы —

посторонними.

При обучении решению геометрических задач очень важно следить за тем, чтобы формулировка задачи помогала учащимся сделать чертеж. В школьных учебниках текст, с помощью которого сформулирована задача или теорема, не всегда написан доступным, понятным языком. Как показывает практика, ученикам труднее всего даются такие тексты, в которых краткость достигается нанизыванием придаточных предложений или причастных оборотов.

Мы повторили эксперимент, описанный В. И. Зыковой [1]. Учащимся VII класса предложили решить задачу: «Определите острый угол, если перпендикуляр, восставленный из его вершины к его биссектрисе, образует с его сторонами два угла, из которых тупой угол вдвое больше острого угла». Чертеж к этой задаче смогли сделать лишь 11,2 % школьников. Во второй части эксперимента задача была сформулирована иначе: «Даны острый угол и его биссектриса. Из вершины угла к биссектрисе восставлен перпендикуляр. Перпендикуляр образует со сторонами острого угла два угла, из которых один тупой, а второй — острый. Тупой угол вдвое больше острого. Определите данный угол». По этому тексту чертеж построили 88 % учащихся.

Лучшие результаты во втором случае были получены вследствие того, что условие задачи формулировалось короткими фразами, основные мысли выражались простыми предложениями, данные приводились в виде прямых указаний с соблюдением такой последовательности, которая, по сути, отражала этапность построения чертежа.

Особое место в развитии мышления занимает обучение сравнению, в частности сравнению факта, выраженного словесно, с его интерпретацией на чертеже. Чертеж может служить опровержением какого-то общего высказывания. Учась опровергать неверные высказывания, школьники постепенно привыкают к доказательствам. Приведем три задания, которые фактически нацеливают учащихся на поиск контрпримеров.

11. Верно ли утверждение: «Любой четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, является ромбом»?

12. Верно ли утверждение: «Любой четырехугольник, у которого два противоположных угла прямые, является прямоугольником»?

13. Изобразите на чертеже случай, для которого неверно высказывание: «Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют ни одной общей точки». [Пропущено указание на то, что речь идет о двух прямых.]

Чертежи-контрпримеры, требующиеся в заданиях 11—13, указаны на рис. 16, *а—в* соответственно.

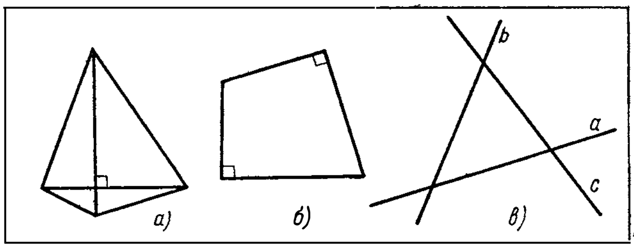
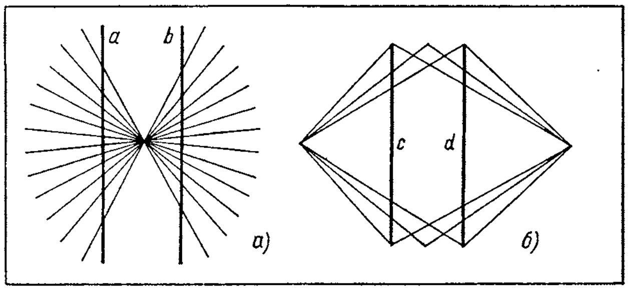


Рис. 16

В пропедевтическом курсе геометрии важно воспитывать у школьников понимание необходимости того, чтобы изучаемые факты доказывались. Целесообразно показывать школьникам, что у людей нет иного пути убедиться в истинности суждения, как только доказать его логическим путем. «Самые тщательные измерения,— может сказать учитель,— все-таки оставляют повод для сомнений, поскольку в них неизбежны бо́льшие или меньшие ошибки. Доверяться очевидности тоже нельзя, так как широко известно, что зрение человека дает неточную, а иногда и совершенно ошибочную информацию». Эти слова можно подтвердить хорошо известными в методической литературе примерами зрительных иллюзий. Так, на рис. 17, *а* лучи, пересекающие параллельные прямые a и b, искажают их восприятие. Они кажутся кривыми линиями, выпуклыми во внешнюю сторону. На рис. 17, *б* параллельные прямые c и d кажутся вогнутыми линиями. На рис. 18, *а* отрезок CD кажется длиннее отрезка AB, а на самом деле они равны. На рис. 18, *б* изображен квадрат $ABCD$, хотя создается впечатление, что мы видим трапецию, у которой основание AD больше основания BC.

Итак, разносторонняя работа с чертежом не только способствует общему умственному развитию школьников, но и подталкивает их логи-

Рис. 17



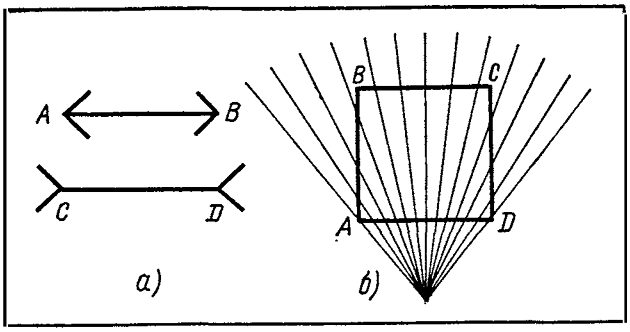


Рис. 18

ческое развитие, обеспечивая менее болезненный переход от опытно-индуктивного преподавания пропедевтического курса геометрии к дедуктивности основного курса геометрии.

Литература

1. *Зыкова В. И.* Очерки психологии усвоения начальных геометрических знаний. М.: Учпедгиз, 1955.
2. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
3. *Выготский Л. С.* Мышление и речь: Психологические исследования. М.; Л.: Соцэкгиз, 1934.

Методика повторения приемов и методов решения геометрических задач

Б. Ф. Харитонов (г. Череповец)

Повторение — важное звено учебного процесса, во многом определяющее его результативность. Одним из путей повышения эффективности процесса повторения является использование задач, систематизированных определенным образом. Так как в большинстве своем геометрические задачи менее алгоритмичны, чем алгебраические, то особое значение приобретает обучение учащихся общим приемам решения задач. Поэтому повторению подлежат не только определения и теоремы, но и общие приемы решения задач, логические конструкции, геометрические конфигурации.

Известно, что повторение протекает успешнее, если оно проводится на вариантном материале с постоянным нарастанием сложности заданий. Благодаря вариативности заданий повторяемый материал рассматривается с разных сторон, выявляются дополнительные связи его с другими разделами курса, что способствует более полной и глубокой систематизации знаний учащихся. Постепенное нарастание сложности заданий способствует формированию такого важного качества, как перенос навыков и умений на более высокий уровень, приучает применять полученные знания в новых для ученика условиях.

Несколько слов скажем о задачах, недостаточно представленных, на наш взгляд, в действующих учебниках, но обладающих большой дидактической ценностью. Речь идет о задачах, в которых требуется найти свойства и отношения, реализуемые на некоторой конфигурации. На удачно подобранной конфигурации можно повторить многие вопросы курса геометрии. Но главное все же заключается в другом: на таких примерах учащиеся обучаются планомерному, комплексному анализу чертежа, у них формируется и развивается «геометрическое вйдение», оттачивается интуиция.

Рассмотрим пример: «В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Точки A_1, B_1, C_1 последовательно соединены (рис. 1). Найдите свойства и отношения, которые выполняются на данной конфигурации».

Эта конфигурация дает богатый материал для повторения вопросов «Углы в треугольнике», «Подобие», «Площади подобных фигур». Добавив описанную окружность, получаем вписанные углы и т. д.

Работая с конфигурацией, учащиеся могут открыть «свои» теоремы, например: «Высоты треугольника ABC содержат биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$».

Мы используем следующую методику работы с такими задачами. Учащимся на дом предлагается задание — найти свойства и отношения, реализуемые на данной конфигурации, а затем, используя найденные свойства, составить свои задачи. Эти задачи могут быть либо обсуждены на очередном уроке со всем классом, либо предложены для самостоятельного решения в классе. Происходит своего рода математическое соревнование — кто больше придумает «своих» задач и больше решит «чужих».

Приведем пример двух блоков задач, которые могут быть использованы при повторении темы «Площади фигур» в IX классе. В основе решения задач блока лежит общая идея, которая развивается при переходе от одной задачи к другой. Условно в блоке 1 можно выделить две

Рис. 1

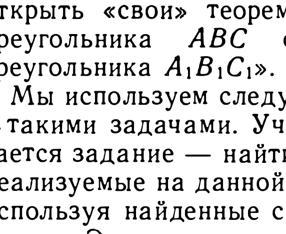
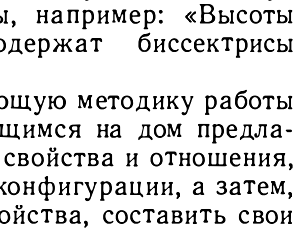


Рис. 2



части. В первой рассматриваются задачи подготовительного характера, создающие основу для дальнейшей самостоятельной работы учащихся с задачами блока. Для разных типологических групп учащихся число подготовительных задач может быть различным. В ходе работы с подготовительными задачами учитель организует обсуждение идеи решения, рассматриваются предельные случаи. Оставшиеся задачи предлагаются для самостоятельного решения в классе и дома.

Блок 1

Задача 1. В треугольнике ABC проведены три средние линии A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1.

1.1. Сколько получилось при этом параллелограммов?

1.2. Сравните площади полученных параллелограммов и выразите их площадь через площадь данного треугольника ABC (рис. 2).

Задача 2. Можно ли отсечь от параллелограмма треугольник, площадь которого равна половине площади параллелограмма?

2.1. Одним разрезом? Если да, то приведите пример.

2.2. Двумя разрезами (ломаной, состоящей из двух звеньев)? Если да, то приведите пример.

Решения приведены на рис. 3, *а* и рис. 3, *б*.

Задача 2 является основной для блока, поэтому следует тщательно проработать ее. В частности, установить связь между решениями задач 2.1 и 2.2, обсудить вопрос количества решений, привести дополнительные рисунки (рис. 3, с, 3, *д*).

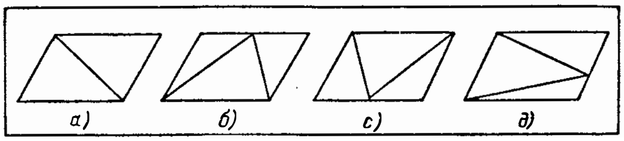


Рис 3

Остальные задачи могут быть предложены для самостоятельного решения с последующим обсуждением результатов.

Задача 3. Два параллелограмма расположены так, как показано на рис. 4. Сравните площади данных параллелограммов.

От ученика требуется узнать конфигурации из задачи 2 в новой для себя ситуации, т. е. выполнить перенос умений.

Задача 4. Два параллелограмма расположены так, как показано на рис. 5. Сравните площади этих параллелограммов.

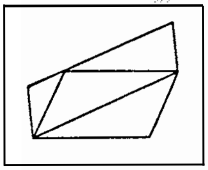


Рис. 4

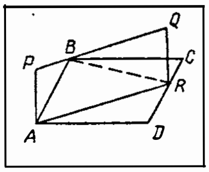


Рис. 5

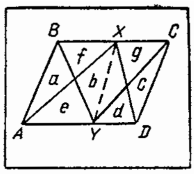


Рис. 6

Решение задачи требует провести анализ через синтез и выделить конфигурации задачи 2. Эти конфигурации появляются в результате дополнительного построения — достаточно провести отрезок BR. Сложность задачи возрастает за счет усложнения геометрической конструкции, рассмотренной в задаче.

Задача 5. Параллелограмм при помощи четырех отрезков разбит на несколько частей, площади которых обозначены малыми латинскими буквами a, b, c, d, e, f, g (рис. 6). Проверьте справедливость следующих равенств: 1) $a+c=b$; 2) $f+g=e+d$.

Указание. 1) Так как $S(ABX)+S(XCD)=$ $=S(BYC)$, то $a+f+g+c=$ $=f+g+b$.

Откуда следует: $a+c=b$.

2) Так как $S(AXD)=S(BYC)$, то $e+b+d=f+b+g$.

Откуда следует: $e+d=f+g$.

Задача. 6. Параллелограмм при помощи четырех отрезков разбит на несколько частей, площади которых обозначены малыми латинскими буквами a, b, c, d, e, f, g, h (рис. 7). Изучите конфигурацию и найдите отношения между площадями частей параллелограмма. Составьте задачи, используя найденные соотношения.

«Неопределенность» вопроса задачи не должна смущать. Решением является любое соотношение между площадями частей фигуры, справедливость которого ученик может доказать (конечно же, интерес представляют нетривиальные отношения).

Укажем некоторые соотношения, которые могут служить основой для составления задач.

Так как $S(ABX)=S(BCY)$, то $a+b+e=$ $=c+b+g$. Отсюда следует равенство: $a+e=$ $=c+f$.

Так как $S(ABX)=S(ABY)+S(YCD)$, то $a+b+e=a+h+f+e+d$. Получаем очередное соотношение: $b=h+f+d$.

Задача, составленная на основе первого равенства, могла бы быть сформулирована следующим образом: «В параллелограмме $ABCD$ на сторонах CD и AD взяты точки, соответственно X и Y. Точка X соединена с точками A и B, Y — с точками B и C (см. рис. 8). Докажите, что сумма площадей треугольников

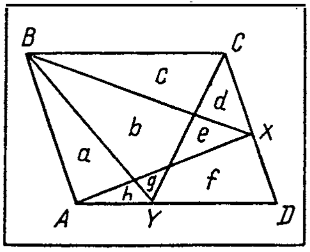


Рис. 7

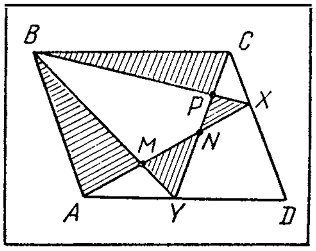


Рис. 8

ABM и PNX равна сумме площадей треугольников BPC и MNY».

Блок 2

Второй блок задач может быть использован для повторения метода «выделения вспомогательной фигуры». В задачах блока используется конфигурация, которая выражает известный геометрический факт — если в четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, то треугольники ABO и DCO (O — точка пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника) равновелики, и наоборот (рис. 9).

В основе решения последующих задач лежит названная конфигурация, поэтому приведем только чертежи и указания к решению задач.

З а д а ч а 1. Дан четырехугольник $ABCD$. На луче AD найдите точку X, такую, что площадь четырехугольника $ABCD$ была бы равна площади треугольника ABX.

У к а з а н и е. Рис. 10. Так как $ABMD$ — общая часть треугольника ABX и четырехугольника $ABCD$, то для равновеликости последних достаточно потребовать равновеликость треугольников BMC и DMX. Отсюда следует параллельность прямых BD и CX.

З а д а ч а 2. Прямая, параллельная диагонали AC четырехугольника $ABCD$ и проходящая через середину его диагонали BD, пересекает сторону AD в точке E. Докажите, что прямая CE делит площадь четырехугольника $ABCD$ пополам.

У к а з а н и е. Рис. 11. Ломаная AFC делит площадь четырехугольника $ABCD$ пополам. CE — диагональ трапеции $ACFE$ ($AC \parallel EF$).

Рис. 9

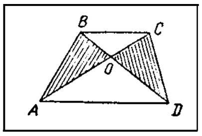


Рис. 10

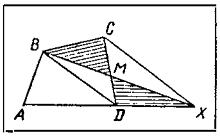
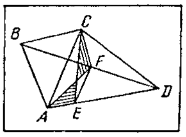


Рис. 11



З а д а ч а 3. Дана фигура, ограниченная дугой AC окружности и ломаной ABC, так что дуга и ломаная лежат по разные стороны от прямой AC. Через середину дуги AC провести прямую, делящую площадь фигуры пополам.

У к а з а н и е. Рис. 12. Разделим данную фигуру на две равновеликие ломаной XOB, которая поможет найти искомую прямую XY (диагональ трапеции $OYBX$, в которой $OY \parallel XB$).

З а д а ч а 4. Через середину каждой диагонали четырехугольника проведена прямая, параллельная другой диагонали; точка пересечения этих прямых соединена с серединами сторон четырехугольника. Докажите, что четырехугольник разбивается таким образом на четыре равновеликие части.

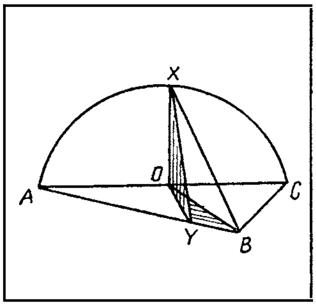


Рис. 12

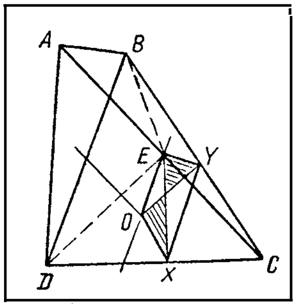


Рис 13

У к а з а н и е. На рис. 13 изображен один из таких четырехугольников — четырехугольник $XOYC$, площадь которого равна 1/4 площади данного четырехугольника $ABCD$. Ломаная BED разбивает четырехугольник $ABCD$ на два равновеликих четырехугольника $ABED$ и $DEBC$. Ломаная XEY отсекает от четырехугольника $DEBC$ четырехугольник $XEYC$, площадь которого равна 1/2 площади четырехугольника $DEBC$, или 1/4 площади четырехугольника $ABCD$. Но четырехугольник $XEYC$ равновелик четырехугольнику $XOYC$ ($EOXY$ — трапеция, OY и EX — ее диагонали).

В дидактическом плане важно, чтобы различные блоки были связаны между собой. Таким связующим звеном двух приведенных блоков является задача 5 (вопрос 1) из первого блока, которая может быть использована во втором блоке. Действительно, для ее решения в этом случае достаточно провести прямую XY, которая разбивает параллелограмм на две трапеции (рис. 6).

Некоторые формы работы по привитию интереса к математике

Л. Я. Борода (г. Обь Новосибирской обл.),
А. М. Борисова (с. Малый Бащелак Алтайского края)

Интерес — один из инструментов, побуждающий учащихся к более глубокому познанию предмета, развивающий их способности. Для воспитания и развития интереса к предмету учитель располагает в основном двумя возможностями: работой на уроке и внеклассной работой. Главной из них является, конечно же, работа на уроке. На уроке присутствуют все ученики класса, а кружок, факультатив, внеклассное мероприятие, как правило, посещают лишь немногие. Остановимся на некоторых формах работы, которые помогают систематически воспитывать интерес учащихся к математике.

Первые и последние уроки в каждой четверти мы отводим рассказу о значении математики, о математике вокруг нас, о замечательных людях, посвятивших свою жизнь математике, о связи с другими предметами, о НОТ школьника и т. д. или же защите рефератов учащихся по этим вопросам.

Часто уроки в V—VIII классах начинаем с викторины, которая выполняет роль устной работы или теоретической разминки и рассчитана обычно на 3—5—7 мин, в зависимости от целей и возможностей урока. Викторина состоит из трех групп вопросов, соответствующих трем уровням знаний учащихся. «Стоимость» правильного ответа на эти вопросы также разная: за правильный ответ на вопрос первого уровня сложности присуждается 1 балл, второго уровня — 2 балла, третьего — 3—5 баллов, в зависимости от сложности вопроса или задачи и оригинальности и красоты решения.

В целях экономии времени на уроке условия примеров и вопросы учитель представляет учащимся на карточках, а условие задачи читает медленно дважды. Ответы учащиеся крупно записывают на листочках и по команде учителя показывают. Подсчитывают правильные ответы и на доске записывают общее количество баллов каждому ряду. Чтобы викторина не превратилась в самоцель, чтобы она служила главной задаче — обучению учащихся на уроке, учитель вызывает учеников к доске для обоснования своих ответов. Интерес к работе возрастает, если разрыв в баллах между рядами небольшой, а потому для обоснования ответа лучше приглашать к доске ученика с того ряда, где баллов заработано меньше, так как за эти ответы также начисляются баллы.

Общий итог викторины иногда подводится сразу, иногда во время последующей самостоятельной работы, иногда в конце урока, в последнем случае очки начисляются во время всего урока за все ответы с места. Викторина помогает учителю увидеть сразу характер ошибок учеников.

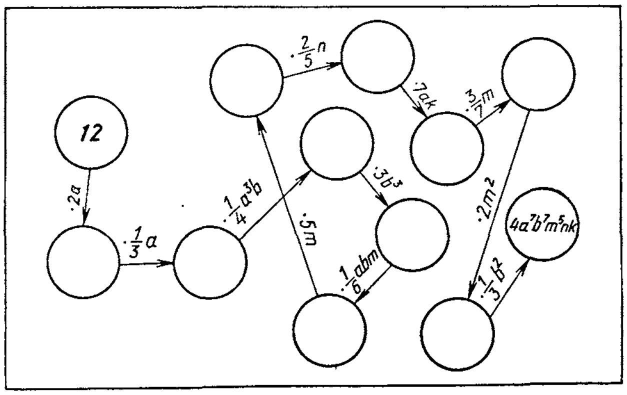
В V—VI классах внимание учащихся нестойкое. Возникает необходимость на уроке переключаться с одного вида деятельности на другой. В этом случае выручает математическая эстафета. Лучший результат дают эстафеты, проводимые в конце урока. Рассмотрим некоторые их виды.

1. Три картинки разрезают на 12 равных прямоугольников. На обратной стороне каждого прямоугольника написано задание. Прямоугольники складываются в три коробочки, по коробочке для каждого ряда. Коробочка передается по ряду, и каждый ученик берет себе карточку и шарик из пластилина для ее прикрепления к классной доске. Иногда на карточках указывается фамилия ученика, которому она предназначена. Дается 3—5 мин для устного решения. На доске против каждого ряда прикреплены по листу бумаги, разделенному на 16 таких же частей, в которых написаны предполагаемые ответы. По команде: «На старт! Внимание! Марш!» — ученики, сидящие на первых партах слева, направляются к соответствующему листу бумаги на доске и прикрепляют свою карточку к нужной части так, чтобы ответы совпадали и чтобы картинка была с лицевой части. Возвращаясь на место, они передают право соседу прикрепить свой кусочек картинки на общую часть и т. д.

Заданий для каждого ряда 12, а ответов на доске — 16. Ребята должны найти среди указанных правильные ответы. В результате правильного решения заданий на доске появляется картинка. Ряд, выполнивший работу первым, дополнительно получает 2 очка, а тот ряд, который закончит работу вторым,— 1 очко. После проведения эстафеты разбираются задания, в которых допущены ошибки.

Этот вид эстафеты целесообразно проводить только в V классе, так как ребята постарше, зная, в чем ее суть, стараются во что бы то ни стало собрать картинку, вне зависимости от полученных ответов, т. е. получение картинки в этом случае становится самоцелью, а значит, теряется обучающий смысл игры.

2. При изучении темы «Умножение одночленов» в VII классе также можно провести эстафету. На каждый ряд раздают по одинаковой карточке (см. рис.), играющей роль эстафетной палочки, на которой изображены множимое, последующие множители и окончательный результат — произведение. Учащимся дается задание «закрыть форточки», т. е. заполнить



пустые места промежуточными произведениями, которые записывают только простым карандашом и после того, как тщательно проверено решение предыдущих примеров. Эта эстафета развивает также умение контролировать себя.

3. В V, VI и VII классах проводим еще и такую эстафету. После того как объяснен новый материал и дан образец решения задач, класс отправляется в воображаемый полет в межзвездном пространстве. Объявляется, например, маршрут: Земля—Фотон—Гриада— Мада—Нептун—Земля. Количество пунктов маршрута равно количеству заданий. Первый решивший первое задание направляется к учителю-контролеру № 1. Если задание выполнено верно, ученик получает табличку с названием первого пункта — Фотон, становится контролером № 2, получает право решить следующее задание и право пропускать других пассажиров на эту планету. Следующий решивший это задание может направиться либо к контролеру № 1, либо к контролеру № 2. В случае удачи он становится контролером № 3 и тоже получает соответствующую табличку и т. д. В конце урока подводим итоги. Если у ученика на парте стоят все таблички (они выполнены в цвете, у каждой планеты — свой цвет) маршрута, он получает оценку «5», если на один меньше, то «4» и т. д. Эстафета помогает провести самостоятельную работу быстрее, чем обычно, организует внимание учащихся, воспитывает товарищество, а также дает возможность учителю увидеть, как понят изученный материал, чтобы правильно построить свою работу на следующем уроке.

4. Опрос с помощью эстафеты описан в № 4 журнала «Математика в школе» за 1988 г. (с. 19).

Воспитанию интереса к математике способствует знакомство учащихся с практическим применением изученного материала.

На классных часах в V классе родители знакомят ребят со своей работой, рассказывая при этом, где и как у них применяется математика. А в VI классе каждый ученик получает задание совершить экскурсию на производство к своим родителям и затем написать реферат «Математика в профессии моих родителей», в котором должна содержаться задача с производственным содержанием, составленная учеником, и ее решение. Защита рефератов проводится торжественно на совместном собрании с папами (к 23 февраля) и мамами (к 8 Марта). Вначале слово предоставляется ученику, его рассказ дополняет и оценивает папа или мама. Окончательную оценку реферата дает комиссия, состоящая из членов родительского комитета класса, совета отряда, учителя. Комиссия учитывает сложность составленной задачи, красоту ее решения. Во время экскурсий ребята стараются детально разобраться в сути дела, тщательно собирают данные для составления задачи, причем нередко бывают на производстве не один раз.

Такая работа способствует развитию творческих способностей учащихся, при этом у них появляется или укрепляется чувство уважения к своим родителям, затрагиваются здесь и вопросы профориентации.

В VII и VIII классах ребята пишут либо рефераты на темы «Математика вокруг нас», «Математика за страницами школьного учебника», либо сочиняют сказки, рассказы на математические темы.

Начиная с VIII класса за один урок до контрольной работы мы обычно проводим математический бой. О нем объявляем на предыдущем уроке, чтобы учащиеся в качестве домашнего задания заранее подготовили интересные и каверзные вопросы для команды противника и ответы на них. Класс разбивается на две команды, придумывается название команд, выбираются капитаны.

Кратко перечислим основные этапы математического боя: конкурс капитанов, разминка команд, решение примеров и задач, подведение итогов.

На каждом этапе осуществляется не только соревнование команд, но и помощь тем, кто не ответил на вопрос, не решил задачу, т. е. осуществляется сотрудничество, работают все.

Интерес к математике усиливается, если ребята видят ее связь с другими предметами. В этом плане огромное значение имеют уроки, которые ведут 2—3 учителя по разным предметам.

В развитии познавательного интереса к предмету особое место занимают общественные смотры знаний. Так как с этой формой работы читатели знакомы по публикациям в журнале «Математика в школе», мы остановимся только на одном виде такого смотра.

Известно, что изучение геометрии у учащихся

VII класса вызывает большие трудности. Чтобы развить интерес к этому новому для них предмету, возбудить любознательность, творческие начала, мы готовим и проводим с семиклассниками общественный смотр знаний (во втором полугодии) в виде полета на планету «Геомомудрия».

Вопросы для смотра по пройденному материалу составляются таким образом, чтобы среди них были и задания из обязательных результатов обучения, и более трудные задания, и задачи на сообразительность. За две недели до смотра-полета вывешиваются вопросы на стенде. А ответы на них мы готовим на занятиях кружка с восьмиклассниками. Учащиеся VIII класса — проверяющие, они же корреспонденты различных планет, они же готовят викторины и другие задания для полета. С ребятами же VII класса обсуждаем форму проведения «полета», распределяем задания, составляем сценарий. Решаем, что проведем пресс-конференцию ученых-геометров. Распределяем роли: часть учеников будут членами экипажа «космического корабля», другая часть — пассажирами (учеными-геометрами).

Члены экипажа будущего «космического корабля» совершают экскурсию в аэропорт, изучают, какой диалог с Землей ведут члены экипажа во время взлета, полета, посадки, как работает экипаж корабля, как распределены у них обязанности. Такую экскурсию обычно проводит папа-летчик, являющийся работником авиапредприятия, т. е. попутно решаются вопросы профориентации.

Наконец всё готово, в школе появляется примерно такое сообщение: «13 февраля 1987 г. в 15.00 по московскому времени состоится рейс «Земля — Геомомудрия — Земля» на звездолете «Орион 13—2—87—7Б». На планете Геомомудрия состоится пресс-конференция ученых-геометров с корреспондентами космовидения различных планет Солнечной системы. Великие геометры, спешите попасть на единственный и неповторимый рейс!»

«Полет» начался в точно назначенное время. Но по пути следования звездолет оказался в магнитном поле звезды Теоромии, которая притянула звездолет. А инопланетяне с этой звезды (ученики VIII класса) выразили недоверие к пассажирам и решили проверить, действительно ли на борту корабля находятся «великие геометры». Инопланетяне вначале проводят смотр знаний по тем вопросам, которые были даны заранее. Вопросы записаны на магнитофон, а ответы прослушивают инопланетяне, т. е. идет парная работа, о которой уже упоминалось. Затем жюри из инопланетян (учащиеся VIII класса и родители учеников VII класса) подводят итоги, а другие инопланетяне проводят конкурс геометрических загадок. Путь свободен! Продолжается рейс на планету Геомомудрия.

И вот звездолет у цели. Заходят корреспонденты космовидения различных планет. Начинается пресс-конференция. Корреспонденты задают вопросы ученым-геометрам. Их интересует буквально всё: и как возникла наука геометрия на Земле, и какие геометрии существуют, и где применяются геометрические знания и т. д. Семиклассники отвечают на вопросы кратко, но при этом указывают для интересующихся книги, в которых данные вопросы освещены подробно.

При оценке работы каждого семиклассника на описанном смотре-«полете» принимается во внимание его участие во всех этапах работы.

Игра — спутник человеческой жизни от колыбели до глубокой старости. «Игра — путь детей к познанию мира, в котором они живут и который призваны понять»,— писал А. М. Горький. В играх развиваются и укрепляются чувства товарищества, солидарности, честности, правдивости и другие качества, необходимые для коллективной работы и воспитания сознательной дисциплины. Игра является хорошей союзницей не только в воспитании детей, но и в обучении их, поэтому нам, учителям математики, необходимо периодически пользоваться играми или вводить элементы игры и на уроках, и во внеурочное время. Познание же математики через игры прививает к ней любовь, переходящую иногда в дальнейшем в потребность заниматься этой наукой серьезно.

Урок-КВН

Л. Л. Стерлигова (г. Ровеньки)

Велика и многогранна подготовка учителя к уроку «Математический КВН». Нужно долго наблюдать учащихся, проводить разнообразные тестирования, индивидуальные беседы, чтобы верно разбить класс на команды и выявить в них лидеров, которые смогут стать капитанами команд. Нужно также подготовить несколько учащихся для работы в качестве консультантов во время КВН. Отдельные игровые ситуации необходимо отработать на обычных уроках, чтобы ребята сразу понимали, как надо выполнять нестандартные задания. К уроку-КВН следует тщательно подготовить наглядные пособия, дидактический материал, технические средства, кодопозитивы и т. д.

Учитель разбивает класс на команды, а те уже сами выбирают своих капитанов, консультантов и помощников капитанов. Учитель только тактично направляет этот выбор.

Команды готовят цветные карточки, с помощью которых будут оцениваться ответы в устных конкурсах, рисуют эмблемы для капитанов, помощников капитанов и консультантов, подбирают название для своей команды, например: «РИТМ» (решать, искать, творить, мечтать), «XYZ», «Вперед» и т. п. Обсуждение содержания КВН, эмблем капитанов и т. д. проводится на занятиях математического кружка.

Остановимся более подробно на каждом этапе этого необычного урока.

Урок начинается вступительным словом учителя, в котором он напоминает о порядке проведения КВН.

Соревнования начинаются с конкурса *«Разминка»*. Это пятиминутная самостоятельная работа учащихся на листочках. Выигрывают те команды, которые успели все правильно решить и вовремя сдать листочки. Задания для этого конкурса подбираются из «Обязательных результатов обучения», поэтому с ними справляются практически все ребята. Очень украшают конкурс песочные часы. Именно они приносят игровой элемент. К тому же они очень удобны — всем видно, как «истекает» драгоценное время.

Последующий устный счет проходит в виде конкурса *«Блицтурнир»* с заданиями типа: «Что бы это значило?» и «Найди ошибку». Теперь уже хорошо известны (в частности, из работ П. М. Эрдниева) так называемые деформированные задания, когда по неполному условию задачи учащиеся должны сами домыслить его содержание. Именно такие задания объединяются в нашем конкурсе вопросом: «Что бы это значило?» Напоминая о телепередаче «Вокруг смеха», этот вопрос создает атмосферу игры. Ребята придумывают условие по рисунку-схеме, записанному на доске, по каким-то числам или элементам алгебраических выкладок.

Например: на доске написано выражение $(a^2-4c)^2=?-8a^2c+16c^2$. «Что бы это значило?» — спрашивает учитель. Ученик отвечает: «Я думаю, что вместо вопросительного знака надо поставить a^4».

«Найди ошибку» — это название хорошо характеризует другие задания конкурса. За правильный ответ учащемуся вручают цветную карточку. Команда получает 5 баллов, если не только найдет ошибку и верно выполнит задание, но и аргументирует свой ответ, т. е. назовет использованные правила. Из всех видов самостоятельных работ эта — любимейшая. Задолго до урока команды с увлечением разыскивают (или составляют сами) задания потруднее, чтобы на конкурсе предъявить их соперникам.

Следующий конкурс — *«Домашнее задание»*. Тетради с домашним заданием собраны до урока и сложены по стопкам. Помощники капитанов проверяют их во время «Разминки» и «Блицтурнира». Если в команде все задания сделаны верно, то она получает 5 баллов. Но если кто-то ошибся, то из общего числа баллов, заработанных на предыдущих конкурсах, вычитается число очков, равное количеству тетрадей с ошибками.

Самый интересный — *конкурс капитанов*. Под музыку песни о капитанах из телевизионного клуба веселых и находчивых к доске выходят капитаны. Учитель дает им карточки с одинаковыми заданиями. Победителем признается капитан, первым выполнивший задание правильно. За отличное объяснение решения капитану присуждаются дополнительные баллы. Команды не только болеют за своих капитанов, но и помогают им: выполняют то же самое задание в своих тетрадях.

И наконец — *конкурс консультантов*. Он дает возможность консультантам немного побыть на месте учителя, объясняя ребятам решения трудных задач. Каждый консультант получает карточку с заданием, выполняет задание на доске и дает к нему исчерпывающие объяснения. Задача команды соперников — «завалить» консультанта вопросами, разыграв непонимание объясненной задачи. Консультант-победитель может принести своей команде до 10 баллов: 5 — за правильность и скорость решения и еще 5 — за отличное объяснение.

КВН заканчивается подведением итогов и заключительным словом учителя, который поздравляет победителей, утешает проигравших и отмечает те задания, которые ребятам удаются, а также те, над которыми надо еще поработать.

Мы показали этапы урока, обычно проводимого в заключение темы, перед контрольной работой. Но урок-КВН можно провести и при изучении нового материала.

Для этой цели лучше всего подходит *конкурс любознательных*. Обе команды должны изучить один и тот же пункт из учебника и придумать вопросы по нему для команды соперников. Но такой конкурс не следует проводить без предварительной тренировки. Ребята не сразу осваивают этот вид заданий. Сначала лишь 1—2 ученика могут придумать вопрос по математическому тексту. Постепенно это получается всё лучше и лучше. В дальнейшем на наших математических КВН этот конкурс становится одним из любимейших. Ребята уже самостоятельно составляют планы по пунктам учебника, выделяют в каждом пункте главную мысль, подмечают пропуски в доказательствах теорем и пытаются найти недостающие логические шаги.

Изучение нового материала по учебнику продолжается в виде конкурса *«Математиче-*

ский футбол». Первая команда задает вопросы по изучаемому материалу команде соперников. Они должны ответить. За каждый правильный ответ им присуждается одно очко. Но если первая команда сочтет ответ неверным и докажет это, то, значит, она забила соперникам гол (у них вычитается одно очко).

Изучение теории обычно закрепляется упражнениями. Первое упражнение учитель выполняет сам — это пример-образец, по которому он отвечает на вопросы ребят. Потом быстро стирает написанное. Начинается конкурс *«Кто быстрее?».* Победа присуждается той команде, которая раньше других успела воспроизвести пример-образец в своих тетрадях.

Итоги конкурсов обсуждаются всем коллективом класса. В нашем клубе веселых и находчивых нет жюри, вернее, каждый участник игры является одновременно и судьей. Судейские обязанности приучают комментировать и решение задачи, и ответ по теории. Приходится быть внимательными, привлекать в споре логические доводы. Во время обсуждения ответов без споров не обходится. То и дело приходится слышать: «А наша команда решила быстрее. А у Тани была неточность в решении. Консультант соперников нечетко объяснил» и т. д. Так возникает ученическое самоуправление. Ребята гордятся, что таблица итогов заполняется учителем только с учетом их мнений.

Проследим теперь описанные этапы-конкурсы по сценарию обобщающего урока в VIII классе на тему «Действия со степенями с отрицательными показателями».

Сценарий для КВН

Оборудование: кодоскоп с кодограммами, песочные часы, цветные карточки для оценивания в личном первенстве, карточки с заданиями, таблица для выставления баллов по результатам конкурсов.

Урок начинается. Учащиеся рассаживаются за партами так, чтобы члены одной команды сидели в одном ряду: три ряда — три команды КВН. На груди у капитанов, помощников капитанов и консультантов соответствующие эмблемы.

Разминка. Учитель после краткого вступления включает кодоскоп и проецирует на экран задания, в которых требуется выполнить действия:

а) $7^{-1}-5\cdot 2^3$; б) $3^{-7}\cdot 3^{12}$; в) $(y^{-8})^{-2}$;

г) $x^{-5}:x^{-9}$; д) $(b^{-5})^4\cdot b^{11}$; е) $\frac{p^{-7}\cdot p^2}{p^{-10}}$.

Листочки с решениями собирают консультанты (из команды соперников), быстро их просматривают и откладывают в сторону те, где есть ошибки. Количество отложенных листочков — это вычтенные баллы.

Блицтурнир (проводится в то время, пока консультанты трудятся над проверкой работ предыдущего конкурса). На экран проецируется задание, требующее найти ошибку в следующих равенствах:

$$\frac{2^{-3}\cdot 4^{-4}}{8^{-8}}=\frac{2^{-3}\cdot 2^{-7}}{2^{-15}}=\frac{2^{-10}}{2^{-15}}=2^5.$$

Учащиеся отвечают только по желанию. Команде, от которой поступило первое указание на ошибку, присуждается 5 баллов. За более рациональное решение и лучшее объяснение — еще 1—5 баллов. Трое учащихся, первыми выполнившие верно преобразования, получают по красной карточке. В конце урока учитель выставит им оценку «5». Баллы, заработанные всей командой, фиксируются в итоговой таблице.

Домашнее задание. Все тетради, собранные заранее, уже проверены помощниками капитанов и консультантами. Они докладывают классу о результатах, попутно отмечая ошибки. Число баллов, присужденных в этом конкурсе, фиксируется в итоговой таблице.

Конкурс капитанов. Капитаны получают карточки с заданием: «Функция задана формулой $y=1{,}5\,x-8$. Определите, при каких значениях x функция принимает положительные значения (отрицательные значения)? Является ли эта функция возрастающей (убывающей)? Постройте график этой функции».

Пока капитаны готовятся, класс помогает им, т. е. выполняет то же самое задание. Построив график, капитаны устно отвечают на вопросы по карточке. Задают они вопросы и друг другу. Высший балл получает тот капитан, чьи ответы были полнее и правильнее, а вопросы интереснее.

Конкурс консультантов проходит без всякой подготовки. Троим консультантам (по одному от каждой команды) вручается карточка с заданием:

«Упростите выражение $2\frac{7}{8}\cdot x^8y^{-8}\times$ $\times 0{,}8x^{-6}yx^{-2}y^7\cdot\frac{4}{23}$». Консультант выполняет задание, объясняя одновременно свои действия всему классу. Ребята из других команд разыгрывают непонимание объясненного, задают консультантам свои вопросы. (Консультант из другой команды получает карточку тоже с заданием «Упростите», но с другим алгебраическим выражением.)

В этом конкурсе сильные ученики могут участвовать только в роли консультантов. Но если они не выбраны консультантами, то учитель вручает им карточки, на которых изображен рис. 1. Требуется вместо знака вопроса вставить на рис. 1 подходящее выражение (см.: *Гайштут А. Г.* Математика в логических упражнениях. Киев: Радянська школа. 1985. С. 150). Верхняя строка на этом рисунке подсказывает операцию, которую надо произвести над алгебраическими выражениями в нижней строке. Учащиеся обнаружат, что $2 \cdot 10^{-23} : (8 \cdot 10^{20}) = 0{,}25 \cdot 10^{-43} = 2{,}5 \cdot 10^{-44}$. Действуя по аналогии, они получают выражение «$1/a$» как результат деления левого нижнего выражения (рис. 1) на правое нижнее.

Это нестандартное задание исключит сильных учащихся из конкурса консультантов, в который они могли бы внести излишнюю быстроту, не дав высказаться более слабым школьникам. Те ребята, которые верно выполнили задание по рис. 1, получают красные карточки, а заработанные ими баллы поступают в копилку команды. В то же время, если кто-то не выполнил задание по рис. 1, никакие штрафные санкции не применяются.

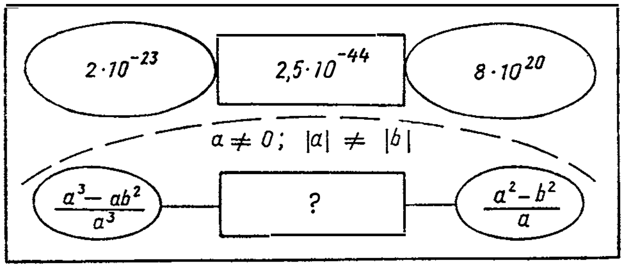


Рис. 1

Математический футбол. Команде № 1 предъявляется рис. 2. Рисунок крупный, чтобы дробь, изображенную на нем, видели все. Команда № 1 должна придумать задание по рис. 2, назвать фамилию ученика из команды № 2 и «отфутболить» ему это задание. Если названный ученик не может ответить, то команда выручает своего незадачливого товарища, отвечая за него. Затем команда № 1 задает другой вопрос по той же карточке и «отфутболивает» его учащемуся из команды № 3 и т. д. Вопросы следуют до тех пор, пока команда № 1 не истощится. Тогда учитель берет другой рисунок и отдает его команде № 2. Теперь она придумывает вопросы для своих соперников. И т. д.

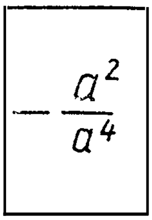


Рис. 2

По рис. 2 вопросы могут быть, например, такими: «Какое правило используется при упрощении этого выражения? Как читается это выражение? Какие значения может принимать это выражение? При каких значениях переменной a оно не существует?»

В это время за крыльями доски готовятся к конкурсу художники. Учащийся от каждой команды строит ломаную по указанным координатам ее вершин. У одного должна получиться елочка, у другого — кораблик, у третьего — домик.

КВН заканчивается подведением итогов и заключительным словом учителя. Ребята, которым во время игры были вручены красные карточки, получают оценку «5».

В заключение подчеркнем, что по своему содержанию описанный урок — это типичный урок в VIII классе. Но ребята этого почти не замечают. Задания, сформулированные с шуточным оттенком, они воспринимают как совершенно оригинальные. Стоит немного пофантазировать, и любое задание можно переформулировать, приспособив для игры. Допустим, учитель проводит математический диктант. Он диктует: «Прямые $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$ пересекаются, если...» Учащиеся должны записать: «$k_1 \neq k_2$». К таким опросам ребята уже привыкли. Спросим их иначе. «Прочитайте мои мысли: «Прямые $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$ пересекаются, если...» Мы тут же увидим, с какой радостью ребята отвечают на этот вопрос. «Читать мысли» учителя гораздо интереснее, чем писать обыкновенный математический диктант.

Урок-КВН превращает в игру и в соревнование занятие по самому обычному школьному материалу. Он вносит живинку в однообразное течение уроков, вызывая большую активность даже слабых учеников.

ПРЕПОДАВАТЕЛЯМ ПРОФТЕХУЧИЛИЩ

О разработке дидактических материалов по математике с профессиональной направленностью

Т. Н. Алешина (Москва)

Основное средство реализации профессиональной направленности на уроках математики — дидактический материал. Под дидактическими материалами с профессиональной направленностью понимаем вопросы, задачи, задания профессионального содержания, взятые отдельно или в сочетании с объектами профессиональной деятельности и их изображениями.

В данной статье предполагается не только показать применение такого типа дидактических материалов, но и познакомить читателей с приемами их разработки. Считаем, что преподавателю полезно владеть методикой разработки таких материалов, ибо хотя и существует целый ряд сборников задач по специальностям, но либо они не доходят до учителя, либо мало задач преподаватель может использовать на уроке, учитывая индивидуальные особенности учащихся и уровень их математической подготовки, либо вообще нет задач по данной профессии или задачи уже устарели.

Надеемся, наш опыт разработки подобных материалов поможет преподавателю. В статье будут представлены задания для училищ строительного профиля. Именно в них автор проводил проверку этих материалов с 1977 по 1984 г.

Содержание дидактических материалов, ориентированных на связь с профессией, определенным образом направляет познавательную деятельность учащихся. Работа с такими дидактическими материалами может способствовать формированию у учащихся умений находить в профессиональной ситуации существенные признаки математического понятия, подводить объект под понятие, использовать понятие в новых условиях. Овладение профессионально значимыми теоремами и аксиомами с помощью разрабатываемых дидактических материалов предполагает умение выделять в формулировке утверждений объекты и отношения между ними, условие и заключение, применять утверждения в профессиональных ситуациях. Кроме того, дидактические материалы такого типа могут быть направлены на развитие пространственного воображения, вычислительных навыков и графических умений учащихся, на расширение их профессионального кругозора, на формирование общетрудовых умений и навыков работы с измерительными приборами, таблицами, справочной литературой и т. д.

При формировании знаний принято выделять три этапа: пропедевтический, непосредственного формирования и применения. На материале изучения естественнонаучных, технических, технологических и производственных объектов осуществляется пропедевтический этап и этап применения знаний. Этап непосредственного формирования математических знаний реализуется в основном на материале математических объектов. При этом на первом и третьем этапах происходит интеграция и дифференциация математических знаний с профессиональными.

Исходя из особенностей логики формирования знаний с помощью рассматриваемых дидактических материалов учитываются индивидуальные особенности учащихся. Доступность материала обеспечивается варьированием содержания, формой его предъявления. Поэтому значительную роль при разработке дидактических материалов с профессиональной направленностью играет постановка учебной задачи.

На этапе пропедевтики учебная задача в дидактическом материале должна направить познавательную деятельность учащихся на повторение опорных знаний и способов действий, на осознание значимости изучаемого материала для профессии. *На этапе формирования* учебная задача направляет внимание учащихся на распознавание профессионально значимого понятия или теоретического утверждения, на связи и отношения между структурными единицами понятия, утверждения. *На этапе применения* она нацелена на обоснование того факта, что в производственных ситуациях существуют объекты с признаками математического понятия и операции, основанные на теоретических утверждениях; на становление связей и отношений данного профессионально значимого определения, теоретического положения с другими математическими знаниями и умениями.

Однако нельзя провести четких границ между этапами пропедевтики, формирования и применения знаний. Они весьма подвижны и проникают друг в друга. Поэтому некоторые из заданий могут быть использованы на нескольких этапах урока в зависимости от сочетания различных условий: целей урока, содержания математического материала, уровня математической подготовки учащихся, видов временной связи между математическим и профессиональным материалом, избранных форм обучения учащихся на уроке.

Поскольку дидактический материал разрабатывается с учетом взаимосвязи математического и профессионального содержания, формулировка учебной задачи должна направлять познавательную деятельность учащихся на перенос либо математических знаний на профессиональные, либо профессиональных знаний на математический материал.

Осуществление переноса становится возможным при нахождении существенных признаков понятия, условия реализации утверждения. Иначе говоря, устанавливается взаимно однозначное соответствие между признаками понятия, данными теоремы и их образами в реальных объектах. Поэтому учебная задача в дидактических материалах, формирующих профессионально значимое понятие или теоретическое утверждение, может изменяться в соответствии с направлением переноса знаний на более или менее далекий, но принципиально сходный материал. В связи с этим в зависимости от продвижения в усвоении учебного материала учебная задача формулируется, постепенно усложняясь, переходя от называния состава исходных данных к их скрытому составу. Этот прием при разработке дидактических материалов позволяет постепенно перейти от переноса математических знаний на профессиональную основу к обратному переносу, выражающемуся в «математизации» производственных ситуаций. Особенно это прослеживается при переходе от этапа формирования понятий и теоретических утверждений к их применению.

Возможность переноса знаний, естественно, связана с учетом характера временных связей. Например, осуществление переноса математических знаний на профессиональные означает, что соответствующие профессиональные знания уже сформированы или формируются одновременно с профессионально значимыми математическими знаниями. Иначе говоря, перенос имеет место там, где есть предшествующие и сопутствующие связи математических знаний с профессиональными. Учет вида временной связи в формулировке учебной задачи осуществляется за счет включения в нее текста, обращающего внимание учащихся на отношение изучаемого математического материала к уже известным сведениям из профессиональной подготовки.

Отмеченное условие важно иметь в виду, планируя дидактический материал для индивидуальной работы учащихся. Здесь учащийся остается наедине с дидактическим материалом, и поэтому преподаватель должен предусмотреть возможные с его стороны вопросы. Это обстоятельство заведомо учитывается при ссылке каким-то образом на характер временных связей. Одним из таких способов может служить указание в тексте дидактического материала на знакомую производственную операцию, на работу с известным профессиональным инструментом или справочником, к которому учащиеся обращались на предметах профтехцикла.

Так, для будущего машиниста кранов самостоятельное выполнение следующего задания становится посильным при напоминании о том, что недостающие данные можно найти по справочнику: объем бетона в трапецеидальной части фундамента определяют по формуле объема усеченной пирамиды: $V=\frac{1}{3}h(F_1+F_2+\sqrt{F_1\cdot F_2})$, где h — высота, F_1 и F_2 — площади нижнего и верхнего оснований пирамиды. Определите по справочнику строителя, какой грузоподъемности кран следует выбрать для установки фундамента, если плотность бетона 2300 кг/м^3 (рис. 1).

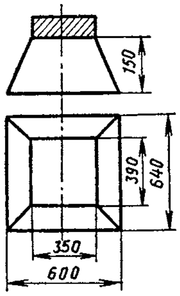


Рис. 1

Ввиду того что математическое содержание тесно связано с профессиональным, при работе с дидактическими материалами часто приходится проводить сравнение, делать теоретическое обоснование, находить подтверждение теоретическим утверждениям и понятиям в конкретной, производственной ситуации и т. д. Соответствующей должна быть и постановка учебной задачи. Типичными в ее формулировке являются требования: «сравните», «обоснуйте», «объясните», «докажите», «найдите», «определите», «приведите примеры» и т. д., т. е. слова-указания.

Психологами показано, что использование средств предметной и изобразительной наглядности при решении практических задач создает благоприятные условия для усвоения новых знаний. В связи с этим при разработке дидактических материалов с профессиональной направленностью необходимо учитывать, что в число компонентов содержания таких материалов часто входит кроме текстовой части предметная или изобразительная наглядность. Это выражается в дополнении текста учебной задачи графиком, таблицей, плакатом, диапозитивом, профессиональным инструментом, приборами, моделями производственных объектов и т. д.

Рассмотрим несколько примеров дидактических материалов с профессиональной направленностью, разработанных согласно установленным требованиям.

Призму отличают некоторые существенные свойства, выделяющие ее из других видов геометрических тел, а именно: это многогранник, у которого две грани — одноименные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а любые два ребра, не лежащие в этих плоскостях, параллельны. Подбор специальных дидактических материалов помогает учащимся обнаружить эти свойства.

№ 1. *Сравните следующие здания: Московский цирк на проспекте Вернадского, СЭВ на Калининском проспекте, Эйфелеву башню во Франции, ваш дом. Какое из них имеет* *форму призмы? В каких случаях и какой из признаков, определяющих призму, не выполняется?* (К этому заданию полезно подобрать соответствующие диапозитивы.)

В дальнейшем учебная задача в дидактическом материале № 2 строится как следствие из установления того факта, что тело является призмой.

№ 2. *Можно ли использовать формулу площади боковой поверхности призмы для нахождения примерного расхода: а) раствора, идущего на побелку потолка и фриза*[1]*; б) плиток, требуемых для покрытия цоколя жилого здания; в) материала, идущего на покрытие Московского планетария? Обоснуйте ответ.*

Одним из необходимых условий усвоения понятия является умение привести его пример. Этой цели может служить и дидактический материал.

№ 3. *В каких случаях на производственной практике вам приходится иметь дело с углами между двумя пересекающимися плоскостями? Приведите пример измерения таких углов при выполнении производственных операций.*

№ 4. *Приведите пример перекрытий зданий и сооружений, имеющих: а) призматическую, б) цилиндрическую, в) сферическую поверхность.*

В дидактических материалах, предназначенных для формирования теоретических утверждений, можно предложить учащимся выбрать нужную для решения формулу; потребовать сопоставить данные указанной теоремы и отношения между этими данными с конкретными объектами из производственной практики; сделать на основании выполнения условия теоремы соответствующее заключение для рассматриваемых объектов и отношений между ними, например:

№ 5. *Оказалось, что маркировка на технические данные растворосмесителей* СО—80 *и* С—368 *стерлась. Какие измерения необходимо выполнить, чтобы рассчитать объем раствора в бункере каждого растворосмесителя? Какая из формул* $\pi R^2 h$; $\pi R^2 L$; $\frac{1}{3}\pi R^2 h$; $\pi d^2 h$ *в этом случае понадобится?*

№ 6. *Имеются два утверждения: а) прямая, проходящая через две различные точки плоскости, лежит в этой плоскости; б) через две пересекающиеся прямые можно провести одну плоскость. Сопоставьте условия утверждений с начальными действиями операции проверки качества обрабатываемой поверхности штукатурами при работе со шпателем и правилом; столярами при работе с контрольной линейкой. Сделайте заключение относительно правильности используемого метода проверки. Поясните свой ответ выполнением соответствующих операций с инструментами и приспособлениями.*

[1] Фриз — окрашиваемая поверхность стен между потолком и гобеленом или между потолком и панелью (при отсутствии гобелена) с минимальной высотой 50 мм.

Постепенность перехода от этапа формирования к этапу применения состоит в том, что сначала (на этапе формирования) в формулировке учебной задачи называются конкретные понятия, аксиомы, теоремы, формулы, которые следует привлечь, чтобы выполнить задание. Затем, на этапе применения, учебная задача в дидактическом материале с профессиональной направленностью может формулироваться и в неявном, скрытом виде относительно нового компонента знаний, т. е. без называния конкретного понятия, формулы, теоремы, аксиомы, которые нужно использовать.

В ранее рассмотренных заданиях, предназначенных для этапа формирования знаний и способов действий, называлось тело (призма), которое требовалось распознать. В условиях заданий, предназначенных для закрепления знаний, термины новых математических понятий опускаются. Учащиеся должны самостоятельно обнаружить, что в задании № 7 речь идет об угле между наклонной и плоскостью, в задании № 8 — об угле между двумя пересекающимися плоскостями. Решение обоих заданий основано на знании определений этих понятий, на понимании содержания понятий и умений соотнести уже знакомые реальные объекты с признаками конкретного понятия.

№ 7. *Сделайте эскиз, соответствующий правилам строповки и монтажа груза. Какой угол должны образовывать в натянутом положении ветви стропов с плоскостью поднимаемого груза, как измерить этот угол?*

Машинисты крана, соблюдая правила техники безопасности, к моменту изучения математического материала обязаны знать, что ветви стропов в натянутом положении должны образовывать с плоскостью поднимаемого груза угол не менее 45° (или угол наклона к вертикали не более 45°).

№ 8. *Заполните таблицу расположения штукатурных инструментов в пространстве по отношению к плоскости обрабатываемой поверхности, используя знак параллельности.*

	Штукатурные инструменты			Малярные инструменты	
	Правило	Сокол	Полутерок	Методом «на сдир»	Методом «в накладку»
Вертикальные поверхности (стены)	//	От 30° до 60°	От 30° до 45°	От 70° до 90°	От 40° до 60°
Горизонтальные поверхности	//	От 30° до 60°	От 30° до 45°	От 70° до 90°	От 40° до 60°

В случае пересечения плоскостей укажите интервалы величин углов, допускаемых по нормативам (в качестве образца таблица приводится заполненной). О каких видах углов идет речь в задании?

Задание № 8 предлагается после введения понятия угла между пересекающимися плоскостями и направлено на обнаружение совокупности всех его признаков. Углы такого вида, в частности, образуются при обработке поверхности штукатурными и малярными инструментами.

Учебная задача в дидактических материалах, составляемых для применения одного и того же теоретического утверждения, может быть сформулирована в различной форме. Пример тому — задания № 9 и 10.

№ 9. *Даны два утверждения: а) через три точки, не принадлежащие одной прямой, проходит одна плоскость; б) прямая, проходящая через две точки плоскости, лежит в этой плоскости. Объясните, каким образом они подтверждают правильность раскладки кирпичей.*

№ 10. *На действии каких теоретических утверждений основан принцип разметки фундамента и разбивки осей здания?*

Форма предъявления задания № 9 упрощена по сравнению с заданием № 10 тем, что в нем называются теоретические утверждения, действие которых нужно проследить при конкретной производственной операции. В задании № 10 из множества теоретических утверждений следует выбрать именно эти два. Такой прием при разработке дидактических материалов, как отмечалось ранее, создает условия для перехода от распознавания математических знаний в профессиональных ситуациях к «математизации» ситуаций.

Задания № 9 и 10 опираются на знание конкретных производственных операций. Однако не все из этих операций знакомы будущим каменщикам к моменту изучения соответствующего математического материала. Следовательно, использование данных заданий при введении названных утверждений исключено. Вследствие этого задание № 9 может быть предназначено для повторения аксиоматики при изучении теорем о параллельных прямых. В том же виде это задание применимо при закреплении знаний, например, при решении задач на построение сечений многогранника. Аналогично анализируется и назначение задания № 11. С помощью дидактического материала с профессиональной направленностью организуется актуализация знаний, опорных для усвоения новых профессионально значимых понятий и теорем. Повторение проходит в профессиональной ситуации. Учебная задача в дидактическом материале (как и на этапе применения знаний) формулируется здесь в явном и в неявном виде. Однако вновь одни и те же задания могут быть использованы на различных этапах обучения. Это обусловливается несколькими факторами, в частности целями, которые преследует преподаватель при внесении заданий, временем прохождения учебного материала и его содержанием.

№ 11. *При шпатлевании шпатель держат под различными углами к выравниваемой поверхности. Покажите с помощью шпателя образуемые углы. Какой величины они допускаются, как зависит величина угла от толщины слоя шпатлевки? Как называются в геометрии такие углы?* (Дополнением к условию задания служит профессиональный инструмент — шпатель.)

№ 12. *Вспомните последовательность операций при разметке панелей на лестничных площадках. Как обосновать правильность разметки панелей, применяя теорему о перпендикулярности двух прямых плоскости? Сделайте соответствующий рисунок, подтверждающий ваши рассуждения. Какая теорема планиметрии здесь используется?*

Задание № 11 уместно для актуализации знаний учащихся на уроке по теме «Понятие о многогранном угле». А в теме «Угол между двумя плоскостями» оно дается на этапе применения новых знаний с целью обнаружения наименьшего из двугранных углов, образуемых плоскостью шпателя и обрабатываемой поверхностью. Смысл, вкладываемый в известную производственную операцию, подсказывает правильное нахождение нового вида угла. Задание № 12 разработано на основе сопутствующих связей математических знаний с профессиональными (рассматривается относительно первого вопроса учебной задачи). Его использование возможно с целью актуализации опорных знаний в теме «Ортогональное проектирование». Тот же дидактический материал применим на уроках по теме «Связь между перпендикулярностью и параллельностью в пространстве» для закрепления обратных теорем.

Особенно внимательно следует подходить к разработке и применению дидактических материалов с профессиональной направленностью при организации с ними различных форм работ. Эксперимент подтвердил положение о том, что не все из этих материалов целесообразны для индивидуальной работы. Необходимо отбирать доступный учащимся материал и выбирать форму его предъявления с учетом общей математической подготовки всей группы учащихся и индивидуальных особенностей каждого ученика. Например, в процессе повторения радианного измерения угловых величин в группе строителей-отделочников уместно предложить задание:

№ 13. *Известно, что для определения отклонений данной поверхности от вертикального или горизонтального положения применяется уровень. Угол отклонения можно найти по смещению пузырька на длину дуги* S, *а именно:* $S \approx 4{,}85 \cdot 10^{-6} \cdot R \cdot \varphi$, *где* R *— радиус, по которому изогнута стеклянная трубка (рис. 2). Каким образом была получена эта формула?* (К условию прилагается уровень или рисунок.)

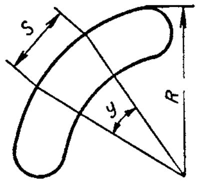


Рис. 2

Само решение достаточно простое, но постановка учебной задачи необычна. Поэтому для индивидуальной работы этот дидактический материал доступен только сильному учащемуся.

С обучающей целью дидактические материалы с профессиональной направленностью предлагаются также слабым учащимся для индивидуальной работы. Но в этом случае целесообразно к тексту задания прилагать полный или частичный план решения либо само решение. Форма предъявления задания в этом случае зависит от количества логических шагов в решении и, конечно, от уровня математической подготовки ученика.

Предназначенные для индивидуальной работы со средними учащимися дидактические материалы с профессиональным содержанием могут быть направлены на проверку знаний фактического материала программы, например формул, определения вида поверхностей. Примером таких заданий могут служить задания № 14—18.

№ 14. *Требуется оштукатурить две колонны одинаковой высоты, но с различными поперечными сечениями: круглым и квадратным. Наружный диаметр круглого сечения и сторона наружного квадрата равны* 30 *см. На какую колонну расходуется штукатурки больше и во сколько раз?*

№ 15. *План комнаты сделан в масштабе* 1:200. *Определить расход меловой пасты на побелку потолка и фриза, если длина комнаты на плане* 30 *мм, ширина* 40 *мм, высота фриза* 0,5 *мм и на* 100 $м^2$ *требуется 24 кг пасты.*

№ 16. *При несоблюдении нормы толщины штукатурного намета допускается перерасход сырья и денег. Подсчитайте, на сколько увеличится стоимость штукатурных работ при обработке стен помещения (рис. 3), если толщину штукатурного намета увеличить на 2 мм?*

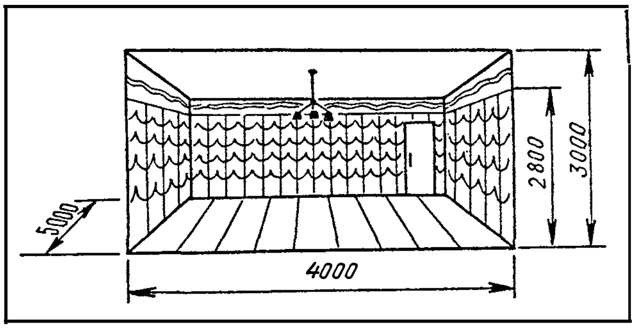


Рис. 3

на 5 мм? (Примечание: стоимость 1 мм штукатурного намета на 1 $м^2$ *поверхности составляет* 5 *коп.)*

№ 17. *Сколько часов потребуется маляру для окраски панели*[2] *высотой* 2 *м в помещении (рис. 3) маховой кистью и валиком, если норма времени для окраски* 100 $м^2$ *поверхности кистью* 6,4 *ч, валиком —* 3,4 *ч?*

№ 18. *К электромешалке для приготовления гипсоопилочной мастики прилагаются четыре цилиндрических бачка. За каждый цикл работы заполняются все бачки. Каждый из бачков имеет диаметр* 350 *мм и высоту* 430 *мм. Продолжительность цикла приготовления мастики, включая засыпку и выгрузку, составляет примерно* 10 *мин. Какое количество мастики можно приготовить в течение одного часа непрерывной работы?*

КОНКУРСНЫЕ УЧЕБНИКИ

Продолжаем знакомить читателей журнала с различными вариантами конкурсных учебников. Рукопись учебника «Геометрия 7—9» А. Н. Колмогорова, А. Ф. Семеновича, Р. С. Черкасова заняла на конкурсе 5-е место. В публикуемой ниже статье дается краткая авторская характеристика учебного пособия и излагается содержание (с некоторыми сокращениями) главы «Векторы и координаты».

О конкурсном учебнике «Геометрия 7—9»

А. Ф. Семенович, Р. С. Черкасов

Конкурсный учебник «Геометрия 7—9», о котором пойдет речь в данной статье,— новый вариант ранее изданных учебников «Геометрия 6—8» нашего авторского коллектива. Изменения школьных программ по математике вызвали необходимость переработать структуру учебника. Представленная на конкурс книга состоит из следующих глав:

1. **Начальные понятия геометрии.**
2. **Треугольники.**

[2] Панель — окрашиваемая поверхность стен от пола высотой 1,2 м и выше (в зависимости от назначения помещения).

3. Построения с помощью циркуля и линейки.
4. Параллельность прямых.
5. Окружность и круг.
6. Четырехугольники.
7. Площади многоугольников. Теорема Пифагора.
8. Векторы и координаты.
9. Метрические теоремы.
10. Перемещения.
11. Подобие фигур.
12. Длина окружности. Площадь круга.
13. Решение треугольников.

Все главы разделены на параграфы, содержащие (в основном) материал для одного-двух уроков. В конце каждого параграфа приводятся задачи.

В приложении к основному тексту даны задания для работы по самопроверке (всего 27) и два небольших раздела: 1) «О логическом строении геометрии»; 2) «Из истории геометрии».

Учитывая пожелания учителей, работавших в школе по первым изданиям учебника «Геометрия 6—8», авторы внесли в новый текст ряд изменений, связанных в основном с перенесением на более поздний срок знакомства с некоторыми общими вопросами (например, разделов о теоремах и аксиомах, общих свойствах перемещений). Было учтено также и высказываемое учителями пожелание о большем внимании к выработке у учащихся умений решать задачи. Это нашло свое отражение в совершенствовании подбора задач, включении в текст таких подразделов, как решение задач с помощью поворота, параллельного переноса, осевой и центральной симметрии. В главу «Подобие фигур» вошел параграф «Применение подобия к решению задач». Глава «Решение треугольников» завершается параграфом «Применение тригонометрии и алгебры к решению задач».

Однако наш авторский коллектив не изменил свое отношение к тем научно-методическим основам курса геометрии, на которых были построены первые издания учебника. Остались без изменения (кроме редакционной правки) теоретико-множественные подходы к формированию основных геометрических понятий, ведущая идея геометрических преобразований, постоянное внимание к развитию языка математики и к логическим основам курса, органичное включение в изложение курса геометрических построений.

Напомним, что именно за некоторые из вошедших в этот перечень положений наши ранее изданные учебники геометрии были подвергнуты в печати резкой критике, трактовавшей их как отражение в курсе математики чуждой нашему социалистическому обществу идеологии.

Работая над учебником, А. Н. Колмогоров стремился отразить в нем те требования, которые предъявляет к школьному курсу математики научно-технический прогресс. Критику якобы идейной несостоятельности учебников геометрии А. Н. Колмогоров считал абсолютно неправомерной и объяснял поведение авторов таких публикаций отсутствием у них должной информации или компетентности по этой проблеме.

Теперь вся несостоятельность такой критики очевидна каждому.

В связи со сказанным заметим, что А. Н. Колмогоров всегда настаивал на необходимости предоставлять в распоряжение учителя математики не один, а несколько вариантов учебников, написанных с позиций различных методических воззрений. Он уделял большое внимание взаимосвязи школьных курсов геометрии и физики, неоднократно обсуждал эту проблему с академиком А. И. Кикоиным. В представленном на конкурс учебнике это нашло свое отражение в заново написанном А. Н. Колмогоровым параграфе «Величины и числа» и обновленном изложении разделов о векторах.

Новая для школы тема «Векторы» вызвала в практике преподавания большие методические трудности. Учитывая отзывы учителей, А. Н. Колмогоров при каждом издании книги стремился найти более приемлемый вариант ее изложения. Поэтому вниманию читателей и предлагаются параграфы именно этого раздела конкурсного учебника.

В заключение считаем своим долгом сказать, что работа над учебником «Геометрия 7—9» была одной из тех, которые А. Н. Колмогоров наметил на последний период своей жизни. Тяжелая болезнь привела к почти полной потере у него зрения, отняла способность к длительному речевому общению, вызвала крайнюю скованность движений. Однако до последних дней жизни он сохранял ясность мышления, отличную память и полноту восприятия. Но только в обстановке полного покоя он мог кратко и почти отчетливо высказывать свои замечания и пожелания по обсуждаемому вопросу. В это время он и диктовал уже мысленно четко отредактированный текст предлагаемого нового изложения.

Глава VIII. Векторы и координаты

§ 60. ОПЕРАЦИИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЕРЕНОСАМИ

1. При сложении чисел каждой паре чисел сопоставляется по определенному правилу единственное число — их сумма. Для параллельных переносов тоже можно указать правило, по которому каждой паре параллельных переносов будет сопоставляться определенный параллельный перенос — их сумма.

Пусть даны два параллельных переноса $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Параллельный перенос $\vec{a}$ отобразит произвольный луч p на сонаправленный ему луч p_1 (рис. 1). Параллельный перенос $\vec{b}$ отобразит луч p_1 на сонаправленный ему луч p_2. Значит, перемещение, полученное в результате последовательного выполнения параллельных переносов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отобразит луч p на сонаправленный ему луч p_2. Но такое перемещение является параллельным переносом (по признаку параллельного переноса).

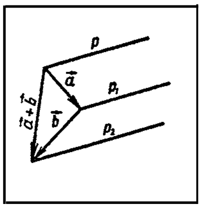


Рис. 1

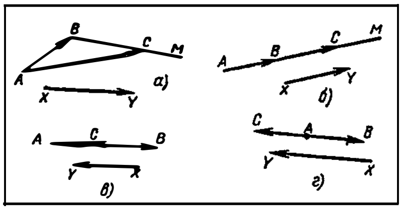


Рис. 2

Итак, в результате последовательного выполнения двух параллельных переносов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получается снова параллельный перенос. Этот параллельный перенос называется суммой данных параллельных переносов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Таким образом, операция сложения параллельных переносов имеет очень простой смысл — последовательное выполнение этих параллельных переносов.

Определение. *Суммой двух параллельных переносов называется параллельный перенос, полученный в результате последовательного выполнения этих параллельных переносов.*

Задача 1. Найдите сумму данных параллельных переносов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{XY}$ (рис. 2).

Решение. Параллельный перенос задается парой соответственных точек. Поэтому для отыскания суммы данных параллельных переносов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{XY}$ достаточно построить образ какой-либо точки при последовательном выполнении переносов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{XY}$. Построим, например, образ точки A.

При параллельном переносе $\overrightarrow{AB}$ точка A отображается на точку B. Найдем образ точки B при параллельном переносе $\overrightarrow{XY}$:

1) построим $[BM) \uparrow\uparrow [XY)$,

2) отложим отрезок BC длины XY.

Построенная точка C будет образом точки B при параллельном переносе $\overrightarrow{XY}$.

Итак, в результате последовательного выполнения параллельных переносов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{XY}$ точка A отобразится на точку C. Следовательно, суммой данных параллельных переносов будет параллельный перенос $\overrightarrow{AC}$ (отображающий точку A на точку C): $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Задача 2. Докажите, что сумма параллельных переносов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{XY}$ (рис. 3, *а*) равна сумме параллельных переносов $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{AB}$).

Решение. Как в задаче 1, найдем сумму

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

Теперь найдем сумму $\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{AB}$. Для этого построим образ точки A при последовательном выполнении параллельных переносов $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{AB}$. Обозначим через D образ точки A при параллельном переносе $\overrightarrow{XY}$. Тогда четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны AD и BC равны и параллельны (каждая из них равна и параллельна отрезку XY). Значит, равны и параллельны также отрезки AB и DC. Поэтому образом точки D при параллельном переносе $\overrightarrow{AB}$ является точка C. Следовательно, образом точки A при последовательном выполнении параллельных переносов $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{AB}$ является точка C. Поэтому

$$\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}.$$

Значит, сумма $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{XY}$ и сумма $\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{AB}$ являются одним и тем же параллельным переносом $\overrightarrow{AC}$, т. е.

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{AB}.$$

Если направления параллельных переносов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{XY}$ совпадают или противоположны, то равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{AB}$ тоже верно (см. рис. 3, *б, в, г*): $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{AY}$, $\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{XB}$, $\overrightarrow{AY}=\overrightarrow{XB}$.

2. Рассмотрим умножение параллельного переноса на число.

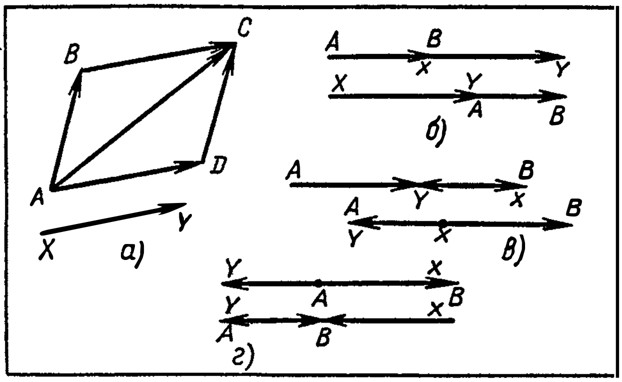
При умножении параллельного переноса $\vec{a}$ на число k надо учесть, что число k может быть положительным, отрицательным или нулем.

Произведением параллельного переноса $\overrightarrow{AB}$ на число $k \neq 0$ называется параллельный перенос $\overrightarrow{CM}$ на расстояние $\overrightarrow{AB}\cdot k$; этот параллельный перенос имеет направление данного параллельного переноса $\overrightarrow{AB}$, если $k>0$, и противоположное направление, если $k<0$. На рис. 4, *а* число k положительное ($k=3$), а на рис. 4, *б* число k отрицательное ($k=-3$).

Произведением любого параллельного переноса на число нуль называется нулевой параллельный перенос. Произведением нулевого параллельного переноса на любое число называется нулевой параллельный перенос.

Произведение параллельного переноса $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на число k обозначается через $k\vec{a}$ или $k\overrightarrow{AB}$ (числовой множитель пишется слева).

Рис. 3



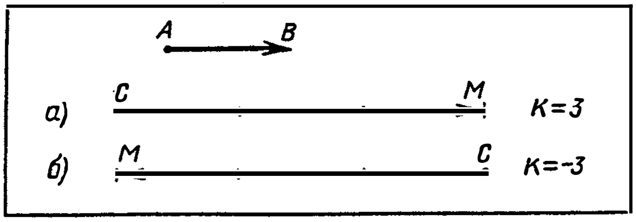


Рис. 4

Вопросы и задачи

583. По рис. 5, *а* найдите суммы параллельных переносов:

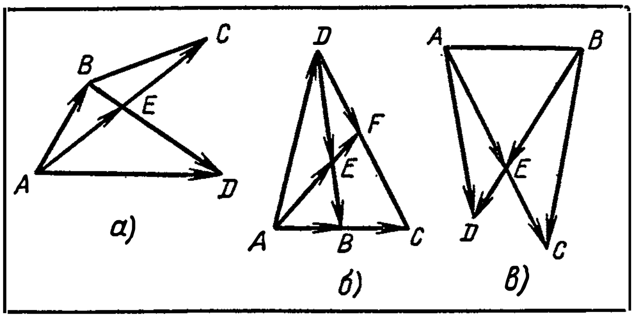


Рис. 5

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$, 3) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$, 4) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}$, 5) $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BE}$, 6) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}$, 7) $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BE}$.

584. Суммой каких двух параллельных переносов, изображенных на рис. 5, *б*, может быть параллельный перенос: $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DF}$?

585. Найдите сумму параллельных переносов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$.

586. Что называется произведением параллельного переноса: 1) на положительное число, 2) на отрицательное число, 3) на число нуль?

587. Параллельный перенос задан направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$. Постройте направленные отрезки, которые задают параллельный перенос: $2\overrightarrow{AB}$; $0{,}5\overrightarrow{PB}$; $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $-\overrightarrow{AB}$; $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

588. Может ли сумма двух (не нулевых) параллельных переносов равняться нулевому параллельному переносу?

589. По рис. 5, *в* найдите суммы параллельных переносов:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$, 3) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$, 4) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}$.

§ 61. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА В ГЕОМЕТРИИ

Изображение векторов

1. Некоторые из величин при выбранной единице измерения задаются своими числовыми значениями. Таковы,

например, расстояние, площадь, масса, температура. Эти величины называются *скалярными*. Но есть и такие величины, для задания которых надо указывать еще и их направление. Для задания скорости, например, надо указать не только ее числовое значение, но и направление. Скорость — *векторная величина*. Она является одним из примеров понятия «*вектор*».

Другим примером, известным вам из курса физики, является сила. Для задания силы тоже надо указывать не только ее числовое значение, но и направление. В дальнейшем вы познакомитесь и с иными примерами векторов.

Что же общего между всеми примерами векторов, например между скоростью и силой? Во-первых, и скорость и сила характеризуются числовым значением и направлением. Во-вторых, скорости можно складывать и умножать на числа и силы тоже можно складывать и умножать на числа.

2. На рис. 6 изображен подъемный кран, движущийся по рельсам прямолинейно. Все его точки имеют одну и ту же скорость. Изображением этой скорости можно считать любую из стрелок, указанных на рисунке, независимо от начальных точек (точек приложения) этих стрелок. Скорость является примером «*свободного*» вектора, не зависящего от «*точки приложения*».

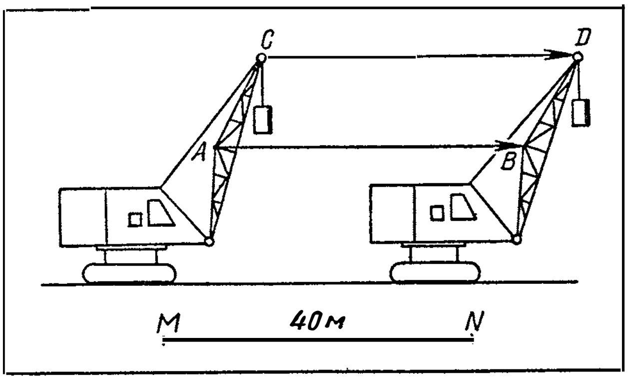


Рис. 6

Примером свободного вектора в геометрии является параллельный перенос. Параллельный перенос $\overrightarrow{AB}$ задается числовым значением — расстоянием AB и направлением — направлением луча AB. Параллельные переносы можно складывать и умножать на число. Кроме того, параллельный перенос не зависит от точки «приложения», так как его можно задать любой парой соответственных точек.

В курсе геометрии будут рассматриваться только примеры свободных векторов — параллельные переносы, для которых определены операции сложения и умножения на число.

3. На рис. 7 изображены силы F_1 и F_2, которые имеют равные числовые значения и одно и то же направление. Но они оказывают на тело разные воздействия, так как приложены к разным точкам его. Сила «зависит от точки приложения»; она является примером «приложенного» (или закрепленного) вектора.

4. Векторы (в геометрии — параллельные переносы, для которых определены операции сложения и умножения на число) мы уже условились обозначать парами прописных букв со стрелкой вверху (например, $\overrightarrow{AB}$) или строчными буквами со стрелкой (например, $\vec{a}$).

Условным изображением вектора $\overrightarrow{AB}$ будем считать направленный отрезок AB (рис. 8, *а*). На рис. 8, *а* изображены несколько пар соответственных при параллельном переносе точек: $X \to Y$, $A \to B$, $C \to D$. Направленные отрезки XY, AB, CD изображают *один и тот же вектор а*, что записывается так: $\vec{a}=\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (в этом случае говорят также, что векторы $\overrightarrow{XY}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ равны).

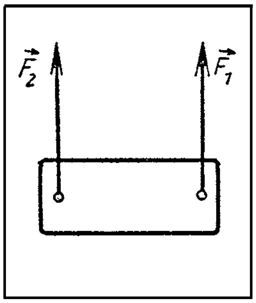


Рис. 7

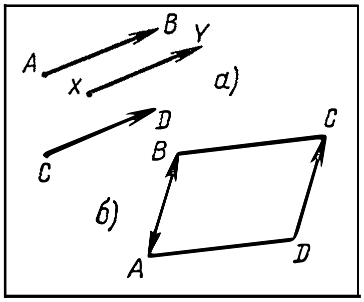


Рис. 8

На рис. 8, *б* изображен параллелограмм $ABCD$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ — это один и тот же вектор, так как пары точек $A \to B$ и $D \to C$ задают один и тот же параллельный перенос: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ — различные векторы, так как задают разные параллельные переносы (у них различны направления).

5. Направлением вектора $\overrightarrow{AB}$ называется направление, заданное лучом AB. Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ (или его модулем) называется расстояние AB. Длину вектора $\overrightarrow{AB}$ будем обозначать $|\overrightarrow{AB}|$.

Параллельный перенос на нулевое расстояние называется *нулевым вектором*. Его обозначают $\vec{0}$ или $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$, ...

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{XY}$ называются *сонаправленными*, если сонаправлены лучи AB и XY (рис. 9, *а*). Если же лучи AB и XY противоположно направлены, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{XY}$ называются *противоположно направленными* (рис. 9, *б*).

Ненулевые векторы называются *коллинеарными*, если их направления совпадают или противоположны. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

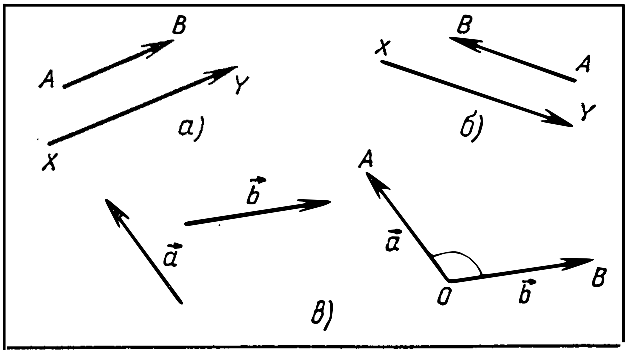


Рис. 9

6. Пусть дано одно из изображений вектора $\vec{a}$ — направленный отрезок AB. И пусть X — произвольно заданная точка. Тогда легко построить направленный отрезок с началом в точке X, являющийся изображением того же вектора $\vec{a}$. Для этого надо построить луч XM, сонаправленный лучу AB, и отложить на нем отрезок XY длины AB. Направленный отрезок XY будет искомым изображением вектора $\vec{a}$. Построение такого изображения вектора $\vec{a}$ называют *откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки X*.

7. *Углом между ненулевыми векторами* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется угол между их направлениями.

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 9, *в*). Отложим каждый из них от какой-либо точки O: $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$. Величина выпуклого угла AOB и будет углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (в обозначениях: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$)

Если векторы сонаправлены, то угол между ними считается равным 0°, а если они противоположно направлены, то угол между ними 180°.

Вопросы и задачи

590. Приведите примеры величин, которые при выбранной единице измерения задаются своими числовыми значениями.

591. Приведите примеры величин, для задания которых надо указывать и их направления. Какие общие свойства характеризуют эти величины?

592. Приведите примеры: 1) закрепленных (приложенных) векторов, 2) свободных векторов.

593. Почему примером вектора в геометрии может быть параллельный перенос?

594. 1) Укажите способы задания векторов.

2) Заданы точки A, B, C, D, M. Запишите векторы, которые отображают: а) точку A на точку B, б) точку C на точку D, в) точку D на точку M, г) точку M на точку D.

595. Укажите векторы, которые вершину A параллелограмма $ABCD$ отображают на одну из других вершин этого же параллелограмма.

596. Сколько существует векторов, которые отображают: 1) вершины A, B, C, D параллелограмма $ABCD$ на точку O пересечения его диагоналей, 2) точку O пересечения диагоналей этого параллелограмма на точки A, B, C и D?

597. Сколько различных векторов задают пары точек, составленные: 1) из вершин треугольника ABC, 2) из вершин параллелограмма $ABCD$?

598. Вектор $\vec{a}$ отображает точку (0,0) координатной плоскости на точку (—2,2). На какие точки отображает этот же вектор точки A(3,2), B(—3,2), C(1,1), D(5,4), E(1,—1), F(—5,—4)?

(Выполните построение соответствующих направленных отрезков.)

599. Какие из векторов, заданных на рис. 10: 1) равны, 2) сонаправлены, 3) противоположно направлены?

600. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Какие пары, составленные из точек A, B, C, D, O задают один и тот же вектор?

601. Задайте вектор $\vec{a}$ и отметьте точки K, D, M. Отложите вектор $\vec{a}$ от каждой из этих точек.

602. Что следует из равенства: $\vec{AB}=\vec{BA}$?

603. От концов отрезка AB отложите данный вектор $\vec{c}$. Величина какого из углов, получившихся на вашем рисунке, является углом между векторами: 1) $\vec{AB}$ и $\vec{c}$; 2) $\vec{BA}$ и $\vec{c}$?

604. 1) Что называется углом между двумя векторами? 2) Найдите углы, которые образует вектор $\vec{AB}$ с другими векторами, заданными на рис. 10.

605. Докажите, что если $\vec{AB}=\vec{CD}$, то $\vec{AC}=\vec{BD}$.

606*. Докажите, что равенство $\vec{OA}=\vec{BO}$ справедливо лишь тогда, когда точка O является серединой отрезка AB.

§62. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Поскольку в нашем курсе геометрии параллельные переносы получили и другое название — векторы, то *суммой векторов* будем называть сумму соответственных параллельных переносов.

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 11). Отложим от точки A вектор $\vec{a}$: $\vec{AB}=\vec{a}$. Затем от точки B отложим вектор $\vec{b}$: $\vec{BC}=\vec{b}$. Суммой параллельных переносов $\vec{AB}=\vec{a}$ и $\vec{BC}=\vec{b}$ является параллельный перенос $\vec{AC}$. Значит, суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\vec{AC}$.

Указанное правило получения суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *правилом треугольника.* Теперь сумме векторов можно дать такое определение.

Определение. *Суммой двух векторов называется вектор, полученный по правилу треугольника.*

2. Сложение векторов подчиняется следующим законам.

1) Закон поглощения нулевого вектора: *сумма любого вектора* $\vec{a}$ *и нулевого вектора равна тому же вектору* $\vec{a}$:

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от какой-либо точки A: $\vec{a}=\vec{AB}$. Тогда $\vec{a}+\vec{0}=\vec{AB}+\vec{BB}=\vec{AB}=\vec{a}$.

2) Закон существования противоположного вектора: *для любого вектора* $\vec{a}$ *существует противоположный ему вектор* $-\vec{a}$, *такой, что сумма* $\vec{a}+(-\vec{a})$ *равна нулевому вектору:*

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от какой-либо точки A: $\vec{a}=\vec{AB}$. Рассмотрим вектор $\vec{BA}$. Сумма $\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}=\vec{0}$. Значит, $\vec{a}+\vec{BA}=\vec{0}$. Следовательно, вектор $\vec{BA}$ и является вектором $-\vec{a}$, противоположным вектору $\vec{a}$.

3) Сочетательный закон: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{a}$ от некоторой точки A: $\vec{a}=\vec{AB}$. Вектор $\vec{b}$ отложим от точки B ($\vec{b}=\vec{BC}$), а вектор $\vec{c}$ — от точки C ($\vec{c}=\vec{CD}$). По определению суммы векторов имеем:

Рис. 10

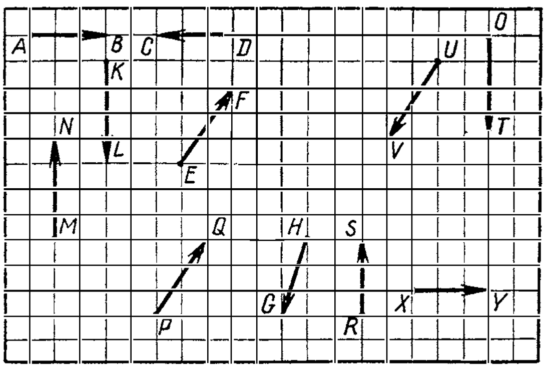


Рис. 11

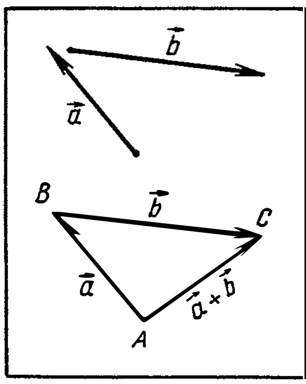
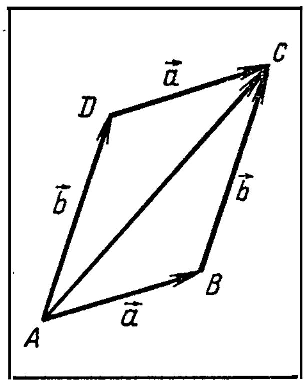


Рис 12



$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,
$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.
Аналогично получим:
$\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BD}$,
$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.
Значит: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

4) Переместительный закон: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. Доказательство переместительного закона сложения векторов (параллельных переносов) уже проведено (см. задачу 2 в § 60). Это свойство позволяет выполнять сложение двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по «правилу параллелограмма»: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ откладывают от одной точки A (рис. 12) и строят параллелограмм $ABCD$ со сторонами AB и AD. Тогда $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.

Вопросы и задачи

607. На рис. 13 укажите векторы: 1) $\vec{a}+\vec{b}$, 2) $\vec{c}+\vec{d}$, 3) $\vec{b}+\vec{c}$, 4) $\vec{f}+\vec{k}$. Может ли длина вектора $\vec{a}+\vec{b}$ быть меньше длины каждого из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

608. Суммой каких двух векторов, заданных на рис. 13, является: 1) вектор $\vec{f}$, 2) вектор $\vec{c}$, 3) вектор $\overrightarrow{AD}$?

609. На рис. 14 заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Укажите по этому рисунку, как найти в каждом случае вектор $\vec{a}+\vec{b}$.

610*. Турист прошел 10 км от A до B на север, а затем 12 км до C на восток. Изобразите на рисунке путь туриста (в масштабе). Чему равна сумма векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, изображающих путь туриста? Равна ли сумма длин векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ длине вектора $\overrightarrow{AC}$?

611. Докажите: 1) $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$,
2) $|\vec{a}+\vec{b}|\geqslant|\vec{a}|-|\vec{b}|$.

В каких случаях выполняются равенства?

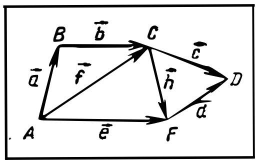


Рис. 13

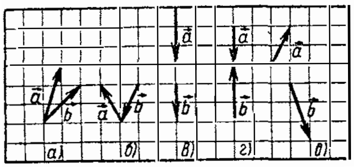


Рис. 14

612. Дан параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Верны ли равенства: 1) $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$, 2) $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{DO}$, 3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, 4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$, 5) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}$, 6) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}$, 7) $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$, 8) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$?

613. На рис. 15 заданы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. 1) отложите эти векторы от произвольной точки O; 2) найдите суммы $\vec{a}+\vec{b}$ в каждом из заданных случаев.

614. В координатной плоскости даны точки $A(-1,2)$,

Рис. 15

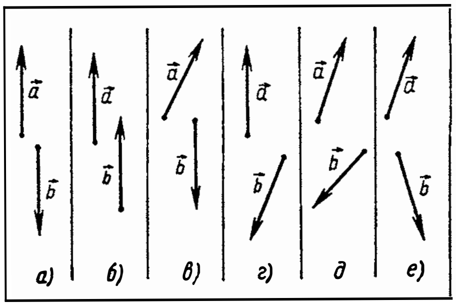
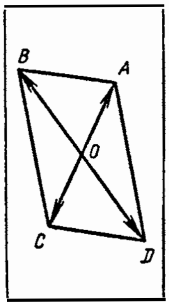


Рис. 16



$B(2,3)$, $C(1,1)$, $D(3,5)$. Найдите суммы: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$, б) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, в) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$, г) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

615. Найдите суммы векторов: 1) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, 2) $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}$, 3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ (рис. 16).

616. Даны три вектора: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 17, а). Найдите векторы: 1) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, 2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

617. От точки O (рис. 17, в) отложите векторы: 1) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OC}$, 2) $\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

618. Задайте три (ненулевых) вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ таких, что: 1) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{b}$, 2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{c}$, 3) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{0}$.

619. На рис. 18, а изображены квадрат $ABCD$ и некоторые отрезки, причем $[CE]\parallel[BD]$. Докажите, что: 1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, 2) $(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$, 3) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=\vec{0}$, 4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$, 5) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$.

620. На рис. 18, б — параллелограмм $ABCD$. Отрезки CE и BD параллельны. Доказать, что: 1) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}$, 3) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BC}$.

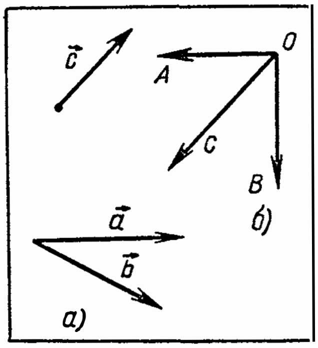


Рис. 17

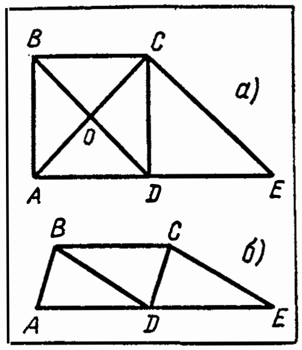


Рис. 18

§ 63. ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}$ такой, что сумма $\vec{x}+\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$ (сравните с определением разности чисел).

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}-\vec{b}$.

Докажем, что разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна сумме векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$. Действительно,

$$\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}+\vec{b})=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

Значит, $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложены от одной точки O (рис. 19), то для построения разности $\vec{a}-\vec{b}$ удобно пользоваться таким правилом:

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

Вопросы и задачи

621. Даны векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Найдите векторы: 1) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$, 2) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

622. Отметьте точки A, B, C, D и найдите векторы: 1) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, 2) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$, 3) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$, 4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}$, 5) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

623. Задайте векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите векторы: 1) $\vec{a}-\vec{b}$, 2) $\vec{b}-\vec{a}$, 3) $-\vec{a}-\vec{b}$.

624 На рис. 20 заданы векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{d}$. Выразите векторы: 1) $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC}$, 2) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$, 3) $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$.

625. Упростите выражения: 1) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB})$,

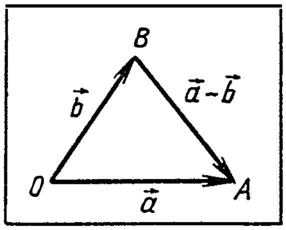


Рис. 19

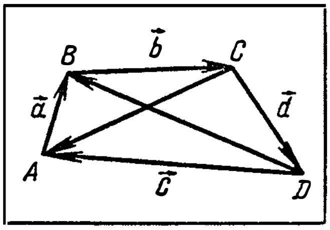


Рис. 20

2) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DB}$, 3) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})-(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD})+$ $+(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$.

626. Докажите: 1) $|\vec{a}-\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$,
2) $|\vec{a}-\vec{b}|\geqslant|\vec{a}|-|\vec{b}|$.

В каких случаях выполняются равенства?

627. От пристани к противоположному берегу реки отправился катер со скоростью 40 км/ч. Скорость течения реки 5 км/ч. В каком направлении (покажите на рисунке) нужно плыть катеру, чтобы причалить к ближайшей точке противоположного берега?

628. Груз спускается на парашюте со скоростью 3 м/с. Ветром его относит в сторону со скоростью 1,5 м/с. Под каким углом к вертикали будет опускаться груз при этом условии? (Угол найти построением.)

§ 64. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

1. В § 60 было сформулировано определение произведения параллельного переноса на число. Сформулируем его теперь несколько короче, употребив слово «вектор».

Определение. *Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $k\neq 0$ называется вектор, длина которого равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа k, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $k>0$ и противоположно направлению вектора $\vec{a}$ при $k<0$.*

В определении не рассмотрены случаи $\vec{a}=\vec{0}$ и $k=0$. Для этих случаев принимаются дополнительные определения:

$k\cdot\vec{0}=\vec{0}$ для любого k,

$\vec{a}\cdot 0=\vec{0}$ для любого $\vec{a}$.

2. Вы уже знаете, какие векторы называются коллинеарными (§ 61). Докажем признак коллинеарности векторов.

Теорема. *Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое число k, что $\vec{b}=k\vec{a}$.*

Доказательство. 1) Докажем сначала, что если существует такое число k, что $\vec{b}=k\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Но это следует непосредственно из определения: векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ имеют по определению либо одинаковые (если $k>0$), либо противоположные (если $k<0$) направления.

2) Докажем теперь обратное утверждение: если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то существует такое число k, что $\vec{b}=k\vec{a}$.

По определению коллинеарных векторов направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ либо совпадают, либо противоположны. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково, то $\vec{b}=k\vec{a}$, когда $k=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Если же направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположны, то $\vec{b}=k\vec{a}$, когда $k=-\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

3. Умножение вектора на число подчиняется следующим законам:

1) Произведение любого вектора на единицу равно этому вектору.

2) Сочетательный закон: $(xy)\vec{a}=x(y\vec{a})$.

3) Первый распределительный закон: $(x+y)\vec{a}=x\vec{a}+y\vec{a}$.

4) Второй распределительный закон: $x(\vec{a}+\vec{b})=x\vec{a}+x\vec{b}$.

Первый закон вытекает непосредственно из определения умножения параллельного переноса на число.

Доказательство остальных законов не является материалом, обязательным для изучения всеми учащимися. Каждый ученик должен лишь понимать их.

4. Вернемся теперь еще раз к вопросу: что же называют вектором.

Рассматриваемые в курсах физики и геометрии примеры векторов хотя и различны, но имеют и общие свойства. Они являются примерами отвлеченного понятия «вектор». Это понятие характеризуется тем, что определены операции сложения и умножения на число, которые подчиняются четырем законам сложения и четырем законам умножения. Эти законы перечислены в параграфах 62 и 64. Для параллельных переносов (скоростей, сил) операции сложения и умножения на числа подчиняются этим законам. Поэтому они и являются примерами векторов.

Вопросы и задачи

629. Какой вектор называется произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $x\neq 0$?

630. 1) Известно, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Следует ли из этого, что $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$?

2) Известно, что $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{CD}\neq\vec{0}$. Следует ли из этого, что: а) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$? б) $AB=CD$?

631. Дан вектор $\vec{a}$. Отложите от данной точки M векторы $-\vec{a}$, $2\vec{a}$, $-3\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$, $\dfrac{2}{3}\vec{a}$.

632. Задан вектор $\vec{e}=\overrightarrow{OE}$. Найдите вектор $\vec{a}$, если:

1) $\vec{a}=2\vec{e}$, 2) $\vec{a}=5\vec{e}$, 3) $\vec{a}=0{,}5\vec{e}$, 4) $\vec{a}=-3{,}5\vec{e}$, 5) $\vec{a}=\dfrac{1}{3}\vec{e}$.

633. При каких значениях числа k векторы $\vec{a}$ ($\vec{a}\neq\vec{0}$) и $k\vec{a}$: 1) сонаправлены, 2) противоположно направлены, 3) равны?

634. При каких значениях числа k верны соотношения: 1) $|k\vec{c}|<|\vec{c}|$, 2) $|k\vec{c}|>|\vec{c}|$, 3) $|k\vec{c}|=|\vec{c}|$, где $\vec{c}$ — ненулевой вектор?

635. Задайте векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и найдите векторы: 1) $\vec{a}-\dfrac{\vec{b}}{2}$, 2) $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{3}$, 3) $2\vec{a}-3\vec{b}$.

636. Укажите, при каких значениях k вектор $k\vec{c}+\vec{c}$ ($\vec{c}\neq\vec{0}$):

1) имеет то же направление, что и вектор $\vec{c}$, 2) имеет направление, противоположное направлению вектора $\vec{c}$, 3) равен нулевому вектору?

637. На координатной прямой даны точки: $O(0)$, $A(0{,}5)$, $B(-1)$. Найдите такое число x, что: 1) $\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{OB}$, 2) $\overrightarrow{OB}=$ $=x\overrightarrow{OD}$, 3) $\overrightarrow{BA}=x\overrightarrow{OA}$, 4) $\overrightarrow{BA}=x\overrightarrow{BO}$, 5) $\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{BA}$, 6) $\overrightarrow{AO}=$ $=x\overrightarrow{BA}$.

638. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Точка M — середина стороны BC. 1) Выразите $\overrightarrow{MD}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. 2) Выразите $\overrightarrow{AM}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

639. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Выразите вектор $\overrightarrow{BM}$ через $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

640. Какие законы действий над векторами выражаются равенствами: 1) $\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$, 2) $\vec{c}+\vec{d}=\vec{d}+\vec{c}$, 3) $(\vec{c}+\vec{d})+\vec{b}=$ $=\vec{c}+(\vec{d}+\vec{b})$, 4) $0\vec{c}=k\vec{0}$, 5) $0\vec{c}=\vec{0}$, 6) $(St)\vec{b}=S(t\vec{b})$? 7) $S\vec{a}+$ $+t\vec{a}=(S+t)\vec{a}$, 8) $S\vec{b}+S\vec{c}=S(\vec{b}+\vec{c})$?

641. Упростите выражения (и назовите законы действий над векторами, которые при этом применяются):

1) $3\vec{a}+(-\vec{b})-2\vec{a}+3\vec{b}$;
2) $-2(2{,}5\vec{a}+0\vec{b})+3\vec{0}+6\vec{a}$;
3) $3(5\vec{a}+2\vec{b})+4(-3\vec{a}+\vec{b})$;
4) $\frac{1}{2}[(3\vec{a}-2\vec{b})+5\vec{a}]-\frac{1}{3}(6\vec{a}-9\vec{b})$.

642*. Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарны, то $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Задание 16 (§ 61—63)

1. Сформулируйте и запишите в обозначениях законы сложения векторов.

2. Даны два равных вектора: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Докажите, что равны векторы: 1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, 2) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{DB}$.

3. Задайте на рисунке два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. 1) Выполните их сложение: а) по правилу треугольника, б) по правилу параллелограмма. 2) Найдите векторы: а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$, б) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}$.

4. Может ли длина суммы двух векторов: 1) равняться длине одного из этих векторов, 2) быть больше длины каждого из них, 3) быть меньше длины каждого из них? Свои ответы подтвердите рисунками.

5. Задайте векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите векторы: 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, 2) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, 3) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$.

6. Точки A, B, C и D являются вершинами трапеции. 1) Найдите составляющие по прямым AB и AD векторов: а) $\overrightarrow{AC}$, б) $\overrightarrow{CD}$, в) $\overrightarrow{BD}$. 2) Найдите составляющие по прямым CA и CD векторов: а) $\overrightarrow{AD}$, б) $\overrightarrow{CB}$, в) $\overrightarrow{BA}$.

7*. Дано: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$. Доказать: для любой точки O выполняется равенство: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$.

ВНЕКЛАССНАЯ РАБОТА

Математический бой двух команд

Правила, комментарии, опыт проведения

Предисловие

Матбой чем-то напоминает турнир рыцарей, где вопросы честного ведения боя (по всем правилам) стоят на первом месте. Как и всякий рыцарь, капитан побежденной команды должен иметь мужество поздравить капитана-победителя, ибо главное не победа, а искусство коллективного разума и творческая работа каждого.

Если в школе по большей части решают задачи для учителя, на олимпиадах — для себя, то во время матбоя — для победы всей команды. Сегодняшний принцип обучения коллективный, но антиколлективистский: считается, что решать задачи вместе плохо, будет «списывание», забывая, что «сильный» учится объяснять «слабому», а «слабый» получает индивидуальную помощь, на которую у учителя нет времени. А бывает, что один найдет идею, а другой ее подхватит и оформит! Не потому ли сейчас редко встречаются дружные классы, что каждый за себя?

В классе всё организует учитель, ему легче работать с послушными исполнителями и получать стандартные ответы на стандартные вопросы, а растить творческих самостоятельных людей — трудно. На матбоях — полная самоорганизация, вся ответственность — на самих ребятах, и результат — осязаемый, зависящий от множества удач и просчетов, переживаемых у всех на глазах.

Желание — великий двигатель, с которым человеку не страшны горы черновой работы, он стремится к цели, не замечая усталости. Такого энтузиазма в решении трудных задач и такой мобилизации всех сил и способностей, как во время матбоя, нигде не увидишь. Матбой — это еще и игра с неполной информацией о партнере, где нужны интуиция и верная тактика; это и увлекательный «спектакль», когда перед всеми надо исполнить непростую роль.

Это не значит, что олимпиады и конкурсы хуже, нет, на олимпиадах, например, школьники учатся оформлять свои мысли письменно, проверять сами себя, не надеясь на чью-то помощь,— это очень важно, но того, что дает матбой, олимпиады заменить не могут.

Все сказанное относится к хорошо подготовленному матбою, когда уровень задач соответствует уровню команд, когда четко решены оргвопросы, когда внимание участников сосредоточено на содержательных моментах, а не на желании победить любой ценой. Именно поэтому рыцарские качества — честь, выдержка и уважение к противнику — имеют первостепенное значение.

Опыт матбоев поможет участникам в будущем: умение сделать научный доклад, выслушать и понять работу другого, задавать четкие вопросы по существу — все это пригодится на семинарах и конференциях, для рецензировании книг и статей, для совместной научной работы. И еще: ученики разных школ на матбоях знакомятся, создают новый круг общения. И последнее: после удачно проведенного матбоя просыпается вкус к хорошей работе, хочется выступить еще раз, но как следует, учтя все промахи. Поэтому проиграть командам подчас бывает полезнее, чем победить.

Матбои зародились в Ленинграде и были придуманы Иосифом Яковлевичем *Веребейчиком* примерно в 1965 г. Первые матбои проводились в стенах школы № 30, где Иосиф Яковлевич работал учителем математики и вел кружки. Через много лет появилось краткое сообщение о матбоях в журнале «Квант» (1972, № 10), а еще через много лет — задачи матбоев в журнале «Математика в школе» (1989, № 5), но правил, как таковых, опубликовано не было. Матбои стали проводиться в разных городах, но при этом возникли отдельные расхождения в правилах. С большим трудом, благодаря летним математическим школам в г. Кирове, где встречались московские, ленинградские и кировские преподаватели, в долгих спорах удалось преодолеть эти расхождения.

Статью подготовили **Д. В. Дерягин**, **А. Я. Канель, А. К. Ковальджи, Г. В. Кондаков, И. С. Рубанов, С. М. Финашин, Д. В. Фомин, А. А. Шапиро, А. Д. Яценко.** Полезные замечания сделали **Д. В. Аблов, А. И. Артемьев, И. А. Биндер, Ю. М. Бурман, К. Н. Ингатьев, Н. А. Кузьмичева, Э. Ю. Красс, В. А. Уфнаровский, М. Ю. Чечельницкий.**

Мы не могли изучить все варианты проведения матбоя, поэтому будем благодарны читателям, которые пришлют нам свои варианты, идеи, критику или вопросы,— это поможет в дальнейшей работе.

*

А теперь о самих правилах. Они выглядят сложными, но здесь — как в спорте: в футбол, например, играют даже дети, а правила международных соревнований — это горы пунктов, подпунктов и примечаний! Идея матбоя тоже проста: команды решают одни и те же задачи, потом по очереди рассказывают решения, а соперники их проверяют. Однако осуществить эту идею непросто — неизбежно возникают вопросы: что делать, если у команды нет решения? Может ли команда помогать выступающему? Может ли проверяющий (оппонент) дополнять отвечающего (докладчика)? Как оценивать работу докладчика и оппонента? И т. д. Затем возникают непредвиденные ситуации, которые приводят к изменению или уточнению правил,—

и появляются «пункты, подпункты и примечания» (излишние при первом чтении, но необходимые в дальнейшем).

Схема матбоя

Матбой — это соревнование двух команд в решении нестандартных задач, подобранных жюри, в умении рассказывать решения у доски и в умении проверять чужие решения.

Команды получают одинаковые задачи и решают их в разных помещениях в течение заданного времени. Таким образом, матбой состоит из двух частей: решения задач и собственно боя.

Чтобы определить, в каком порядке команды будут рассказывать решения задач, команды делают «вызовы»: одна называет номер задачи, решение которой она желает услышать, а другая сообщает, принят ли вызов. Обычно команды вызывают друг друга по очереди.

Если вызванная команда хочет отвечать, то она выставляет докладчика, а другая команда — оппонента для проверки решения. Командам могут даваться минутные перерывы для помощи докладчику или оппоненту.

Если вызванная команда отказалась отвечать, то вызвавшая команда должна сама рассказать решение задачи. При этом, если оппонент докажет, что у докладчика нет решения, то вызов считает некорректным. Тогда вызывавшая команда должна повторить вызов.

Команда может отказаться делать очередной вызов (если у нее не осталось решенных задач и она не хочет делать некорректный вызов). Тогда другая команда получает право рассказать решения любых задач, оставшихся неразобранными.

После каждого выступления жюри дает командам очки как за доклад, так и за оппонирование.

Порядок проведения матбоя

Ответственный бой лучше проводить в учебное время (и занятия, и матбой — большая нагрузка, а если использовать воскресенье, то не будет отдыха и участники не успеют подготовиться к урокам). Обычно договариваются о числе участников в команде, устанавливают точное время на решение задач и примерное время на бой.

Перед началом решения задач жюри напоминает основные моменты правил и согласовывает договорные условия.

Договорные условия

1. Предельное число выходов к доске одного человека (обычно 2).
2. Число минутных перерывов (обычно 3).
3. Примерное время на доклад (обычно 15 мин), после которого жюри решает, дать еще время или передать слово оппоненту.
4. Формулировка некорректного вызова (см. «Корректность вызова»): сильная или слабая.
5. Можно ли оппоненту дополнять докладчика, если он не нашел пробелов в решении (обычно «нет»).
6. Какую разницу очков считать ничейной (обычно не больше 3).
7. Какой круг фактов и методов можно использовать без доказательства (например: неравенство средних, принцип Дирихле, мат. индукция, остатки по модулю).
8. Можно ли пользоваться литературой и калькуляторами во время решения задач (обычно «да»).
9. Можно ли выходить к доске с записанным решением (обычно «да»).

Решение задач

Есть джентльменское правило: прежде чем приступить к решению, команды сообщают жюри о всех задачах, решения которых им известны (матбой — это не клуб знатоков). Жюри исключает или заменяет эти задачи (предварительно проверив, что идея решения действительно известна).

Представитель жюри регулярно посещает команды и отвечает на вопросы по условиям задач. При этом каждое уточнение условий, данное одной команде, сразу же должно сообщаться и другой команде.

Жюри не должно давать информации о трудности задач. В процессе решения задач и во время боя команды не должны общаться и знать количество решенных задач у соперников.

Начало боя

Когда время на решение задач истекло, команды и жюри собираются вместе.

Целесообразно создать обстановку (расставить столы) для удобного общения членов команд и жюри (рис. 1).

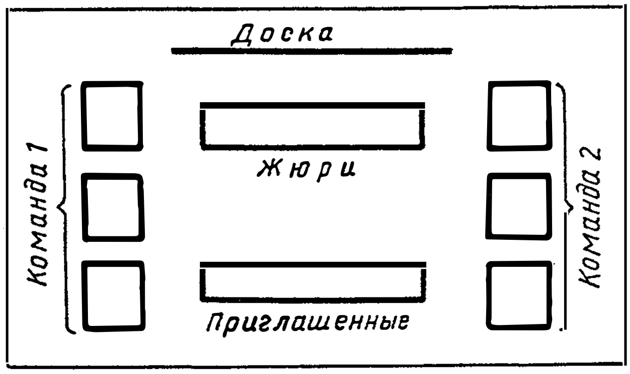


Рис. 1

Капитаны сообщают названия команд.

На доске изображается таблица результатов:

Номер задачи	Очки команды	Вызов	Очки команды	Очки жюри

Существуют ограничения на общение участников, которые показаны на схеме (рис. 2; например, оппонент может общаться только с докладчиком и с жюри, а капитан — только со своей командой и с жюри).

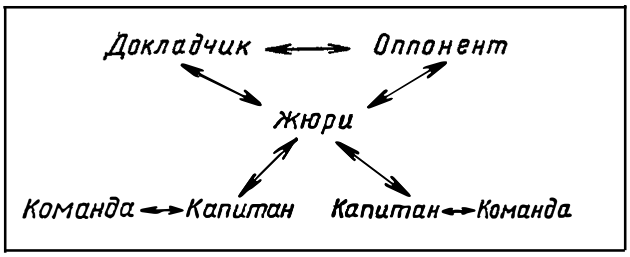


Рис. 2

Конкурс капитанов

Капитанам предлагается достаточно простая задача на сообразительность, в которой требуется дать только ответ, или игра, в которой не видно простой выигрышной стратегни (при этом капитанов спрашивают, кто хочет начать игру или быть вторым; кто раньше ответит — определит очередность).

Конкурс кончается, когда один из капитанов даст ответ или победит в игре. Если ответ верен, то капитан победил, если не верен, то победил другой капитан.

Капитан, победивший в конкурсе, сообщает, какая команда сделает первый вызов.

Вызов

Капитан вызывающей команды сообщает номер задачи, решение которой команда хочет услышать, а другая команда отвечает, принят ли вызов.

Если вызванная команда хочет отвечать, то она сообщает, что вызов принят и выставляет докладчика, а вызывавшая команда — оппонента для проверки решения.

Если вызванная команда отказалась отвечать, то вызывавшая команда должна сама предъявить решение (выставить докладчика, а другая команда — оппонента). В этом случае говорят, что происходит проверка корректности вызова.

Докладчик и оппонент

В идеале: сначала докладчик сообщает решение, затем ему задают вопросы сначала оппонент, потом жюри. В процессе доклада оппонент и жюри стремятся не прерывать докладчика и пользуются лишь выражениями типа: «Это очевидно, можно не доказывать», «Повторите, пожалуйста, этот момент».

Докладчик может не отвечать на вопросы оппонента во время доклада, но по требованию оппонента или жюри должен дать план решения.

Оппонент не должен требовать доказательства утверждений из школьной программы или круга «известных» фактов. В спорных случаях вопрос решает жюри.

Время на обдумывание вопросов у доски — 1 мин (оппоненту — чтобы задать вопрос, докладчику — чтобы ответить).

Команды могут помогать докладчику и оппоненту только во время минутного перерыва (соперники тоже пользуются этой минутой). Во время минутного перерыва можно заменить докладчика или оппонента (при этом учитывается выход к доске).

Если докладчик указывает на пробелы в своем решении, то считается, что оппонент тоже их нашел.

Если оппонент согласился с решением докладчика и его команда не взяла минутный перерыв, то оппонент и его команда больше не участвуют в обсуждении задачи.

Часть решения

Если за минуту, данную на обдумывание вопроса, который жюри считает существенным, докладчик не подготовил ответ и команда не взяла минутный перерыв, то считается, что в решении есть пробел («дырка»).

Решена ли задача, определяет жюри (рассуждают, например, так: «Разобран только один из двух различных случаев», или: «Вряд ли за ограниченное время можно доделать решения у доски» — решение не принято, или: «Ясно, что таким способом можно найти все ответы, поэтому нет смысла проводить выкладки» — решение принято).

Перемена ролей

Если вызов был принят, а докладчик предъявил только часть решения, то возможна перемена ролей.

Вариант для сильных команд: вызывавшая команда получает право рассказать свое решение только в том случае, когда оппонент показал, что у докладчика нет решения, если оппонент нашел лишь небольшие пробелы в решении, то он имеет право сразу их восполнить, но не рассказывать свое решение. Если оппонент не нашел пробелов, то он и его команда в обсуждении задачи больше не участвуют.

Вариант для слабых или неопытных команд: вызывавшая команда может рассказать свое решение, если решение докладчика не принято жюри (даже когда оппонент не нашел пробелов).

Во время перемен ролей можно заменить бывших докладчика или оппонента (при этом учитывается выход к доске).

Корректность вызова

Если вызов принят, то вопроса о его корректности не ставится (иногда говорят: «Принятый вызов всегда корректен»).

Если вызов не принят, то вызывавшая команда должна сама рассказать решение, и здесь возможны два случая:

1. Вызывавшая команда не стала отвечать. Тогда вызов «автоматически» считается некорректным.

2. Вызывавшая команда выставила докладчика, т. е. происходит проверка корректности вызова. Есть два подхода к определению корректности.

Вариант для сильных команд: если оппонент показал, что у докладчика нет решения, то вызов считается некорректным (если оппонент не нашел «липу» в решении, то вызов считается корректным независимо от исхода диалога между докладчиком и жюри).

Вариант для команд невысокого уровня, не умеющих оппонировать: вызов считается некорректным, если жюри не приняло решение докладчика (исход диалога докладчика и оппонента не имеет значения).

При некорректном вызове оппонент получает 6 очков, а вызывавшая команда — до 6 очков за верные идеи и должна повторить вызов.

Начисление очков

Каждая задача стóит 12 очков (чтобы не сообщать трудность задач). Эти очки распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри (жюри достается остаток от 12 очков).

Очки даются как за положительный вклад в решение задачи, так и за нахождение ошибок и пробелов в решении. За чистое решение задачи дается 12 очков, а за «полное» оппонирование — 6 очков (если оппонент показал, что у докладчика совсем нет положительных результатов).

Оппонент получает очки в основном за те вопросы по решению, на которые докладчик не смог ответить (рассуждают обычно так: если бы докладчик ответил на вопросы оппонента, то он получил бы, например, на 4 очка больше, поэтому оппонент получает 2 очка, остальные 2 очка он может получить, если восполнит сам эти пробелы. Если число очков не делится на 2, то, учитывая другие соображения, результат округляют в ту или другую сторону).

Если оппонент указал на существенные ошибки и пробелы в решении, которые, однако, докладчик исправил у доски, то он может получить до двух очков. Иначе говоря, за «латание дыр» у доски жюри может снять с докладчика 1—2 очка, которые может получить оппонент.

За красивое решение или красивое оппонирование жюри может дать одно премиальное очко (оно не входит в те 12).

Жюри дает очки гласно, т. е. объясняет, за что они даны или сняты.

Жюри может оштрафовать команду за шум, за неэтичное поведение (после предупреждения), обычно на очко. За подсказку штраф может быть больше с лишением права выступать по задаче и удалением подсказавшего.

Если остается время, жюри может выслушать более красивые решения и дать за них премиальные очки.

Отказ делать вызов

Если у команды не осталось решенных задач, то она отказывается делать вызов (чтобы избежать некорректного вызова). Тогда другая команда получает право рассказать все оставшиеся у нее решения.

После отказа от вызова команда до конца боя теряет право рассказывать решения задач и становится «вечным оппонентом», т. е. может получать очки только за оппонирование.

Итоги

После каждого вызова жюри сообщает, поясняет и записывает, сколько очков получила каждая команда. Жюри ведет протокол матбоя в виде таблицы, в которой указываются: фамилии выступающих, номер обсуждаемой задачи, направление вызова и количество очков, полученных командами и оставшихся у жюри. На доске изображается упрощенная таблица, без указания фамилий.

Вариант протокола матбоя

Номер вызова	Номер задачи	Команда 1		Кто кого вызвал	Команда 2		Жюри
		Фамилия	Количество очков		Фамилия	Количество очков	Количество очков
1	3	Кондаков	8	←	Яценко	2	2
2	7	Рубанов	11	⇄	Канель	1	0

После боя количество очков у каждой команды и у жюри складывается. (Количество очков, оставшихся у жюри, характеризует трудность задач и силу команд.)

Если разность числа очков команд не превышает установленной в договорных условиях величины, то засчитывается ничья.

Если остается время, то жюри рассказывает решения не решенных во время матбоя задач или показывает более удачные решения.

Статус жюри

Жюри является верховным толкователем правил матбоя. Если ситуация правилами не предусмотрена, жюри принимает решение по своему усмотрению. Решение жюри является обязательным для команд.

Жюри может снять вопрос оппонента (если вопрос не по существу), прекратить доклад или оппонирование (если дискуссия затягивается). Во всех подобных случаях жюри обосновывает свое решение.

Всякие соображения по уже разобранным задачам жюри рассматривает после боя. Задним числом счет изменять нельзя.

Статус капитана

Капитан отвечает перед командой за организацию решения задач, подготовку докладчиков и оппонентов, тактику ведения боя.

Является представителем команды по всем оргвопросам: только он делает вызов, берет минутный перерыв, общается с жюри. (Если капитан выходит к доске, то он оставляет заместителя.)

Заранее выясняет, кто будет докладчиком и кто оппонентом по каждой задаче, решает, взять или отдать первый вызов. Придумывает название команды.

Памятка жюри

Желательно формировать нейтральное жюри, а если это не удается, то вводить представителей обеих команд.

Жюри должно знать решения всех задач.

На ответственных боях жюри не должно задавать лишних вопросов командам, например о ходе решения задач.

Жюри должно помнить, что своими вопросами оно помогает докладчику доработать решение у доски, а вмешиваясь в диалог, «ест хлеб» оппонента.

Если жюри (после вопросов оппонента) видит пробел в решении, то оно должно проверить, может ли докладчик его закрыть.

В случае конфликтной ситуации члены жюри должны уметь обосновать свою оценку исходя из порядка начисления очков.

Когда между членами жюри решены принципиальные вопросы (о корректности, о полноте) и не осталось существенных разногласий, то очки начисляют путем усреднения и округления мнений жюри до ближайшего целого числа.

Желательно сначала объяснить мнение жюри по поводу начисления очков, а затем сделать запись счета, поскольку жюри может не заметить всех пробелов в решении, а капитаны могут высказать свои замечания (очки за это не даются).

Если жюри не может быстро разобраться в решении, то в целях экономии времени и сил участников с согласия капитанов жюри может выделить своего представителя, который продолжит обсуждение задачи с докладчиком и оппонентом в другом помещении. При этом бой продолжается, а очки по задаче начисляются позднее. (Это возможно, если нет проверки корректности вызова.)

Желательно в течение боя в аналогичных ситуациях принимать аналогичные решения (правило прецедента).

О подборе задач

В задачах должен быть «хлеб» для оппонента, т. е. при оформлении решения должны быть некоторые логические трудности (этим задачи для матбоя отличаются от задач для олимпиады).

Лучше, когда задачи разнообразны по идеям и тематике (например: из геометрии, алгебры, теории чисел или из тем для математических кружков: комбинаторика, неравенства, последовательности, игры, логика, принцип Дирихле, математическая индукция, инварианты).

Общее число задач, а также число задач малой и средней трудности должно быть четным, поскольку при равном числе решенных задач и корректности вызовов команды должны рассказать равное количество решений. Обычно дают 2 легкие задачи, 2 «монстра», остальные — средней трудности (средняя задача с трудом решается средним участником за отведенное время, а «монстры» должны быть поучительны).

Число задач обычно близко к числу участников в команде. (Если много задач, то бой может затянуться, а если мало, то не все участники смогут выступить.)

Нужны запасные задачи для боя и для конкурса капитанов (чтобы заменить известные).

О формировании команд

Обычно в команды входят от 3 до 12 человек. Если условлено, например, что в командах будет не более 8 человек, а претендентов больше, то можно провести отборочный тур либо взять по 2—3 запасных, а команды сформировать после решения задач.

Время на бой (памятка)

На решение задач (в зависимости от их числа и трудности) дают от 1 до 5 ч. Бывает блиц-бой: 15 мин на решение всех задач (соответственно задачи проще).

Прикидка: число часов на разбор задач примерно равно трети числа задач (с учетом переговоров, подведения итогов, рассказа двух решений и т. п.).

Хорошо оставить время для разбора нерешенных задач.

Бывает перерыв на обед (между решением и разбором).

Не стоит в один день решать задачи, а в другой — разбирать решения.

Советы по тактике

Во время решения задач капитану следует узнать, кто какие задачи хочет решать, и распределить их; вести учет решенных задач и проверенных решений.

Участники должны стараться не шуметь — это очень мешает думать.

Если в команде есть сильный «решатель», то неразумно тратить его время на доведение решений до конца — это могут сделать его помощники. Пусть он генерирует идеи и отдает их на доработку.

За некоторое время до конца решения задач стоит переключиться всей команде на штурм одной задачи.

Вызывать обычно выгодно на самую трудную из решенных командой задач или на задачу, где есть «подводные камни».

Докладчику бывает удобно сначала подготовить доску (сделать чертеж, выписать формулы), а затем приступить к решению.

Если оппонент не может разобраться в логике решения, то разумно попросить план решения. Полезно кратко записывать свои вопросы, чтобы не забыть.

Проблемные ситуации

1. Бывает, что условие задачи понято неправильно. Часто в этом виновато жюри (например, комментарии к задаче даны только одной команде). Конечно, надо тщательно продумывать формулировки, но на всякий случай стоит напоминать командам перед решением задач, что если задача кажется вам тривиальной, то, скорее всего, вы неправильно поняли условие — уточните его у жюри. Если все же ЧП произошло и условие действительно допускает другое толкование, то посоветуйтесь с капитанами: согласны ли они снять задачу или выслушать обе команды без изменения порядка вызова, а каждый рассказ оценивать из 6 очков (а если трудность задачи существенно зависит от понимания условия, то, например, из 8 и из 4 очков)?

2. После исчерпания полных решений у команды могут остаться соображения по нерешенным задачам. Нам думается, что если останется время, то можно продолжить выступления по очереди, но при этом заранее оговорить ту часть решения, которая будет рассказана, а жюри должно сразу определить стоимость этого результата (например, 4 очка; тогда оппонент может заработать до 2 очков).

Примеры задач и игр для конкурса капитанов

1. Сколько существует трехзначных чисел?

2. На столе лежат 20 спичек, двое по очереди берут 1 или 2 спички. Побеждает тот, кто возьмет последнюю спичку.

3. Газету разорвали на три части, потом одну из частей разорвали еще на три части, и так делали 40 раз. Сколько получилось частей?

4. Полный бидон с молоком весит 30 кг, а наполненный наполовину — 15,5 кг. Сколько весит бидон?

5. Разрежьте квадрат на 5 прямоугольников так, чтобы у соседних прямоугольников стороны не совпадали.

6. Найдите хотя бы одно решение неравенства $0{,}01<x<<0{,}011$.

7. Сколько диагоналей в правильном 7-угольнике?

8. В строке написано несколько минусов. Двое по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус.

9. Замените звездочки числами так, чтобы сумма любых трех соседних чисел равнялась 20:

$$7,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *,\ *,\ 9.$$

10. Известно, что дробь

$$\frac{В\cdot А\cdot Р\cdot Е\cdot Н\cdot Ь\cdot Е}{К\cdot А\cdot Р\cdot Л\cdot С\cdot О\cdot Н}$$

равна целому числу, где разные буквы обозначают разные цифры, а между цифрами стоит знак умножения. Чему равна дробь?

11. Три охотника варили кашу. Один положил 2 кружки крупы, второй — 1 кружку, а у третьего крупы не было. Они съели кашу поровну. Третий охотник и говорит: «Спасибо за кашу! У меня остались 5 патронов,— и вот вам задача: как поделить патроны в соответствии с вашим вкладом?»

12. На озере росли лилии. Каждый день их число удваивалось, и на 20-й день заросло все озеро. На какой день заросла половина озера?

13. Есть две сковородки. На каждой помещается один блин. Надо пожарить три блина с двух сторон. Каждая сторона блина жарится одну минуту. За какое наименьшее время можно это сделать?

14. Два мальчика хотели купить книгу. Одному из них не хватило 27 копеек, а второму — одной копейки. Они сложили свои деньги, но денег все равно не хватило. Сколько стоит книга?

15. Одна кастрюля вдвое выше другой, зато вторая вдвое шире первой, в какую из них больше войдет воды?

16. Шоколадка стоит рубль и еще полшоколадки. Сколько стоит шоколадка?

Образцы задач матбоя для VIII—IX классов

1. Какое наименьшее число выстрелов всегда достаточно, чтобы попасть в четырехклеточный корабль при игре в «морской бой»?

2. Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

3. На сторонах произвольного многоугольника произвольным образом расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.

4. Докажите, что среднее арифметическое двух последовательных простых чисел не является простым числом.

5. На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка AB. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки A не равна сумме расстояний от этих точек до точки B.

6. Дано 100 положительных чисел. Известно, что произведение любых семи из них больше 1. Докажите, что произведение всех чисел больше 1.

7. Путешественник отправился из родного города A в самый удаленный от него город страны B, затем из B — в самый удаленный от него город C и т. д. Докажите, что если C не совпадает с A, то путешественник никогда не вернется домой. (Расстояния между городами различны.)

8. В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых (в соседних углах) и 2 черных. Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам) поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?

9. На стороне угла дана точка A. Постройте на этой же стороне точку M, которая одинаково удалена от точки A и от другой стороны угла.

10. По кругу расставлены 10 точек. Двое по очереди соединяют их отрезками. Начало первого отрезка — в любой точке, а каждый следующий отрезок начинается из конца предыдущего. Проигрывает тот, кто не может провести новый отрезок (дважды проводить отрезок нельзя, а пересекать — можно). Предположим, что игроки не делают ошибок. Кто из них победит: первый или второй?

Примечание

Задачи 4 и 9 кажутся простыми, однако в них есть «подводные камни».

Ответы к задачам конкурса капитанов

1. 900. **2.** Первый каждым ходом берет столько спичек, чтобы остаток делился на 3. **3.** 81. **4.** 1 кг. **5.** См. рис. 3. **6.** $x=0{,}0105$. **7.** 14. **8.** Первый ходит в центр, а затем ходит симметрично второму. **9.** 7, 9, 4, 7, 9, 4, 7, 9. **10.** 0. **11.** Все патроны надо дать первому охотнику. **12.** За 19 дней. **13.** За 3 мин. **14.** 27 коп. **15.** В широкую войдет вдвое больше. **16.** 2 р.

Краткие решения задач матбоя

1. Будем располагать выстрелы по параллельным диагоналям с интервалом 3 клетки начиная с диагонали

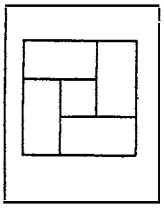


Рис. 3

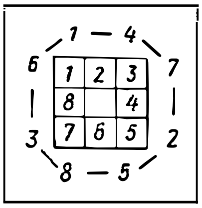


Рис. 4

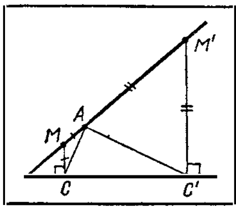


Рис. 5

a4—г1. Понятно, что четырехклеточному кораблю (крейсеру) укрыться будет негде. Получаем, что 24 выстрелов всегда достаточно. Покажем, что 24 выстрела сделать необходимо. Для этого разместим на доске 24 крейсера без наложений. Кстати, мы заодно доказали, что на доске 10×10 нельзя разместить 25 крейсеров без наложений (иначе не хватило бы 24 выстрелов).

2. Обозначим $N_Б$ — число блондинов, $N_Г$ — число голубоглазых, $N_{БГ}$ — число голубоглазых блондинов, $N_В$ — число всех людей. Тогда по условию:

$$\frac{N_{БГ}}{N_Г} > \frac{N_Б}{N_В} \Rightarrow \frac{N_{БГ}}{N_Б} > \frac{N_Г}{N_В}.$$

Итак, доля голубоглазых среди блондинов больше, чем доля голубоглазых среди всех людей.

3. У каждой стрелки одно начало и один конец, значит, число всех начал равно числу концов, поэтому число вершин с двумя началами равно числу вершин с двумя концами (поскольку в остальных вершинах сходятся одно начало и один конец, т. е. поровну).

4. Задача кажется простой, поскольку по определению последовательных простых чисел между ними нет простых чисел. Но вот неожиданный вопрос: «Почему среднее арифметическое двух чисел лежит между ними?» Нагляднее всего это можно доказать так: пусть $a<b$, тогда

$$a=\frac{a+a}{2}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{b+b}{2}=b.$$

5. Заметим, что расстояния от любой точки до A и до B отличаются на длину отрезка AB При переходе от точки A к точке B все расстояния от «левых» точек увеличиваются, а от «правых» — уменьшаются на длину отрезка AB. Но число точек слева не равно числу точек справа, следовательно, сумма расстояний до точки B будет отличаться от суммы расстояний до точки A по крайней мере на величину отрезка AB.

6. Заметим, что количество чисел, меньших 1, не больше 6, а все остальные числа больше 1. Перемножим все числа, меньшие 1, и еще несколько чисел, чтобы всего было 7 чисел. Их произведение больше 1, а все остальные числа больше 1, значит, произведение всех чисел больше 1.

7. Если путник из B не вернулся в A, то расстояние BC строго больше AB, а каждое следующее расстояние не меньше предыдущего. (Почему нельзя сказать: «больше предыдущего», ведь все расстояния различны?) Если бы путник потом вернулся в A, то последнее расстояние было бы больше AB, а это противоречит тому, что B — самый дальний город для A.

8. Построим схему движения коней по клеткам. Для этого занумеруем клетки и выпишем их номера в том порядке, в котором конь может их обойти. На схеме (рис. 4) видно, что кони «бегают по кругу», т. е. любой ход коня не меняет порядка следования их цветов на схеме, а значит, нельзя изменить чередование их цветов в углах доски.

9. Пусть M — искомая точка (рис. 5). Опустим из нее перпендикуляр на другую сторону угла и получим точку C. Можно выразить углы $\triangle AMC$ через величину исходного угла, а тогда легко построить точки C и M. Но «соль» задачи состоит в том, что у нее есть два решения, одно из которых обычно теряют: точку M можно отложить по разные стороны от точки A.

10. Выигрывает начинающий: первым ходом он соединяет любые точки A и B, а затем проводит отрезок либо к точке A, либо к B. Это всегда возможно, поскольку второй игрок вынужден каждый раз ходить в новую точку, которая еще не была соединена с точками A и B. При такой стратегии начинающий не может проиграть, а ничья невозможна, поскольку число отрезков конечно.

Об одном методе построения графиков тригонометрических функций (метод рамок)

Е. П. Кузнецова (Минск)

В школьном курсе математики преобразования параллельного переноса и растяжения (сжатия) к осям Ox и Oy вводятся на отдельных примерах и систематизируются только в материале для повторения учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9—10».

Учащиеся обычно хорошо понимают, что точка с координатами $(x_0; y_0)$ при параллельном переносе на вектор $\bar{r}(a; b)$ переходит в точку $(x_0+a; y_0+b)$. Но что уравнение функции вида $y=f(x)$ под действием этого вектора получит вид $y=f(x-a)+b$, усваивается обычно труднее. Мы предлагаем разъяснить это следующим образом.

На рис. 1 построен график (1) функции $y=f(x)$, при параллельном переносе $\bar{r}(a, b)$ он принимает вид (2). Линия (2) является графиком некоторой функции. Требуется задать эту функцию уравнением. Критерием же истинности найденного уравнения является сводимость его к числовому равенству $y_0=f(x_0)$, которое, как видно на рис. 1, безусловно верно.

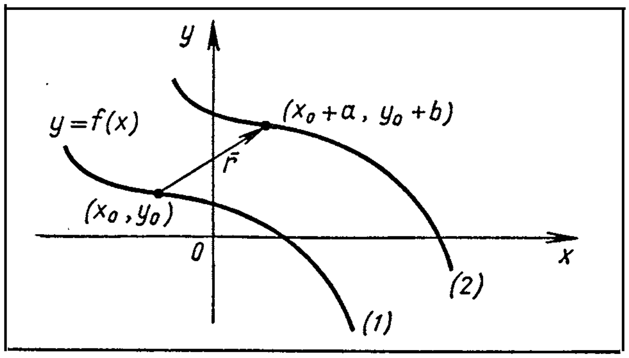


Рис. 1

Учащиеся обычно по аналогии с характером изменения координат точки под воздействием вектора $\bar{r}(a; b)$ предлагают в качестве уравнения для функции (2) следующее: $y=f(x+a)+b$. Подставив в это уравнение вместо x и y координаты точки $(x_0+a;\ y_0+b)$, которые должны удовлетворять ему, убеждаемся, что получили неверное равенство $y_0=f(x_0+2a)$. После этого учащиеся, как правило, называют уравнение $y=f(x-a)+b$. Подставив координаты точки $(x_0+a;\ y_0+b)$ в это уравнение, получим $y_0=f(x_0)$ — истинное равенство при любых a и b.

Аналогичные рассуждения используем при рассмотрении преобразования растяжения (сжатия) к оси Ox с коэффициентом $k_{Ox}=n$. Точка $(x_0;\ y_0)$ преобразуется при этом в точку $(x_0;\ ny_0)$. А как преобразуется уравнение функции $y=f(x)$? Учащиеся называют уравнение $y=nf(x)$. Подставив в уравнение координаты точки $(x_0;\ ny_0)$, убеждаемся в правильности этого утверждения.

При рассмотрении растяжения (сжатия) к оси Oy с коэффициентом $k_{Oy}=m$, отображающего точку $(x_0;\ y_0)$ в точку $(mx_0;\ y_0)$, учащиеся считают, что уравнение $y=f(x)$ преобразуется в уравнение $y=f(mx)$. Но подстановка координат точки $(mx_0;\ y_0)$ в уравнение приводит к неверному равенству. После некоторых размышлений учащиеся предлагают верное уравнение $y=f\left(\frac{x}{m}\right)$, в справедливости которого убеждает проверка.

После изучения этих преобразований полезно рассмотреть различные цепочки данных преобразований (композиции). Например:

1) $\bar{r}(a;\ b),\ k_{Ox}=n,\ k_{Oy}=m;$
2) $\bar{r}(a;\ b),\ k_{Oy}=m,\ k_{Ox}=n;$
3) $k_{Ox}=n,\ \bar{r}(a;\ b),\ k_{Oy}=m;$
4) $k_{Oy}=m,\ \bar{r}(a;\ b),\ k_{Ox}=n;$
5) $k_{Ox}=n,\ k_{Oy}=m,\ \bar{r}(a;\ b);$
6) $k_{Oy}=m,\ k_{Ox}=n,\ \bar{r}(a;\ b).$

Задача состоит в том, чтобы в каждом из этих случаев выяснить вид, к которому сведется уравнение $y=f(x)$ под воздействием той или иной последовательности преобразований.

Приведем решение для случаев (1) и (6).

1) $y=f(x)\to y=f(x-a)+b\to y=n(f(x-a)+$ $+b)\to y=n\left(f\left(\frac{x}{m}-a\right)+b\right).$

6) $y=f(x)\to y=f\left(\frac{x}{m}\right)\to y=nf\left(\frac{x}{m}\right)\to y=$ $=nf\left(\frac{x-a}{m}\right)+b.$

Очевидно, что результаты получились различными. Особенно убедительно это различие демонстрируется на примере преобразования координат конкретной точки, например (2; 1). Если задать $\bar{r}(1;\ 4)$, $k_{Ox}=2$, $k_{Oy}=3$, то по цепочке (1) получим:

$(2;\ 1)\to(3;\ 5)\to(3;\ 10)\to(9;\ 10)$,
а по цепочке (6):
$(2;\ 1)\to(6;\ 1)\to(6;\ 2)\to(7;\ 6)$.

Однако основная цель здесь заключается в том, чтобы по виду уравнения некоторой функции $y=af(bx+c)+d$ выделить одну из последовательностей преобразований исходной функции $y=f(x)$.

Так, от функции $y=f(x)$ можно перейти к функции $y=af(bx+c)+d$ путем, например, таких последовательностей преобразований:

$$k_{Ox}=a,\ k_{Oy}=\frac{1}{b},\ \bar{r}\left(-\frac{c}{b};\ d\right);$$
$$k_{Ox}=a,\ \bar{r}(-c;\ d),\ k_{Oy}=\frac{1}{b};$$
$$\bar{r}\left(-c;\frac{d}{a}\right),\ k_{Ox}=a,\ k_{Oy}=\frac{1}{b}.$$

Первую из них можно получить таким образом:

$$y=af\left(b\left(x+\frac{c}{b}\right)\right)+d \text{ или } y=af\left(\frac{x+c/b}{1/b}\right)+d.$$

Теперь становится понятным, что функция $y=f(x)$ была подвергнута следующим преобразованиям: растяжению (сжатию) к оси Ox с $k_{Ox}=a$, растяжению (сжатию) к оси Oy с $k_{Oy}=\frac{1}{b}$ и параллельному переносу на вектор $r\left(-\frac{c}{b};\ d\right)$.

На конкретных примерах:

а) $y=5\sin(2x+8)-7;$
б) $y=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{3}+1\right)+5;$
в) $y=11\ \mathrm{tg}\,(3x-2)+8;$
г) $y=4\log_3(5x+8)-6$

учащиеся закрепляют умение выделять преобразования по виду уравнения:

а) $k_{Ox}=5,\ k_{Oy}=\frac{1}{2},\ \bar{r}(-4;\ -7);$
б) $k_{Ox}=\frac{1}{2},\ k_{Oy}=3,\ \bar{r}(-3;\ 5);$
в) $k_{Ox}=11,\ k_{Oy}=\frac{1}{3},\ \bar{r}\left(\frac{2}{3};\ 8\right);$
г) $k_{Ox}=4,\ k_{Oy}=\frac{1}{5},\ \bar{r}\left(-\frac{8}{5};\ -6\right).$

Переходим к разъяснению метода рамок. Основная идея этого метода состоит: 1) в выделении с помощью прямоугольной рамки определенной части графика тригонометрической функции на промежутке длиной в период и 2) в фиксировании на этой части графика определенных точек (нули функции, точки экстремума), расположение которых не меняется по отношению к рамке при преобразованиях сдвига и сжатия.

Например, для функции $y=\sin x$ выделяются части графика на промежутках $[-\pi;\ \pi]$ или $[0;\ 2\pi]$ (рис. 2) и заключаются в прямоугольные рамки. Отмечаем, что ось Ox является осью симметрии рамок и нули функции расположены по краям отрезка оси Ox, заключенного

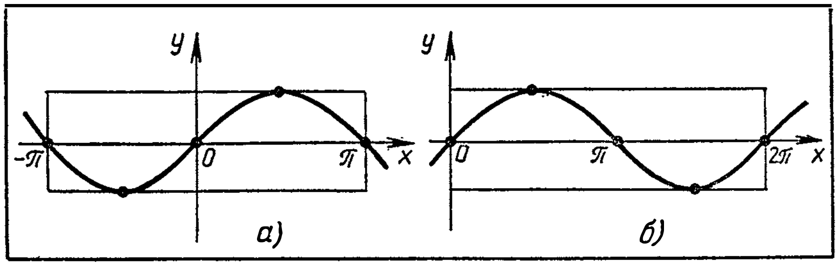


Рис. 2

в рамке и в его середине. Длина всей рамки (вдоль Ox) равна периоду функции, а высота — двум единицам, т. е. двум максимальным значениям функции. Замечаем, где и как на рамке расположены точки максимума и минимума в случае (а) и (б). Обращаем внимание учащихся, что если график функции подвергнуть растяжениям (или сжатиям), а также параллельному переносу, то изменяются размеры рамки и ее место относительно осей координат, но расположение нулей и точек экстремума по отношению к краям и оси симметрии рамки не изменится (т. е. сохранится отношение длин отрезков).

Исходя из сказанного, предлагается следующий способ построения графика функции вида $y=a\sin(bx+c)+d$.

Сначала преобразуем уравнение функции, вынеся множитель b за скобки: $y=a\sin b\left(x+\frac{c}{b}\right)+d$, и прочитаем по нему координаты параллельного переноса $\bar{r}\left(-\frac{c}{b};d\right)$, коэффициент растяжения (сжатия) к оси Ox — $k_{O_x}=a$, коэффициент растяжения (сжатия) к оси Oy — $k_{O_y}=\frac{1}{b}$. Определим теперь размеры рамки: длина равна длине периода $T=T_0\cdot k_{O_y}=2\pi\cdot\frac{1}{b}$, высота равна $2k_{O_x}=2a$.

Зная новое положение и размеры рамки, строим ее и вписываем в нее по пяти опорным точкам синусоиду (рис. 3). Понятно, что при желании график можно продолжить за пределы рамки.

Рассмотрим конкретный пример и запись его решения.

Построить график функции $y=\frac{5}{2}\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{3}\right)-3$.

Решение (используем вариант рамки б): $y=2{,}5\sin\frac{1}{3}(x+4)-3$, $\bar{r}(-4;\ -3)$, $k_{O_x}=2{,}5$, $k_{O_y}=3$, $T=2\pi\cdot3\approx18$. Выполняем рис. 4.

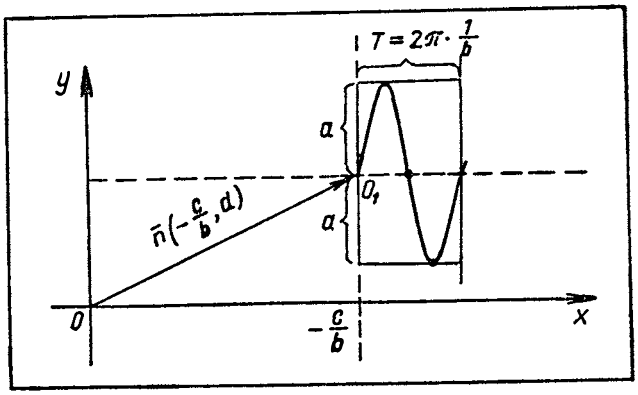


Рис. 3

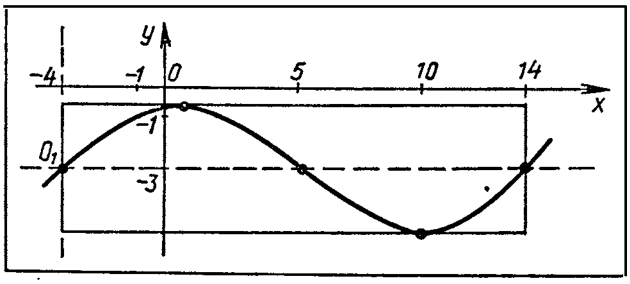


Рис. 4

Аналогично за основу построения графиков вида $y=a\cos(bx+c)+d$ берется изображение графика функции $y=\cos x$ на одном из промежутков $[-\pi;\ \pi]$ или $[0;\ 2\pi]$, заключенное в прямоугольную рамку, в которой отмечено расположение нулей функции, а также максимума и минимума. Рамку подвергают растяжениям (сжатиям) и сдвигу, а затем вписывают в нее по пяти опорным точкам линию нового графика. «Портреты» графика косинуса на промежутке длиной в период могут использоваться также в двух вариантах (рис. 5).

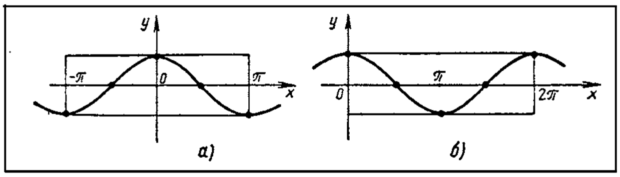


Рис. 5.

Пример. *Построить график функции* $y=7\cos(2x-6)-4$.

Решение (используем вариант рамки б):

$y=7\cos 2(x-3)-4$, $\bar{r}(3;\ -4)$, $k_{Ox}=7$, $k_{Oy}=\frac{1}{2}$, $T=T_0k_{Oy}=2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi\approx3$. Выполняем рис. 6.

Несколько иначе приходится выделять рамку для графика функции $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 7).

Замечаем, что в точках $-\pi/4$ и $\pi/4$, которые расположены посередине между нулем и вертикальными асимптотами, функция принимает значения -1 и 1. Таким образом, ширина рамки составляет половину периода функции, а высота равна двум коэффициентам растяжения (сжатия) к оси Ox. По виду уравнения выяснив координаты сдвига и коэффициенты растяжений (сжатий), вычисляем длину нового периода функции $T=T_0k_{Oy}=\pi k_{Oy}$, а также его четверть $T/4$. Откладывая вправо и влево от нового начала отсчета по четверти периода, получим ширину рамки, а от границ рамки, отложив вдоль оси Ox еще $T/4$ вправо и влево, получаем положение вертикальных асимптот искомого графика. Высота рамки равна $2k_{Ox}$.

Пример. *Построить график функции* $y=4\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+1\right)-2$.

Решение:

$y=4\operatorname{tg}\frac{1}{3}(x+3)-2$, $\bar{r}(-3;\ -2)$, $k_{Ox}=4$, $k_{Oy}=3$, $T=T_0k_{Oy}=\pi\cdot3\approx9$, $T/4\approx2\frac{1}{4}$. Выполняем рис. 8.

Рис. 6

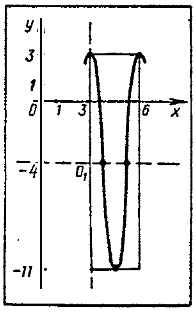


Рис. 7

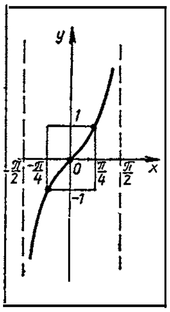
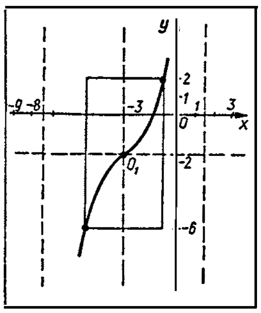


Рис. 8



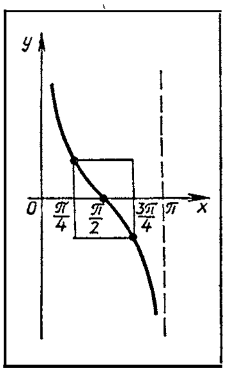


Рис. 9.

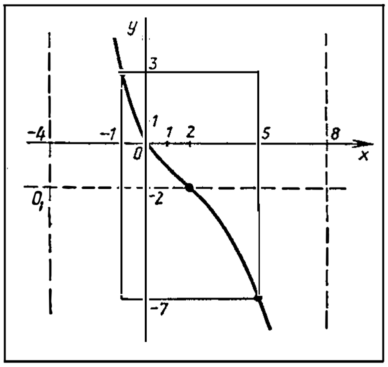


Рис. 10

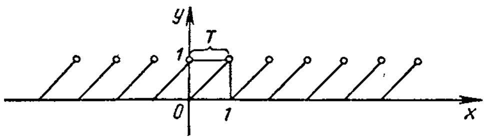
Особо указываем учащимся, что график функции $y=a\operatorname{tg}(bx+c)+d$ не считается построенным, если не указано положение вертикальных асимптот, ограничивающих период. Обращаем внимание также на то, что все числовые характеристики подписываются только на осях исходной системы координат.

Для построения графика котангенса также используется четверть периода. Рамка для этой функции изображена на рис. 9.

При построении графика $y=5\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4}+1\right)-2$ выяснив, что $k_{Ox}=5$, $k_{Oy}=4$, $\bar{r}(-4;\ -2)$ и построив вспомогательную систему координат, полученную сдвигом на $\bar{r}(-4;\ -2)$ основной, откладываем от точки $O_1(-4;\ -2)$ вдоль оси Ox четыре раза $\frac{T}{4}=\frac{\pi\cdot4}{4}=\pi\approx3$. Через первое и второе деление проводим прямые, перпендикулярные оси Ox и откладываем на них (вверх и вниз от горизонтали) по 5 единиц. Получив таким образом прямоугольник размером $\pi\times10$, строим график котангенса и вертикальные асимптоты (рис. 10).

Для закрепления полученного навыка можно предложить учащимся *построить по тому же принципу график любой периодической функции*, например $y=5\left\{\frac{x}{2}+3\right\}-7$. Построение ведется на базе графика $y=\{x\}$ и выделенного в рамку его участка на промежутке длиной в период (рис. 11).

Рис. 11



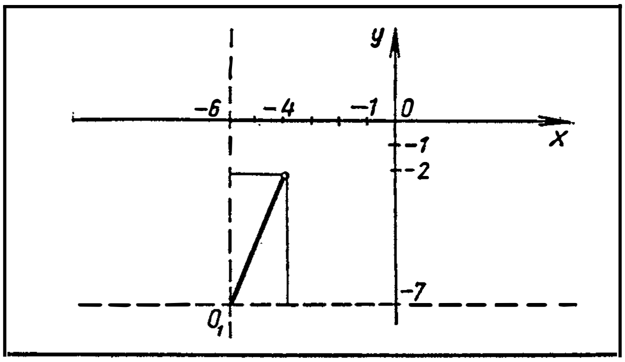


Рис. 12

Решение (рис. 12):

$y=5\left\{\frac{1}{2}(x+6)\right\}-7$, $k_{Ox}=5$, $k_{Oy}=2$, $\bar{r}(-6;-7)$; $T=T_0k_{Oy}=1\cdot 2=2$.

Как показывает практика преподавания, этот метод хорошо и быстро усваивается учащимися школы и студентами[1]. Все отмечают его простоту, удобство (не надо рисовать лишнего) в сравнении с ранее изученными способами. Метод хорош и тем, что учителю легко проверить соответствие построенного графика заданному уравнению.

Этот метод может быть распространен и на другие, не только периодические, функции, но именно для периодических функций его применение наиболее целесообразно.

От редакции. Для построения графиков сдвинутых гармонических колебаний $y=A\cos(kx+b)+C$ есть более короткий способ. Поскольку уже доказано, что коэффициенты A и k определяют растяжение по осям координат, а коэффициенты b и C — сдвиги по этим осям, то $A+C\leqslant y\leqslant C-A$ и период $T=\frac{2\pi}{k}$. Далее достаточно указать положение точки максимума. Самое простое: $kx+b=0$, откуда $x=-\frac{b}{k}$. Через период точки максимума повторяются, а посередине между ними — точки минимума. Для построения графика этого достаточно.

[1] С этим методом в течение ряда лет знакомятся студенты физического факультета Минского педагогического института (специальность «Физика и математика») на занятиях по методике преподавания математики и на практикуме по решению математических задач.

Использование тождеств в решении задач

С. Л. Манукян, (с. Малый Памач ГССР)

Для решения задач, составления новых задач используют различные формулы. Иногда такими формулами являются тождества.

Рассмотрим сумму $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, возведем ее в квадрат: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a+b+c)}{abc}$. Если $a+b+c=0$, то $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ или $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$, где $c=-(a+b)$.

Выполнив подстановку, получим:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right| \quad (1).$$

Если в тождестве (1) a заменить $\frac{1}{a}$ или a и b — $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$ соответственно, то придем к двум новым тождествам:

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}}=\left|a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right| \quad (2),$$

$$\sqrt{a^2+b^2+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}}=\left|a+b-\frac{ab}{a+b}\right| \quad (3).$$

Применим полученные тождества в решении задач.

1) Упростить выражение:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}+\sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{(a^2+b^2)^2}}}.$$

Согласно тождеству (1) данное выражение есть не что иное, как $\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right|$.

2) Найти сумму:

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots$$

$$\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}.$$

Так как $1=\frac{1}{1^2}$, то, используя (1), имеем:

$$S=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\right)=1+1+\ldots+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+n-\frac{1}{n}=$$

$$=\frac{2n^2+n-2}{2n}.$$

3) Вычислить: $\sqrt{1+1988^2+\frac{1988^2}{1989^2}}+\frac{1988}{1989}$.

Преобразуем подрадикальное выражение:

$$\sqrt{1+1988^2+\frac{1988^2}{1989^2}}=\sqrt{1988^2+\frac{1}{1^2}+\frac{1988^2}{(1988\cdot 1+1)^2}}.$$

Применив тождество (2), получим:

$$\sqrt{1988^2+\frac{1}{1^2}+\frac{1988^2}{(1988\cdot 1+1)^2}}+\frac{1988}{1989}=1988+$$

$$+1-\frac{1988}{1989}+\frac{1988}{1989}=1989.$$

4) Решить уравнение: $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=a$.

Прибавим к обеим частям уравнения 1 и используем тождество (2):

$$x^2+\frac{1}{1^2}+\frac{x^2}{(x\cdot 1+1)^2}=a+1,$$

$$\left(x+1-\frac{x}{x+1}\right)^2=a+1.$$

Далее решаем обычным способом.

5) Вычислить: $\sqrt{0{,}47^2+0{,}53^2+0{,}47^2\cdot 0{,}53^2}$.

Преобразуем подрадикальное выражение и применим тождество (3):

$$\sqrt{0{,}47^2+0{,}53^2+0{,}47^2\cdot 0{,}53^2}=$$

$$=\sqrt{0{,}47^2+0{,}53^2+\frac{0{,}47^2\cdot 0{,}53^2}{(0{,}47+0{,}53)^2}}=0{,}47+0{,}53-$$

$$-\frac{0{,}47\cdot 0{,}53}{0{,}47+0{,}53}=0{,}7509$$

6) Доказать, что выражение $a^2+(a-1)^2+a^2(a-1)^2$ является точным квадратом.

Согласно тождеству (3) имеем:

$$a^2+(a-1)^2+a^2(a-1)^2=a^2+(1-a)^2+a^2(1-a)^2=$$

$$=a^2+(1-a)^2+\frac{a^2(1-a)^2}{(a+(1-a))^2}=(a+1-a-$$

$$-\frac{a(1-a)}{a+(1-a)}\Big)^2=(a^2-a+1)^2.$$

Упражнения для самостоятельного решения

1) Доказать, что

$$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}=$$

$$=\left|\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right|.$$

2) Доказать, что выражение $(a^2b^2+1)(ab+1)^2+a^2b^2$ является точным квадратом.

3) Вычислить: $\sqrt{1+\underbrace{99\ldots9}_{n}{}^2+0{,}\underbrace{99\ldots9}_{n}{}^2}$.

Площадь четырехугольника

Б. С. Прицкер (Киев)

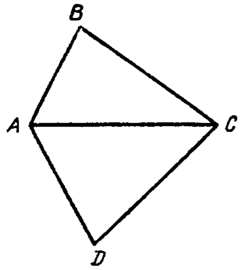
Хочу предложить вашему вниманию материал, в котором рассматривается способ вычисления площадей выпуклых многоугольников (четырехугольников). Школьная программа предусматривает вычисление площадей фактически двух видов выпуклых четырехугольников: параллелограмма и трапеции. Для четырехугольника, не являющегося параллелограммом или трапецией, формула нахождения его площади не выводится. В то же время применение такой формулы для решения ряда задач было бы удобным. Имеется в виду формула вычисления площади произвольного выпуклого четырехугольника, которую можно назвать аналогом формулы Герона, учитывая их некоторое внешнее сходство.

Докажем следующую теорему: площадь произвольного выпуклого четырехугольника может быть определена по формуле:

$$S=\sqrt{A-abcd\cos^2\frac{\delta+\beta}{2}},$$

где $A=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$, a, b, c, d — длины сторон, p — полупериметр, δ и β — противолежащие углы четырехугольника.

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$; $\angle ABC=\beta$, $\angle ADC=\delta$ (см. рисунок). Из



$\triangle ABC$ в силу теоремы косинусов $AC^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta$. Из $\triangle ADC$: $AC^2=c^2+d^2-2cd\cos\delta$. Приравнивая правые части этих выражений, получим: $a^2+b^2-2ab\cos\beta=c^2+d^2-2cd\cos\delta$, или $a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\times\cos\beta-2cd\cos\delta$ (1). Найдем площадь четырехугольника $ABCD$ как сумму площадей треугольников ABC и ADC: $S=\frac{1}{2}ab\sin\beta+\frac{1}{2}cd\sin\delta$, откуда $4S=2ab\sin\beta+2cd\sin\delta$ (2). В равенствах (1) и (2) обе части возведем в квадрат, а затем почленно сложим:

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+16S^2=(2ab\cos\beta-$$

$$-2cd\cos\delta)^2+(2ab\sin\beta+2cd\sin\delta)^2.$$

Выполним равносильные преобразования, получим

$$S=\sqrt{A-abcd\cos^2\frac{\delta+\beta}{2}},$$

что и требовалось доказать.

Теорема имеет ряд следствий.

Следствие 1. Площадь произвольного четырехугольника, вписанного в окружность, вычисляется по формуле:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Доказательство сразу следует из теоремы, рассмотренной выше, с учетом того, что сумма противолежащих углов вписанного в окружность четырехугольника равна 180°, т. е. $\beta+\delta=180°$, $\cos\frac{\beta+\delta}{2}=\cos 90°=0$. Поэтому $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

Следствие 2. Площадь произвольного четырехугольника, описанного около окружности, вычисляется по формуле:

$$S=\sqrt{abcd\sin^2\frac{\delta+\beta}{2}}.$$

Доказательство. Так как у описанного четырехугольника суммы противолежащих сторон равны, т. е. $a+c=b+d$, то $p-a=c$; $p-b=d$; $p-c=a$; $p-d=b$. Имеем: $S=$

$$=\sqrt{abcd-abcd\cos^2\frac{\delta+\beta}{2}}=$$

$$=\sqrt{abcd\left(1-\cos^2\frac{\delta+\beta}{2}\right)}=\sqrt{abcd\sin^2\frac{\delta+\beta}{2}}.$$

Следствие 3. Площадь четырехугольника, вписанного в окружность и описанного около окружности, может быть вычислена по формуле: $S=\sqrt{abcd}$.

Доказательство. Так как $a+c=b+d$ и в силу следствия 1

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},\text{ то}$$

$$S=\sqrt{\frac{c+d+b-a}{2}\cdot\frac{c+d+a-b}{2}\cdot\frac{a+b+d-c}{2}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{a+b+c-d}{2}}=\sqrt{\frac{2c}{2}\cdot\frac{2d}{2}\cdot\frac{2a}{2}\cdot\frac{2b}{2}}=\sqrt{abcd}.$$

ЗАДАЧИ

Редакция журнала горячо поздравляет победителей конкурса, посвященного 200-летию Великой французской революции (Математика в школе. 1989. № 5), Л. Л. ЛИНЧУКА из Черновцов и В. А. ЯСИНСКОГО из Винницы и желает им больших творческих успехов.

Напоминаем читателям, что решение алгебраических задач (их 12) и геометрических (их 8) следует присылать в отдельных конвертах с соответствующей пометкой «Алгебра» или «Геометрия». В каждый из них просим вложить две сводки — общую и по соответствующему разделу.

Все геометрические задачи этого номера относятся к так называемой «Японской храмовой геометрии» (заимствованы из книги «Japanese Temple Geometry Problems» H. Fukugawa and D. Pedoe, Winnipeg, Canada, 1989). Эти задачи появились в Японии в «период Эдо» (1603—1867), когда эта страна находилась в состоянии изоляции от остального мира. Они изображались на специальных досках («САНГАКУ») и вывешивались в храмах и усыпальницах. Авторы теорем, изображенных на этих досках, дарили свои открытия почитаемому богу и одновременно демонстрировали свои достижения другим любителям геометрии. Каждый автор старался не только предъявить теорему, но и как можно красивее оформить свою доску. Доказательств, как правило, не было. Зрителю бросался вызов: «Смотри и, если можешь, докажи!» (К сожалению, мы, вопреки японским традициям, по понятным причинам, даем словесные формулировки без «картинки».)

Решения задач этого номера должны быть отправлены в редакцию не позднее 1 ноября 1990 г. О правилах оформления решений см. в № 2 журнала за 1990 г. на с. 77

Задачи для V—IX классов

3461. *Найти двузначное число, которое на 6 меньше квадрата суммы своих цифр.*

Н. К. Антонович (Новосибирск)

3462. *Произведение числа на его обращенное равно 692443. Найти это число.*

Н. К. Антонович

3463. *Представить число* $533\ldots33^2+1$ *в виде удвоенной суммы двух квадратов натуральных чисел.*

В. Ф. Ткачев (Воронежская обл., пос. Рамонье)

3464. *Доказать, что из чисел*

$2a+b-2\sqrt{cd}$, $2b+c-2\sqrt{da}$, $2c+d-2\sqrt{ab}$, $2d+a-2\sqrt{bc}$

хотя бы два положительны (a, b, c и d — положительны).

Р. Л. Гулиев (АзССР, пос. Говлар)

3465. *Существуют ли натуральные числа x, y, z, для которых* $x^2+y^3+z^4=287^{13}$?

Математический кружок Говларской шк. (рук. Р. Л. Гулиев)

3466. *Доказать, что при x, y, $z>0$*

$$x^2+y^2+z^2=3\sqrt{xyz}\Rightarrow 3\sqrt{xyz}\leqslant x+y+z\leqslant 3.$$

Р. П. Ушаков (Киев)

3467. *В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит этот треугольник на два. Доказать, что сумма радиусов окружностей, вписанных в исходный треугольник и два получившихся, равна высоте исходного треугольника.*

3468. *На прямой взяты две точки A и B. Две окружности касаются этой прямой в точках A и B и касаются между собой. Третья окружность касается первых двух внешним образом и прямой AB. Найти радиус окружности, проходящей через A и B и касающейся третьей окружности, если AB=a.*

Задачи для X—XI классов

3469. *Решить уравнение*

$$7^{\log_6(x-1)}-5^{\log_7(x+1)}=2.$$

Р. Ш. Пиркулиев (г. Сумгаит)

3470. *Вычислить значение выражения*

$$\sum_{k=0}^{11}\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right]$$

при $x=1991$.

Р. Ш. Пиркулиев

3471. *Решить систему уравнений*

$$\sin y-\sin x=x-y,\ \sin y-\sin z=z-y,\ x-y+z=\pi.$$

Р. Л. Гулиев

3472. *Имеет ли предел последовательность с общим членом*

$$x_n=\cos\left(\pi n\sqrt[3]{n^3+3n^2+n+1}\right)?$$

Р. П. Ушаков

3473. *Сторона AD квадрата ABCD отображена симметрично относительно некоторой прямой. При этом A и D перешли в точки A′ и D′ такие, что D′ расположена на отрезке BC и отрезок A′D′ пересекается со стороной AB в точке E. Доказать, что радиус окружности, вписанной в треугольник EBD′, равен A′E.*

3474. *На прямой расположены последовательно три точки A, B и C. Отрезки AB и AC служат диаметрами двух* *окружностей, на большей окружности взята точка M такая, что $BM = MC$. Третья окружность касается отрезка BM, а также двух первых окружностей. Доказать, что перпендикуляр, проведенный из центра третьей окружности на прямую AC, проходит через точку B.*

3475. *В окружности радиуса r проведен диаметр AB. Произвольная окружность с центром в B пересекает AB в точке C. Через C проведена прямая, перпендикулярная AB. Найти радиус наибольшей окружности, касающейся этой прямой, а также первой окружности внутренним образом, а второй внешним образом (при изменении радиуса второй окружности).*

3476. *В окружности проведены диаметр AB и перпендикулярная ему хорда CD, пересекающая диаметр в точке E. Пусть M — некоторая точка отрезка AE, а радиус окружности, касающейся данной внутренним образом, отрезка MD и продолжения CM, равен r. Доказать, что*

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{AM}+\frac{1}{ME}.$$

Конкурсные задачи

3477. *Существует ли многочлен с целыми коэффициентами, осуществляющий отображение, инъективное (обратимое) на множестве $\mathbb{Q}$, но не инъективное на множестве $\mathbb{R}$?*

Л. Д. Курляндчик (Ленинград)

3478. *Доказать, что последовательность*

$$\sqrt{13},\ \sqrt{13+\sqrt{5}},\ \sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13}}},\ \sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{5}}}},\ldots$$

сходится, и найти ее предел.

Л. Д. Курляндчик

3479. *На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, равны. Найти AD, если $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$.*

3480. *В треугольнике ABC сторона AB меньше стороны AC. На стороне BC взята точка B' такая, что $AB'=AB$. Доказать, что радиус окружности, касающейся отрезков AB', $B'C$, а также изнутри описанной около ABC окружности, в два раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник $AB'C$.*

Решение задач, помещенных в № 6 за 1989 г.

3381. *Можно ли заменить в равенстве*

$$\text{ДРА}+\text{КОН}+\text{ЗМЕЯ}=1989+1990+1991$$

различные буквы различными цифрами так, чтобы получилось верное числовое равенство?

Решение. Из доказательства признака делимости на 9 следует, что разность между числом и суммой его цифр делится на 9 и, следовательно, разность между левой частью данного равенства и суммой

$$\text{Д}+\text{Р}+\text{А}+\ldots+\text{Е}+\text{Я}=1+2+\ldots+9=45$$

делится на 9. Поэтому и левая часть делится на 9, тогда как правая часть на 9 не делится, так что ответ на вопрос задачи отрицательный.

3382. *Один из городов нашей страны в этом веке отметит юбилей* (т. е. его «возраст» делится на 25). *При этом сумма цифр года основания в два раза меньше суммы цифр года юбилея, а если записи каждой из этих двух дат разделить точкой с запятой, то получатся четыре простых двузначных числа. О каком городе идет речь?*

Решение. В нашем веке остался лишь один год, две последние цифры которого образуют простое число — 1997, и поэтому сумма цифр года основания города равна 13. Кроме того, вторые цифры года основания образуют число, отличающееся от 97 на 25, 50 или 75, и поскольку это число простое, то оно равно 47. Теперь ясно, что год основания города — 1147 и этот город — Москва.

3383. *Существуют ли целые числа x и y, для которых*

$$1988x^{1989}+1989y^{1990}=1991?$$

Решение. Ясно, что число y должно быть нечетным, а тогда левая часть равенства при делении на 4 дает остаток 1, а правая часть — остаток 3. Поэтому требуемых чисел x и y не существует.

3384. *Является ли сумма*

$$333\ldots33^2+55\ldots544\ldots44^2$$

точным квадратом, если во втором числе число четверок такое же, как в первом число троек, а пятерок на единицу меньше?

Решение. Заметим, что если в числе $a=$ $=333\ldots33$ n цифр, то

$$a^2=\left(\frac{10^{n+1}-1}{3}\right)^2=\frac{10^{2n+2}-2\cdot10^{n+1}+1}{9}=$$
$$=\frac{10^{2n+2}-1}{9}-2\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9}=\underbrace{111\ldots1}_{2n+1}-\underbrace{222\ldots2}_{n},$$

и, вычитая «столбиком», получим

$$\begin{array}{r}111\ldots1111\ldots111\\ 22\ldots222\\ \hline \underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{088\ldots889}_{n}\end{array}$$

откуда

$$\frac{a^2-1}{2}=\underbrace{55\ldots5}_{n-1}\underbrace{44\ldots4}_{n}.$$

Обозначив полученное число через b, будем иметь $a^2=2b+1=(b+1)^2-b^2$, откуда a^2+ $+b^2=(b+1)^2$, так что заданная сумма является точным квадратом.

3385. *Вычислить значение выражения*

$$\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right):\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right),$$

если $3(ab+bc+ca)=2(a^2+b^2+c^2)$.

Решение. Тройки чисел (4, 2, 1) и (11, 8, 2) удовлетворяют указанному в условии ограничению на числа a, b, c, но при этих наборах заданное выражение равно соответственно 65 и 295·247/729 и поэтому не имеет определенного значения.

3386. *Найти наименьшее значение выражения*

$$\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x},$$

если $x, y, z>0$ *и* $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$.

Решение. Заметим сначала, что

$$\frac{x^2}{x+y}=x-\frac{xy}{x+y}\geqslant x-\frac{xy}{2\sqrt{xy}}=x-\frac{\sqrt{xy}}{2},$$

и, обозначив заданное выражение через A, получим, что $A\geqslant x+y+z-\frac{1}{2}$. В силу известного неравенства

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc$$

имеем

$$A\geqslant\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}-\frac{1}{2},$$

т. е. $A\geqslant 1/2$. При $x=y=z=1/3$ получаем $A=1/2$, так что наименьшее значение A равно 1/2.

3387. *Дан параллелограмм ABCD. На прямой AB взята точка M. Прямая, проходящая через M и середину BC, пересекает диагональ AC в точке K. Прямая, проходящая через K и середину AD, пересекает прямую CD в точке P. Доказать, что MP параллельна BC.*

Решение. Пусть для определенности M лежит на стороне AB, как на рис. 1, E и F — середины AD и BC. Поскольку $CL=MB$, то $\frac{AM}{MB}=\frac{AM}{CL}=\frac{AK}{CK}$. Аналогично $\frac{DP}{PC}=\frac{QA}{PC}=\frac{AK}{CK}$. Таким образом, $\frac{AM}{MB}=\frac{DP}{PC}$, т. е. $PC=MB$, что означает параллельность MP и BC.

3388. *Внутри правильного треугольника ABC взята точка O так, что AO:BO:CO=a:b:c, где* $a^2+b^2=c^2$. *Найти угол AOB.*

Рис. 1

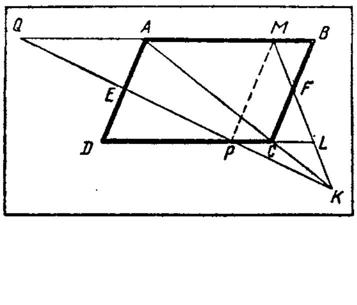
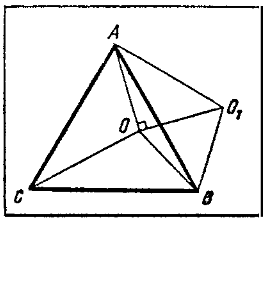


Рис. 2



Решение. Повернем треугольник OBC вокруг вершины B на угол 60° так, чтобы C перешла в A. Пусть при этом точка O перейдет в точку O_1 (рис. 2). Треугольник OBO_1 — равносторонний, в треугольнике AOO_1 имеем $OO_1=BO$, $AO_1=CO$. Из условия следует, что AOO_1 — прямоугольный треугольник, следовательно, $\angle AOB=60°+90°=150°$.

3389. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases}x^3+y^3+x^2(y+z)=xyz+14,\\ y^3+z^3+y^2(z+x)=xyz-21,\\ z^3+x^3+z^2(x+y)=xyz+7.\end{cases}$$

Решение. Сложив уравнения системы, получим равенство

$$2(x^3+y^3+z^3)+x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)-\\-3xyz=0$$

и, заметив, что

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-\\-xy-yz-zx),$$

запишем полученное уравнение в виде

$$(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-xy-yz-zx)=0.$$

Так как при любых x, y, z

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx,$$

то второй множитель равен 0 только при $x=y=z=0$, и, следовательно, можно считать, что $x+y+z=0$.

В этом случае первое и третье уравнение можно записать в виде

$$y(y^2+x^2+xy)=14,\ x(x^2+y^2+xy)=7,$$

откуда $y=2x$, $7x^3=7$ и, следовательно, система имеет единственное решение (1, 2, —3).

3390. *Вычислить интеграл* $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

Решение. Положим

$$a=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx,\ b=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx.$$

Тогда $a+b=\int\limits_0^{\pi/4}1\,dx=\frac{\pi}{4}$,

$$b-a=\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/4}(\ln(\sin x+\cos x))'dx=\ln\sqrt{2},$$

откуда $a=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2$.

3391. **Найти наименьшее значение функции**

$$y=\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1}+$$
$$+\sqrt{2x^2-(\sqrt{3}+1)x+1}.$$

Решение. Поскольку

$$y=\sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}+$$
$$+\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2},$$

то для точек

$$T(x, x),\ A(0, 1),\ B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),\ C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$y=TA+TB+TC$, причем, как легко проверить, ABC — правильный треугольник с центром в точке $O(0, 0)$.

Как известно, наименьшую сумму расстояний до вершин правильного треугольника имеет его центр, т. е. сумма $TA+TB+TC$ принимает наименьшее значение для точки $T(0, 0)$, и поэтому $Y_{наим}=y(0)=3$.

3392. *Доказать, что если периодическая функция при некотором $k \neq \pm 1, 0$ удовлетворяет равенству $f(kx)=kf(x)$ для любого $x \in \mathbf{R}$, то она не имеет наименьшего периода.*

Решение. Пусть $T>0$ — период функции f и $|k|>1$; тогда для любого $x \in \mathbf{R}$

$$f(kx+T)=f(kx)=kf(x),$$
$$f(kx+T)=f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)\right)=kf\left(x+\frac{T}{k}\right),$$

и поэтому

$$f(x)=f\left(x+\frac{T}{k}\right),$$

т. е. $T/|k|$ — также период функции. Следовательно, любое число вида $T/|k|^n$, где $n \in \mathbf{N}$ является периодом f, так что f не имеет наименьшего периода.

При $|k|<1$ из равенств

$$f(kT+x)=f\left(k\left(T+\frac{x}{k}\right)\right)=kf\left(T+\frac{x}{k}\right)=$$
$$=kf\left(\frac{x}{k}\right)=f(x)$$

следует, что $|k|T$, а следовательно, и все числа вида $|k|^nT$ являются периодами функции f, так что и в этом случае f не имеет наименьшего периода.

3393. *Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Провести через C прямую, пересекающую продолжения сторон AB и AD в точках M и K соответственно, так, чтобы $\frac{1}{S_{BCM}}+\frac{1}{S_{DCK}}$ принимало наименьшее значение.*

Решение. Докажем, что искомая прямая параллельна BD. Проведем через C прямую, параллельную BD, и обозначим через M_0 и K_0 ее точки пересечения с прямыми AB и AD (рис. 3). Пусть теперь некоторая прямая пересекает отрезок BM_0 в точке M, а прямую AD в точке K. Нам надо доказать, что

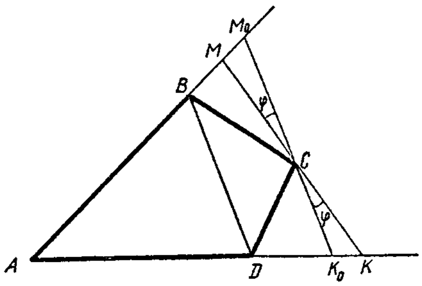


Рис. 3

$$\frac{1}{S_{BMC}}+\frac{1}{S_{DCK}}>\frac{1}{S_{BCM_0}}+\frac{1}{S_{DCK_0}}$$

или

$$\frac{1}{S_{BCM}}-\frac{1}{S_{BCM_0}}>\frac{1}{S_{DCK_0}}-\frac{1}{S_{DCK}},$$
$$\frac{S_{MCM_0}}{S_{BCM}\cdot S_{BCM_0}}>\frac{S_{KCK_0}}{S_{DCK}\cdot S_{DCK_0}}.$$

Учитывая, что $\angle MCM_0=\angle KCK_0=\varphi$, после сокращения обеих частей на $\frac{1}{2}\sin\varphi$ получим неравенство

$$\frac{MC}{S_{BCM}}\cdot\frac{CM_0}{S_{BCM_0}}>\frac{KC}{S_{DCK}}\cdot\frac{CK_0}{S_{DCK_0}}.$$

Но в треугольниках BCM_0 и DCK_0 высоты, проведенные к CM_0 и CK_0, равны между собой. Осталось доказать неравенство $\frac{MC}{S_{BCM}}>\frac{KC}{S_{DCK}}$. Оно очевидно — расстояние от B до CM меньше, чем расстояние от B до CM_0, а расстояние от D до CK больше, чем расстояние от D до CK_0.

3394. *Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, M — середина AC. Доказать, что прямая MH проходит через точку пересечения окружности, описанной около ABC, и окружности с диаметром BH.*

Решение. Пусть Q — середина BH, O — центр описанной около ABC окружности. Воспользуемся известным фактом, что $BH=2OM$, откуда $OM=HQ$, т. е. $OMHQ$ — параллелограмм (рис. 4). Поскольку окружности с центрами O и Q проходят через B, то вторая их точка пересечения симметрична B относительно прямой OQ. Следовательно, эта точка лежит на прямой MH, что и требовалось доказать.

3395. *В конус вписаны две касающиеся между собой сферы α и β. (Каждая сфера касается поверхности конуса по окружности.) Существует n равных сфер, касающихся α, β, поверхности конуса и таких, что каждая из них касается еще двух из этих n сфер. Какие значения может принимать число n?*

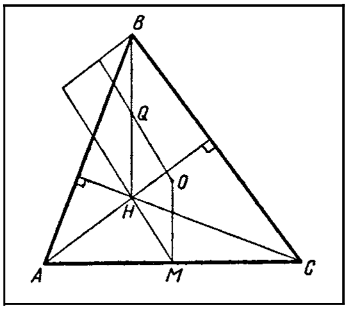


Рис. 4

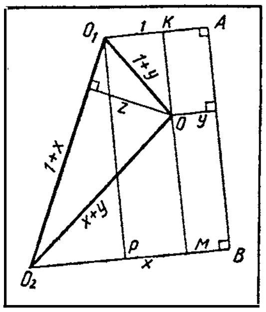


Рис. 5

Решение. Пусть O_1, O_2 и O — центры сфер α, β и одной из n равных сфер. AB — отрезок образующей конуса, которой касаются эти три сферы (рис. 5, A и B — точки касания сфер α и β). Пусть радиус сферы α равен 1, радиус сферы β равен x, а радиус каждой из n равных сфер равен y, расстояние от O до оси конуса O_1O_2 равно z. Выразим сначала y через x. Для этого проведем через O_1 и O прямые, параллельные AB, обозначим получившиеся точки пересечения через K, M и P. Нетрудно найти

$$O_1P=\sqrt{O_1O_2^2-O_2P^2}=\sqrt{(1+x)^2-(x-1)^2}=$$
$$=2\sqrt{x},\ OK=2\sqrt{y},\ OM=2\sqrt{xy}.$$

Из уравнения

$$O_1P=OK+OM \text{ или } \sqrt{x}=\sqrt{y}+\sqrt{xy}$$

найдем $\sqrt{y}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

Для определения z выразим площадь треугольника двумя способами (один раз по формуле Герона):

$$\frac{1}{2}(1+x)z=\sqrt{(x+y+1)xy},\ z=\frac{2\sqrt{(x+y+1)xy}}{1+x}.$$

Таким образом, с учетом найденного значения y будем иметь

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{y}{z}=\frac{\sqrt{y}(1+x)}{2\sqrt{(x+y+1)x}}=\frac{1+x}{2(x+\sqrt{x}+1)}=$$
$$=\frac{1}{2\left(1+\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)}.$$

Так как при $x>1$

$$0<\frac{\sqrt{x}}{1+x}<\frac{1}{2},\ \text{то}\ \frac{1}{3}<\frac{y}{z}<\frac{1}{2}.$$

Поскольку

$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}<\frac{1}{3},$$
$$\sin\frac{\pi}{9}>\frac{\pi}{9}-\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{729}>\frac{1}{3},$$

то n может принимать значения: 7, 8, 9.

3396. *В пространстве дано n векторов $\bar a_1, \bar a_2, \ldots, \bar a_n$. Доказать, что существует такой набор индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$, что имеет место неравенство*

$$|\bar a_1|+|\bar a_2|+\ldots+|\bar a_n|\leqslant 8\sqrt{3}|\bar a_{i_1}+\bar a_{i_2}+\ldots+\bar a_{i_k}|.$$

Решение. Будем считать, что в пространстве задана прямоугольная система координат и при этом в первом положительном октанте (включая его границу) расположено k векторов и сумма их длин не меньше, чем сумма длин векторов, расположенных в каждом из 7 оставшихся октантах. Пусть это первые k векторов. Таким образом,

$$|\bar a_1|+|\bar a_2|+\ldots+|\bar a_k|\geqslant\frac{1}{8}(|\bar a_1|+|\bar a_2|+\ldots+$$
$$+|\bar a_n|). \qquad (1)$$

Рассмотрим прямую l, проходящую через начало координат и точку (1, 1, 1). Обозначим через b_i и φ_i соответственно длину проекции $\bar a_i$ на прямую l и угол между $\bar a_i$ и l, т. е. $b_i=$ $=|\bar a_i||\cos\varphi_i|$. Докажем, что для любого вектора, расположенного в первом октанте, $\cos\varphi\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$. Рассмотрим часть единичной сферы с центром в начале координат, расположенную в первом октанте. Эта часть расположена по другую сторону от плоскости $x+y+$ $+z=1$, чем начало координат (плоскость проходит через единичные точки на осях координат). Поскольку эта плоскость пересекает прямую l в точке $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, то проекция любого единичного вектора из первого октанта на l больше, чем $\frac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. $\cos\varphi\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Далее имеем

$$|\bar a_1|+|\bar a_2|+\ldots+|\bar a_k|=\frac{b_1}{\cos\varphi_1}+\frac{b_2}{\cos\varphi_2}+\ldots+$$
$$+\frac{b_k}{\cos\varphi_k}\leqslant\sqrt{3}(b_1+b_2+\ldots+b_k)=\sqrt{3}|\,\text{пр}_l(\bar a_1+$$
$$+\bar a_2+\ldots+\bar a_k)|\leqslant\sqrt{3}|\bar a_1+\bar a_2+\ldots+\bar a_k|. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует неравенство, сформулированное в условии.

3397. *Найти значение выражения* a^2+ $+\sqrt{a^4+a+1}$, *если* $a=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$.

Решение. Так как $8a+\sqrt{2}=\sqrt{16\sqrt{2}+2}$, то

$$64a^2+16a\sqrt{2}+2=16\sqrt{2}+2,$$

откуда $4a^2+a\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$. Положив

$$x=\sqrt{a^4+a+1}+a^2,\ y=\sqrt{a^4+a+1}-a^2,$$

получим

$$xy=a+1,\ x-y=2a^2=$$
$$=\frac{4a^2}{2}=\frac{\sqrt{2}-a\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-a),$$

и, следовательно, x и $-y$ являются корнями уравнения

$$t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-a)t-(a+1)=0.$$

Имеем

$$t_{1,2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-a)\pm\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{2}+4a+4}}{2}=$$
$$=\frac{(1-a)\pm(a+3)}{2\sqrt{2}},$$

т. е. $t_1=\sqrt{2},\ t_2=-\frac{a+1}{\sqrt{2}}$.

Поскольку $x>y$ и $a<1$, то $\frac{a+1}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$, так что $x=\sqrt{2}$.

3398. *Является ли многочлен*

$$f=1+4x+4x^2+\ldots+4x^{2n}\ (n\geqslant 2)$$

квадратом многочлена?

Решение. Имеем

$$(x-1)f=(x-1)+4x(x-1)(1+x+\ldots+x^{2n-1})=$$
$$=(x-1)+4x(x^{2n}-1)=4x^{2n+1}-3x-1$$

и, обозначив многочлен $4x^{2n+1}-3x-1$ через h, получим

$$f=g^2\Leftrightarrow h=(x-1)g^2.$$

Тогда

$$h'=g^2+2(x-1)gg'=(8n+4)x^{2n}-3,$$

и если $g(\alpha)=0$, то $h(\alpha)=h'(\alpha)=0$, т. е.

$$4\alpha^{2n+1}=3\alpha+1,\ (8n+4)\alpha^{2n}=3,$$

откуда

$$(8n+4)\alpha^{2n+1}=3\alpha,\ 8n\alpha^{2n+1}=-1,$$
$$8n\cdot\frac{3\alpha}{8n+4}=-1,\ \alpha=-\frac{2n+1}{6n},$$
$$(8n+4)\left(-\frac{2n+1}{6n}\right)^{2n}=3,$$
$$4(2n+1)^{2n+1}=3\cdot 6^{2n}\cdot n^{2n}.$$

Но при $n\geqslant 2$ правая часть делится на 16, а левая не делится, так что равенство $f=g^2$ невозможно.

3399. *На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1; M и M_1 — середины AC и A_1C_1, прямая BM пересекает окружность, описанную около A_1BC_1, в точке K_1, а прямая BM_1 — окружность, описанную около ABC, в точке K. Сами описанные окружности пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и AC пересекаются в точке T. Доказать, что 6 точек M, M_1, K, K_1, P и T лежат на одной окружности.*

Решение. В качестве леммы воспользуемся следующим известным утверждением. Если на прямых AB, BC и CA взяты произвольные точки X, Y и Z соответственно, то окружности, описанные около треугольников AXZ, BYZ, CZY, имеют общую точку (рис. 6, *а*. Эту точку — на рисунке U — иногда называют точкой Микеля). Доказательство этого утверждения несложно. Предоставляем сделать это читателям самостоятельно.

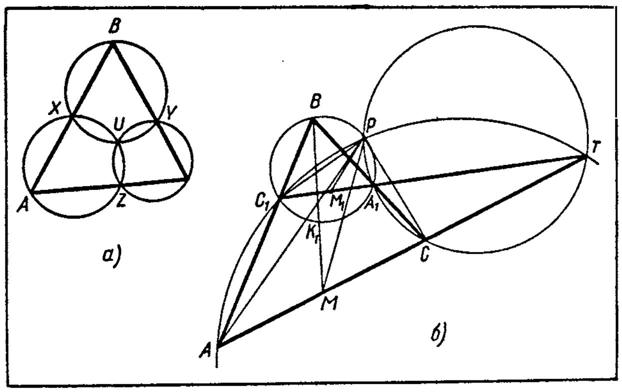


Рис. 6

Из данного утверждения следует, в частности, что через точку P, указанную в условии задачи, проходят окружности, описанные около всех четырех треугольников, образуемых четырьмя прямыми AB, BC, CA и C_1A_1 (рис. 6, *б*). Это утверждение также является известным и получается двукратным применением предыдущего: сначала к треугольнику ABC и точкам A_1, C_1 и T на его сторонах, а затем к треугольнику A_1BC_1 и точкам A, C и T.

Перейдем к утверждению нашей задачи. Заметим сначала, что треугольники APC и A_1PC_1 подобны ($\angle PAC=\angle PAT=\angle PC_1T=\angle PC_1A_1$, поскольку точки P, A, C_1 и T лежат на одной окружности; $\angle APC=\angle ABC=\angle A_1PC_1$). Таким образом, $\angle PMT=\angle PM_1T$, т. е. точки P, T, M и M_1 лежат на одной окружности.

Применим теперь нашу лемму к треугольнику BMC, на сторонах которого взяты точки K_1, A_1 и T. Окружности, описанные около BK_1A_1, CA_1T, MK_1T, имеют общую точку. Это и есть точка P. Значит, K_1 лежит на окружности, проходящей через T, P, M и M_1. На ней же лежит и точка K. Доказывается так же.

3400. *Доказать, что система уравнений*

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0, \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=0, \\ |x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|=1 \end{cases}$$

всегда имеет решение x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0 *для которого* $\max\limits_i |x_i^0| \geqslant \sqrt{2}-1$.

Решение. Докажем сначала следующую лемму. Пусть два параллелограмма $ABCD$ и $KLMP$ имеют общий центр O, причем вершины M и K расположены на сторонах AB и DC, а стороны второго параллелограмма проходят через соответствующие середины отрезков OC, OB, OA и OD. Тогда вершины L и P не могут оказаться вне параллелограмма $ABCD$ (рис. 7, *а*).

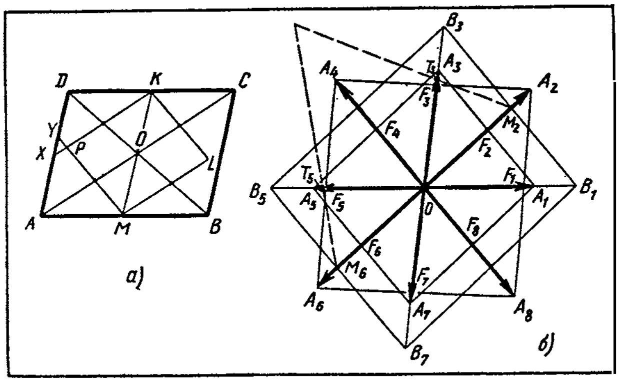


Рис. 7

Пусть прямая, проходящая через K и середину OD, пересекает AD в точке X, а прямая, проходящая через M и середину AO, пересекает AD в точке Y. Нам надо доказать, что $DX+AY \geqslant AD$. Обозначим $DK=\alpha DC$, $DX=x\cdot DA$. Тогда между α и x имеет место соотношение $4\alpha x=\alpha+x$. (Получить его можно, например, следующим образом. Пусть площадь треугольника ADC равна 1, тогда

$$S_{DKX}=\alpha x, \quad S_{OKC}=\frac{1}{2}(1-\alpha), \quad S_{OXA}=\frac{1}{2}(1-x),$$
$$S_{KOX}=1-\alpha x-\frac{1}{2}(1-\alpha)-\frac{1}{2}(1-x)=$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha+x)-\alpha x.$$

Из равенства $S_{DKX}=S_{KOX}$ получаем нужное соотношение.) Если теперь $AY=yAD$, то, поскольку $AM=(1-\alpha)AB$, получим $4(1-\alpha)y=$ $=1-\alpha+y$. Понятно, что $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{3}{4}$. Таким образом,

$$x+y=\frac{\alpha}{4\alpha-1}+\frac{1-\alpha}{3-4\alpha}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4(4\alpha-1)}+$$
$$+\frac{1}{4(3-4\alpha)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2(4\alpha-1)(3-4\alpha)}\geqslant 1,$$

что и требовалось.

Вернемся теперь к нашей задаче. Рассмотрим на плоскости 8 векторов с координатами $(\pm a_k, \pm b_k)$, $k=1, 2, 3, 4$. (Оба знака или «+» или «—».) Пронумеруем эти векторы в порядке обхода $\overline{OA_k}$, $k=1, 2, ..., 8$, $\overline{OA_{k+4}}=-\overline{OA_k}$. Образовалось два параллелограмма $A_1A_3A_5A_7$ и $A_2A_4A_6A_8$ (рис. 7, *б*). Пусть стороны одного параллелограмма пересекают четыре вектора, образующие другой параллелограмм в точках F_k, $k=1, 2, ..., 8$ соответственно. Обозначим $\lambda_k=\frac{OF_k}{OA_k}$. Докажем, что хотя бы одно $\lambda_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Допустим, это не так. Рассмотрим параллелограмм $B_1B_3B_5B_7$, гомотетичный параллелограмму $A_1A_3A_5A_7$ с центром O и коэффициентом $\sqrt{2}$. Стороны этого параллелограмма пересекают векторы $\overline{OA_k}$, $k=2, 4, 6, 8$ во внутренних точках (по предположению, например, $OM_2=\sqrt{2}\ OF_2<OA_2$). Обозначим эти точки M_2, M_4, M_6, M_8. Пусть T_3 и T_5 — середины OB_3 и OB_5. Тогда

$$OF_3=\lambda_3 OA_3=\frac{\lambda_3}{\sqrt{2}}OB_3<\frac{1}{2}OB_3=OT_3.$$

Аналогично T_5 лежит на отрезке F_5B_5. Получается, что прямые M_2T_3 и M_6T_5 пересекаются вне треугольника B_3OB_5, что противоречит доказанной лемме.

Пусть теперь для определенности $OF_2 \geqslant$ $\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}OA_2$ $\left(\lambda_2 \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$, $\overline{OA_3}$ имеют координаты (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3). Существует такое u, $0 \leqslant u \leqslant 1$, что

$$\overline{OF_2}=u\overline{OA_1}+(1-u)\overline{OA_3} \text{ или}$$
$$\lambda_2\overline{OA_2}=u\overline{OA_1}+(1-u)\overline{OA_3}.$$

Запишем это равенство в координатах:

$$a_1u-\lambda_2a_2+(1-u)a_3=0,$$
$$b_1u-\lambda_2b_2+(1-u)b_3=0.$$

Поскольку

$$u+\lambda_2+(1-u)=1+\lambda_2,$$

то в качестве нужного решения можно взять

$$x_1^0=\frac{u}{1+\lambda_2}, \quad x_2^0=-\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}, \quad x_3^0=\frac{1-u}{1+\lambda_2}, \quad x_4^0=0.$$

Нам осталось доказать, что $\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} \geqslant \sqrt{2}-1$.

Это неравенство эквивалентно условию $\lambda_2 \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, которому удовлетворяет λ_2.

Замечания к решениям задач

Задача 3381 не вызвала трудностей и правильно решена подавляющим большинством читателей. В авторском варианте условия задачи оговаривалось, что даты основания и юбилей города делятся точкой с запятой «пополам», и тогда ответ в задаче единственный — в том смысле, что год основания города 1147, хотя, разумеется, нельзя утверждать, что Москва — единственный город в нашей стране, основанный в этом году. Если же допускать произвольное деление этих двух дат, то возможны и другие ответы. В решении, приведенном в журнале, мы сочли более целесообразным вернуться к авторской формулировке задачи.

Задачи 3383 и 3384 также оказались достаточно легкими, хотя ошибочные решения все же встречались. Задача 3385 оказалась некорректной, поскольку заданное в условии выражение не принимает (при выполнении ограничения) какого-либо постоянного значения. К сожалению, в авторском решении обнаружилась ошибка, которой мы никак не могли ожидать от столь многоопытного автора и проявили невнимательность. При решении задачи 3386 допускалось много ошибок при использовании неравенств.

В задаче 3390 большинство авторов использовали не входящие в школьную программу методы интегрирования и допускали при этом вычислительные ошибки. Решения задачи 3391 носили, как правило, геометрический характер и чаще всего сводились, как и в нашем решении, к нахождению точки, для которой сумма расстояний до вершин треугольника имеет наименьшее значение — эта точка называется точкой Торричелли (из нее все стороны треугольника «видны» под углом 120°). Наиболее простое решение привел *В. О. Гордон* из Читы: для векторов

$$\bar{a}=(1-2x,\ 1),\ \bar{b}=(x+1,\ 1-x\sqrt{3}),\ \bar{c}=(x+1,\ 1+x\sqrt{3})$$

имеем

$$|\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}| = 3\sqrt{2};\ |\bar{a}|+|\bar{b}|+|\bar{c}| = y\sqrt{2},$$

и поэтому $y\geqslant 3$.

В задаче 3392 к ограничению $k\neq\pm1$ мы добавили условие $k\neq 0$ — в противном случае функция f удовлетворяет условию $f(0)=0$ и конечно, может иметь наименьший период. Многие решения задачи 3397 были слишком громоздкими. К задаче 3398 присланы достаточно разнообразные решения, а самое простое принадлежит *М. Н. Ильясову* из Павлодара и *В. О. Гордону*: легко заметить, что $f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$, и поэтому $f(x)$ не является квадратом многочлена.

В условии задачи 3388 допущена опечатка — в качестве искомого указан другой угол. Впрочем, это обстоятельство не сильно отразилось на результатах, просто ответ оказался иным и не таким красивым, как при правильном условии. Как и в приведенном нами решении, большинство читателей пользовались «методом вращения».

При решении задачи 3393 многие читатели пользовались обычными методами анализа, при этом далеко не все смогли найти требуемое геометрическое условие, определяющее искомую прямую — ее параллельность диагонали BD данного четырехугольника. Изящное рассуждение приведено в письме известного специалиста по геометрическим задачам *В. О. Гордона*, после некоторого перерыва вновь принявшего участие в нашем конкурсе. Решение основано на двух утверждениях: 1) Если $H(x,\ y)$ — среднее гармоническое двух положительных величин x и y, то имеет место неравенство

$$H(a+c,\ b+d)\geqslant H(a,\ b)+H(c,\ d),$$

причем равенство имеет место при условии $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$;

2) выражение $\frac{1}{S_{ACK}}+\frac{1}{S_{ACM}}$ постоянно и не зависит от того, как проведена прямая MK.

Доказательство второго утверждения можно получить, например выразив площади каждого из треугольников ACK и ACM через AC и углы. Из этих двух утверждений следует, что

$$H(S_{BCK},\ S_{DCM})\leqslant H(S_{ACK},\ S_{ACM})-H(S_{ABC},\ S_{ACD})=\text{const},$$

причем равенство достигается, если KM параллельна BD.

Многие читатели нашли весьма красивое и короткое решение задачи 3394. Суть его в следующем. Возьмем точку B', диаметрально противоположную точке B. Тогда $AHCB'$ — параллелограмм, значит, прямая HB' проходит через середину AC. Легко убедиться также, что эта прямая проходит и через точку пересечения указанных в условии окружностей.

Довольно мало правильных решений было прислано по задаче 3395. Это обстоятельство несколько удивляет, ведь по существу эта задача по уровню сложности и методу решения близка к задачам конкурсного экзамена (имея в виду лучшие образцы). Некоторые читатели нашли только одно ограничение на число n — снизу.

То, что задача 3396 предлагалась на реальном конкурсном экзамене в Японии (напомним, речь идет об экзамене 1989 г. в Нагойском технологическом институте), наводит на определенные размышления. По нашим понятиям, эта задача типичная олимпиадная и совсем не похожа на конкурсную. Если же учесть, что весь вариант носит «зубодробительный» характер и даже первая задача варианта, по нашему мнению, превышает возможности среднего студента мехмата МГУ, а на весь вариант из четырех задач дается 120 мин, то появляются основания и для некоторых выводов — вот из каких кирпичей строится фундамент и само здание «японского экономического чуда».

В задаче 3399 наиболее интересными оказались решения читателей *Р. Г. Бочева* из Болгарии и *В. О. Гордона*. Наш болгарский корреспондент нестандартно применил в этой задаче гомотетию. В своем решении В. О. Гордон воспользовался тем обстоятельством, что отрезки AC и $A'C'$ переходят один в другой посредством поворотной гомотетии с центром в точке P. Кроме того, в его рассуждении использовались те же, по существу, соображения, что и в нашем решении, но сделано это было гораздо более экономно и компактно.

Весьма трудную задачу 3400 решил один читатель — *Е. М. Гольберг* из Ленинграда. Правда, коротким его решение назвать никак нельзя, но профессиональным — без всякого сомнения. Возможно, неоднократный победитель наших конкурсов читатель *В. А. Ясинский* из Винницы не совсем удовлетворен нашей оценкой. Дело в том, что в его доказательстве в одном месте встречается оборот «легко увидеть», мы же не сумели «легко увидеть», что и повлияло на нашу оценку. По своему происхождению эта задача имеет непосредственное отношение к одной современной математической теории — а именно теории n-поперечников. Для полноты информации надо было бы сообщить нашим читателям, как с этой задачей справились во Франции. К сожалению, пока никаких известий «с той стороны» у нас нет. Придется немного подождать.

Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин
(Москва)

Сводка решений задач по № 6 за 1990 г.

Аббасов И. А. (АзССР) — 81, 82, 84, 89. Азизов И. (Андижанская обл.) — 81, 84, 86, 90, 97. Бедный Г. А. (Бердичев) — 81, 84, 87—90, 94, 97. Бочев Р. Г. (Болгария, г. Враца) — 81—84, 86—99. Василев Ц. С. (София) — 83, 84, 87—90, 94, 97. Гольберг Е. М. (Ленинград) — 97—00. Гордон В. О. (Чита) — 81—84, 86—91, 93, 94, 97—99. Грачикова К. С. (Московская обл., г. Ожерелье) — 81, 82, 85, 89. Гулиев Р. Л. (АзССР) — 81, 84, 86, 88—90, 97. Джумабаев Н. (Нукус) — 81, 84, 89, 90. Жиляев В. В. (Саратов) — 81—91, 93, 94, 96—98. Зискинд Л. Е. (Винница) — 81—84, 86—91, 97. Ильясов М. Н. (Павлодар) — 81, 83, 84, 86—88, 90, 92, 94, 97, 98. Курганов Т. К. (Ташкентская обл., г. Чирчик) — 84, 86, 88—90, 97. Курило Н. А. (Харьковская обл.) — 81—84, 86—92, 94, 97. Кушнер Б. С. (Куйбышевская обл., г. Жигулевск) — 81, 82, 84, 89, 90, 97. Мун А. В. (Воронеж) — 81—84, 87, 90, 97. Повелий В. И. (Ровенская обл.) — 84, 86, 87, 89, 94, 97. Рабинович Е. М. (Киев) — 81, 82, 84, 86, 87, 90, 94. Салимов К. Ю. (Ташкентская обл.) — 81, 89, 90, 97. Симеонов А. А. (Болгария, г. Своге) — 90, 93, 94, 97, 99. Сыдыкбеков Н. (Алма-Ата) — 81—84, 86. Тагирбеков Л. Т. (Дагестанская АССР) — 81, 87, 89, 94. Ткачев В. Ф. (Воронежская обл.) — 81—84, 86—92, 94, 95, 97, 98. Трошин В. В. (Волгоградская обл.) — 81, 82, 84, 90, 92, 97. Тухтабоев М. (Наманган) — 83, 84, 89, 90, 92—94. Федак И. В. (Ивано-Франковская обл.) — 81—84, 86—90, 92—95, 97, 98. Цивлюк А. Г. (Винница) — 84, 86—88, 90, 97. Чолий В. Я. (Киев) — 84, 90, 97, 98. Шастун В. Ф. (Винницкая обл.) — 81, 83, 84, 87—90, 92, 94, 97. Яснинский В. А. (Винница) — 81—84, 86—92, 94, 97—99.

Математические кружки: «Юные математики» Люранской 9-летней шк. Масаллинского р-на АзССР (рук. Ч. Ш. Алиев) — 81—84, 86, 90; 46-й шк. Мурманска (рук. В. Е. Андреев) — 81—84, 87; «Квант» Республиканского Дворца пионеров Алма-Аты (рук. Г. В. Белянская) — 81—84, 87, 88; Байрамлинской шк. Таузского р-на АзССР (рук. Р. Л. Гулиев) — 81, 84, 86, 88—90, 97; Говларской шк. Таузского р-на АзССР (рук. Р. Л. Гулиев) — 84, 86, 88—90, 97; СГПИ им. Г. Гуляма (рук. А. К. Калондаров, Э. А. Аббукадыров, Р. С. Кабеков) — 84, 86, 87, 89, 90, 92, 97; Республиканской ФМШ (Алма-Ата, рук. К. И. Каилыбаев) — 81—84, 87; 257-й шк. Киева (рук. М. Л. Кобозев) — 81—84, 86—90, 97, 98; 9-х классов 11-й шк. Винницы (рук. И. М. Кривошея) — 81—83, 86, 88, 90, 91; «Вектор» 145-й ФМШ Киева (рук. В. Е. Куценок) — 81—83, 87, 88, 91, 92, 94, 97; 206-й шк. Киева (рук. И. А. Кушнир) — 81, 83, 87, 88, 94; «Юный математик» Адельکинской шк. Белебеевского р-на Башкирской АССР (рук. Н. И. Мартынова) — 81, 82, 86, 88; 44-й шк. Бостанлыкского р-на Ташкентской обл. (рук. М. Ж. Норметов) — 81—83, 97; 2-го курса ф-та нач. классов Дагестанского пединститута (рук. Р. Р. Рабаданов) — 81, 82, 84, 87, 92; 542-й шк. при МФИ (рук. В. Я. Роженко) — 84, 86—90, 92; 2-й шк. г. Мархамат Андижанской обл. (рук. О. Сатторов) — 84, 87, 89, 90; 51-й шк. Киева (рук. Б. Н. Школьник) — 81—84, 87, 89—90, 92, 94; 38-й шк. пос. Чинабад Андижанской обл. (рук. Т. Ю. Юсупов) — 87, 90, 92, 94, 98.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КАЛЕНДАРЬ НА 1990/91 УЧЕБНЫЙ ГОД

Сентябрь

6 сентября — 70 лет со дня рождения советского математика Сергея Борисовича Стечкина. Родился в Москве. Окончил Московский университет, доктор физико-математических наук, профессор. С 1949 г. работал в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР. Затем — директор Свердловского отделения названного выше института. Основные работы относятся к теории функций, в частности к теории тригонометрических рядов. Им были получены наиболее полные результаты, относящиеся к абсолютной сходимости тригонометрических рядов (см.: История отечественной математики. Т. 3. Киев, 1968).

8 сентября — 80 лет со дня рождения американского математика Натана Джекобсона (Якобсона). Окончил университет в Алабаме. Работал в различных университетах США, с 1947 г.— профессор Йельского университета. Основные труды — по алгебре. В теории групп известен радикал Джекобсона; в теории колец и модулей — теоремы Джекобсона — Риса. На русский язык переведены его монографии: «Теория колец» (М., 1947), «Строение колец» (М., 1961), «Алгебры Ли» (М., 1964) (см.: Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики: Биографический словарь-справочник. Киев, 1987).

22 сентября — 70 лет со дня рождения советского кибернетика и математика Владимира Валериановича Чавчанидзе. Родился в Сухуми. Окончил Тбилисский университет. Доктор физико-математических наук, профессор. Работал в Институте физики АН ГССР, с 1960 г. работает в Институте кибернетики АН ГССР. Труды — по теории информации, прикладной математике, квантовой механике, теоретической биокибернетике. Участник Великой Отечественной войны (см.: Математика в школе. 1980. № 4).

26 сентября — 70 лет со дня рождения советского математика Ивана Семеновича Березина. Родился в д. Небылицы, ныне Кировской обл. Окончил МГУ, работает там же, профессор. Организатор науки в области вычислительных методов. В течение 15 лет руководил ВЦ МГУ. Основные труды — по дифференциальным уравнениям, приближенным и численным методам. Один из авторов книги «Методы вычислений» (М., 1966) (см.: Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. 1981. № 1, 3—4).

30 сентября — 440 лет со дня рождения немецкого ученого, математика и астронома Михаэля Местлина (1550—1631). Учитель Г. Галилея и И. Кеплера. Окончил Тюбингенский университет. Профессор математики в университетах Гейдельберга и Тюбингена. Будучи пламенным поклонником Н. Коперника, вынужден был преподавать астрономию по системе К. Птолемея (см.: Математика в школе. 1966. № 5).

Октябрь

10 октября — 60 лет со дня рождения советского математика Яхьи Джафара оглы Мамедова. Родился в Нахичевани АзССР. Окончил Азербайджанский университет. Доктор физико-математических наук, профессор. С 1954 г. работает в этом университете. Основные труды — по функциональному анализу, дифференциальным и интегральным уравнениям, вычислительной математике (см.: Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики: Биографический словарь-справочник. Киев, 1987).

18 октября — 80 лет со дня рождения венгерского математика Геза Грюнвальда (1910—1942). Работал в Будапеште. Основные труды — по теории функций действительного переменного (интерполяционные процессы типа Бернштейна — Грюнвальда), суммированию рядов Фурье, а также по сходимости интерполяционных полиномов Эрмита — Фейера непрерывных функций и явлению расходимости интерполяционного полинома Лагранжа. Институт им. Я. Больяи учредил премию им. Грюнвальда (см.: Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики: Биографический словарь-справочник. Киев, 1987).

29 октября — 200 лет со дня рождения немецкого педагога-демократа Фридриха Адольфа Дистервега (1790—1866). Последователь Песталоцци. Родился в Зигене (Вестфалия).

С 1813 г.— преподаватель математики в средней школе, затем — директор учительских семинарий в Мерсе и Берлине. В 1848 г. уволен «за свободомыслие». Организовал «Педагогические общества», занимался литературно-педагогической деятельностью. Его «Руководство для немецких учителей» (1834) переведено на русский язык (М., 1913). Дистервег сгладил противоречия между устным и письменным счетом, созданные школой Песталоцци; особенно большое значение придавал вычислению в уме (см.: БСЭ. 2-е и 3-е изд.).

30 октября — 70 лет со дня рождения советского математика Наума Яковлевича Виленкина. Ученик А. Г. Куроша. Родился в Москве. Окончил МГУ, доктор физико-математических наук, профессор. С 1943 г. работал в различных вузах, с 1961 г.— в Московском заочном педагогическом институте. Основные труды — по общей алгебре, топологии, теории функций действительного переменного и функциональному анализу. Много внимания уделяет постановке школьного математического образования. Соавтор учебников по математике для V и VI классов, по алгебре для X — XI классов с математической специализацией и методических пособий для учителей, автор ряда популярных книг для учащихся средней школы и учебных пособий для вузов (см.: Математика в школе. 1970. № 4).

А. И. Бородин, Н. И. Лавренко
(г. Донецк)

Филдсовская премия

(Продолжение. Начало см. на с. 2 обложки)

В первый состав Филдсовского комитета (1932) вошли 5 крупнейших ученых: Ф. Севери (председатель), Дж. Бирхгоф, К. Каратеодори, Э. Картан, Т. Такаги. Выбор первых лауреатов имел важное значение, так как, во-первых, этим обозначалась некая возрастная граница для претендентов, а во-вторых, создавался прецедент, который определял принцип награждения в дальнейшем: учитывать как решения конкретных трудных проблем, так и разработку новых теорий и методов, расширяющих область применения математики.

В 1950 г. Филдсовский комитет расширился до 8 человек. Состав комитета обновляется после каждого конгресса. Имена членов комитета, за исключением председателя (которым является президент Международного математического союза), хранятся в тайне. В их число включались крупнейшие математики старших поколений. В период 1958—1986 гг. в работе филдсовских комитетов принимали участие всемирно известные советские математики: А. Н. Колмогоров, П. С. Александров, М. А. Лаврентьев, И. Р. Шафаревич, Л. С. Понтрягин, Ю. В. Прохоров, А. Н. Боголюбов, С. П. Новиков.

Отбор кандидатов на Филдсовскую премию осуществляется очень тщательно. Окончательное решение принимается тайным голосованием (по переписке). Награждение происходит на открытии конгресса, где выступают крупнейшие математики, специалисты в соответствующей области этой науки с обзором достижений лауреатов. Медали и премию вручает почетный президент конгресса. Например, в 1962 г. это был король Швеции, в 1966 г.— президент АН СССР М. В. Келдыш.

Первоначально были учреждены 2 премии, но улучшившееся положение фонда (этому способствовали частные пожертвования и перерыв между 1936—1950 гг., когда премий не присуждали) позволило в 1966, 1970, 1978 гг. вручить по 4 премии и в 1983, 1986 — по 3 премии.

Расскажем кратко о каждом из лауреатов.

В 1936 г. на IX Международном математическом конгрессе (ММК) в Осло премию получили Л. В. Альфорс (Финляндия) и Дж. Дуглас (США).

Ларс Валериан Альфорс родился в 1907 г. в Хельсинки. Окончил университет в Хельсинки. В момент присуждения премии был сотрудником Гарвардского университета (США). Премию получил за работу по теории римановых поверхностей. Основные труды по теории функций комплексного переменного (Альфорса — Вейля теория голоморфных кривых). Одновременно с М. А. Лаврентьевым развивал теорию квазиконформных отображений.

Джесс Дуглас (1897—1965) родился в Нью-Йорке. Работал в Массачусетском технологическом институте. Премию получил за решение задачи Плато. Основные труды — по вариационному исчислению; известна задача Дугласа (обобщенная задача Плато).

В 1950 г. на X Международном математическом конгрессе в г. Кембридже (США) лауреатами стали А. Сельберг (Норвегия) и Л. Шварц (Франция).

Атле Сельберг родился в 1917 г. в Лангесуне в семье профессора математики. Окончил университет в Осло, преподавал там же (профессор). Ученик известного норвежского математика Виго Бруна (1885—1978). В момент присуждения премии работал в Институте перспективных исследований в Принстоне (США). Основные труды по теории чисел. Совместно с венгерским математиком П. Эрдёшем нашел элементарное доказательство закона распределения простых чисел (не используя средств теории функций комплексного переменного). Разработал усовершенствованный метод решета (решето Сельберга). Получил много других важных результатов, в частности по математическому анализу.

Лоран Шварц родился в 1915 г. в Париже. Окончил Парижский университет, с 1953 г. профессор там же. Основные труды — по топологии, гармоническому и функциональному анализу и математической физике. Премию получил за труды по теории обобщенных функций (теория распределений Шварца).

XI ММК состоялся в 1954 г. в Амстердаме. На нем были отмечены К. Кодаира (Япония) и Ж. П. Серр (Франция).

Кунихико Кодаира родился в Токио в 1915 г. Выпускник и сотрудник Токийского университета. В 1949—1967 гг. работал в Институте перспективных исследований в Принстоне (США). Основные труды — по топологии, комплексному анализу, алгебраической и дифференциальной геометрии (размерность Кодаиры). Известен критерий Кодаиры для проективных алгебраических многообразий без особенностей.

Жан Пьер Серр родился в Баже в 1926 г. Окончил Высшую нормальную школу в Париже. В момент присуждения премии являлся сотрудником Парижского университета (ныне профессор). Основные труды — по алгебраической топологии (двойственность Серра, расслоение Серра) и алгебраической геометрии (гипотеза Серра). Применяя созданный Ж. Лере метод спектральных последовательностей, добился принципиальных продвижений в классической задаче топологии — вычислений гомотопических групп сфер. Автор блестящих монографий и учебников; некоторые из них переведены на русский язык.

На XII ММК (1958, Эдинбург) премию получили К. Ф. Рот (Великобритания) и Р. Том (Франция).

Клаус Фридрих Рот родился в 1925 г. в Бреслау (Вроцлав). Образование получил в Лондоне и Кембридже. Профессор университета в Лондоне. Основные труды — по алгебре и теории чисел. Премию получил за доказательство точной оценки в теоремах Туэ — Зигеля о приближениях алгебраических чисел рациональными.

Рене Фредерик Том родился в Монбальяре в 1923 г. В момент присуждения премии преподавал в Страсбургском университете (ныне профессор). Основные труды — по алгебраической и дифференциальной топологии (пространства и классы Тома, отображения Тома — Бордмана). Премию получил за построение теории кобордизмов, которая продолжила работы советских математиков Л. С. Понтрягина и Р. А. Рохлина. Разработал так называемую теорию катастроф, в рамках которой можно дать общий критерий, позволяющий определить пороговую ситуацию, когда одна какая-либо формула поведения меняется на другую. Работы Тома получили дальнейшее развитие в трудах последующих лауреатов.

XIII ММК (1962, Стокгольм) наградил Дж. Милнора (США) и Л. Хёрмандера (Швеция).

Джон Уиллард Милнор родился в г. Ориндже (штат Нью Джерси) в 1931 г. Профессор Принстонского университета. Основные труды — по алгебраической и дифференциальной топологии (Милнора сфера). Получил ряд важных результатов в задаче о вычислении групп кобордизмов многообразий. Наиболее важным было доказательство существования 28 различных гладких структур на семимерной сфере. Несколько позднее немецкий математик Э. Брискорн построил эти 28 гладких структур.

Ларс Хёрмандер родился в Мьёльбю в 1935 г. Учился в Лундском университете. В момент присуждения премии работал в Стокгольмском университете. Основные труды по общей теории дифференциальных операторов (теория Хёрмандёра) и дифференциальных уравнений с частными производными. Важнейшие труды этого крупнейшего математика современности переведены на русский язык.

XIV ММК (1966, Москва) назвал четырех лауреатов. Ими стали М. Ф. Атья (Великобритания), А. Гротендик, П. Ж. Коэн (США), С. Смейл (США).

Майкл Фрэнсис Атья — английский математик арабского происхождения. Родился в 1929 г. в Лондоне. Окончил Кембриджский университет. В 1957—1969 гг. работал в Оксфордском университете, с 1969 г.— в Принстонском институте перспективных исследований (США). Основные труды принадлежат к области алгебраической топологии и теории дифференциальных уравнений. В 1963 г. им совместно с американским математиком И. Зингером была доказана теорема об индексе. Результат Атьи—Зингера породил новый раздел математики — аналитическую топологию.

Александр Гротендик родился в Берлине в 1928 г. Фашистами был отправлен в гетто, в Голландию. В момент освобождения в 1944 г. умирал от голода и ничего не знал о себе, даже своего имени. Его усыновил голландец Гротендик и дал ему имя Александр. А. Гротендик — профессор Парижского университета. По его заявлению ООН выдала ему паспорт гражданина мира. Основные труды — по топологии (топология Гротендика), гомологической алгебре и алгебраической геометрии. С его именем связывают фундаментальный переворот в алгебраической геометрии, повлиявший на другие разделы математики.

Пол Джозеф Коэн родился в 1934 г. в Лонг-Бранче. Окончил Бруклинский колледж. С 1964 г.— профессор Станфордского университета. Основные труды — по математической логике и теории множеств. Знаменитый результат Коэна, за который ему присуждена Филдсовская премия, связан с континуум-гипотезой, высказанной Г. Кантором в 1878 г.: «Верно ли, что всякое бесконечное подмножество континуума R равномощно либо множеству натуральных чисел, либо R». В 1939 г. К. Гёдель доказал, что континуум-гипотеза не может быть доказана на основании аксиом арифметики и теории множеств. П. Коэн в 1963 г. установил, что континуум-гипотеза не может быть опровергнута исходя из того же аксиоматического построения теории множеств. Таким образом, континуум-гипотеза — первый пример утверждения, которое не может быть ни доказано, ни опровергнуто современными логическими средствами.

Стефан Смейл родился в г. Флинте в 1930 г. Окончил Мичиганский университет. С 1961 г.— профессор Колумбийского университета. Основные труды — по топологии и теории динамических систем. Доказал более общую теорему об h-кобордизме, из которой следует справедливость гипотезы А. Пуанкаре в размерности $n \geqslant 5$. С. Смейлу принадлежит заслуга в развитии теории грубых многомерных динамических систем, которая находит интересные приложения в аэро- и гидродинамике.

Четыре лауреата Филдсовской премии были названы и на XV ММК (1970, Ницца). Это А. Бейкер (Великобритания), Дж. Г. Томпсон (США), С. П. Новиков (СССР), Х. Хиронака (Япония).

Алан Бейкер родился в Лондоне в 1939 г. Окончил Лондонский университет; профессор Кембриджского университета. Основные труды — по теории трансцендентных чисел и диофантову анализу. Развил мощный метод доказательства трансцендентности чисел, задаваемых линейными формами от логарифмов алгебраических чисел (теорема Бейкера). Его результаты усилили классические теоремы А. О. Гельфонда, К. Зигеля о трансцендентности чисел вида $\pi+\ln\alpha$. Методы Бейкера позволили дать эффективную оценку числа решений диофантовых уравнений. Ранее был известен лишь сам факт конечности решений.

Сергей Петрович Новиков родился в г. Горьком в 1938 г. в семье математиков П. С. Новикова и Л. В. Келдыш. Окончил МГУ. Работал там же в момент получения премии. С 1985 г.— президент Московского математического общества. Основные труды — по геометрии и топологии, теории солитонов и общей теории относительности. Решил положительно долго остававшийся открытым вопрос: «Будут ли так называемые рациональные классы Понтрягина топологическими инвариантами или нет?» Создал качественную теорию слоений и многозначных функций, качественную теорию космологических моделей, теорию конечнозонных решений нелинейных систем.

Джон Григс Томпсон родился в 1932 г. В момент присуждения премии преподавал в Кембриджском университете (профессор). Основные труды — по алгебре, в частности по теории групп (теоремы Н. Ито и Дж. Томпсона, подгруппа Томпсона). В совместной работе с В. Фейсом доказал фундаментальную теорему: все неабелевы простые группы имеют четный порядок.

Хейсуке Хиронака родился в г. Ямагути в 1931 г. Профессор Гарвардского университета. Основные труды — по алгебраической геометрии. Удостоен медали за решение важной проблемы — о разрешении особенностей алгебраических многообразий над полями нулевой характеристики.

XVI ММК (1974, Ванкувер) отметил Э. Бомбьери (Италия) и Д. Мамфорда (США).

Энрико Бомбьери родился в 1940 г. в Милане. Профессор университета в Пизе. Исключительно разносторонний математик. Основные труды — по теории алгебраических чисел, комплексному и классическому анализу, алгебраической и дифференциальной геометрии. Его именем назван усредненный асимптотический закон для простых чисел в прогрессиях.

Дейвид Брайант Мамфорд родился в 1937 г. Профессор Гарвардского университета (США). Основные труды — по алгебраической геометрии, в частности по модулям кривых и абелевым многообразиям (кривые Мамфорда).

На XVII ММК (1978, Хельсинки) лауреатами названы: П. Делинь (Бельгия), Д. Квиллен (США), Г. Маргулис (СССР), Ч. Фефферман (США).

Пьер Рене Делинь родился в 1944 г. в Брюсселе. Обучение математике начал в 14 лет по трактатам Н. Бурбаки. Образование получил в Брюссельском университете, а затем в Париже занимался у Гротендика и Серра. В 26 лет стал профессором в Европейском институте перспективных исследований (Париж). Основные труды — по алгебраической геометрии (многообразия и формулы Делиня) и алгебраической теории чисел. Получил медаль за доказательство гипотез А. Вейля о s-функциях над конечными полями. Из результатов Делиня следует, в частности, классическая гипотеза Рамануджана — Петерсона.

Даниел Квиллен (Куиллен) родился в г. Оринже в 1940 г. Окончил Гарвардский университет. Профессор Массачусетского технологического института. Основные труды — по гомологической алгебре и алгебраической топологии. Автор фундаментальных работ по К-теории; доказал гипотезу Адамса в топологической К-теории. В[illegible] ным достижением Квиллена стало доказательство гипотезы Сéрра о строении проективных модулей над кольцом непрерывных функций (доказательство этой гипотезы независимо от Квиллена получил советский математик А. А. Суслин).

Григорий Александрович Маргулис родился в Москве в 1946 г. Окончил МГУ. С 1969 г.— сотрудник Института проблем передачи информации АН СССР. Основные труды — по теории групп Ли. В частности, открыл соотношение между непрерывностью математических структур, известных как группы Ли, и их дискретных подструктур, известных как решетки подгрупп. Другие важные работы Маргулиса относятся к комбинаторике, дифференциальной геометрии, эргодической теории и теории динамических систем.

Чарльз Луиз Фефферман родился в Вашингтоне в 1949 г. В 20 лет получил степень доктора философии. В 22 года стал профессором Чикагского университета. В момент присуждения премии работал в Принстонском университете. Труды — по различным разделам современного анализа, в частности по теории функций комплексного переменного (теорема Феффермана), гармоническому анализу и теории рядов, а также дифференциальным уравнениям.

Трое математиков были награждены на XVIII ММК (1983, Варшава). Это А. Конн (Франция), У. Тэрстон (США), Ш. Яу (США).

Ален Конн родился в Даргиньяне в 1947 г. Профессор Европейского института перспективных исследований (Париж). Основные труды — по различным разделам общей алгебры (C^*-алгебры, K-теория и др.). В гомологической алгебре известны теория Конна, когомологии Конна, циклические модули Конна. Внес важный вклад в развитие современной теории операторных алгебр. Другие работы относятся к функциональному анализу и некоммутативной алгебраической геометрии.

Уильям Тэрстон родился в 1949 г. в Вашингтоне. Профессор Принстонского университета. Основные труды — по топологии. В алгебраической топологии известна конструкция Кана и Тэрстона, в топологии многообразий — теорема, норма и классы Тэрстона.

Шинтан Яу (Яо) родился в 1949 г. в Китае. Профессор Принстонского института перспективных исследований. Труды — по дифференциальным уравнениям, алгебраической геометрии, топологии, дифференциальной геометрии и теории относительности.

На XIX ММК (1986, Беркли) Филдсовскую премию получили С. Доналдсон (Великобритания), Г. Фалтингс (ФРГ), М. Фридман (США).

Саймон Кёрдан Доналдсон родился в 1957 г. в Кембридже. Окончил Кембриджский университет. С 1985 г.— профессор Оксфордского университета. Основные труды — по топологии четырехмерных многообразий. В работе, удостоенной медали, показал, что различные гладкие структуры существуют уже на R^4.

Герт Фалтингс родился в Гельзенкирхене в 1954 г. Окончил Мюнстерский университет. С 1985 г. работает в Принстонском университете (США). Основные труды — по диофантовым уравнениям и алгебраической геометрии. В 1983 г. получил результаты, из которых, в частности, следует, что уравнение Ферма $x^n+y^n=z^n$ имеет не более чем конечное число решений при $n>2$.

Майкл Фридман родился в Лос-Анджелесе в 1951 г. Окончил Принстонский университет. Профессор Калифорнийского университета в Сан-Диего. Удостоен медали за работы по алгебраической топологии.

Влияние Филдсовской премии на развитие математики велико и благотворно. Подавляющее большинство ее лауреатов стали выдающимися математиками мира.

Имена следующих лауреатов назовет очередной математический конгресс, который планируется провести в Киото (Япония) в 1990 г.

Литература

1. *Смирнов С.* Без Нобелевских премий // Знание — сила. 1983. № 2. С. 30—31.

2. *Абель М., Абель Э., Флайшер А.* 85 лет без Нобелевских премий // Наука и жизнь. 1987. № 2. С. 62—63.

3. *Монастырский М. И.* Лауреаты премии Филдса // Историко-математические исследования. 1989. Вып. XXXI. С. 88—115.

4. Математический энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия. 1988.

А. И. Бородин (г. Донецк)

ПОПРАВКА

В журнале «Математика в школе» (1990, № 1) в статье «Об экзамене по алгебре и началам анализа в школах РСФСР» на с. 25 в правой колонке в строках 20—24, считая сверху, дана формулировка теоремы, в которой пропущено одно условие. Теорема должна формулироваться так: «Если дифференцируемая функция имеет единственную критическую точку на промежутке и в этой точке производная меняет знак, то функция принимает в этой точке либо наибольшее, либо наименьшее значение».

При использовании этой теоремы делалась ссылка на статью В. А. Петрова (Математика в школе. 1981. № 6. С. 18—19), в которой эта теорема сформулирована корректно.

Редакция приносит свои извинения читателям.

В секции средней школы НМС по математике Гособразования СССР

Приказом Государственного комитета СССР по народному образованию от 13 сентября 1989 г. № 732 создан Научно-методический совет по математике Гособразования СССР.

Председателем Совета утвержден академик В. С. Емельянов.

Совет должден способствовать решению следующих задач:

совершенствованию содержания математических дисциплин и организации учебного процесса, уровня теоретической и практической подготовки студентов и учащихся;

обеспечению методологического единства содержания, методов и средств обучения в системе непрерывного образования;

внедрению эффективных методов и средств обучения;

обеспечению студентов и учащихся современной учебной литературой;

совершенствованию содержания, форм и методов повышения квалификации преподавателей и учителей учебных заведений, обеспечению их соответствующей учебной литературой.

В составе Совета образован ряд секций, в том числе секция средней школы. Председателем секции средней школы назначен академик С. М. Никольский, заместителями председателя — старший научный сотрудник Н. П. Долбилин, профессор С. А. Теляковский, старший научный сотрудник В. В. Фирсов, ученым секретарем — старший научный сотрудник С. С. Минаева.

Секция средней школы наметила в своем плане проведение сессий, посвященных актуальным вопросам школьного математического образования.

Ниже приводится постановление первой сессии секции, которая была посвящена государственному базисному учебному плану средней общеобразовательной школы*, утвержденному Государственным комитетом СССР по народному образованию 22 сентября 1989 г.

ПОСТАНОВЛЕНИЕ
секции средней школы
Научно-методического совета по математике
Государственного комитета СССР
по народному образованию от 19 марта 1990 г.

Заслушав и обсудив сообщение В. В. Фирсова о государственном базисном учебном плане общеобразовательной школы и возможностях работы школы по новому учебному плану, секция средней школы НМС по математике Гособразования СССР считает необходимым:

1. Отметить, что государственный базисный учебный план предусматривает децентрализацию разработки учебных планов школ, существование различных вариантов советской школы при сохранении ее единства, обеспечиваемого союзно-республиканским компонентом содержания образования.

Базисный учебный план позволяет существенно варьировать объем учебного времени, отводимого на изучение математики,— от минимального числа часов, указанного в соответствующей строке плана, до значительно большего числа часов за счет использования резервов республиканского и особенно школьного компонента. Это создает основу дифференциации школьного математического образования с учетом интересов и способностей учащихся.

2. Подчеркнуть, что введение базисного учебного плана при недостаточной подготовленности школы к его реализации может привести к значительным издержкам, в частности к заметному сокращению числа часов на изучение математики для подавляющего большинства школьников страны.

Особенно существенным может оказаться сокращение числа уроков математики в V — IX классах. Между тем именно в этих классах закладываются основы математических знаний и, как показывают наблюдения, у учащихся, склонных к предметам естественно-математического цикла, интерес к ним обычно формируется в этом возрасте.

3. Отметить, что, хотя по базисному плану предусматривается сокращение обязательного чнсла часов на математику сравнительно с действующим планом, это может быть восполнено дополнительными часами, которые должны использоваться для следующих целей:

проработки со слабыми учащимися пройденного материала без увеличения минимальной программы,

углубленного изучения программного и дополнительного материала с сильными учащимися.

Обе эти цели очень важны, и необходимо, чтобы в каждой школе были созданы предпосылки для конкретного их осуществления.

Слабым в математике учащимся тех часов, которые выделены на этот предмет, может оказаться недостаточно для прохождения даже минимальной программы. Поэтому надо приветствовать, что базисный учебный план создает возможность использования дополнительных часов для проработки пройденного материала.

В то же время каждая школа должна побеспокоиться о серьезном математическом образовании тех учащихся, которые чувствуют себя способными к математике и имеют желание в будущем осваивать технические и вообще естественнонаучные профессии. Надо отдать себе отчет в том, что для осуществления именно этой цели часов, отведенных на математику по минимальному плану, недостаточно. Поэтому для указанной категории учащихся в каждой школе обязательно должны быть организованы дополнительные занятия для усвоения нужных разделов школьной математики, не вошедших в минимальный курс.

Не все школы смогут квалифицированно распределить учебный материал между обязательным (минимальным) и дополнительным учебными планами. Появляется необходимость в создании примерных программ и рабочих планов как для основного курса математики, так и для дополнительных занятий. Здесь нужна настоятельная помощь со стороны научно-педагогических учреждений.

4. Рекомендовать Государственному комитету СССР по народному образованию и соответствующим министерствам союзных республик:

в серии публикаций для учнтелей и работников школ разъяснить основные идеи н принципы построения базисного учебного плана,

опубликовать образцы рабочих учебных планов, чтобы школы могли выбрать приемлемый для себя вариант учебного плана или осуществить переработку одного из вариантов,

подготовить и направить в школы измененные в соответствии с базисным учебным планом типовые программы по математике и методические письма, обеспечивающие возможность работы по действующим учебникам в условиях сокращенного числа часов, с рекомендациями по повышенной математической подготовке интересующихся математикой школьников,

разработать и внедрить систему государственной оценки качества математической подготовки школьников.

Председатель секции средней школы
академик
С. М. Никольский

* См. Математика в школе. 1989. № 6. С. 3.

Ассоциация математических соревнований

16 февраля 1990 г. коллегия Гособразования СССР одобрила инициативу жюри Всесоюзной математической олимпиады по созданию Всесоюзной ассоциации математических соревнований для молодежи. Членами ассоциации могут быть индивидуальные лица, вузы, школы, кружки, организации без уплаты каких-либо членских взносов.

Деятельность ассоциации будет направлена прежде всего на выявление и поддержку талантливой молодежи, развитие ее творческих способностей, содействие становлению новых, нетрадиционных форм соревнований, накопление лучшего отечественного и зарубежного опыта. Предполагается создание информационно-консультационного центра, издательской группы, методических комиссий по подготовке школьных, районных, городских, областных, заочных олимпиад; проведение научных конференций.

Первые проекты:

1. Проведение и организация в Москве XXXIII Международной математической олимпиады в июле 1992 г.
2. Слет участников всесоюзных и международных математических олимпиад различных лет (осень 1991 г.).
3. Всесоюзная научная конференция школьников памяти академика А. Н. Колмогорова (апрель 1991 г.).
4. Обмен командами учащихся школ, городов, районов, областей, республик для участия в зарубежных математических олимпиадах.

Ваши предложения и пожелания просим посылать по адресу: **119899, Москва, В-234, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова, ректорат, комната 906, ассоциация математических соревнований.**

Жюри Всесоюзной
математической
олимпиады

Магический квадрат и арифметическая прогрессия

В статье *И. С. Зельцера* и *Б. А. Кордемского* "Занятные стайки простых чисел" (Математика в школе. 1988. N 6) выделена замечательная стайка из девяти простых чисел:

199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879.

Она представляет собой арифметическую прогрессию. Кроме того, как отметили авторы упомянутой статьи, данная стайка чисел привлекательна способностью разместиться в девяти клетках квадрата 3x3 так, что образуется магический квадрат с константой, равной разности двух простых чисел: 3119–2 (рис. 1).

Замечание об арифметической прогрессии само по себе очень интересно. Дело в том, что из каждых девяти последовательных членов л ю б о й арифметической прогрессии натуральных чисел можно составить магический квадрат.

В самом деле, пусть дана арифметическая прогрессия:

a, $a+d$, $a+2d$, ..., $a+8d$, где a и d натуральные. Расположим ее члены так, как показано на рис. 2. Нетрудно видеть, что получился магический квадрат, константа C которого равна $3a+12d$. Действительно, сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце и по каждой диагонали квадрата равна $3a+12d$.

Вопрос о магических квадратах с простыми числами рассматривается в известной книге *М. Гарднера* "Математические досуги" (М.: Мир, 1972). Там на с. 420 приведен, в частности, магический квадрат, воспроизведенный на рис. 3. При этом утверждается, что задействованы одни только простые числа. На самом же деле в квадрате на рис. 3 только восемь простых чисел, поскольку число 1 не является простым.

Предлагаю (см. рис. 4 на последней странице обложки) магический квадрат, составленный из девяти простых чисел ; его константа C=267.

Вообще, составить магический квадрат из одних простых чисел – задача не из легких. Тем большее восхищение вызывают магические квадраты из простых чисел с одной и той же последней цифрой. На рис. 5 магический квадрат составлен из простых чисел с последней цифрой "1". На рис. 6 и 7 в магические квадраты собраны также простые числа с последними цифрами "3" и "7" соответственно. Магический квадрат из простых чисел, оканчивающихся на "9", уже указан на рис. 1

1

1669	199	1249
619	1039	1459
829	1879	409

2

$a+3d$	$a+8d$	$a+d$
$a+2d$	$a+4d$	$a+6d$
$a+7d$	a	$a+5d$

3

67	1	43
13	37	61
31	73	7

45 коп.

Москва
«Педагогика»

Индекс 70557

④

71	167	29
47	89	131
149	11	107

⑤

571	1051	181
211	601	991
1021	151	631

⑥

823	1093	643
673	853	1033
1063	613	883

⑦

307	607	97
127	337	547
577	67	367

С. Т. Берколайко (с. Котово Белгородской обл.)

От редакции.

А что же арифметическая прогрессия? Не жалко ли, что в красивых магических квадратах на рис. 3—7 ею пришлось пожертвовать?

Если числа каждого квадрата на рис. 3—7 переписать в виде возрастающей последовательности и рассмотреть разности между каждым последующим и предыдущим, то мы увидим, что равенство разностей регулярно (!) нарушается в каждой третьей и шестой паре.

В общем случае: пусть a_1, a_2, ..., a_8, a_9 — возрастающая последовательность простых чисел, которые можно расставить в виде магического квадрата. Верно ли, что для такой последовательности выполняется:
$a_2-a_1=a_3-a_2=a_5-a_4=a_6-a_5=a_8-a_7=a_9-a_8$
и $a_4-a_3=a_7-a_6=k(a_2-a_1)$, где k — число натуральное, не равное 1?

Иными словами, верно ли, что в описанной выше последовательности чисел a_1, a_2, ..., a_9 в двух случаях нарушается закономерность арифметической прогрессии: на третьем шаге (a_4-a_3) и на шестом a_7-a_6?

Например, перепишем числа на рис. 3 в возрастающем порядке: 1, 7, 13, 31, 37, 43, 61, 67, 73. Легко видеть, что $7-1=13-7=37-31=43-37=67-61=73-67=6$, но $31-13=61-43=18=3\cdot 6$.

Предоставляем читателям самим проверить, что подмеченная закономерность выполняется для всех квадратов на рис. 3—7. Случайность ли это?

ISSN 0130—9358. Математика в школе. 1990. N 4. 1—80