КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.В. ЗАЙЦЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

(Для студентов педагогического образования)

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Казань – 2014

УДК 517.3
Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Заседания кафедры высшей математики и математического моделирования
Протокол № 8 от 13 ноября 2014 г.

Научный редактор:
доктор физико-математических наук, профессор
Игнатьев Юрий Геннадьевич

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, доцент
Сушков Сергей Владимирович

кандидат физико-математических наук, доцент
Голицына Ирина Николаевна

Зайцева Н.В. Математический анализ. Интегральное исчисление функции одной переменной. Учебно-методическое пособие (для студентов педагогического образования). – Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2014. – 33 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов профильной подготовки - «математика, информатика и информационные технологии» с направлением подготовки - педагогическое образование. Пособие включает в себя обзор теоретического материала, изучаемого в разделе «Интегральное исчисление функции одной переменной», разобранные примеры по темам курса, задания для самостоятельной работы студентов и список рекомендуемой литературы.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение..4
I. Неопределенный интеграл 5
I.I. Понятие неопределенного интеграла..5
I.II. Методы интегрирования...7
I.II.I. Непосредственное интегрирование...7
I.II.II. Метод подстановки и замены переменной......................................7
I.II.III. Метод интегрирования по частям..7
I.III. Интегрирование рациональных функций.....................................8
I.IV. Интегрирование иррациональных функций...............................10
I.IV.I. Интегрирование квадратичных иррациональностей......................11
I.IV.II. Интегрирование биномиального дифференциала..........................12
I.V. Интегрирование тригонометрических
и гиперболических функций...12
II. Определенный интеграл...14
II.I. Понятие определенного интеграла и его свойства......................14
II.II. Вычисление определенного интеграла..15
II.II.I. Формула Ньютона-Лейбница..15
I.II.II. Замена переменных в определенном интеграле.
Интегрирование по частям..16
II.III. Приложения определенного интеграла...17
III. Задания для самостоятельного выполнения................................23
Литература...33

ВВЕДЕНИЕ

Математический анализ – важнейший базовый курс, в котором закладывается фундамент математического образования. Данная дисциплина относится к вариативной части образовательной программы профильной подготовки студентов «Математика, информатика и информационные технологии», отделения бакалавр, направления 050100.62 – Педагогическое образование. Раздел дисциплины «Интегральное исчисление функции одной переменной» является темой 4 рабочей программы дисциплины, изучается на втором курсе, в третьем семестре. На изучение данного раздела отводится 36 часов лекционных занятий, 36 часов лабораторных занятий и 54 часа на самостоятельную работу студентов, которая включает в себя повторение лекционного материала, подготовку к практическим занятиям и контрольным работам. Формой контроля самостоятельной работы является контрольная работа. После изучения данного курса студент должен знать интегральное исчисление функции одной переменной и уметь применять интегральное исчисление при решении геометрических и физических задач.

Настоящее учебное пособие составлено в соответствии с учебной программой курса математического анализа и включает в себя следующие разделы:

- Неопределенный интеграл, его свойства и методы вычислений;
- Определенный интеграл, геометрические и физические задачи, приводящие к определенному интегралу, свойства определенного интеграла и его приложения – к вычислению площадей плоских фигур, длины дуги кривой, площадей поверхности тел, полученных вращением некоторой плоской кривой и их объемов, к вычислению статистических моментов и моментов инерции плоской пластины и координат центра тяжести материальной кривой.

В пособии изложен краткий теоретический материал, необходимый для решения задач данного курса, необходимые формулы и приведены подробно разобранные примеры. Пособие включает в себя 5 заданий для самостоятельной работы студентов по теме «Неопределенный интеграл» и 5 заданий по теме «Определенный интеграл», каждое задание представлено в количестве 25 различных вариантов. В конце предложен список литературы, рекомендуемой при изучении курса.

Данное учебно-методическое пособие может быть полезным подспорьем, как для студентов, так и для преподавателей, ведущих практические занятия по данному курсу дисциплины.

I. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

I.I. Понятие неопределенного интеграла

Основной задачей интегрального исчисления является задача по восстановлению функции по заданной первообразной.
Определение. Функция $F(x)$, заданная на множестве $x \in X$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если функция $F(x)$ дифференцируема в каждой точке этого множества и справедлива формула

$$F'(x) = f(x).$$

Лемма. Функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ являются первообразными для функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда они отличаются константой

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

. **Определение.** Множество всех первообразных для функции $f(x)$, заданных на множестве $x \in X$, называется *неопределенным интегралом*, который обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Выражение $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, а функция $f(x)$ – подынтегральной функцией.
Определение. Процесс вычисления интеграла называется интегрированием.

Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла есть подынтегральная функция $(\int f(x)dx)' = f(x)$.
2. Дифференциал от интеграла есть подынтегральное выражение $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, где $k \neq 0 - const$.
5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Процесс дифференцирования элементарных функций не выводит из класса элементарных функций, т.е. производная от элементарной функции есть элементарная функция. Для процесса интегрирования это утверждение, вообще говоря, не верно. Приведем примеры, в которых подынтегральные функции являются элементарными, однако их первообразные нет: $\int e^{-x^2}dx$ - интеграл Пуассона, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ и $\int \frac{\cos x}{x}dx$ - интегральные синус и косинус, интегралы Френеля - $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$, интегральный логарифм - $\int \frac{dx}{\ln x}$.

Таблица основных интегралов.

1. $\int 0dx = C.$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, x \neq \pi n, n \in Z.$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ или $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C, |x| < 1.$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C.$
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \int e^x dx = e^x + C.$
11. $\int chxdx = shx + C.$
12. $\int shxdx = chx + C.$
13. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$
14. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C, x \neq 0.$

Некоторые интегралы, часто встречающиеся на практике.

1. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C.$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} \pm 1} + C.$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C.$
4. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$
5. $\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2} \ln a^2 \pm x^2 + C.$

6. $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$

7. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + C.$

8. $\int x^2 \pm a^2 dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln\dfrac{x}{a} + \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} \pm 1} + C.$

Опишем основные методы интегрирования.

I.II. Методы интегрирования

I.II.I. Непосредственное интегрирование

Суть метода состоит в применении известных свойств интегралов, что непосредственно сводит их к табличным. Рассмотрим следующие примеры.

1). $\int 3x^4dx = 3\int x^4dx = \frac{3}{5}x^5 + C.$

2). $\int (x+1)^2dx = \int (x^2 + 2x + 1)dx = \int x^2dx + 2\int xdx + \int dx =$
$= \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C.$

3). $\int (\sin x + 5e^x)dx = \int \sin xdx + 5\int e^xdx = -\cos x + 5e^x + C.$

I.II.II. Метод подстановки и замены переменной

Если функция $\psi(x)$ - первообразная для функции $\varphi(x)$, т.е. $\psi'(x) = \varphi(x)$, тогда $d\psi(x) = \psi'(x)dx = \varphi(x)dx$ и справедлив метод:

$$\int F(\psi(x))\varphi(x)dx = \int F(\psi(x))d\psi(x) = \int F(t)dt,$$

где $\psi(x) = t -$ замена переменной.

Рассмотрим примеры.

1). $\int \operatorname{tg} xdx = \int \dfrac{sinxdx}{\cos x} = -\int \dfrac{d(\cos x)}{\cos x} = \wr \cos x = t \wr = -\int \dfrac{dt}{t} =$
$= -\ln|t| + c = -\ln|\cos x| + C.$

2). $\int \dfrac{dx}{x-1} = \int \dfrac{d(x-1)}{x-1} = \wr x - 1 = t \wr = \int \dfrac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x-1| + C.$

3). $\int x\cos x^2dx = \frac{1}{2}\int \cos x^2 d(x^2) = \wr x^2 = t \wr = \int \cos tdt = \sin t + c =$
$= \sin x^2 + C.$

4). $\int \dfrac{dx}{x\ln^2 x} = \int \dfrac{d(\ln x}{\ln^2 x} = \wr \ln x = t \wr = \int t^{-2}dt = -\frac{1}{t} + c = -\dfrac{1}{\ln x} + C.$

I.II.III. Метод интегрирования по частям

Метод основан на формуле:

$$\int UdV = UV - \int VdU.$$

Рассмотрим примеры на применение данного метода.
1). $\int xe^x dx = \wr U = x, dV = e^x \Rightarrow dU = dx, V = e^x \wr = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C.$
2). $\int \ln x dx = \wr U = \ln x, dV = dx \Rightarrow dU = \frac{dx}{x}, V = x \wr = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C.$
3). $\int \operatorname{arctg} x dx = \wr U = arctgx, dV = dx \Rightarrow dU = \frac{dx}{1+x^2}, V = x \wr = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

I.III. Интегрирование рациональных функций

Пусть дана рациональная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_m}$, где $m, n \in N, a_0 \neq 0, b_0 \neq 0.$

Определение. Рациональная дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется правильной, если $n < m$, и неправильной, если $n \geq m$.
В случае, если подынтегральная функция — неправильная дробь, то первым шагом выделяем целую часть, а затем интегрируем эту выделенную целую часть и полученную в результате деления правильную дробь.

Определение. Правильные дроби вида: $\dfrac{A}{x-\alpha}$; $\dfrac{B}{(x-\alpha)^n}$; $\dfrac{Cx+D}{x^2+px+q}$; $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, n \in N, n \neq 1$, где квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, называются *простейшими дробями.*

Интегрирование простейших дробей.

I. $\int \dfrac{A}{x-\alpha}dx = A\ln|x-\alpha| + C.$

II. $\int \dfrac{B}{(x-\alpha)^n}dx = -\dfrac{B}{(n-1)(x-\alpha)^{n-1}} + C.$

III. $$\frac{Cx+D}{x^2+px+q} = \frac{C}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(D - \frac{Cp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right).$$

IV. $$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} = \frac{M(x^2+px+q)^{-n+1}}{2-2n} +$$
$$+\left(N - \tfrac{Mp}{2}\right)\left(\frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right),$$
где $t = x + \dfrac{p}{2}, a = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}.$

При вычислении простейших дробей вида IV используется рекуррентная формула:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

Теорема. Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь с действительными коэффициентами, такая, что знаменатель можно разложить на следующие множители:

$$Q(x) = (x-b_1)^{\alpha_1}(x-b_2)^{\alpha_2}...(x-b_m)^{\alpha_m}\cdot$$

$$\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}...(x^2+p_nx+q_n)^{\beta_n}.$$

Тогда эту правильную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-b_1} + \frac{A_2}{(x-b_1)^2} + \frac{A_3}{(x-b_1)^3} + ... + \frac{A_{\alpha_1}}{(x-b_1)^{\alpha_1}} +$$

$$+\frac{B_1}{x-b_2} + \frac{B_2}{(x-b_2)^2} + \frac{B_3}{(x-b_2)^3} + ... + \frac{B_{\alpha_2}}{(x-b_2)^{\alpha_2}} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{C_1}{x-b_m} + \frac{C_2}{(x-b_m)^2} + \frac{C_3}{(x-b_m)^3} + ... + \frac{C_{\alpha_m}}{(x-b_m)^{\alpha_m}} +$$

$$+\frac{K_1x+L_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{K_2x+L_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{K_{\beta_1}x+L_{\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_nx+q_n} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_nx+q_n)^2} + ... + \frac{M_{\beta_n}x+N_{\beta_n}}{(x^2+p_nx+q_n)^{\beta_n}}.$$

Теорема. Всякая рациональная дробь интегрируема, т.е. ее первообразная выражается через элементарные функции.

Пример.

Вычислите неопределенный интеграл $\int \dfrac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx.$

Решение.

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{(A+M)x^3+(B+N-2M)x^2+(B-2N+M)x+(-A+B+N)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим неопределенные коэффициенты: $A=2, B=3, M=0, N=1$.
Тогда:

$$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{x^2+x+1}dx.$$

Вычислим интегралы от простейших дробей отдельно.
1) $\int \frac{2}{x-1}dx = 2\int \frac{d(x-1)}{x-1} = 2\ln|x-1| + C;$
2) $\frac{3}{(x-1)^2}dx = 3\int (x-1)^{-2}d(x-1) = -\frac{3}{x-1} + C;$
3) $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

$$= \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} == \frac{2\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

I.IV. Интегрирование иррациональных функций

Рассмотрим интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}},\right)dx,$$

где $p_i, i = 1..n$ и $q_j, j = 1..n$ – натуральные числа, и $ad - bc \neq 0$, R – рациональная функция относительно переменной x и всех перечисленных корней.

Подстановка $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^s$, где $s = (q_1, q_2, ..., q_n)$ позволяет рационализировать подынтегральную функцию. Рассмотрим на примере.
Пример.

Вычислите неопределенный интеграл $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+(x+1)^{\frac{1}{3}}}dx.$

Решение. Используем подстановку $x+1=t^6$, откуда $dx = 6t^5dt$. С помощью данной подстановки подынтегральная функция рационализируется к

виду:
$\int \frac{1-t^3}{1+t^2}6t^5dt = -6\int \frac{t^8-t^5}{t^2+1}dt = -6\int (t^6-t^4-t^3+t^2-1-\frac{t-1}{t^2+1})dt =$
$= -\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3\ln(t^2+1)-6arctgt+C,$
где $t=(x+1)^{\frac{1}{6}}$.

I.IV.I. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Рассмотрим интеграл следующего вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Французским математиком Эйлером было установлено, что в следующих трех случаях подынтегральная функция рационализируется подстановками:
I. $\sqrt{ax^2+bx+c} = y \pm \sqrt{a}x$, если $a>0$.
II. $\sqrt{ax^2+bx+c} = xy \pm \sqrt{c}$, если $c>0$.
III. $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)y$, где α – действительный корень многочлена ax^2+bx+c.
С помощью данных подстановок подынтегральная функция будет представлять собой композицию рациональных функций, а, следовательно, интеграл будет берущимся.
Пример.
Вычислить интеграл $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.
Решение.
Применим вторую подстановку Эйлера: $\sqrt{1-2x-x^2} = xy+1$, откуда получаем $x=-2\frac{1+y}{1+y^2}$, а $dx = 2\frac{y^2+2y-1}{(1+y^2)^2}dy$.
После всех преобразований интеграл предстает в следующем виде:
$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = -\int \frac{y^2+2y-1}{(y-1)(y^2+1)}dy = -\int\frac{dy}{y-1} - 2\int\frac{dy}{y^2+1} =$
$= -\ln|y-1| - 2arctgy + c$, где вместо из подстановки $y=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-1}{x}$.
Также для нахождения интеграла $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ можно использовать тригонометрические подстановки. Для этого нужно преобразовать квадратный трехчлен ax^2+bx+c в сумму или разность квадратов и свести интеграл к одному из следующих видов:
1. $\int R(z,\sqrt{m^2-z^2})dz$;
2. $\int R(z,\sqrt{m^2+z^2})dz$;
3. $\int R(z,\sqrt{z^2-m^2})dz$.
Тогда эти интегралы можно будет вычислить с помощью подстановок: $z=m\cdot\sin t$ или $z=m\cdot tht$ – для первого случая, $z=m\cdot tgt$ или $z=m\cdot sht$ – для второго, и $z=\frac{m}{\cos t}$ или $z=m\cdot cht$ – для третьего, соответственно.
Рассмотрим этот вариант на примере.
Пример.
Вычислите интеграл $\int\sqrt{3-2x-x^2}dx$.
Решение.

$\int \sqrt{3-2x-x^2}dx = \int \sqrt{2^2-(x+1)^2}dx = \wr x+1 = 2\sin t \wr =$
$\int \sqrt{4-4\sin^2 t}2\cos t dt = 4\int \cos^2 t dt = 2\int 1+\cos 2t dt = 2t+\sin 2t+c =$
$= 2\arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + C.$

I.IV.II. Интегрирование биномиального дифференциала

Определение. Выражение вида $x^m(a+bx^n)^p dx$ называется *биномиальным дифференциалом*, где $m, n, p \in Q$ (в случае, когда m, n, p одновременно являются целыми, подынтегральная функция является рациональной).

Подстановки П.Л. Чебышева для интегрирования биномиального дифференциала:

I. Если p – целое число, а m, n – не целые, т.е. $x^{\frac{p_1}{q_1}}(a+bx^{\frac{p_2}{q_2}})^p dx$, то рационализирует интеграл подстановка $x = z^n$, где $n = (q_1, q_2)$.

II. Если p – не целое число, а $\frac{m+1}{n}$ – целое, то интеграл рационализирует подстановка $a+bx^n = z^s$, где s – знаменатель дроби p.

III. Если p – не целое число, а $\frac{m+1}{n}+p$ – целое, то используем подстановку $ax^{-n}+b = z^s$, где s – знаменатель дроби p.

Пример.

Вычислите интеграл $\int \dfrac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}dx$.

Решение.

Преобразуем интеграл к виду:

$\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}dx = \int x^{-1}(1+2x^{-1})^{\frac{1}{2}}dx,$

после чего видно, что $p = \frac{1}{2}$ – не целое число, а $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{1} = 0$ – целое.

Применим вторую подстановку: $1+2x^{-1} = z^2$, откуда находим $x = \frac{2}{z^2-1}$
$dx = -\frac{4z}{(z^2-1)^2}dz$. Тогда:

$\int x^{-1}(1+2x^{-1})^{\frac{1}{2}}dx = -2\int \frac{z^2}{z^2-1}dz = -2\left(\int dz + \int \frac{dz}{z^2-1}\right) =$
$= -2z + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| + C = -2\sqrt{1+2x^{-1}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+2x^{-1}}+1}{\sqrt{1+2x^{-1}}-1}\right| + C.$

I.V. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций

Подстановка вида $tg\dfrac{x}{2} = t$ рационализирует интеграл, содержащий тригонометрические функции, поэтому она называется *универсальной*. Согласно данной подстановке:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Рассмотрим пример на применение универсальной подстановки.

Пример.

Вычислите интеграл $\int \dfrac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

Решение.

С помощью универсальной подстановки интеграл приводится к виду:

$\int \frac{dt}{3t^2+2t+2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(t+\frac{1}{3})}{(t+\frac{1}{3})^2+\frac{5}{9}} = \frac{1}{\sqrt{5}} arctg\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right) + c = \frac{\sqrt{5}}{5} arctg\left(\frac{3tg\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right)$.

Рассмотрим частные случаи, когда подынтегральная функция рационализируется с помощью других, более простых подстановок.

1. Если подынтегральная функция является нечетной относительно функции $\sin x$, т.е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рационализирует интеграл подстановка $t = \cos x$.

2. Если подынтегральная функция является нечетной относительно функции $\cos x$, т.е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рационализирует интеграл подстановка $t = \sin x$.

3. Если подынтегральная функция является нечетной относительно функций $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то рационализирует интеграл подстановка $t = tgx$.

Интегралы вида $\int \sin nx \sin mx dx$, $\int \sin nx \cos mx dx$, $\int \cos nx \cos mx dx$ вычисляются с помощью применения тригонометрических формул преобразования произведения в сумму. А интегралы вида $\int \sin^{2n} \alpha x dx$, $\int \cos^{2m} \beta x dx$ вычисляются с помощью формул понижения степени.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dx}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dx}{\sin(x+\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})dx}{\sin^2(x+\frac{\pi}{4})} =$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{d\cos(x+\frac{\pi}{4})}{1-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})+1}{\cos(x+\frac{\pi}{4})-1}\right| + C.$

Пример 2.

$\int \cos^2 3x dx = \int \frac{1+\cos 6x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{12}\sin 6x + c.$

Пример 3.

$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx =$

$= -\ln|\cos\frac{x}{2}| + \ln|\sin\frac{x}{2}| + c = \ln|tg\frac{x}{2}| + C.$

Приемы интегрирования гиперболических функций аналогичны приемам интегрирования тригонометрических функций.Напомним некоторые основные формулы:

$ch^2x - sh^2x = 1, 2shx \cdot chx = sh2x,$

$sh^2x = \frac{1}{2}(ch2x - 1), ch^2x = \frac{1}{2}(ch2x + 1).$

Пример 4.

$\int ch^2 x dx = \frac{1}{2}\int ch2x + 1 dx = \frac{1}{4} sh2x + \frac{x}{2} + C.$

Пример 5.

$\int ch^3 x dx = \int ch^2 x d(shx) = \int (1 + sh^2 x) d(shx) = shx + \frac{sh^3 x}{3} + C.$

II. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

II.I. Понятие определенного интеграла и его свойства

Рассмотрим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции, под которой будем понимать плоскую фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$ – непрерывная функция, и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных, несамопересекающихся отрезков: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_n = b$. На отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольную точку ξ_k, из которой восстановим перпендикуляр до пересечения с графиком функции $y = f(x)$. Тогда площадь полученного прямоугольника равна $f(\xi_k)\triangle x_k$, $triangle x_k = x_k - x_{k-1}$. Проделаем данную процедуру для каждого отрезка $[x_{k-1}, x_k]$. Из построения ступенчатой фигуры видно, что ее площадь приближенно равна площади криволинейной трапеции: $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k \approx S$. Обозначим через $\lambda = \max\{\triangle x_k\}$.

Определение. Сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k$, построенная для функции $y = f(x)$ называется *интегральной суммой.*
Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм при $\lambda \to 0$, то говорят, что функция $y = f(x)$ *интегрируема по Риману*, а предельное значение интегральных сумм называется *определенным интегралом* и обозначается:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx,$$

a,b – соответственно обозначают нижний и верхний пределы интегрирования.
Из вышесказанного делаем вывод, что определенный интеграл есть площадь криволинейной трапеции. Это есть геометрическая интерпритация понятия определенного интеграла.
Физический смысл определенного интеграла: если $y = f(x)$ есть функция скорости неравномерно движущегося тела в зависимости от времени x, то определенный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ представляет собой значение пути, пройденного телом за время $x = b - a$.

Свойства определенного интеграла.

1. $\int\limits_a^b dx = b - a,\ a < b.$

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

4. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$

5. $\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$, для $\forall c \in R$.

6. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема по любому составляющему данного отрезка.

7. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и точка c – такая, что $a < c < b$, то справедлива формула $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (свойство аддитивности по отрезку).

Теорема. "О среднем значении функции". Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что значение функции в этой точке равно $f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Геометрическая интерпритация "теоремы о среднем": существует промежуточная точка $c \in [a, b]$ такая, что площадь прямоугольника, построенного на основании $[a, b]$ с высотой равной $f(c)$, равно площади криволинейной трапеции с тем же основанием и ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$: $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.

II.II. Вычисление определенного интеграла.

II.II.I. Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $y = f(x)$ непрерывна во всех точках $x \in [a, b]$, и функция $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$, то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Решение.
$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$

II.II.II. Замена переменных в определенном интеграле. Интегрирование по частям

Теорема. Если
1) функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) $[a, b]$ – множество значений функции $y = f(x)$, заданных на отрезке $[\alpha, \beta]$;
3) функция $x = g(t)$ дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$;
4) $g(\alpha) = a\ g(\beta) = b$,
то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt.$$

Пример. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}dx$.

Решение.
Сделаем подстановку $\sqrt{x} = t$, откуда $x = t^2$, $dx = 2tdt$. Тогда
$\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}dx = \int\limits_0^2 \frac{2tdt}{1+t}dt = 2\int\limits_0^2 (1 - \frac{1}{1+t})dt = 2(t - \ln|1+t|)|_0^2 = 2(2 - \ln 3)$

Теорема. Если функции $U(x)$, $V(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула:

$$\int\limits_a^b UdV = UV|_a^b - \int\limits_a^b VdU.$$

Пример. Вычислите определенный интеграл $\int\limits_0^1 \arcsin x dx$.

Решение.
Пусть $U = \arcsin x$, $dV = dx$, тогда $dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $V = x$.
$\int\limits_0^1 \arcsin x dx = x \arcsin x|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x^2}|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$

II.III. Приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.

Площадь фигуры F, ограниченной кривой $y = f(x)$ в Декартовой системе координат, $f(x) \geq 0$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ вычисляется по формуле:

$$S(F) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Следствия:

Если $f(x) \leq 0$, то площадь вычисляется по формуле:

$$S(F) = -\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если фигура F ограничена кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_2(x) \geq f_1(x)$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то площадь фигуры F вычисляется по формуле:

$$S(F) = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной графиком кривой, заданной в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, где значение параметра $\alpha \leq t \leq \beta$, вычисляется по формуле:

$$S(F) = \int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной графиком кривой, заданной в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $\rho(\varphi) \geq 0$ (для определенности), вычисляется по формуле:

$$S(F) = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример 1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Решение.
Запишем уравнение эллипса в параметрическом виде: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leq 2\pi$. Для вычисления площади воспользуемся формулой $S(F) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$. С учетом, что фигура эллипс симметрична, как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy, получим:
$S = 4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = 4ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = 2ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos2t)dt =$
$= 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$ (кв.ед.)

Пример 2. Вычислите площадь фигуры $\rho = \sin 2\varphi$, ограниченной одним лепестком.
Решение.
Формула площади фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярной системе координат имеет вид $S(F) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$, поэтому:
$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1 - \cos\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$ (кв.ед.).

Вычисление объемов тел вращения.

Объем тела, образованного вращением непрерывной на отрезке $x \in [a, b]$ функции $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$ вокруг оси Ox вычисляется по формуле:

$$V_{Ox} = \pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)dx.$$

Следствия:

Объем тела, образованного вращением непрерывной на отрезке $y \in [c, d]$ функции $x = f(y)$, $f(y) \geq 0$ вокруг оси yx вычисляется по формуле:

$$V_{Oy} = \pi\int\limits_{c}^{d} f^2(y)dy.$$

Для вычисления объема тела, образованного вращением плоской фигуры F, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем

$f_2(x) \geq f_1(x)$, $x \in [a,b]$, вокруг оси Ox справедлива формула:

$$V_{Ox} = \pi \int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx.$$

Если тело образовано вращением кривой, заданной в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, где значение параметра $\alpha \leq t \leq \beta$, вокруг оси Ox, где $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, его объем вычисляется по формуле:

$$V_{Ox} = \pi \int\limits_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dt.$$

Объем тела, полученного вращением кривой, заданной в параметрическом виде $x = x(t)$, $y = y(t)$ вокруг оси Oy, где $y(\gamma) = c$, $y(\delta) = d$, вычисляется по формуле:

$$V_{Oy} = \pi \int\limits_\gamma^\delta x^2(t)y'(t)dt.$$

Объем тела, полученного вращением кривой $\rho = \rho(\varphi)$, заданной уравнением в полярной системе координат вычисляется по формуле:

$$V_{O\rho} = \frac{2}{3}\pi \int\limits_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi.$$

Пример. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.
Решение.
Формула для нахождения объема $V_{Ox} = \pi \int\limits_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dt$.
$V_{Ox} = \pi \int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2(a(t-\sin t))'dt =$
$= \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\frac{1+\cos 2t}{2} - \cos^3 t)dt = 5a^3\pi^2$ (куб.ед.).

Вычисление площадей поверхности тел вращения.

Площадь поверхности тела вращения кривой $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$ вокруг оси Ox:

$$P_{Ox} = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Следствия:

Если $f(x) \leq 0$, то формула площади поверхности примет вид:

$$P_{Ox} = 2\pi \int\limits_a^b |f(x)|\sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Площадь поверхности тела вращения кривой $x = x(y)$ вокруг оси Oy, $y \in [c, d]$, находится по формуле:

$$P_{Oy} = 2\pi \int\limits_c^d |x(y)|\sqrt{1 + x'^2(y)}dy.$$

Площади поверхностей тел вращения кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, вокруг осей Ox и Oy находятся по формулам, соответственно:

$$P_{Ox} = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2}dt.$$

$$P_{Oy} = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta |x(t)|\sqrt{{x'_t}^2 + {y'_t}^2}dt.$$

Если кривая задана в полярной системе координат
$\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $\rho(\varphi) \geq 0$, то площади поверхностей тел вращения вокруг оси $O\rho$ и угла $\varphi = \frac{\pi}{2}$ могут быть вычислены по формулам:

$$P_{O\rho} = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi.$$

$$P_{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)|\cos\varphi|\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi.$$

Пример. Вычислите площадь поверхности вращения лемнискаты
$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.
Решение.
Формула для вычисления площади имеет вид

$P_{O\rho} = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi.$
У нас $\rho(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$,
$\rho'(\varphi) = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$,
$\rho^2 + \rho'^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$,
$P_{O\rho} = 2\cdot 2\pi \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\sqrt{\frac{a^2}{\cos 2\varphi}}d\varphi =$
$= 4\pi a^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi = 4\pi a^2(-\cos\varphi)|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi a^2(2-\sqrt{2})$ (кв.ед.).

Вычисление длины дуги.

Рассмотрим кривую Γ, заданную параметрическими уравнениями $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a, b]$.
Определение. Кривая Γ называется *регулярной*, если функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ имеют непрерывные производные.
Длина регулярной кривой Γ, имеющая начало $M(a)$ и конец $M(b)$, определяется по формуле:

$$l(\Gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}dt.$$

Следствия:

Длина кривой, заданной в явном виде $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, находится по формуле:

$$l(\Gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Длина кривой, заданной уравнениями в полярной системе координат в виде $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, $\theta_1 \leq \theta_2$, вычисляется по формуле:

$$l(\Gamma) = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi.$$

Пример. Вычислите длину дуги кривой $y = x^{\frac{3}{2}}$ от точки $(0, 0)$ до точки $(4, 8)$.
Решение.

Находим по формуле $l(\Gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx = \int\limits_0^4 \sqrt{1 + (x^{\frac{3}{2}})'^2}dx =$
$= \int\limits_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$ (ед.).

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ.

Задание 1. Вычислите неопределенный интеграл.

Вариант 1. $\int \frac{1+\ln x}{x}dx.$

Вариант 2. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx.$

Вариант 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

Вариант 4. $\int \frac{4arctgx-x}{1+x^2}dx.$

Вариант 5. $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^5}dx.$

Вариант 6. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx.$

Вариант 7. $\int \frac{x^2+\ln^2 x}{x}dx.$

Вариант 8. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx.$

Вариант 9. $\int \frac{x-(arctgx)^4}{1+x^2}dx.$

Вариант 10. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx.$

Вариант 11. $\int \frac{x^3}{x^2+4}dx.$

Вариант 12. $\int \frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^5}dx.$

Вариант 13. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-x^2-1}}dx.$

Вариант 14. $\int \frac{1+\ln x-1}{x-1}dx.$

Вариант 15. $\int \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx.$

Вариант 16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

Вариант 17. $\int \frac{x}{x^4+1}dx.$

Вариант 18. $\int \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Вариант 19. $\int \frac{8x-arctg2x}{1+4x^2}dx.$

Вариант 20. $\int \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$

Вариант 21. $\int \frac{(\arcsin x)^4 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
Вариант 22. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx.$
Вариант 23. $\int \frac{(\arcsin x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
Вариант 24. $\int \frac{x - 1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$
Вариант 25. $\int \frac{arctgx + x}{1+x^2} dx.$

Задание 2. Вычислите неопределенный интеграл.
Вариант 1. $\int (4x+3) \sin 5x dx.$
Вариант 2. $\int \ln (x^2+4) dx.$
Вариант 3. $\int arctg\sqrt{2x-1} dx.$
Вариант 4. $\int (1-6x)e^{2x} dx.$
Вариант 5. $\int (4x-2) \cos 2x dx.$
Вариант 6. $\int (x+5) \sin 3x dx.$
Вариант 7. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$
Вариант 8. $\int (2-9x)e^{-3x} dx.$
Вариант 9. $\int arctg\sqrt{5x-1} dx.$
Вариант 10. $\int (4-3x)e^{-3x} dx.$
Вариант 11. $\int \ln (4x^2+1) dx.$
Вариант 12. $\int (2-3x) \sin 2x dx.$
Вариант 13. $\int arctg\sqrt{4x-1} dx.$
Вариант 14. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx.$
Вариант 15. $\int (4x+7) \cos 3x dx.$
Вариант 16. $\int (3x+4)e^{3x} dx.$
Вариант 17. $\int arctg\sqrt{6x-1} dx.$
Вариант 18. $\int (5x+6) \cos 2x dx.$
Вариант 19. $\int (7x-10) \sin 4x dx.$
Вариант 20. $\int (3x-2) \cos 5x dx.$
Вариант 21. $\int (4x-3)e^{-2x} dx.$
Вариант 22. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$
Вариант 23. $\int (2-4x) \sin 2x dx.$
Вариант 24. $\int arctg\sqrt{3x-1} dx.$
Вариант 25. $\int (8-3x) \cos 5x dx.$

Задание 3. Вычислите неопределенный интеграл.

Вариант 1. $\int \dfrac{x^3+4x^2+4x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx.$

Вариант 2. $\int \dfrac{2x^3-6x^2+7x-4}{(x-2)(x-1)^3}dx.$

Вариант 3. $\int \dfrac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx.$

Вариант 4. $\int \dfrac{2x^3+7x^2+7x-1}{(x+2)^2(x^2+x+1)}dx.$

Вариант 5. $\int \dfrac{x^3+1}{x^2-x}dx.$

Вариант 6. $\int \dfrac{x^3+6x^2+9x+6}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx.$

Вариант 7. $\int \dfrac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}dx.$

Вариант 8. $\int \dfrac{3x^3+2x^2+1}{(x-1)(x-2)(x+2)}dx.$

Вариант 9. $\int \dfrac{x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)}dx.$

Вариант 10. $\int \dfrac{2x^3-6x^2+7x}{(x+2)(x-1)^3}dx.$

Вариант 11. $\int \dfrac{x^3+x+2}{(x+1)x^3}dx.$

Вариант 12. $\int \dfrac{4x^3+x^2+2}{(x-1)(x-2)x}dx.$

Вариант 13. $\int \dfrac{x^3+2x^2+10x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx.$

Вариант 14. $\int \dfrac{x^3-3x^2-12}{(x-2)(x-4)x}dx.$

Вариант 15. $\int \dfrac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx.$

Вариант 16. $\int \dfrac{2x^3+6x^2+7x+2}{x(x+1)^3}dx.$

Вариант 17. $\int \dfrac{x^3-3x^2-12}{(x-3)(x-4)x}dx.$

Вариант 18. $\int \dfrac{3x^3+6x^2+5x-1}{(x+1)^2(x^2+2)}dx.$

Вариант 19. $\int \dfrac{4x^4+2x^2-x-3}{(x-1)(x+1)x}dx.$

Вариант 20. $\int \dfrac{2x^3+x+1}{(x+1)x^3}dx.$

Вариант 21. $\int \dfrac{x^3-3x^2-12}{(x-2)(x-3)(x-4)}dx.$

Вариант 22. $\int \dfrac{2x^3+4x^2+2x-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}dx.$

Вариант 23. $\int \dfrac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx.$

Вариант 24. $\int \dfrac{2x^3+6x^2+5x}{(x+2)(x+1)^3}dx.$

Вариант 25. $\int \dfrac{3x^3+x+46}{(x-1)^2(x^2+9)}dx.$

Задание 4. Вычислите неопределенный интеграл.

Вариант 1. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

Вариант 2. $\int x^2\sqrt{1-x^2}dx.$

Вариант 3. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

Вариант 4. $\int \dfrac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}.$

Вариант 5. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx.$

Вариант 6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$

Вариант 7. $\int \sqrt{4-x^2}dx.$

Вариант 8. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x^4}dx.$

Вариант 9. $\int \dfrac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx.$

Вариант 10. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx.$

Вариант 11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$

Вариант 12. $\int x^2\sqrt{16-x^2}dx.$

Вариант 13. $\int \dfrac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$

Вариант 14. $\int \dfrac{x^4}{\sqrt{(2-x^2)^3}}dx.$

Вариант 15. $\int \sqrt{16-x^2}dx.$

Вариант 16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Вариант 17. $\int \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$.

Вариант 18. $\int \sqrt{256-x^2}dx$.

Вариант 19. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx$.

Вариант 20. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$.

Вариант 21. $\int \sqrt{25-x^2}dx$.

Вариант 22. $\int \dfrac{x^4}{\sqrt{(8-x^2)^3}}dx$.

Вариант 23. $\int \dfrac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

Вариант 24. $\int x^2\sqrt{25-x^2}dx$.

Вариант 25. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$.

Задание 5. Вычислите неопределенный интеграл.

Вариант 1. $\int \dfrac{(1+\sin x)dx}{1+\cos x+\sin x}$.

Вариант 2. $\int \dfrac{\sin 3x dx}{5+3\sin x}$.

Вариант 3. $\int \dfrac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}$.

Вариант 4. $\int \dfrac{\cos^2 x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

Вариант 5. $\int \dfrac{(\cos x-\sin x)dx}{(1+\sin x)^2}$.

Вариант 6. $\int \dfrac{\cos x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

Вариант 7. $\int \dfrac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

Вариант 8. $\int \dfrac{\sin x dx}{(1+\sin x)^2}$.

Вариант 9. $\int \dfrac{\sin x dx}{1+\cos x+\sin x}$.

Вариант 10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

Вариант 11. $\int \dfrac{\cos x dx}{1-\cos x+\sin x}$.

Вариант 12. $\int \frac{\cos x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

Вариант 13. $\int \frac{\sin x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

Вариант 14. $\int \frac{\cos x dx}{2+\cos x}$.

Вариант 15. $\int \frac{\cos^2 x dx}{(1+\cos x-\sin x)^2}$.

Вариант 16. $\int \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}$.

Вариант 17. $\int \frac{(1+\cos x)}{1+\cos x+\sin x}$.

Вариант 18. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$.

Вариант 19. $\int \frac{\sin x dx}{2+\sin x}$.

Вариант 20. $\int \frac{\sin^2 x dx}{(1+\cos x+\sin x)^2}$.

Вариант 21. $\int \frac{dx}{(1-\cos x+\sin x)^2}$.

Вариант 22. $\int \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}$.

Вариант 23. $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x+\sin x}$.

Вариант 24. $\int \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}$.

Вариант 25. $\int \frac{\sin x dx}{((1+\cos x-\sin x)^2)^2}$.

Задание 6. Вычислите площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.

Вариант 1. $y=(x-2)^3, y=4x-8$.
Вариант 2. $y=\sqrt{4-x^2}, y=0, x=0, x=1$.
Вариант 3. $y=4-x^2, y=x^2-2x$.
Вариант 4. $x=4-(y-1)^2, x=y^2-4y+3$.
Вариант 5. $y=(x-1)^2, y^2=x-1$.
Вариант 6. $y=x\sqrt{4-x^2}, y=0, 0\leq x\leq 2$.
Вариант 7. $y=x^2\sqrt{16-x^2}, y=0, 0\leq x\leq 4$.
Вариант 8. $y=\arccos x, y=0, x=0$.
Вариант 9. $y=(x+1)^2, y^2=x+1$.
Вариант 10. $y=2x-x^2+3, y=x^2-4x+3$.
Вариант 11. $y=x\sqrt{36-x^2}, y=0, 0\leq x\leq 6$.

Вариант 12. $y = x^2\sqrt{8-x^2}, y = 0, 0 \le x \le 2\sqrt{2}.$
Вариант 13. $y = x\sqrt{9-x^2}, y = 0, 0 \le x \le 3.$
Вариант 14. $y = x^2\sqrt{4-x^2}, y = 0, 0 \le x \le 2.$
Вариант 15. $y = \sin x \cos^2 x, y = 0, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$
Вариант 16. $y = \cos x \sin^2 x, y = 0, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$
Вариант 17. $x = (y-2)^3, x = 4y - 8.$
Вариант 18. $x = 24 - y^2, x = y^2 - 2y.$
Вариант 19. $x = \sqrt{4-y^2}, x = 0, y = 1.$
Вариант 20. $y = (x-1)^2, y^2 = x - 1.$
Вариант 21. $y = xarctgx, y = 0, x = \sqrt{3}.$
Вариант 22. $y = x^2 \cos x, y = 0, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$
Вариант 23. $y = \cos^5 x \sin^2 2x, y = 0, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$
Вариант 24. $y = \frac{1}{1+\cos x}, y = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2}.$
Вариант 25. $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}, y = 0, x = 1.$

Задание 7. Вычислите площади фигур, ограниченных линиями, заданными уравнениями.
Вариант 1. $x = 16\cos^3 t, y = 2\sin^3 t, x = 2, (x \ge 2).$
Вариант 2. $x = \sqrt{2}\cos t, y = 2\sqrt{2}\sin t, y = 2, (y \ge 2).$
Вариант 3. $x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, y = 2\sqrt{2}\sin^3 t, x = 2, (x \ge 2).$
Вариант 4. $x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t), y = 4, (0 < x < 8\pi, y \ge 4).$
Вариант 5. $x = 2\cos t, y = 6\sin t, y = 3, (y \ge 3).$
Вариант 6. $x = 16\cos^3 t, y = \sin^3 t, x = 6\sqrt{3}, (x \ge 6\sqrt{3}).$
Вариант 7. $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), y = 3, (0 < x < 4\pi, y \ge 3).$
Вариант 8. $x = 6\cos t, y = 2\sin t, y = \sqrt{3}, (y \ge \sqrt{3}).$
Вариант 9. $x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, y = \sqrt{2}\sin^3 t, x = 4, (x \ge 4).$
Вариант 10. $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), y = 3, (0 < x < 6\pi, y \ge 3).$
Вариант 11. $x = 2\sqrt{2}\cos t, y = 3\sqrt{2}\sin t, y = 3, (y \ge 3).$
Вариант 12. $x = 8\cos^3 t, y = 8\sin^3 t, x = 1, (x \ge 1).$
Вариант 13. $x = 6(t - \sin t), y = 6(1 - \cos t), y = 9, (0 < x < 12\pi, y \ge 9).$
Вариант 14. $x = \sqrt{2}\cos t, y = 4\sqrt{2}\sin t, y = 4, (y \ge 4).$
Вариант 15. $x = 32\cos^3 t, y = \sin^3 t, x = 4, (x \ge 4).$
Вариант 16. $x = 6(t - \sin t), y = 6(1 - \cos t), y = 6, (0 < x < 12\pi, y \ge 6).$
Вариант 17. $x = 9\cos t, y = 4\sin t, y = 2, (y \ge 2).$
Вариант 18. $x = 8\cos^3 t, y = 4\sin^3 t, x = 3\sqrt{3}, (x \ge 3\sqrt{3}).$
Вариант 19. $x = 3\cos t, y = 8\sin t, y = 4, (y \ge 4).$
Вариант 20. $x = 8(t - \sin t), y = 8(1 - \cos t), y = 12, (0 < x < 16\pi).$
Вариант 21. $x = 24\cos^3 t, y = 2\sin^3 t, x = 9\sqrt{3}, (x \ge 9\sqrt{3}).$
Вариант 22. $x = 6\cos t, y = 4\sin t, y = 2\sqrt{3}, (y \ge 2\sqrt{3}).$
Вариант 23. $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), y = 2, (0 < x < 4\pi, y \ge 2).$
Вариант 24. $x = 3\cos t, y = 8\sin t, y = 4\sqrt{3}, (y \ge 4\sqrt{3}).$

Вариант 25. $x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, y = \sqrt{2}\sin^3 t, x = 2, (x \geq 2)$.

Задание 8. Вычислите объемы тел, ограниченных поверхностями.

Вариант 1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, z = 1, z = 0$.
Вариант 2. $z = x^2 + 9y^2, z = 3$.
Вариант 3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12$.
Вариант 4. $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1, z = 0, z = 3$.
Вариант 5. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, z = 2, z = 0$.
Вариант 6. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1, z = 9, z = 0, y \geq 0$.
Вариант 7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16$.
Вариант 8. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3$.
Вариант 9. $z = x^2 + 4y^2, z = 2$.
Вариант 10. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, z = 4, z = 0$.
Вариант 11. $z = x^2 + 5y^2, z = 5$.
Вариант 12. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20$.
Вариант 13. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 4$.
Вариант 14. $z = 2x^2 + 8y^2, z = 4$.
Вариант 15. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, z = 5, z = 0$.
Вариант 16. $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3$.
Вариант 17. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20$.
Вариант 18. $x^2 + y^2 = 9, z = y, z = 0, y \geq 0$.
Вариант 19. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1, z = 6, z = 0$.
Вариант 20. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} - z^2 = 1, z = 0, z = 2$.
Вариант 21. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16$.
Вариант 22. $z = 4x^2 + 9y^2, z = 6$.
Вариант 23. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12$.
Вариант 24. $z = 2x^2 + 18y^2, z = 6$.
Вариант 25. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, z = 3, z = 0$.

Задание 9. Вычислите длины дуг кривых, заданных уравнениями.

Вариант 1. $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$.
Вариант 2. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2$.
Вариант 3. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}$.
Вариант 4. $y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.
Вариант 5. $y = -\ln\cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.

Вариант 6. $y = e^x + 6, \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}$.
Вариант 7. $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \frac{1}{4} \le x \le 1$.
Вариант 8. $y = \ln(x^2 - 1), 2 \le x \le 3$.
Вариант 9. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \le x \le \frac{8}{9}$.
Вариант 10. $y = 2 + chx, 0 \le x \le 1$.
Вариант 11. $y = 1 - \ln\cos x, 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.
Вариант 12. $y = e^x + 13, \ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24}$.
Вариант 13. $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, 0 \le x \le \frac{1}{4}$.
Вариант 14. $y = 2 - e^x, \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$.
Вариант 15. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, 0 \le x \le \frac{15}{16}$.
Вариант 16. $y = 1 - \ln\sin x, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
Вариант 17. $y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \le x \le 4$.
Вариант 18. $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5, \frac{1}{9} \le x \le 1$.
Вариант 19. $y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2} + 1, 0 \le x \le \frac{9}{16}$.
Вариант 20. $y = \ln\sin x, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
Вариант 21. $y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.
Вариант 22. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{x - x^2}, 0 \le x \le \frac{3}{4}$.
Вариант 23. $y = \ln cosx + 2, 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.
Вариант 24. $y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4, 0 \le x \le \frac{1}{2}$.
Вариант 25. $y = \ln(1 - x^2), 0 \le x \le \frac{1}{4}$.

Задание 10. Вычислите длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.
Вариант 1. $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), 0 \le t \le \pi$.
Вариант 2. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, 0 \le t \le 2\pi$.
Вариант 3. $x = 3(2\cos t - \cos 2t), y = 3(2\sin t - \sin 2t), 0 \le t \le 2\pi$.
Вариант 4. $x = 4(\cos t + t\sin t), y = 4(\sin t - t\cos t), 0 \le t \le 2$.
Вариант 5. $x = 5(t - \sin t), y = 5(1 - \cos t), 0 \le t \le \pi$.
Вариант 6. $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{4}$.
Вариант 7. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t,$
$0 \le t \le \frac{\pi}{3}$.
Вариант 8. $x = 10\cos^3 t, y = 10\sin^3 t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
Вариант 9. $x = 3(\cos t + t\sin t), y = 3(\sin t - t\cos t), 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$.
Вариант 10. $x = 8\cos^3 t, y = 8\sin^3 t, 0 \le t \le \frac{\pi}{6}$.
Вариант 11. $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), 0 \le t \le 2\pi$.
Вариант 12. $x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t), \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$.
Вариант 13. $x = 3,5(2\cos t - \cos 2t), y = 3,5(2\sin t - \sin 2t), 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$.
Вариант 14. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t,$
$0 \le t \le \pi$.

Вариант 15. $x = 4\cos^3 t, y = 4\sin^3 t, \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.
Вариант 16. $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$.
Вариант 17. $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
Вариант 18. $x = 6(\cos t + t\sin t), y = 6(\sin t - t\cos t), 0 \leq t \leq \pi$.
Вариант 19. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t,$
$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
Вариант 20. $x = 2(\cos t + t\sin t), y = 2(\sin t - t\cos t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
Вариант 21. $x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.
Вариант 22. $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.
Вариант 23. $x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), \pi \leq t \leq 2\pi$.
Вариант 24. $x = 8(\cos t + t\sin t), y = 8(\sin t - t\cos t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.
Вариант 25. $x = 2(2\cos t - \cos 2t), y = 2(2\sin t - \sin 2t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА.

Основная литература:
1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. М: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 616 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. 22-е изд., перераб. – СПб.: 2001. – 432 с.
3. Демидович Б.Л. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. - 13-е изд., испр. – М: Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997. – 624 с.

Дополнительная литература:
1. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М: Просвещение, 1973. – 255 с.
2. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). 2-е изд., доп. – М: Высшая школа, 1994. – 206 с.

Интернет-ресурсы:
Бесплатный ресурс для студентов – http://math24.ru/index.html
Образовательный математический сайт – http://www.exponenta.ru/
Учебные материалы – http://math.fiztex.ru/study/