ГРУППЫ ШЕВАЛЛЕ

Бунина Елена Игоревна

Введение

Данный спецкурс посвящен описанию, классификации и основным свойствам групп Шевалле.

Определение групп Шевалле само по себе довольно сложное, поэтому мы дадим разные его варианты и вообще посвятим описанию, что такое группы Шевалле, немало лекций.

Мы стартуем не с нуля, а будем считать, что уже разобрались с системами корней и строением полупростых алгебр Ли. Однако в первых двух лекциях мы напомним слушателям вкратце все необходимые определения, факты, теоремы и примеры.

1 Лекция 1. Системы корней и алгебры Ли: напоминание

1.1 Системы корней

Определение 1. Конечный непустой набор векторов $\Phi \in V$ (V — евклидово пространство), не содержащий нулевого вектора, называется *системой корней*, если выполнены следующие условия:

(R1) $\alpha \in \Phi$ тогда и только тогда, когда $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$;

(R2) Если $\alpha \in \Phi$, то $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$.

Сами векторы из набора Φ называются *корнями*.

Мы будем требовать для корней еще одну более сильную аксиому целочисленности:

(R3) Для всех пар корней $\alpha, \beta \in \Phi$ число $\langle \alpha, \beta \rangle := 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ — целое.

По аксиоматически определенной системе корней Φ можно построить группу отражений $W = W(\Phi)$: это будет группа, порожденная отражениями относительно всех корней из Φ.

Выберем и зафиксируем какой-нибудь линейный порядок на V.

Определение 2. *Системой положительных корней* в Φ называется множество

$$\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi \mid 0 < \alpha\}.$$

Множество $\Phi^- := -\Phi$ называется *системой отрицательных корней*. Ясно, что $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$.

Определение 3. Подмножество $\Delta \subset \Phi$ называется *системой простых корней* или *базисом системы корней*, если

(1) Δ является базисом для линейной оболочки системы корней Φ;

(2) всякий вектор $\alpha \in \Phi$ есть линейная комбинация $\sum c_\gamma \gamma$, где все γ принадлежат Δ, а все c_γ или все неотрицательны, или все неположительны.

Теорема 1. 1. *Если Δ — система простых корней, то существует единственная система положительных (относительно некоторого упорядочения на V) корней Φ^+, содержащая Δ.*

2. *Всякая система положительных корней Φ^+ содержит единственную систему простых корней Δ.*

3. *Для систем корней, удовлетворяющих свойству* (R3), *любой корень является целочисленной линейной комбинацией простых корней.*

4. *Если Δ — система простых корней, то $(\alpha, \beta) \leqslant 0$ для всех $\alpha, \beta \in \Delta$. Иными словами, углы между простыми корнями не бывают острыми.*

Важно, что системы простых корней внутри одной системы корней устроены одинаково:

Теорема 2. *Как любые две системы положительных корней, так и любых две системы простых корней сопряжены относительно действия группы Вейля.*

Оказывается, что группа Вейля W порождается простыми отражениями:

Теорема 3. *Пусть Δ — система простых корней. Тогда $W = \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$.*

Таким образом, группа отражений W порождается отражениями $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ относительно простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Эти отражения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sigma_i^2 = E, \quad (\sigma_i \sigma_j)^{n_{ij}} = E,$$

где число n_{ij} определяется углом между векторами α_i и α_j:

$$\angle(\alpha_i, \alpha_j) = \pi - \pi / n_{ij}.$$

Оказывается, что других соотношений, не следующих из этих, в группе отражений нет.

Вся информация о системе корней и соответствующей группе W задается набором чисел n_{ij}, то есть углами между простыми корнями. Эти данные можно наглядно представить следующим образом.

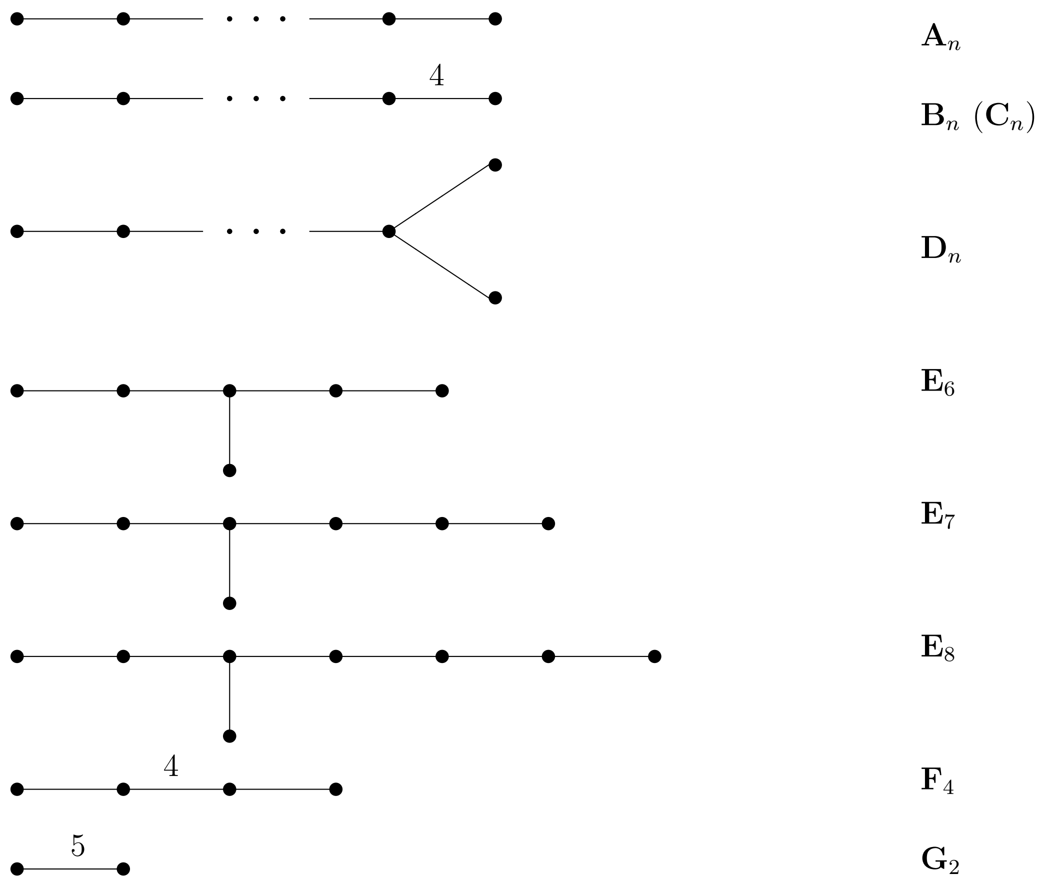
Определение 4. Пусть W — группа отражений, $\Phi \supset \Delta$ — соответствующие система корней и система простых корней. *Графом Кокстера*, построенным по группе отражений W (или по системе корней Φ), называется неориентированный граф с $|\Delta|$ вершинами (без кратным ребер и петель), ребра которого отмечены числами, не меньшими трех, определенный по следующему правилу:

— i-я и j-я вершины не соединены ребром, если $n_{ij} = 2$ (то есть простые корни α_i и α_j ортогональны);

— в противном случае i-я и j-я вершины соединены ребром, снабженным отметкой n_{ij}.

Граф Кокстера с n вершинами называется *допустимым*, если он соответствует некоторой конечной группе отражений.

Теорема 4. *Граф Кокстера является допустимым тогда и только тогда, когда каждая из его компонент связности принадлежит следующему списку:*



При этом системы корней исчерпываются списком, предъявленным выше.

1.2 Алгебры Ли, основные понятия

Определение 5. Векторное пространство L над полем $\mathbb{F}$ с операцией $L\times L \to L$, обозначаемой $(x,y) \mapsto [x,y]$ и называемой *скобкой* или *коммутатором* элементов x и y, называется *алгеброй Ли* над полем $\mathbb{F}$, если выполняются следующие аксиомы:

(L1) операция коммутирования билинейна;

(L2) $[x,x] = 0$ для всех $x \in L$;

(L3) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ для всех $x,y,z \in L$ (*тождество Якоби*).

Заметим, что из аксиом (L1) и (L2), примененных к элементу $[x+y, x+y]$, следует соотношение коммутативности

$$[x,y] = -[yx].$$

Алгебры Ли L и L' над полем $\mathbb{F}$ будем называть *изоморфными*, если существует изоморфизм векторных пространств $\varphi : L \to L'$, удовлетворяющий соотношению

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \text{ для всех } x, y \in L$$

(и тогда φ называется изоморфизмом алгебр Ли).

Также очевидно определение подалгебры в L: подпространство K пространства L называется подалгеброй, если для всех $x, y \in K$ выполнено $[x, y] \in K$.

Мы в лекциях будем рассматривать исключительно алгебры Ли, векторное пространство которых конечномерно над полем $\mathbb{F}$. Это будет всегда подразумеваться, если не указано противное.

Если V — конечномерное пространство над $\mathbb{F}$, то рассмотрим его кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} V$ (кольцо матриц, если фиксировать базис пространства). Определим новую операцию $[x,y] = xy - yx$, называемую *скобкой* элементов x и y. С этой операцией $\operatorname{End} V$ становится алгеброй Ли над $\mathbb{F}$ (простая проверка). Чтобы отличать эту новую алгебраическую структуру от прежней, ассоциативной, мы обозначим через $\mathfrak{gl}(V)$ пространство $\operatorname{End} V$, рассматриваемое как алгебра Ли.

Любая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$ называется *линейной алгеброй Ли.* Если ввести в пространстве V базис, то в алгебре $\mathfrak{gl}(V)$ базисом будет система матричных единиц E_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, а соотношения для коммутаторов будут иметь вид

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}.$$

Теперь рассмотрим четыре очень важных примера классических алгебр Ли — $\mathbf{A}_l, \mathbf{B}_l, \mathbf{C}_l$ и $\mathbf{D}_l$.

1. Алгебра Ли типа $\mathbf{A}_l$: Пусть $\dim V = l+1$. Множество эндоморфизмов пространства V. с нулевым следом обозначим $\mathfrak{sl}(V)$ или $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{F})$. Множество $\mathfrak{sl}(V)$ является подалгеброй в $\mathfrak{gl}(V)$ и называется *специальной линейной алгеброй Ли.* Стандартным базисом этой алгебры является базис, состоящий из всех матричных единиц E_{ij}, где $i \neq j$, и из всех элементов $H_i := E_{ii} - E_{i+1,i+1}$, $i = 1, \ldots, l-1$.

2. Алгебра Ли типа $\mathbf{C}_l$: Пусть $\dim V = 2l$, и пусть $(v_1, \ldots, v_{2l})$ — базис. Определим невырожденную кососимметрическую форму f на пространстве V посредством матрицы $s = \begin{pmatrix} 0 & E_l \\ -E_l & 0 \end{pmatrix}$. *Симплектическая алгебра*, обозначаемая $\mathfrak{sp}(V)$ или $\mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{F})$, по определению состоит из всех эндоморфизмов x пространства V, удовлетворяющих условию $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$. Легко можно проверить, что множество $\mathfrak{sp}(V)$ замкнуто относительно коммутирования. На матричном языке условие симплектичности для $x = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, где $m, n, p, q \in \mathfrak{gl}_l(\mathbb{F})$, состоит в том, что $sx = x^T s$, то есть $n^T = n$, $p^T = p$, $m^T = -q$. Теперь легко найти базис в $\mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{F})$. Возьмем диагональные матрицы $E_{ii} - E_{l+i,l+i}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, и все матрицы $E_{ij} - E_{l+i,l+j}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant l$, а также $E_{i,l+i}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, и $E_{i,l+j} + E_{j,l+i}$, $1 \leqslant i < j \leqslant l$. Суммируя, получаем

$$\dim \mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{F}) = 2l^2 + l.$$

3. Алгебра Ли типа $\mathbf{B}_l$: Пусть размерность $\dim V = 2l+1$ нечетна, а f — невырожденная симметрическая билинейная форма на V с матрицей

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_l \\ 0 & E_l & 0 \end{pmatrix}.$$

Ортогональная алгебра $\mathfrak{o}(V)$ или $\mathfrak{o}_{2l+1}(\mathbb{F})$ состоит из всех эндоморфизмов пространства V, удовлетворяющих условию

$$f(x(v), w) = -f(v, x(w))$$

(то же требование, что и для случая $\mathbf{C}_l$).

Если мы разобьем x на блоки так же, как s, скажем,

$$x = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix},$$

то равенство $sx = -x^T s$ превратится в следующую совокупность условий: $a = 0$, $c_1 = -b_2^T$, $c_2 = -b_1^T$, $q = -m^T$, $n^T = -n$, $p^t = -p$.

В качестве базисных элементов возьмем, во-первых, l диагональных матриц $E_{ii} - E_{l+i,l+i}$, $2 \leqslant i \leqslant l+1$. Добавим $2l$ матриц, в которых ненулевыми являются только первая строка и первый столбец: $E_{1,l+i+1} - E_{i+1,1}$ т $E_{1,i+1} - E_{l+i+1,1}$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Подматрице $q = -m^t$ сопоставим (как и для $\mathbf{C}_l$) матрицы $E_{i+1,j+1} - E_{l+j+1,l+i+1}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant l$. Подматрице n сопоставим $E_{i+1,l+j+1} - E_{j+1,l+i+1}$, $1 \leqslant i < j \leqslant l$, а подматрице p — $E_{i+l+1,j+1} - E_{j+l+1,j+1}$, $1 \leqslant j < i \leqslant l$. Общее количество базисных элементов равно $2l^2 + l$.

4. Алгебра Ли типа $\mathbf{D}_l$. Здесь мы получим другую ортогональную алгебру. Она строится так же, как и $\mathbf{B}_l$, с теми отличиями, что размерность $\dim V = 2l$ четна, а s имеет более простой вид

$$s = \begin{pmatrix} 0 & E_l \\ E_l & 0 \end{pmatrix}.$$

Построение базиса этой алгебры оставим в качестве упражнения.

Кроме перечисленных важных алгебр нам будут интересны и полезны в дальнейшем еще несколько линейных алгебр Ли: это алгебра Ли $\mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$ всех верхнетреугольных матриц; алгебра Ли $\mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$ всех строго верхнетреугольных матриц (треугольных матриц с нулевой диагональю); алгебра $\mathfrak{d}_n(\mathbb{F})$ всех диагональных матриц.

Некоторые линейные алгебры Ли возникают наиболее естественно при рассмотрении дифференцирований алгебр. Под $\mathbb{F}$-алгеброй (не обязательно ассоциативной) будем понимать просто векторное пространство $\mathfrak{A}$ над $\mathbb{F}$, наделенное билинейной операцией $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, обозначение которой обычно опускается. Дифференцированием в алгебре $\mathfrak{A}$ мы называем линейное отображение $\delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, удовлетворяющее обычному правилу дифференцирования

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b.$$

Легко проверяется, что совокупность $\operatorname{Der}\mathfrak{A}$ всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$ является векторным подпространством в $\operatorname{End}\mathfrak{A}$. Легко проверить, что коммутатор двух дифференцирований снова является дифференцированием (хотя их обычное произведение не обязательно им является). Таким образом, $\operatorname{Der}\mathfrak{A}$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{A})$.

Поскольку алгебра Ли L является $\mathbb{F}$-алгеброй в указанном смысле, то определена алгебра Ли $\operatorname{Der} L$. Некоторые дифференцирования вполне естественно возникают следующим образом. Если $x \in L$, то отображение $y \mapsto [x, y]$ является эндоморфизмом пространства L, который мы обозначим $\operatorname{ad} x$. В действительности $\operatorname{ad} x \in \operatorname{Der} L$, так как можно переписать тождество Якоби в следующем виде:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

Дифференцирования такого вида называются внутренними, а все остальные — внешними.

Отображение $L \to \operatorname{Der} L$, имеющее вид $x \mapsto \operatorname{ad} x$, называется присоединенным представлением алгебры L; оно для нас будет крайне важно.

1.3 Идеалы алгебр Ли

Подпространство I алгебры Ли L называется идеалом в L, если из того, что $x \in L$, $y \in I$ следует, что $[x, y] \in I$. В теории алгебр Ли идеалы играют роль нормальных подгрупп в группах или двухсторонних идеалов в ассоциативных кольцах — они являются ядрами гомоморфизмов.

Очевидно, что 0 и сама алгебра L являются идеалами. Еще один пример — центр алгебры L:

$$Z(L) := \{x \in L \mid [x, y] = 0 \text{ для всех } y \in L\}.$$

Другой важный пример — производная алгебра, обозначаемая через $[L, L]$ и аналогичная коммутанту группы. Она состоит из всех линейных комбинаций коммутаторов $[x, y]$ и, очевидно, является идеалом.

Если I, J — два идеала алгебры Ли, то

$$I + J := \{x + y \mid x \in I, y \in J$$

также является идеалом. Аналогично идеалом является и

$$[I, J] := \left\{\sum x_i y_i \mid x_i \in I, y_i \in J\right\}.$$

Производная алгебра $[L, L]$ — частный случай этой конструкции.

Если в алгебре L нет идеалов, кроме нее самой и нуля, причем $[L, L] \neq 0$, то L называется простой алгеброй. Ясно, что если L — простая алгебра, то $Z(L) = 0$ и $L = [L, L]$.

В случае когда алгебра Ли L не проста (и не одномерна), можно профакторизовать ее по ненулевому собственному идеалу I, получив алгебру Ли меньшей размерности. Конструкция факторалгебры L/I формально та же, что и для факторкольца: L/I совпадает с факторпространством, а коммутатор определяется формулой

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I.$$

Нормализатор подалгебры (и вообще подпространства) K алгебры L определяется условием

$$N_L(K) := \{x \in L \mid [x, K] \subset K\}.$$

Ввиду тождества Якоби $N_L(K)$ является подалгеброй в L; ее можно описать как наибольшую подалгебру в L, в которой K является идеалом. Если $K = N_L(K)$, то подалгебра K называется самонормализуемой.

Централизатором подмножества X в L называется множество

$$C_L(X) = \{x \in L \mid [x, X] = 0\}.$$

Опять-таки из тождества Якоби следует, что $C_L(X)$ является подалгеброй в L.

Линейное преобразование $\varphi : L \to L'$ (где L и L' — алгебры Ли над $\mathbb{F}$) называется гомоморфизмом, если

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \text{ для всех } x, y \in L.$$

Гомоморфизм φ называется мономорфизмом, если $\ker\varphi = 0$, эпиморфизмом — если $\Im\varphi = L'$ и изоморфизмом — φ является одновременно и мономорфизмом, и эпиморфизмом. Как и ожидалось, $\ker\varphi$ является идеалом в L.

Отображение ad является гомоморфизмом, ядро его состоит из всех таких элементов $x \in L$, для которых $[x, y] = 0$ при всех $y \in L$, поэтому $\ker\, \mathrm{ad} = Z(L)$. Таким образом, если алгебра проста, то $Z(L) = 0$, откуда отображение ad является вложением. Это означает, что любая простая алгебра Ли изоморфна линейной.

1.4 Автоморфизмы

Автоморфизм алгебры Ли L — это ее изоморфизм на себя. Группа всех автоморфизмов обозначается $\mathrm{Aut}\, L$. Важные примеры автоморфизмов возникают, когда L — линейная алгебра Ли. Если $g \in \mathrm{GL}\,(V)$ обратимый эндоморфизм пространства V, причем $gLg^{-1} = L$, то непосредственно проверяется, что отображение $x \mapsto gxg^{-1}$ является автоморфизмом алгебры L.

Рассмотрим теперь случай $\mathrm{char}\, \mathbb{F} = 0$. Предположим, что для элемента $x \in L$ оператор $\mathrm{ad}\, x$ нильпотентен, то есть $(\mathrm{ad}\, x)^k = 0$ при некотором $k > 0$. Тогда разложение экспоненты линейного преобразования в ряд над полем $\mathbb{C}$ имеет смысл и над полем $\mathbb{F}$, так как этот ряд будет содержать конечное число членов:

$$\exp(\mathrm{ad}\, x) = 1 + \mathrm{ad}\, x + \frac{(\mathrm{ad}\, x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{ad}\, x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\mathrm{ad}\, x)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Оказывается, что $\exp(\mathrm{ad}\, x) \in \mathrm{Aut}\, L$. Более того, результат останется верным, если заменить $\mathrm{ad}\, x$ на любое нильпотентное дифференцирование δ из L.

1.5 Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли; радикал

Определим следующую последовательность идеалов алгебры L (производный ряд):

$$L^{(0)} := L, \quad L^{(1)} := [L, L], \quad L^{(2)} := [L^{(1)}, L^{(1)}], \quad \ldots, \quad L^{(i+1)} := [L^{(i)}, L^{(i)}].$$

Алгебра L называется разрешимой, если $L^{(n)} = 0$ для некоторого натурального n. В определенном смысле общим примером разрешимой алгебры служит алгебра верхнетреугольных матриц $\mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$.

Теперь приведем несколько простых свойств разрешимых алгебр.

Предложение 1. *Пусть L — алгебра Ли.*

(a) *Если алгебра L разрешима, то разрешимы все ее подалгебры и гомоморфные образы.*

(b) *Если I — такой разрешимый идеал в L, что алгебра L/I разрешима, то разрешима и сама алгебра L.*

(c) *Если I и J — разрешимые идеалы в L, то идеал $I + J$ также разрешим.*

Рассмотрим алгебру Ли L и ее максимальный разрешимый идеал S (такой разрешимый идеал, который не содержится ни в одном большем разрешимом идеале). Если I — любой другой разрешимый идеал в L, то $S+I = S$ (ввиду максимальности идеала S), то есть $I \subset S$. Это доказывает существование единственного максимального (то есть наибольшего) разрешимого идеала, называемого *радикалом* алгебры L и обозначаемого через $\operatorname{Rad} L$. Если $L \neq 0$ и $\operatorname{Rad} L = 0$, то алгебра L называется *полупростой.* Мы будем изучать именно полупростые алгебры Ли.

Определим последовательность идеалов алгебры Ли L (*убывающий* или *нижний центральный ряд*), полагая

$$L^0 := L, \quad L^1 := [L, L], \quad L^2 := [L, L^1], \quad \ldots, \quad L^k := [L, L^{k-1}].$$

Алгебра L называется *нильпотентной*, если $L^n = 0$ при некотором натуральном n. Например, любая абелева алгебра нильпотентна. Все нильпотентные алгебры Ли разрешимы, но не все разрешимые алгебры Ли нильпотентны (например, алгебра верхне-треугольных матриц).

Предложение 2. *Пусть L — алгебра Ли.*

(a) *Если алгебра L нильпотентна, то все ее подалгебры и гомоморфные образы также нильпотентны.*

(b) *Если нильпотентна алгебра $L/Z(L)$, то нильпотентна и алгебра L.*

(c) *Если алгебра L нильпотентна и $L \neq 0$, то $Z(L) \neq 0$.*

2 Лекция 2. Полупростые алгебры Ли и их свойства

2.1 Теорема Энгеля и Ли и разложение Жордана–Шевалле

Если x — элемент произвольной алгебры Ли L, то назовем x ad-*нильпотентным*, если эндоморфизм $\mathrm{ad}\,x$ нильпотентен. Если алгебра L нильпотентна, то все ее элементы ad-нильпотентны. Замечательно, что верно и обратное:

Теорема 5 (Энгель)**.** *Если все элементы алгебры Ли L ad-нильпотентны, то алгебра L нильпотентна.*

С этого момента мы будем считать, что поле $\mathbb{F}$ имеет нулевую характеристику и алгебраически замкнуто.

Теорема 6 (Теорема Ли)**.** *Пусть L — разрешимая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, $\dim V = n < \infty$. Тогда в некотором базисе матрицы элементов из L верхнетреугольны.*

Назовем элемент $x \in \mathrm{End}\,V$ (V конечномерно) *полупростым*, если все корни его минимального многочлена над $\mathbb{F}$ различны. В случае алгебраически замкнутого поля это равносильно диагонализируемости оператора. Два коммутирующих диагонализируемых эндоморфизма можно привести к диагональному виду одновременно, поэтому сумма и разность двух полупростых эндоморфизмов снова полупроста. Кроме того, если элемент x полупрост и отображает подпространство $W \subset V$ в себя, то очевидно, что ограничение отображения x на W полупросто.

Предложение 3. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{F}$, $x \in \mathrm{End}\,V$.*

(a) *Существуют единственные элементы $x_s, x_n \in \mathrm{End}\,V$, где x_s полупрост, x_n нильпотентен, x_s и x_n коммутируют, $x = x_s + x_n$.*

(b) *Существуют такие многочлены $p(t)$, $q(t)$ от одного переменного без свободного члена, что $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Как следствие, x_s и x_n коммутируют с любым элементом, коммутирующим с x.*

(c) *Если $A \subset B \subset V$ — некоторые подпространства и x отображает B в A, то x_s и x_n также отображают B в A.*

Разложение $x = x_s + x_n$ называется разложением Жордана–Шевалле эндоморфизма x; x_s и x_n называются, соответственно, полупростой и нильпотентной частями эндоморфизма x.

2.2 Критерий Картана и форма Киллинга

Теорема 7 (Критерий Картана)**.** *Пусть L — подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, где пространство V конечномерно. Предположим, что*

$$\mathrm{tr}\,(xy) = 0 \text{ при всех } x \in [L, L],\ y \in L.$$

Тогда L разрешима.

Следствие 1. *Пусть L — такая алгебра Ли, что*

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0 \text{ для всех } x \in [L, L],\ y \in L.$$

Тогда алгебра L разрешима.

Пусть L — произвольная алгебра Ли. Если $x, y \in L$, то положим

$$\varkappa(x, y) := \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y).$$

Тогда $\varkappa$ — симметрическая билинейная форма на L, которая называется *формой Киллинга.*

Теорема 8. *Пусть L — ненулевая алгебра Ли. Тогда L полупроста если и только если ее форма Киллинга невырожденна.*

2.3 Простые идеалы алгебры Ли

Алгебра Ли называется *прямой суммой* идеалов $I_1, \ldots, I_t$, если $L = I_1 + \cdots + I_t$ — прямая сумма подпространств. Из этого условия вытекает, что

$$[I_i, I_j] \subset I_i \cap I_j = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Мы будем писать

$$L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_t.$$

Теорема 9. *Пусть алгебра L полупроста. Тогда в ней существуют такие простые идеалы $L_1, \ldots, L_t$, что $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_t$. Любой простой идеал алгебры L совпадает с одним из L_i. При этом форма Киллинга на L_i является ограничением формы $\varkappa$ на $L_i \times L_i$.*

Следствие 2. *Если L алгебра полупроста, то $L = [L, L]$, и все идеалы и гомоморфные образы алгебры L полупросты (или равны нулю). При этом каждый идеал в алгебре L является суммой некоторых ее простых идеалов.*

2.4 Разложение Картана

Подалгебру в алгебре L, состоящую только из полупростых элементов, будем называть *торической.* Любая торическая подалгебра в полупростой алгебре Ли оказывается абелевой.

Зафиксируем *максимальную торическую подалгебру H* в L, то есть такую, которая не содержится больше ни в какой торической подалгебре. Поскольку подалгебра H абелева, $\operatorname{ad}_L H$ представляет собой коммутирующее семейство полупростых эндоморфизмов алгебры L. Согласно известному результату из линейной алгебры, их можно одновременно диагонализировать. Иными словами, L является прямой суммой подпространств

$$L_\alpha = \{x \in L \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ для всех } h \in H\},$$

где α пробегает H^*; при этом L_0 — это просто $C_L(H)$, централизатор подалгебры H он содержит H.

Множество всех ненулевых элементов $\alpha \in H^*$, для которых $L_\alpha \neq 0$, обозначается Φ; его элементы называются *корнями* алгебры L относительно H (и их количество конечно). В этих обозначениях мы получаем *разложение на корневые подпространства* (или *разложение Картана*):

$$L = C_L(H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha.$$

Предложение 4. *Для любых $\alpha, \beta \in H^*$ выполняется включение $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$. Если $x \in L_\alpha$, $\alpha \neq 0$, то оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. Если $\alpha, \beta \in H^*$, $\alpha + \beta \neq 0$, то подпространство L_α ортогонально к L_β относительно формы Киллинга $\varkappa$ на L.*

Предложение 5. *Пусть H — максимальная торическая подалгебра в L. Тогда $H = C_L(H)$.*

Следствие 3. *Ограничение формы $\varkappa$ на H невырожденно.*

Это следствие позволяет нам отождествить H с H^*: элементу $\varphi \in H^*$ отвечает (единственный) такой элемент $t_\varphi \in H$, что $\varphi(h) = \varkappa(t_\varphi, h)$ для всех $h \in H$. Тогда Φ отвечает подмножеству $\{t_\varphi \mid \alpha \in \Phi\}$ в H.

2.5 Свойства ортогональности

Мы уже видели, что $\varkappa(L_\alpha, L_\beta) = 0$, если $\alpha, \beta \in H^*$, $\alpha + \beta \neq 0$; в частности, $\varkappa(H, L_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \Phi$, так что форма $\varkappa$ имеет невырожденное ограничение на H.

Предложение 6. (a) *Множество Φ порождает H^*.*

(b) *Если $\alpha \in \Phi$, то $-\alpha \in \Phi$.*

(c) *Пусть $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Тогда*

$$[x, y] = \varkappa(x, y) t_\alpha.$$

(d) *Если $\alpha \in \Phi$, то пространство $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ одномерно с образующим t_α.*

(e) *Справедливо соотношение $\alpha(t_\alpha) = \varkappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$ для $\alpha \in \Phi$.*

(f) *Если $\alpha \in \Phi$, а x_α — любой ненулевой элемент в L_α, то существует такой элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, что элементы x_α, y_α,
$h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ порождает трехмерную простую подалгебру в L. Ее изоморфизм с $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ задают формулы*

$$x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(g) *Справедливы равенства*

$$h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\varkappa(t_\alpha, t_\alpha)}; \quad h_\alpha = -h_{-\alpha}.$$

2.6 Выводы

В этом пункте L — полупростая алгебра Ли (над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ характеристики ноль), H — ее максимальная торическая подалгебра, $\Phi \subset H^*$ — множество корней в L (относительно H),

$$L = H + \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

— разложение на корневые подпространства.

Так как ограничение формы Киллинга на H невырожденно, мы можем перенести ее на H^*, положив $(\gamma, \delta) = \varkappa(t_\gamma, t_\delta)$ при всех $\gamma, \delta \in H^*$. Мы знаем, что Φ порождает H^*, поэтому в H^* можно выбрать базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, состоящий из корней.

Рассмотрим $\mathbb{Q}$-подпространство $\mathbb{E}_\mathbb{Q}$ в H^*, натянутое на все корни, и пусть теперь $\mathbb{E}$ — вещественное векторное пространство, получаемое при замене основного поля $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} := \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{E}_\mathbb{Q}.$$

Форма продолжается на $\mathbb{E}$ естественным образом и остается положительно определенной, то есть $\mathbb{E}$ превращается в евклидово пространство. В множестве Φ содержится его базис и $\dim_\mathbb{R} \mathbb{E} = l$.

Основные факты о множестве Φ собраны в следующей теореме:

Теорема 10. *Пусть $L, H, \Phi, \mathbb{E}$ таковы, как выше. Тогда*

(a) *Множество Φ порождает $\mathbb{E}$ и не содержит нуля.*

(b) *Если $\alpha \in \Phi$, то $-\alpha \in \Phi$, но никакое другое произведение скаляра на α не является корнем.*

(c) *Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то*

$$\beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \in \Phi.$$

(d) *Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то*

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, мы видим, что Φ является настоящей системой корней.

2.7 Теорема об изоморфизме

Теорема 11. *Пусть L, L' — простые алгебры Ли над $\mathbb{F}$ с максимальными торическими подалгебрами H, H' и системами корней Φ, Φ' соответственно. Предположим, что существует изоморфизм между Φ и Φ' (обозначаемый $\alpha \mapsto \alpha'$), который индуцирует изоморфизм $\pi : H \to H'$. Зафиксируем базис $\Delta \subset \Phi$, тогда $\Delta' = \{\alpha' \mid \alpha \in \Delta\}$ будет базисом в Φ'.*
Для каждого $\alpha \in \Delta$ выберем произвольные (ненулевые) $x_\alpha \in L_\alpha$, $x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$ (то есть выберем произвольный изоморфизм алгебр Ли $\pi_\alpha : L_\alpha \to L'_{\alpha'}$). Тогда существует единственный изоморфизм $\pi : L \to L'$, продолжающий $\pi : H \to H'$ и все π_α, $\alpha \in \Delta$.

Очевидно, что теорема легко распространяется на полупростые алгебры.

Теорема об изоморфизме оказывается весьма полезной при доказательстве существования автоморфизмов полупростой алгебры Ли L (здесь H, Φ такие же, как раньше). Каждый автоморфизм системы Φ определяет автоморфизм подалгебры H, который можно продолжить на L.

В качестве полезного примера возьмем отображение, меняющее знак у каждого корня. Оно, очевидно, лежит в $\operatorname{Aut}\Phi$ и индуцированное отображение $\sigma : H \to H$ переводит h в $-h$. В частности, $\sigma(h_\alpha) = -(h_\alpha)$, но мы помним, что этот элемент совпадает с $h_{-\alpha}$. применить только что доказанную теорему, потребуем, чтобы элемент x_α отображался в $-y_\alpha$, $\alpha \in \Delta$. (Отметим, что единственный элемент $z \in L_\alpha$, для которого $[-y_\alpha, z] = h_{-\alpha}$, равен $-x_\alpha$). Согласно теореме σ продолжается до автоморфизма алгебры L, отображающего x_α в $-y_\alpha$, $\alpha \in \Delta$. Из предыдущего замечания в скобках тогда вытекает, что y_α отображается в $-x_\alpha$ при $\alpha \in \Delta$. При этом σ имеет порядок два, поскольку σ^2 оставляет на месте образующие алгебры L. В итоге получаем

Предложение 7. *Пусть алгебра L такова, как в теореме, но не обязательно проста. Зафиксируем (ненулевой) элемент $x_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha \in \Delta$, и пусть $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ удовлетворяет условию $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Тогда L обладает таким автоморфизмом σ порядка два, что*

$$\sigma(x_\alpha) = -y_\alpha, \quad \sigma(y_\alpha) = -x_\alpha, \quad \alpha \in \Delta; \qquad \sigma(h) = -h, \quad h \in H.$$

2.8 Картановские подалгебры

Картановская подалгебра алгебры Ли L — это нильпотентная подалгебра, совпадающая со своим нормализатором в L. Недостаток этого определения в том, что он не гарантирует существования таких подалгебр (и действительно, над конечными полями этот вопрос до сих пор не выяснен полностью). Если алгебра L полупроста и $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, то максимальная торическая подалгебра H абелева (и, значит, нильпотентна). При этом $N_L(H) = H$, так как

$$L = H + \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha, \text{ где } [H, L_\alpha] = L_\alpha \text{ при } \alpha \in \Phi.$$

Таким образом, в этом случае картановские подалгебры действительно существуют (и играют важную роль).

Теорема 12. *Пусть алгебра L полупроста* ($\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$). *Тогда картановские подалгебры в L — это в точности ее максимальные торические подалгебры.*

2.9 Группа $\mathcal{E}(L)$ и сопряженность картановских подалгебр.

Пусть L — алгебра Ли. Назовем элемент $x \in L$ *строго* ad*-нильпотентным*, если $x \in L_a(\operatorname{ad} y)$ для некоторого $y \in L$ и a — некоторого ненулевого собственного значения отображения $\operatorname{ad} y$. Этот термин оправдан тем, что такой элемент x должен быть ad-нильпотентен. Пусть $\mathcal{N}(L)$ обозначает множество всех строго ad-нильпотентных элементов в L, $\mathcal{E}(L)$ — подгруппу в $\operatorname{Int} L$, порожденную всеми операторами $\exp \operatorname{ad} x$, $x \in \mathcal{N}(L)$. Отметим, что множество $\mathcal{N}(L)$ инвариантно относительно $\operatorname{Aut} L$, поэтому подгруппа $\mathcal{E}(L)$ нормальна в $\operatorname{Aut} L$.

Теорема 13. *Картановские подалгебры произвольной алгебры Ли L сопряжены относительно группы $\mathcal{E}(L)$.*

Данная теорема позволяет приписать произвольной алгебре Ли L над полем $\mathbb{F}$ численный инвариант $\operatorname{rank} L$ (называемый *рангом*), а именно, размерность картановской подалгебры в L. Если алгебра полупроста (а дальше мы сосредоточимся именно на полупростых алгебрах), то $\operatorname{rank} L$ совпадает с $\operatorname{rank} \Phi$, где Φ — система корней в L относительно любой картановской подалгебры.

Борелевской подалгеброй B алгебры Ли L называется ее максимальная разрешимая подалгебра. Наряду с теоремой о сопряженности картановских подалгебр было также доказано, что все борелевские подалгебры любой алгебры Ли L также сопряжены относительно группы $\mathcal{E}(L)$.

Теперь пусть алгебра L полупроста и имеет картановскую подалгебру H и систему корней Φ. Тогда любая борелевская подалгебра B в L, содержащая H, стандартна, то есть имеет вид $B(\Delta) = H + \bigoplus\limits_{\alpha \in \Phi^+} L_\alpha$ для некоторого базиса Δ системы Φ.

Действительно, пусть $\sigma(B(\Delta)) = B$, где Δ — некоторый базис в Φ, $\sigma \in \mathcal{E}(L)$. Поскольку H и $\sigma(H)$ — картановские подалгебры в B, они сопряжены относительно $\mathcal{E}(L)$ и можно считать, что $\sigma(H) = H$. Тогда ясно, что если $\alpha \in \Phi^+$, то $\sigma\alpha$ является корнем и $\sigma(L_\alpha) = L_{\sigma(\alpha)}$. При этом перестановка корней под действием σ сохраняет суммы, так что $\sigma(\Delta) = \Delta'$ снова является базисом в Φ и подалгебра $B = B(\Delta')$ стандартна.

2.10 Группы автоморфизмов

Пусть алгебра L полупроста, H — ее картановская подалгебра с системой корней Φ и фиксированным базисом Δ. Если τ — автоморфизм алгебры L, а $B = B(\Delta)$, то, разумеется, $\tau(B)$ также является борелевской подалгеброй в L, поэтому при некотором автоморфизме $\sigma_1 \in \mathcal{E}(L)$ она возвращается в L. Поскольку H и $\sigma_1\tau(H)$ — картановские подалгебры в L (следовательно, и в B), то найдется автоморфизм $\sigma_2 \in \mathcal{E}(L)$, отображающий $\sigma_1\tau(H)$ в H и сохраняющий B. Так как автоморфизм $\sigma_2\sigma_1\tau$ сохраняет и H, и B, он индуцирует автоморфизм системы Φ, сохраняющий Δ. Мы уже изучали все такие автоморфизмы: нетождественные возникают из нетождественных автоморфизмов схемы Дынкина, которые существуют (для неприводимой системы корней) лишь в случаях $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{D}_l$, $\mathbf{E}_6$. Пусть ρ — соответствующий автоморфизм алгебры L. Поскольку ρ не совсем единственен, можно подобрать скаляры c_α так, чтобы автоморфизм $\rho\sigma_2\sigma_1\tau$ отображал x_α в $c_\alpha x_\alpha$ ($\alpha \in \Phi^+$), y_α в c_α^{-1} и как следствие h_α в h_α (а тогда и все элементы h в себя). В итоге получаем, что τ отличается от элемента группы $\mathcal{E}(L)\cdot\Gamma(L)$ (где $\Gamma(L)$ — группа диаграммных автоморфизмов алгебры L) лишь на диагональный автоморфизм, то есть тождественный на H и скалярный на каждом корневом подпространстве L_α.

На этом мы завершаем повторение материала весеннего семестра и переходим к новым темам.

В ближайшее время наша главная тема — это теоремы существования (полупростых алгебр Ли всех нужных нам типов).

2.11 Тензорные и симметрические алгебры

До конца этой и следующую лекцию $\mathbb{F}$ может быть произвольным полем (если не оговорено противное). Мы сопоставим каждой алгебре Ли L над $\mathbb{F}$ ассоциативную алгебру с единицей (вообще говоря, бесконечномерную), которую L порождает настолько свободно, насколько это возможно для сохранения соотношений коммутирования в L. Эта *универсальная обертывающая алгебра* служит основным орудием теории представлений.

Пока забудем всю специальную теорию полупростых алгебр Ли.

Вначале введем ряд алгебр, определяемых универсальными свойствами. Фиксируем конечномерное векторное пространство V над $\mathbb{F}$. Пусть

$$T^0V = \mathbb{F}, \quad T^1V = V, \quad T^2V = V \otimes V, \ldots, T^m = V \otimes \cdots \otimes V.$$

Положим

$$\mathcal{T}(V) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^iV$$

и введем ассоциативное произведение, которое определено на однородных образующих пространства $\mathcal{I}(V)$ очевидным правилом

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \in T^{k+m}V.$$

Тогда $\mathcal{T}(V)$ превращается в ассоциативную алгебру с единицей, которую порождает (вместе с единицей) произвольный базис в V. Назовем ее *тензорной алгеброй* на V. Она является универсальной ассоциативной алгеброй с n образующими ($n = \dim V$) в следующем смысле: для каждого $\mathbb{F}$-линейного отображения $\varphi : V \to \mathfrak{A}$ (где $\mathfrak{A}$ — ассоциативная алгебра с единицей над $\mathbb{F}$) существует такой единственный гомоморфизм $\mathbb{F}$-алгебр $\psi : \mathcal{T}(V) \to \mathfrak{A}$, что $\psi(1) = 1$ и следующая диаграмма коммутативна (i — включение V в $\mathcal{T}(V)$):

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{T}(V) \arrow[d, "\psi"] \\
 & \mathfrak{A}
\end{tikzcd}$$

3 Лекция 3. Универсальная обертывающая алгебра, формулировка теоремы ПБВ и следствия из нее

3.1 Градуировка и фильтрация

Определение 6. Пусть A — алгебра над полем $\mathbb{F}$, G — полугруппа (чаще всего $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{N}$). Алгебра A называется *G-градуированной*, если A разлагается в прямую сумму $\mathbb{F}$-подпространств A_g:

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g,$$

причем

$$A_g A_h \subset A_{gh} \text{ для всех } g, h \in G.$$

Элемент $a \in A_g$ называется *однородным степени g*.

Заметим, что введенная нами тензорная алгебра $\mathcal{T}(V)$ является градуированной (неотрицательными целыми числами).

Говорят, что на алгебре A задана *фильтрация*, если она есть объединение вложенных подпространств

$$A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i, \quad A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots,$$

при этом

$$A_m A_n \subseteq A_{m+n}.$$

3.2 Тензорные и симметрические алгебры, продолжение

Пусть теперь I — двухсторонний идеал в тензорной алгебре $\mathcal{T}(V)$, порожденный всеми элементами вида

$$x \otimes y - y \otimes x, \qquad x, y \in V.$$

Назовем

$$\mathcal{S}(V) := \mathcal{T}(V)/I$$

симметрической алгеброй на V; каноническое отображение обозначим через

$$\sigma : \mathcal{T}(V) \to \mathcal{S}(V).$$

Заметим, что образующие идеала I лежат в T^2V; отсюда очевидно, что

$$I = (I \cap T^2 V) \oplus (I \cap T^3) \oplus \dots$$

Следовательно, отображение σ инъективно на $T^0V = \mathbb{F}, T^1V = V$ (что позволяет отождествить V с подпространством в $\mathcal{S}(V)$), и $\mathcal{S}(V)$ наследует прямое разложение (*градуировку*) из $\mathcal{T}(V)$:

$$\mathcal{S}(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i V.$$

Цель факторизации по I именно в том, чтобы заставить элементы из V коммутировать: в результате алгебра $\mathcal{S}(V)$ оказывается универсальной (в определенном в конце прошлой лекции смысле) по отношению к линейным отображениям из V в коммутативные ассоциативные $\mathbb{F}$-алгебры с единицей:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{S}(V) \arrow[d, "\psi"] \\ & \mathfrak{A} \end{tikzcd}$$

Если при этом $(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный базис в V, то алгебра $\mathcal{S}(V)$ канонически изоморфна алгебре многочленов от n переменных над $\mathbb{F}$ с базисом, состоящим из единицы и всех мономов $x_{i_1} \ldots x_{i_t}$, $t \leqslant 1$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_t \leqslant n$.

Аналогичные построения выполнимы даже для бесконечномерного пространства V.

3.3 Построение алгебры $\mathcal{U}(L)$

Вначале дадим абстрактное определение для случая произвольной алгебры Ли L (которая может быть и бесконечномерной, в противоположность нашему обычному соглашению). *Универсальная обертывающая алгебра* для L — это пара $(\mathcal{U}, i)$, где $\mathcal{U}$ — ассоциативная алгебра с единицей над $\mathbb{F}$, а $i : L \to \mathcal{U}$ — линейное отображение, удовлетворяющее условию

$$i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x) \qquad (*)$$

при $x, y \in L$, причем выполнено следующее: для любой ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей и любого линейного отображения $j : L \to \mathfrak{A}$, удовлетворяющего условию $(*)$, существует такой единственный гомоморфизм алгебр с единицей $\varphi : \mathcal{U} \to \mathfrak{A}$, что $\varphi \circ i = j$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & \mathcal{U}(L) \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathfrak{A} \end{tikzcd}$$

Легко доказывается *единственность* такой пары $(\mathcal{U}, j)$. Если другая пара $(\mathcal{B}, i')$ удовлетворяет тем же условиям, то имеются гомоморфизмы $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{B}$, $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{U}$. В силу определения существует единственное отображение μ из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}$ (показанное штрихами), которое делает диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{A} \arrow[dd, dashed] \\
L \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i"'] & \\
 & \mathfrak{A}
\end{tikzcd}$$

Но для этого годится и $1_{\mathcal{U}}$, и $\psi \circ \varphi$, поэтому $\psi \circ \varphi = 1_{\mathcal{U}}$. Аналогично $\varphi \circ \psi = 1_{\mathcal{B}}$.

Нетрудно установить и существование нужной пары $(\mathcal{U}, i)$. Пусть $\mathcal{T}(L)$ — тензорная алгебра над L, а J — двусторонний идеал в $\mathcal{T}(L)$, порожденный всеми элементами вида

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \qquad x, y \in L.$$

Положим

$$\mathcal{U}(L) := \mathcal{T}(L)/J,$$

и пусть

$$\pi : \mathcal{T}(L) \to \mathcal{U}(L)$$

— канонический гомоморфизм. Заметим, что

$$J \subset \bigoplus_{i>0} T^i L,$$

поэтому π изоморфно отображает $T^0 L = \mathbb{F}$ в $\mathcal{U}(L)$ (как следствие, $\mathcal{U}(L)$ во всяком случае содержит скаляры). Совсем не очевидно, что π отображает $T^1 L = L$ в $\mathcal{U}(L)$ изоморфно; мы докажем это позже.

Как бы то ни было, мы утверждаем, что $(\mathcal{U}, i)$ — универсальная обертывающая алгебра для L, где $i : L \to \mathcal{U}(L)$ — ограничение отображения π на L.

Действительно, пусть отображение $j : L \to \mathfrak{A}$ таково, как в определении. В силу универсального свойства алгебры $\mathcal{T}(L)$ существует гомоморфизм алгебр $\varphi' : \mathcal{T}(L) \to \mathfrak{A}$, который продолжает j и отображает 1 в 1. Поскольку j обладает свойством $(*)$, все элементы вида $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ лежат в $\ker \varphi'$, поэтому φ' индуцирует такой гомоморфизм $\varphi : \mathcal{U}(L) \to \mathfrak{A}$, что $\varphi \circ i = j$. Его единственность очевидна, поскольку 1 и $i(L)$ вместе порождают $\mathcal{U}(L)$.

Пример 1. Пусть алгебра L абелева. Тогда упомянутый идеал J порождается элементами вида $x \otimes y - y \otimes x$ и потому совпадает с идеалом I, описанным выше. Это означает, что $\mathcal{U}(L)$ совпадает с симметрической алгеброй $\mathcal{S}(L)$.

3.4 Теорема Пуанкаре–Биргкофа–Витта

До сих пор мы узнали очень мало о строении алгебры $\mathcal{U}(L)$, а именно, что она содержит скаляры. Для краткости положим $\mathcal{T} = \mathcal{T}(L)$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(L)$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(L)$; аналогично будем писать T^m, S^m.

Определим фильтрацию на $\mathcal{T}$, положив $T_m = T^0 \oplus T^1 \oplus \cdots \oplus T^m$, и пусть $U_m = \pi(T_m)$, $U_{-1} = 0$. Ясно, что $U_m U_p \subset U_{m+p}$, $U_m \subset U_{m+1}$. Положим $G^m = U_m / U_{m-1}$ в смысле векторных пространств; тогда умножение в $\mathcal{U}$ определяет билинейное отображение $G^m \times G^p \to G^{m+p}$. Оно очевидным образом продолжается до билинейного отображения

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \qquad \mathcal{G} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} G^m,$$

превращая $\mathcal{G}$ в градуированную ассоциативную алгебру с единицей.

Так как π отображает T^m в U_m, определена композиция линейных отображений

$$\varphi_m : T^m \to U_m \to G^m = U_m/U_{m-1}.$$

Она сюръективна, поскольку

$$\pi(T_m - T_{m-1}) = U_m - U_{m-1}.$$

Как следствие, отображения φ_m вместе определяют сюръективное линейное отображение $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{G}$ (переводящее 1 в 1).

Лемма 1. *Отображение $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{G}$ является гомоморфизмом алгебр. При этом $\varphi(I) = 0$, так что φ индуцирует гомоморфизм ω алгебры $\mathcal{S} = \mathcal{T}/I$ на $\mathcal{G}$.*

Доказательство. Пусть $x \in T^m$, $y \in T^p$ — однородные тензоры. По определению произведения в $\mathcal{G}$ имеем $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, поэтому отображение φ мультипликативно на $\mathcal{T}$. Пусть

$$x \otimes y - y \otimes x, \qquad x, y \in L,$$

— типичный образующий в I. Тогда

$$\pi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_2$$

по определению. С другой стороны,

$$\pi(x \otimes y - y \otimes x) = \pi([x, y]) \in U_1,$$

а значит,

$$\varphi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_1/U_1 = 0.$$

Как следствие, $I \subset \ker \varphi$. $\square$

Основной результат об алгебре $\mathcal{U}(L)$ заключается в следующей теореме; она (а также ее следствие 3) называется *теоремой Пуанкаре–Биркгофа–Витта* (или теоремой ПБВ).

Доказательство самой теоремы мы дадим уже после доказательств следствий.

Теорема 14. *Гомоморфизм $\omega : \mathcal{S} \to \mathcal{G}$ является изоморфизмом.*

3.5 Следствия из теоремы ПБВ

Следствие 4. *Пусть W — некоторое подпространство в T^m, причем каноническое отображение $T^n \to S^m$ индуцирует изоморфизм между W и S^m. Тогда $\pi(W)$ является дополнением для U_{m-1} в U_m.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму (все отображения — канонические)

$$\begin{tikzcd}
 & U_m \arrow[dr] & \\
T^m \arrow[ur] \arrow[dr] & & G^m \\
 & S^m \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

В силу предыдущей леммы (и определений) она коммутативна. Так как отображение $\omega : \mathcal{S} \to \mathcal{G}$ является изоморфизмом (согласно теореме), нижняя последовательность стрелок отображает $W \subset T^m$ изоморфно на G^m. Переходя к верхней последовательности, получаем искомый результат. □

Следствие 5. *Каноническое отображение $L \to \mathcal{U}(L)$ инъективно (так что L можно отождествить с $i(L)$).*

Доказательство. Это частный случай $W = T^1 (= L)$ предыдущего следствия. □

Мы допустим, что алгебра L может быть бесконечномерной. Практически для наших целей достаточно рассматривать алгебры со счетным базисом.

Следствие 6. *Пусть $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ — любой упорядоченный базис в L. Тогда элементы*

$$x_{i(1)} \dots x_{i(m)} = \pi(x_{i(1)} \otimes \dots \otimes x_{i(m)}), \quad m \in \mathbb{Z}^+, \quad i(1) \leqslant \dots \leqslant i(m),$$

вместе с единицей составляют базис в $\mathcal{U}(L)$.

Доказательство. Пусть W — подпространство в T^m, натянутое на все элементы вида

$$x_{i(1)} \oplus \dots \oplus x_{i(m)}, \quad i(1) \leqslant \dots \leqslant i(m).$$

Очевидно, что W изоморфно отображается на S^m, и ввиду первого следствия подпространство $\pi(W)$ является дополнением к U_{m-1} в U_m. □

Базис построенного вида в $\mathcal{U}(L)$ будем кратко называть ПБВ-базисом.

Следствие 7. *Пусть H — подалгебра в L, и ее упорядоченный базис $(h_1, h_2, \dots)$ содержится в упорядоченном базисе $(h_1, \dots, x_1, \dots)$ алгебры L. Тогда гомоморфизм $\mathcal{U}(H) \to \mathcal{U}(L)$, индуцированный вложением $H \to L \to \mathcal{U}(L)$, сам является вложением, причем $\mathcal{U}(L)$ является свободным $\mathcal{U}(H)$-модулем со свободным базисом, состоящим из всех элементов вида*

$$x_{i(1)} \dots x_{i(m)}, \quad i(1) \leqslant i(2) \leqslant \dots \leqslant i(m),$$

вместе с 1.

Доказательство. Очевидно из предыдущего следствия. □

Задачи.

1. Докажите, что если $\dim L < \infty$, то $\mathcal{U}(L)$ не имеет делителей нуля.

2. Пусть L — двумерная неабелева алгебра Ли, у которой $[x, y] = x$. Получите прямое доказательство инъективности отображения $i : L \to \mathcal{U}(L)$, т. е.покажите, что $J \cap L = 0$.

3. Какая универсальная обертывающая алгебра у одномерной алгебры Ли?

4 Лекция 4. Доказательство теоремы ПБВ

Фиксируем в L упорядоченный базис $(x_\lambda \mid \lambda \in \Omega)$. Это позволяет отождествить $\mathcal{S}$ с алгеброй многочленов от переменных z_λ $(\lambda \in \Omega)$. Для каждой последовательности индексов $\Sigma = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ (m называется ее *длиной*) положим $z_\Sigma = z_{\lambda_1} \dots z_{\lambda_m} \in S^m$ и $x_\Sigma = x_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes x_{\lambda_m} \in T^m$.

Назовем последовательность Σ *возрастающей*, если $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m$ при данном упорядочении в Ω; будем считать, что пустая последовательность возрастающая, причем $z_\emptyset = 1$. Тогда множество $\{z_\Sigma \mid \Sigma \text{ возрастает}\}$ является базисом в $\mathcal{S}$.

Градуировке (прямому разложению $\mathcal{S} = \oplus S^m$ соответствует фильтрация $S_m = S^0 \oplus \cdots \oplus S^m$. В последующих леммах запись $\lambda \leqslant \Sigma$ означает, что $\lambda \leqslant \mu$ для всех $\mu \in \Sigma$.

Лемма 2. *Для каждого $m \in \mathbb{Z}^+$ существует единственное такое линейное отображение $f_m : L \oplus S_m \to \mathcal{S}$, что*

(a_m) $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) = z_\lambda z_\Sigma$ при $\lambda \leqslant \Sigma$, $z_\Sigma \in S_m$;

(b_m) $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) - z_\lambda z_\Sigma \in S_k$ при $k \leqslant m$, $z_\Sigma \in S_k$;

(c_m) $f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T)) = f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_T)) + f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_T)$ при всех $z_T \in S_{m-1}$.

При этом ограничение отображения f_m на $L \otimes S_{m-1}$ совпадает с f_{m-1}.

Доказательство. Заметим, что если доказано условие (b_m), то все слагаемые в условии (c_m) корректно определены. Заметим также, что ограничение отображения f_m на $L \otimes S_{m-1}$ автоматически удовлетворяют условиям (a_{m-1}), (b_{m-1}), (c_{m-1}) и в силу утверждаемой единственности должно совпадать с f_{m-1}. Существование и единственность отображения f_m мы докажем индукцией по m. При $m = 0$ имеем $z_\Sigma = 1$; поэтому можно положить $f_0(x_\lambda \otimes 1) = z_\lambda$ (и продолжить линейно на $L \otimes S_0$). Ясно, что условия (a_0), (b_0), (c_0) выполнены, причем из (a_0) видно, что наш выбор — единственно возможный.

Предположив существование единственного отображения f_{m-1}, удовлетворяющего условиям (a_{m-1}), (b_{m-1}), (c_{m-1}), покажем, как продолжить f_{m-1} до f_m. Для этого достаточно определить $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma)$ для возрастающих последовательностей Σ длины m.

В случае $\lambda \leqslant \Sigma$ условие (a_m) будет выполнено, лишь если мы положим

$$f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) = z_\lambda z_\Sigma.$$

Если неравенство $\lambda \leqslant \Sigma$ не выполнено, то первый индекс μ в Σ строго меньше чем λ, поэтому $\Sigma = (\mu, T)$, где, разумеется, $\mu \leqslant T$ и T имеет длину $m - 1$. Ввиду условия (a_{m-1}) мы имеем

$$z_\Sigma = x_\mu z_T = f_{m-1}(x_\mu \otimes z_T).$$

Поскольку $\mu \leqslant T$, то

$$f_m(x_\mu \otimes z_T) = z_\mu z_T$$

уже определено, так что левая часть соотношения (c_m) принимает вид $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma)$. С другой стороны, из (b_{m-1}) следует, что

$$f_m(x_\lambda \otimes z_T) = f_{m-1}(x_\lambda \otimes z_T) = z_\lambda z_T \mod S_{m-1}.$$

Это означает, что правая часть соотношения (c_m) уже определена:

$$z_\mu z_\lambda z_T + f_{m-1}(x_\mu \otimes y) + f_{m-1}([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_T), \qquad y \in S_{m-1}.$$

Предыдущие замечания показывают, что определить отображение f_m можно, и только одним способом. При этом условия (a_m) и (b_m) очевидным образом выполняются, так же как и (c_m) при $\mu < \lambda$, $\mu \leqslant T$. Но $[x_\mu, x_\lambda] = -[x_\lambda, x_\mu]$, так что условие (c_m) выполнено и при $\lambda < \mu$, $\lambda \leqslant T$. Оно справедливо и при $\lambda = \mu$. Остается рассмотреть случай, когда условия $\lambda \leqslant T$ и $\mu \leqslant T$ не выполнены. Положим $T = (\nu, \Psi)$, где $\nu \leqslant \Psi$, $\nu < \lambda$, $\nu < \mu$. Для удобства обозначений будем писать xz вместо $f_m(x \otimes z)$ при $x \in L$, $z \in S_m$.

Из предположения индукции следует, что

$$x_\mu z_T = x_\mu(x_\nu z_\Psi) = x_\nu(x_\mu z_\Psi) + [x_\mu, x_\nu] z_\Psi,$$

и при этом

$$x_\mu z_\Psi = z_\mu z_\Psi + w \qquad (w \in S_{m-2})$$

ввиду условия (b_{m-2}). Так как $\nu \leqslant \Psi$ и $\nu < \mu$, мы получим, что (c_m) можно применить уже к $x_\lambda(x_\nu(z_\mu z_\Psi))$. По предположению индукции можно также применить (c_m) к $x_\lambda(x_\nu w)$, а тогда и к $x_\lambda(x_\nu(x_\mu z_\Psi))$. В итоге

$$x_\lambda(x_\mu z_T) = x_\nu(x_\lambda(x_\mu z_\Psi)) + [x_\lambda, x_\nu](x_\mu z_\Psi) + [x_\mu, x_\nu](x_\lambda z_\Psi) + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] z_\Psi. \qquad (*)$$

Вспомним, что λ и μ в этом рассуждении не менялись местами. Если переставить их в $(*)$ и вычесть полученное уравнение из исходного, то мы получим (с помощью тождества Якоби):

$$\begin{aligned} x_\lambda(x_\mu z_T) - x_\mu(x_\lambda z_T) = x_\nu(x_\lambda(x_\mu z_\Psi)) - x_\nu(x_\mu(x_\lambda z_\Psi)) + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] z_\Psi - \\ - [x_\mu, [x_\lambda, x_\nu]] z_\Psi = x_\nu([x_\lambda, x_\mu] z_\Psi) + [x_\lambda, [x_\mu, x\nu]] z_\Psi + [x_\mu, [x_\nu, x_\lambda]] z_\Psi = \\ = [x_\lambda, x_\mu](x_\nu z_\Psi) + ([x_\nu, [x_\lambda, x_\mu]] + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] + [x_\mu, [x_\nu, x_\lambda]]) z_\Psi = [x_\lambda, x_\mu] z_T. \end{aligned}$$

Этим доказано соотношение (c_m), а тогда и вся лемма. □

Лемма 3. *Существует представление $\rho : L \to \mathfrak{gl}(\mathcal{S})$, удовлетворяющее условиям*
(a) $\rho(x_\lambda) z_\Sigma = z_\lambda z_\Sigma$ *при* $\lambda \leqslant \Sigma$;
(b) $\rho(x_\lambda) z_\Sigma = z_\lambda z_\Sigma \mod S_m$, *если* Σ *имеет длину* m.

Доказательство. Согласно предыдущей лемме найдется линейное отображение $f : L \otimes \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, удовлетворяющее условиям (a_m), (b_m), (c_m) при всех m (поскольку f_m ввиду единственности совпадает с f_{m-1} на $L \otimes S_{m-1}$).

Другими словами, $\mathcal{S}$ превращается в L-модуль (условие (c_m)), который в силу условий (a_m) и (b_m) имеет представление ρ со свойствами (a) и (b). □

Лемма 4. *Пусть $t \in T_m \cap J = \ker \pi$, где $\pi : \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ — каноническое отображение. Тогда однородная компонента t_m степени m в t лежит в ядре I канонического отображения $\mathcal{T} \to \mathcal{S}$.*

Доказательство. Запишем t_m как линейную комбинацию базисных элементов $x_{\Sigma(i)}$ ($1 \leqslant i \leqslant r$), где каждая последовательность $\Sigma(i)$ имеет длину m. Гомоморфизм алгебр Ли $\rho : L \to \mathfrak{gl}(\mathcal{S})$, построенный в предыдущей лемме, в силу универсального свойства алгебры $\mathcal{U}$, продолжается до гомоморфизма алгебр (который мы также обозначим ρ) $\mathcal{T} \to \operatorname{End} \mathcal{S}$, причем $J \subset \ker \rho$. Поэтому $\rho(t) = 0$. Но единица под действием гомоморфизма $\rho(t)$ отображается в многочлен, старший член которого ввиду предыдущей леммы является линейной комбинацией элементов $z_{\Sigma(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Значит, эта линейная комбинация равна нулю в $\mathcal{S}$, и $t_m \in I$, что и требовалось. $\square$

Доказательство теоремы ПБВ. Пусть $t \in T^m$, $\pi : \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ — каноническое отображение. Нужно показать, что из условия $\pi(t) \in U_{m-1}$ вытекает, что $t \in I$. Но если $t \in T^m$, $\pi(t) \in U_{m-1}$, то $\pi(t) = \pi(t')$ для некоторого $t' \in T_{m-1}$; следовательно, $t - t;' inJ$. Применим предыдущую лемму к тензору $t - t''inT_m \cap J$: однородная компонента степени m равна t, и мы получаем $t \in I$. $\square$

Задачи.

1. Постройте в явном виде f_2 и f_3 для двумерной неабелевой алгебры Ли.

2. Пусть дан базис $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ в Φ. Положим $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$ (все k_i неотрицательны или все k_i неположительны). Докажите, что либо вектор λ кратен корню (возможно, равен нулю), либо существует такой элемент $\sigma \in W$, что $\sigma\lambda = \sum\limits_{i=1}^{l} k_i' \alpha_i$ где среди коэффициентов k_i' имеются и положительные, и отрицательные.

Набросок доказательства: если вектор λ не кратен корню, то ортогональная ему гиперплоскость P_λ не содержится в $\bigcup\limits_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$. Возьмем $\mu \in P_\lambda \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in \Phi} P_\alpha$. Затем найдем $\sigma \in W$, для которого все значения $(\alpha_i, \sigma\mu)$ положительны. Тогда

$$0 = (\lambda, \mu) = (\sigma\lambda, \sigma\mu) = \sum k_i(\alpha_i, \sigma\mu).$$

5 Образующие и соотношения

5.1 Свободные алгебры Ли.

Скорее всего, вам знаком способ задания групп образующими и соотношениями. Скоро мы применим аналогичный метод для построения полупростых алгебр Ли. Здесь потребуется понятие свободной алгебры Ли.

Пусть L — алгебра Ли над $\mathbb{F}$, порожденная множеством X. Скажем, что алгебра L *свободна над* X, если любое отображение φ множества X в алгебру Ли M продолжается единственным образом до гомоморфизма $\psi : L \to M$. Легко проверить единственность такой алгебры (с точностью до единственного изоморфизма). Что касается существования, то возьмем векторное пространство V с базисом X, построим тензорную алгебру $\mathcal{T}(V)$ (рассматриваемую как алгебра Ли относительно коммутатора), и пусть L — подалгебра Ли в $\mathcal{T}(V)$, натянутая на X. Если дано произвольное отображение $\varphi : X \to M$, то сначала продолжим его до линейного отображения $V \to M \subset \mathcal{U}(M)$, затем (канонически) до гомоморфизма ассоциативных алгебр $\mathcal{T}(V) \to \mathcal{U}(M)$, который является и гомоморфизмом алгебр Ли (его ограничение на L будет искомым гомоморфизмом $\psi : L \to M$, поскольку ψ отображает порождающее множество X в M).

Заметим, что если алгебра L свободна над множеством X, то векторное пространство V можно превратить в L-модуль, просто сопоставив каждому элементу $x \in X$ элемент алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ и канонически продолжив это отображение.

Наконец, если алгебра L свободна над X, а R — идеал в L, порожденный элементами f_j (где j пробегает некоторое множество индексов), то назовем L/R алгеброй Ли с образующими x_i и определяющими соотношениями $f_j = 0$, где x_i — образы в L/R элементов из X.

Теперь мы можем продолжить изучение полупростой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль. Наша цель — получить представление алгебры L образующими и соотношениями, зависящими только от системы корней Φ, тем самым доказав и существование, и единственность полупростой алгебры Ли с данной системой корней. В этой лекции алгебры Ли могут быть и бесконечномерными.

5.2 Определяющие соотношения в L.

Пусть L — полупростая алгебра Ли, H — ее картановская подалгебра, Φ — соответствующая система корней, $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ — ее фиксированный базис. Напомним, что

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \alpha_i(h_i).$$

Фиксируем такое множество образующих $x_i \in L_{\alpha_i}$, $y_i \in L_{-\alpha_i}$, что $[x_i, y_i] = h_i$.

Предложение 8. *Во введенных обозначениях алгебра L порождается множеством образующих $\{x_i, y_i, h_i \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$, которые удовлетворяют по крайней мере следующим соотношениям:*

(S1) $[h_i, h_j] = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$;

(S2) $[x_i, y_i] = h_i$, $[x_i, y_j] = 0$ *при* $i \neq j$;

(S3) $[h_i, x_j] = \langle\alpha_i, \alpha_j\rangle x_j$, $[h_i, y_j] = -\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle y_j$;
(S_{ij}^+) $(\operatorname{ad} x_i)^{-\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle+1}(x_j) = 0$, $i \neq j$;
(S_{ij}^-) $(\operatorname{ad} y_i)^{-\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle+1}(y_j) = 0$, $i \neq j$.

Доказательство. Мы уже доказывали, что L порождается элементами x_i и y_i, так что про порождение все ясно.

Соотношение (S1) очевидно, так же как и (S2), поскольку $\alpha_i - \alpha_j \notin \Phi$ при $i \neq j$. Соотношение (S3) очевидно. Рассмотрим теперь (S_{ij}^+; для (S_{ij}^- рассуждения аналогичны. Так как $i \neq j$, то вектор $\alpha_j - \alpha_i$ не является корнем и α_i-серия, порожденная корнем α_j, состоит из элементов

$$\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \ldots, \alpha_j + q\alpha_i, \text{ где } -q = \langle\alpha_i, \alpha_j\rangle.$$

Поскольку $\operatorname{ad} x_i$ последовательно отображает x_j в корневые подпространства для $\alpha_j + \alpha_i, \alpha_j + 2\alpha_i, \ldots$, мы получаем ($S_{ij}^+$. $\square$

Отметим, что соотношения из этого предложения содержат константы, зависящие только от системы корней. Серр доказал, что они составляют полную систему определяющих соотношений для L (мы докажем эту теорему).

В качестве первого шага к доказательству теоремы Серра мы изучим алгебру Ли (возможно, бесконечномерную), которая определяется лишь соотношениями (S1)–(S3).

5.3 Следствия из соотношений (S1)–(S3)

Фиксируем систему корней Φ с базисом $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Числа Картана $\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle$ будем кратко обозначать c_{ij}.

Возьмем свободную алгебру Ли $\widehat{L}$ с $3l$ образующими $\{\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{h}_i \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$. Пусть $\hat{K}$ — идеал в $\hat{L}$, порожденный следующими элементами:

$$[\hat{h}_i, \hat{h}_j],\ [\hat{x}_i \hat{y}_j] - \delta_{ij}\hat{h}_i,\ [\hat{h}_i, \hat{x}_j] - c_{ij}\hat{x}_j,\ [\hat{h}_i, \hat{y}_j] + c_{ij}\hat{y}_j.$$

Положим $L_0 = \hat{L}/\hat{K}$, и пусть образующие переходят при факторизации в элементы x_i, y_i, h_i.

Проблема в том, что алгебра L_0 определена чересчур абстрактно (из сказанного не видно, например, что она не тривиальна). Чтобы изучить L_0 более конкретно, попробуем построить для нее подходящее представление. Для этого мы применим прообраз конструкции, которая сыграет скоро важнейшую роль.

Как было уже отмечено, модуль над алгеброй $\hat{L}$ строится без труда: нужно лишь сопоставить каждому из $3l$ ее образующих некоторое линейное преобразование.

Пусть V — тензорная алгебра (то есть свободная ассоциативная алгебра) над векторным пространством с базисом $(v_1, \ldots, v_l)$. Забудем об умножении и для простоты обозначений будем писать $v_{i_1} \ldots v_{i_t}$ вместо $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_t}$. Эти тензоры (вместе с 1) образуют в V базис над $\mathbb{F}$. Далее, определим следующие эндоморфизмы пространства V:

$$\begin{cases} \hat{h}_j \cdot 1 = 0, \\ \hat{h}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t} = -(c_{i_1 j} + \dots + c_{i_t j}) v_{i_1} \dots v_{i_t}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \hat{y}_j \cdot 1 = v_j, \\ \hat{y}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t} = v_j v_{i_1} \dots v_{i_t}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \hat{x}_j \cdot 1 = 0 = \hat{x}_j \cdot v_i, \\ \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t} = v_{i_1}(\hat{x}_j \cdot v_{i_2} \dots v_{i_t}) - \delta_{i_1 j}(c_{i_2 j} + \dots + c_{i_t j}) v_{i_2} \dots v_{i_t}. \end{cases}$$

Это действие продолжается (единственным образом) на всю алгебру $\hat{L}$ и дает ее представление $\hat{\varphi} : \hat{L} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Предложение 9. *Пусть $\hat{K}_0 = \ker \hat{\varphi}$. Тогда $\hat{K} \subset \hat{K}_0$, то есть $\hat{\varphi}$ пропускается через L_0, тем самым превращая V в L_0-модуль.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что $\hat{h}_j$ действует на V диагонально (в выбранном базисе), так что $\hat{\varphi}(\hat{h}_i)$ и $\hat{\varphi}(\hat{h}_j)$ коммутируют, то есть $[\hat{h}_i, \hat{h}_j] \in \hat{K}_0$. С другой стороны, $\hat{\varphi}(\hat{y}_j)$ — это просто левое умножение на v_j. (Всю сложность вносит лишь $\hat{x}_j$.)

Положив в формулах для действия $j = i_1$, получаем

$$\hat{x}_i \cdot \hat{y}_j \cdot \hat{v}_{i_2} \dots v_{i_t} - \hat{y}_j \cdot \hat{x}_i \cdot v_{i_2} \dots v_{i_t} = -\delta_{ji}(c_{i_2 i} + \dots + c_{i_t i}) v_{i_2} \dots v_{i_t} = \delta_{ji} \hat{h}_i \cdot v_{i_2} \dots v_{i_t}.$$

Кроме того,

$$(\hat{x}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \hat{x}_i) \cdot 1 = 0 = \delta_{ij} \hat{h}_i \cdot 1.$$

Следовательно,

$$[\hat{x}_i, \hat{y}_j] - \delta_{ij} \hat{h}_i \in \hat{K}_0.$$

Далее,

$$(\hat{h}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \hat{h}_i) \cdot 1 = \hat{h}_i \cdot v_j = -c_{ji} v_j = -c_{ji} \hat{y}_j \cdot 1.$$

Аналогично,

$$(\hat{h}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \hat{h}_i) \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t} = \hat{h}_i \cdot v_j v_{i_1} \dots v_{i_t} + (c_{i_1 i} + \dots + c_{i_t i}) v_j v_{i_1} \dots v_{i_t} = -c_{ji} \hat{y}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t}.$$

Следовательно,

$$[\hat{h}_i, \hat{y}_j] + c_{ji} \hat{y}_j \in \hat{K}_0.$$

Переходя к последнему шагу, предварительно заметим, что

$$\hat{h}_i \cdot \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t} = -(c_{i_1 i} + \dots + c_{i_t i} - c_{ji}) \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t}. \qquad (*)$$

Это доказывается индукцией по t. При $t = 0$ мы считаем, что $v_{i_1} \dots v_{i_t} = 1$, и обе части обращаются в нуль. Предположение индукции означает, что $\hat{x}_j \cdot v_{i_2} \dots v_{i_t}$ является собственным вектором для $\hat{h}_i$ с собственным значением $-(c_{i_2 i} + \dots + c_{i_t i} - c_{ji})$. Ясно, что при умножении этого вектора слева на v_i мы получим другой собственный вектор для $\hat{h}_i$, с собственным значением $-(c_{i_1i} + \dots c_{i_ti} - c_{ji})$. Отсюда и из определений легко следует соотношение $(*)$.

С помощью $(*)$ получаем

$$(\hat{h}_i\hat{x}_j - \hat{x}_j\hat{h}_i) \cdot 1 = 0,$$

$$(\hat{h}_i\hat{x}_j - \hat{x}_j\hat{h}_i) \cdot v_{i_1} \dots v_{i_y} = (-(c_{i_1i} + \dots c_{i_ti} - c_{ji}) + (c_{i_1i} + \dots c_{i_ti}))\hat{x}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t} = c_{ji}\hat{x}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t}.$$

Таким образом,

$$[\hat{h}_i, \hat{x}_j] - c_{ji}\hat{x}_j \in \hat{K}_0.$$

В итоге $\hat{K} \subset \hat{K}_0$. $\square$

Задачи.

1. Пусть L — свободная алгебра Ли над множеством X. Докажите, что алгебра $\mathcal{U}(L)$ изоморфна тензорной алгебре на векторном пространстве с базисом X.

2. Проверьте единственность (с точностью до единственного изоморфизма) свободной алгебры Ли над множеством X.

3. Опишите свободную алгебру Ли над множеством $X = \{x\}$.

6 Лекция 6. Теорема Серра

6.1 Теорема про алгебру L_0

Теорема 15. *Пусть Φ — система корней с базисом $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$, а L_0 — алгебра Ли с образующими $\{x_i, y_i h_i \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$ и соотношениями $(S1)$–$(S3)$. Тогда элементы h_i составляют базис l-мерной абелевой подалгебры $H \subset L_0$, причем $L_0 = Y + H + X$ (прямая сумма подпространств), гд Y (соответственно X) — подалгебра в L_0, порожденная элементами y_i (соответственно x_i).*

Доказательство. Разобьем доказательство на шаги, используя построенное выше представление $\varphi : L_0 \to \mathfrak{gl}(V)$: если x — образ в L_0 элемента $\hat{x} \in L$, то $\varphi(x) = \hat{\varphi}(\hat{x})$.

1. $\sum \mathbb{F}\hat{h}_j \cap \ker \hat{\varphi} = 0$. Если

$$\hat{h} = \sum_{j=1}^{l} a_j \hat{h}_j \text{ и } \hat{\varphi}(\hat{h}) = 0,$$

то и собственные значения $-\sum\limits_j a_j c_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$ этого отображения равны 0. Но матрица Картана (c_{ij}) системы Φ невырожденна, поэтому все a_j равны нулю, т. е. $\hat{h} = 0$.

2. *Каноническое отображение $\hat{L} \to L_0$ является изоморфизмом между $\sum \mathbb{F}\hat{h}_j$ и $\sum \mathbb{F}h_j$.* Это непосредственно вытекает из шага 1.

3. *Подпространство $\sum \mathbb{F}\hat{x}_j + \sum \mathbb{F}\hat{y}_j + \sum \mathbb{F}\hat{h}_j$ в $\hat{L}$ изоморфно отображается в L_0.* Фиксируем i. Ввиду соотношений $(S1)$–$(S3)$ мы имеем

$$[x_i, y_i] = h_i, \quad [h_i, x_i] = 2x_i, \quad [h_i, y_i] = -2y_i;$$

поэтому $\mathbb{F}x_i + \mathbb{F}y_i + \mathbb{F}h_i$ — гомоморфный образ алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Но последняя проста, и при этом $h_i \neq 0$ (шаг 2). Значит, алгебра $\mathbb{F}x_i + \mathbb{F}y_i + \mathbb{F}h_i$ изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$.

Рассмотрим некоторый элемент

$$A = \sum a_i x_i + \sum b_i y_i + \sum c_i h_i,$$

пусть он равен нулю.

Прокоммутируем его с h_k:

$$0 = A_1 = [h_k, A] = \sum a_i c_{ik} x_i - \sum b_i c_{ik} y_i.$$

Теперь прокоммутируем A_1 с x_k:

$$0 = A_2 = [x_k, A_1] = \sum a_i c_{ik} [x_k, x_i] - b_k c_{kk} [x_k, y_k] = \sum_{i \neq k} a_i c_{ik} [x_k, x_i] - 2b_k h_k.$$

Прокоммутируем A_2 с y_k:

$$0 = A_3 = [y_k, A_2] = \sum_{i \neq k} a_i c_{ik} [y_k, [x_k, x_i]] - 2b_k [y_k, h_k] =$$

$$= \sum_{i \neq k} a_i c_{ik} [[y_k, x_k], x_i] + \sum_{i \neq k} a_i c_{ik} [[x_i, y_k], x_k] - 4b_k y_k = \sum_{i \neq k} a_i c_{ik} [h_k, x_i] - 4b_k y_k =$$

$$= \sum_{i \neq k} a_i c_{ik}^2 x_i - 4b_k y_k.$$

Таким образом, мы видим, что собственный вектор для операторов $\operatorname{ad} h_m$ с собственными значениями $-c_{km}$ совпадает с линейной комбинацией нескольких собственных векторов этих же операторов с собственными значениями c_{im}, что невозможно. То есть вся эта линейная комбинация равна нулю, то есть $b_k = 0$. Так как k было выбрано произвольно, то все коэффициенты $b_i = 0$, аналогично для a_i, а значит и для c_i.

4. *Подпространство $H = \sum \mathbb{F} h_j$ является l-мерной абелевой подалгеброй в L_0.* Это вытекает из шага 2 и соотношения $(S1)$.

5. *Если $[x_{i_1} \ldots x_{i_t}]$ обозначает $[x_{i_1}, [x_{i_2}, \ldots [x_{i_{t-1}}, x_{i_t}], \ldots]]$, то*

$$[h_j, [x_{i_1} \ldots x_{i_t}]] = (c_{i_1 j} + \cdots + c_{i_t j}) [x_{i_1} \ldots x_{i_t}],$$

и равенство сохраняется при замене x_i на y_i и c_{ij} на $-c_{ij}$. При $t = 1$ это соотношение $(S3)$. Общий случай легко доказывается по индукции с помощью тождества Якоби (см. задачу 1).

6. *Если $t \geqslant 2$, то $[y_i, [x_{i_1} \ldots x_{i_t}]] \in X$, и аналогично для Y.* Ввиду соотношения $(S2)$ мы имеем $[y_j, x_i] = -\delta_{ij} h_i$, и случай $t = 2$ очевиден из $(S3)$ и тождества Якоби. Легко проводится и индукция по t (см. задачу 1).

7. *Подпространство $Y + H + X$ является подалгеброй в L_0 и потому совпадает с L_0.* Это подалгебра ввиду шагов 4, 5 и 6. Но в ней содержится множество образующих для L_0, и потому $Y + H + X$ совпадает с L_0.

8. *Сумма $L_0 = Y + H + X$ прямая.* Действительно, из шага 5 видно, как разложить L_0 в сумму собственных подпространств отображения $\operatorname{ad} H$; с учетом шагов 1 и 2 эта сумма прямая. □

Разложение $L_0 = Y + H + X$ удобно описывать в терминах весов. При $\lambda \in H^*$ положим

$$(L_0)_\lambda = \{t \in L_0 \mid [h, t] = \lambda(h) t \text{ при всех } h \in H\}.$$

Из доказательства предыдущей теоремы видно, что $H = (L_0)_0$. При этом все ненулевые векторы λ с ненулевыми $(L_0)_\lambda$ имеют вид

$$\lambda = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i \quad (k_i \in \mathbb{Z}),$$

где либо все k_i неотрицательны (в этом случае пишем $\lambda > 0$), либо все неположительны (пишем $\lambda < 0$). Тогда

$$X = \sum_{\lambda > 0} (L_0)_\lambda \text{ и } Y = \sum_{\lambda < 0} (L_0)_\lambda.$$

6.2 Теорема Серра

В предыдущем пункте мы изучили строение алгебры Ли L_0, определяющие соотношения которой сводятся к $(S1)$–$(S3)$. Теперь спросим, что произойдет, если наложить условия конечности (S_{ij}^+), (S_{ij}^-). Положим

$$x_{ij} = (\operatorname{ad} x_i)^{-c_{ji}+1}(x_j), \quad y_{ij} = (\operatorname{ad} y_i)^{-c_{ji}+1}(y_j) \qquad (i \neq j).$$

(Подразумеваются элементы из L_0.)

Лемма 5. *В алгебре L_0 выполнены равенства $\operatorname{ad} x_k(y_{ij}) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant l$, при любых $i \neq j$.*

Доказательство. *Случай* (a): $k \neq i$. Тогда $[x_k, y_i] = 0$ ввиду соотношения $(S2)$, так что $\operatorname{ad} x_k$ и $\operatorname{ad} y_i$ коммутируют. Следовательно,

$$\operatorname{ad} x_k(y_{ij}) = (\operatorname{ad} y_i)^{-c_{ij}+1} \operatorname{ad} x_k(y_i).$$

Если $k = j$, то этот элемент равен

$$(\operatorname{ad} y_i)^{-c_{ji}+1}(h_j).$$

Но ввиду $(S3)$ мы имеем $\operatorname{ad} y_i(h_j) = c_{ij} y_i$. Если этот элемент не равен нулю, то и c_{ji} не равно нулю (и отрицательно, поскольку $i \neq j$), но тогда $-c_{ji} + 1 \geqslant 2$. Как следствие,

$$(\operatorname{ad} y_i)^{-c_{ji}+1}(h_j) = 0.$$

Если же $k \neq j$, то $[x_k, y_j] = 0$ в соответствии с соотноошением $(S2)$, и мы получим тот же результат.

Случай (b): $k = i$. Из доказательства предыдущей теоремы мы знаем, что $S = \mathbb{F}x_i + \mathbb{F}y_i + \mathbb{F}h_i$ — подалгебра в L_0, изоморфная $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Поэтому можно сказать кое-что о присоединенном действии подалгебры S на L_0. Хотя размерность алгебры L_0 может оказаться бесконечной, все равно можно вспомнить разные рассуждения из теории представлений. В частности, поскольку $j \neq i$, мы заключаем, что $[x_i, y_j] = 0$, так что y_j — старший вектор для S веса $m = -c_{ji}$(поскольку $[h_i, y_j] = -c_{ji} y_j$). Нетрудная индукция по t показывает, что

$$\operatorname{ad} x_i (\operatorname{ad} y_i)^t (y_j) = t(m - t + 1)(\operatorname{ad} y_i)^{t-1}(y_j).$$

Поэтому при $t = -c_{ji} + 1$ правая часть обращается в ноль. □

Прежде чем формулировать теорему Серра, упомянем об одной полезной конструкции. Назовем эндоморфизм x бесконечномерного векторного пространства V *локально нильпотентным*, если каждый элемент из V аннулируется некоторой его степенью. В этом случае x нильпотентен на каждом конечномерном подпространстве $W \subset V$, так что можно определить $\exp(x|_W)$. Ясно, что $\exp(x|_W)$ и $\exp(x|_{W'})$ совпадают на $W \cap W'$, так что мы можем *сшить* все такие отображения, получив автоморфизм $\exp x$ пространства V.

Теорема 16 (Серр). *Фиксируем систему корней Φ с базисом $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Пусть L — алгебра Ли, порожденная $3l$ элементами $\{x_i, y_i, h_l \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$, которые подчинены соотношениям $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$, (S_{ij}^+), (S_{ij}^-). Тогда L является конечномерной полупростой алгеброй с системой корней Φ, причем картановская подалгебра порождается элементами h_i.*

Разобьем доказательство на шаги, на этой лекции докажем первые пять из них;

Первые 5 шагов доказательства теоремы Серра.

По определению $L = L_0/K$, где алгебра L_0 такова, как выше, а K — идеал, порожденный элементами x_{ij}, y_{ij}, $i \neq j$. Ради простоты обозначений вначале мы будем работать в L_0. Пусть I (соответственно, J) — идеал в X (соответственно, в Y), порожденный элементами x_{ij} (соответственно, y_{ij}). Таким образом, K включает идеалы I, J.

1. *Множества I и J являются идеалами в L_0.* Достаточно рассмотреть J (случай I аналогичен). С одной стороны, y_{ij} — собственный вектор для $\operatorname{ad} h_k$, $1 \leqslant k \leqslant l$, с собственным значением $-c_{jk} + (c_{ji} - 1)c_{ik}$. Поскольку $\operatorname{ad} h_k(Y) \subset Y$, ввиду тождества Якоби $\operatorname{ad} h_k(J) \subset J$. С другой стороны, согласно предыдущей лемме $\operatorname{ad} x_k(y_{ij}) = 0$. Ясно, что $\operatorname{ad} x_k$ отображает Y в $Y + H$; соединив это утверждение с тождеством Якоби и тем фактом, что $\operatorname{ad} h_k(J) \subset J$, получаем, что $\operatorname{ad} x_k(J) \subset J$. Наконец, $\operatorname{ad} L_0(J) \subset J$, снова ввиду тождества Якоби (так как x_k, y_k порождают L_0).

2. *Справедливо соотношение $K = I + J$.* По определению $I + J \subset K$. Но ввиду шага 1 $I + J$ — идеал в L_0, содержащий все элементы x_{ij}, y_{ij}, а K — наименьший такой идеал.

3. *Справедливо соотношение $L = N^- + H + N$ (прямая сумма подпространств), где $N^- = Y/J$, $N = X/I$, а подпространство отождествлено со своим образом при каноническом отображении $L_0 \to L$.* Применим шаг 2 и разложение в прямую сумму $L_0 = Y + H + X$.

4. *Подпространство*

$$\sum \mathbb{F}x_i + \sum \mathbb{F}h_i + \sum \mathbb{F}y_i$$

отображается в L изоморфно. Это доказывается аналогично шагу 3 доказательства предыдущей теоремы, поскольку H отображается в L изоморфно (см. предыдущий шаг). Как следствие, можно отождествить x_i, h_i, y_i с элементами из L (которые порождают L).

5. *Если $\lambda \in H^*$, то пусть*

$$L_\lambda := \{x \in L \mid [h, x] = \lambda(h)x \text{ при всех } h \in H\}.$$

Тогда $H = L_0$, $N = \sum\limits_{\lambda > 0} L_\lambda$, $N^- = \sum\limits_{\lambda < 0} L_\lambda$, причем все пространства L_λ конечномерны. Это ясно из шагов 3 и 4.

Доказательство теоремы продолжим на следующей лекции.

6.3 Задачи

1. Докажите по индукции шаги 5 и 6 теоремы 15.

2. Докажите случай (б) леммы 5 напрямую, не используя теорию представлений.

3. Используя представление алгебры L_0 на V, докажите, что алгебры Ли X, Y являются свободными над множествами элементов x_i, y_i соответственно.

7 Лекция 7. Существование и единственность.

7.1 Автоморфизмы специального вида

Прежде, чем снова возвращаться к доказательству теоремы Серра, позанимаемся немного экспоненциальными автоморфизмами.

Предположим, что для элемента $x \in L$ оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен, $(\operatorname{ad} x)^k = 0$. Тогда разложение экспоненты линейного преобразования в ряд над полем $\mathbb{C}$ имеет смысл и над полем $\mathbb{F}$, так как этот ряд будет содержать конечное число членов:

$$\exp(\operatorname{ad} x) = 1 + \operatorname{ad} x + \frac{(\operatorname{ad} x)^2}{2!} + \frac{(\operatorname{ad} x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\operatorname{ad} x)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Мы утверждаем, что $\exp(\operatorname{ad} x) \in \operatorname{Aut} L$.

Нам нужно показать, что $\exp(\operatorname{ad} x)([y,z]) = [\exp(\operatorname{ad} x)(y), \exp(\operatorname{ad} x)(z)]$.

Вспомним, что отображение $\operatorname{ad} x$ (и вообще любое дифференцирование) удовлетворяет обобщенному правилу Лейбница (доказывается по индукции благодаря обычному правилу Лейбница):

$$\frac{(\operatorname{ad} x)^n}{n!}([y,z]) = \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{1}{i!}(\operatorname{ad} x)^i(y), \frac{1}{(n-i)!}(\operatorname{ad} x)^{n-i}(z)\right],$$

и воспользуемся им при доказательстве того, что $\exp(\operatorname{ad} x)$ сохраняет скобку Ли.

Действительно, при $x, y, z \in L$

$$[\exp \operatorname{ad}(x)(y), \exp \operatorname{ad} x(z)] = \left[\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\operatorname{ad} x)^i(y)}{i!}\right), \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\operatorname{ad} x)^j(z)}{j!}\right)\right] =$$
$$= \sum_{n=0}^{2k-2} \left(\sum_{i=0}^{n} \left[\frac{(\operatorname{ad} x)^i(y)}{i!}, \frac{(\operatorname{ad} x)^{n-i}(z)}{(n-i)!}\right]\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{2k-2} \frac{(\operatorname{ad} x)^n([y,z])}{n!} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\operatorname{ad} x)^n([y,z])}{n!} = \exp(\operatorname{ad} x)([y,z])$$

Обратимость элемента $\exp(\operatorname{ad} x)$ следует (обычным образом) из явного выражения для обратного элемента: $\exp(-\operatorname{ad} x)$.

Автоморфизм вида $\exp(\operatorname{ad} x)$, где оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен, называется *внутренним*, подгруппа в $\operatorname{Aut} L$, порожденная такими элементами, обозначается через $\operatorname{Int} L$, и ее элементы также называются внутренними. Это нормальная подгруппа: если $\varphi \in \operatorname{Aut} L$, $x \in L$, то $\varphi(\operatorname{ad} x)\varphi^{-1} = \operatorname{ad} \varphi(x)$, откуда следует, что

$$\varphi \exp(\operatorname{ad} x)\varphi^{-1} = \exp(\operatorname{ad} \varphi(x)).$$

Пусть $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ со стандартным базисом (x, y, h). Положим

$$\sigma = \exp \operatorname{ad} x \cdot \exp \operatorname{ad}(-y) \cdot \exp \operatorname{ad} x \text{ (тогда } \sigma \in \operatorname{Int} L).$$

Вычислим действие преобразования σ на базисе $\{x, y, h\}$. Это можно сделать, просто записав наши элементы как матрицы из $\mathfrak{sl}_2$:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\exp \operatorname{ad} x = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

а

$$\exp \operatorname{ad}(-y) = \exp \left(- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = E - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\sigma = \exp \operatorname{ad} x \cdot \exp \operatorname{ad}(-y) \cdot \exp \operatorname{ad} x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\sigma(x) = -y, \quad \sigma(y) = -x, \sigma(h) = -h.$$

Теперь рассмотрим автоморфизм вида σ для произвольной алгебре Ли с описываемыми нами свойствами. Иначе говоря, пусть $x_i \in L_{\alpha_i}$, где α_i — простой корень, $y_i \in L_{-\alpha_i}$ таков, что $[x_i, y_i] = h_i$,

$$\tau_i = \exp \operatorname{ad} x_i \cdot \exp \operatorname{ad}(-y_i) \cdot \exp \operatorname{ad} x_i.$$

Пусть $\lambda, \mu \in H^*$, при этом $\sigma_{\alpha_i}(\lambda) = \mu$.

Рассмотрим $\tau_i(h)$, $h \in H$:

$$\begin{aligned}
\exp \operatorname{ad} x_i \cdot \exp \operatorname{ad}(-y_i) \exp \operatorname{ad} x_i(h) &= \exp \operatorname{ad} x_i \exp \operatorname{ad}(-y_i)(h + [x_i, h]) = \\
&= \exp \operatorname{ad} x_i \exp \operatorname{ad}(-y_i)(h - \alpha_i(h) x_i) = \\
&= \exp \operatorname{ad} x_i(h - \alpha_i(h) x_i - [y_i, h - \alpha_i(h) x_i] - \frac{1}{2}[y_i, [y_i, h - \alpha_i(h) x_i]]) = \\
&= \exp \operatorname{ad} x_i(h - \alpha_i(h) x_i - \alpha_i(h) y_i - \alpha_i(h) h_i - \frac{1}{2}[y_i, -\alpha_i(h) h_i]) = \\
&= \exp \operatorname{ad} x_i(h - \alpha_i(h) x_i - \alpha_i(h) y_i - \alpha_i(h) h_i + \alpha_i(h) y_i) = \\
&= \exp \operatorname{ad} x_i(h - \alpha_i(h) x_i - \alpha_i(h) h_i) = \\
&= h - \alpha_i(h) x_i - \alpha_i(h) h_i + [x_i, h - \alpha_i(h) x_i - \alpha_i(h) h_i] = \\
&= h - \alpha_i(h) x_i - \alpha_i(h) h_i - \alpha_i(h) x_i + 2\alpha_i(h) x_i = h - \alpha_i(h) h_i = \sigma_{\alpha_i}(h).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы знаем действие автоморфизма τ_i на H.

Теперь пусть $x \in L_\lambda$, $\tau_i(x) = y$. Заметим, что

$$[\sigma_{\alpha_i}(h), y] = [\tau_i(h), \tau_i(x)] = \tau_i([h, x]) = \tau_i(\lambda(h) x) = \lambda(h) \tau_i(x) = \lambda(h) y,$$

что означает $y \in L_\mu$. Таким образом, мы видим, что τ_i меняет местами подпространства L_λ и L_μ.

7.2 Окончание доказательства теорема Серра

Теперь напомним снова теорему Серра и те 5 пунктов, которые мы уже доказали.

Теорема 17 (Серр). *Фиксируем систему корней Φ с базисом $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. Пусть L — алгебра Ли, порожденная $3l$ элементами $\{x_i, y_i, h_l \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$, которые подчинены соотношениям $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$, (S^+_{ij}), (S^-_{ij}). Тогда L является конечномерной полупростой алгеброй с системой корней Φ, причем картановская подалгебра порождается элементами h_i.*

Доказательство. По определению $L = L_0/K$, где алгебра L_0 такова, как выше, а K — идеал, порожденный элементами x_{ij}, y_{ij}, $i \neq j$. Ради простоты обозначений вначале мы будем работать в L_0. Пусть I (соответственно, J) — идеал в X (соответственно, в Y), порожденный элементами x_{ij} (соответственно, y_{ij}). Таким образом, K включает идеалы I, J.

1. *Множества I и J являются идеалами в L_0.*

2. *Справедливо соотношение $K = I + J$.*

3. *Справедливо соотношение $L = N^- + H + N$ (прямая сумма подпространств), где $N^- = Y/J$, $N = X/I$, а подпространство отождествлено со своим образом при каноническом отображении $L_0 \to L$.*

4. *Подпространство*

$$\sum \mathbb{F}x_i + \sum \mathbb{F}h_i + \sum \mathbb{F}y_i$$

отображается в L изоморфно.

5. *Если $\lambda \in H^*$, то пусть*

$$L_\lambda := \{x \in L \mid [h, x] = \lambda(h)x \text{ при всех } h \in H\}.$$

Тогда $H = L_0$, $N = \sum\limits_{\lambda > 0} L_\lambda$, $N^- = \sum\limits_{\lambda < 0} L_\lambda$, причем все пространства L_λ конечномерны.

Продолжим теперь доказывать те пункты, которые еще не доказали.

6. *При $1 \leqslant i \leqslant l$ эндоморфизмы $\operatorname{ad} x_i$ и $\operatorname{ad} y_i$ локально нильпотентны в L.* Достаточно рассмотреть $\operatorname{ad} x_i$ при фиксированном i (в силу симметрии). Пусть M — подпространство в L, состоящее из всех элементов, которые аннулируются какой-то степенью отображения $\operatorname{ad} x_i$. Если элемент $x \in M$ (соответственно, $y \in M$) аннулируется отображением $(\operatorname{ad} x_i)^r$ (соответственно, $(\operatorname{ad} x_i)^s$), то $(\operatorname{ad} x_i)^{r+s}$ аннулирует элемент $[x, y]$. Значит, в действительности M — подалгебра в L. Но при всех k мы имеем $x_k \in M$ (ввиду соотношений (S^+_{ij})) и $y_k \in M$ (виду $(S2)$, $(S3)$). Эти элементы порождают L, поэтому $M = L$, что и требовалось.

7. *Оператор*

$$\tau_i = \exp(\operatorname{ad} x_i)\exp(\operatorname{ad}(-y_i))\exp(\operatorname{ad} x_i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant l,$$

— корректно определенный автоморфизм алгебры L. Это вытекает из шага 6 и замечаний перед теоремой.

8. *Если $\lambda, \mu \in H^*$ и $\sigma\lambda = \mu$ ($\sigma \in W$, где W — группа Вейля для Φ), то* $\dim L_\lambda = \dim L_\mu$. Достаточно рассмотреть случай, когда $\sigma = \sigma_{\alpha_i}$ — простое отражение, поскольку W порождается простыми отражениями. Автоморфизм τ_i алгебры L, построенный на шаге 7,

на конечномерном пространстве $L_\lambda + L_\mu$ совпадает с обычным произведением экспонент, и мы заключаем, что τ_i меняет местами L_λ и L_μ. Как следствие, $\dim L_\lambda = \dim L_\mu$.

9. *Если* $1 \leqslant i \leqslant l$, *то* $\dim L_{\alpha_i}$, *причем* $\dim L_{k\alpha_i} = 0$ *для целых* $k \neq 0, 1, -1$. Это очевидно для L_0, а тогда ввиду шага 4 и для L.

10. *Если* $\alpha \in \Phi$, *то* $\dim L_\alpha = 1$, *но* $\dim L_{k\alpha} = 0$ *при* $k \neq 0, 1, -1$. Каждый корень W-сопряжен простому корню, и остается использовать шаги 8 и 9.

11. Если $L_\lambda \neq 0$, то либо $\lambda \in \Phi$, либо $\lambda = 0$. В противном случае λ является ненулевой целочисленной линейной комбинацией простых корней с коэффициентами ± 1 и 0. Ввиду шага 10 вектор λ не кратен простому корню. По упражнению ??? некоторый W-сопряженный к нему вектор $\sigma\lambda$ имеет и строго положительный, и строго отрицательный коэффициент. Это означает, что $L_{\sigma\lambda} = 0$ (см. шаг 5), вопреки результату шага 8.

12. Справедливо соотношение

$$\dim L = l + |\Phi| < \infty.$$

Ввиду шага 5 это вытекает из шагов 10 и 11.

13. *Алгебра* L *полупроста.* Пусть A — абелев идеал в L. Нужно показать, что $A = 0$. Поскольку идеал A инвариантен относительно действия $\operatorname{ad} H$, мы заключаем, что

$$A = (A \cap H) + \sum_{\alpha \in \Phi} (A \cap L_\alpha) \quad \left(\text{так как } L = H + \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha\right).$$

Если $L_\alpha \subset A$, то $[L_{-\alpha}, L_\alpha] \subset A$. Тогда $L_{-\alpha} \subset A$, и A содержит экземпляр простой алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ (см. шаг 4). Это невозможно, поэтому на самом деле $A = A \cap H \subset H$, а значит,

$$[L_\alpha, A] = 0 \quad (\alpha \in \Phi) \text{ и } A \subset \bigcap_{\alpha \in \Phi} \ker \alpha = 0$$

(элементы α_i порождают H^*).

14. *Подалгебра* H *является картановской, а* Φ *— системой корней для* L. Алгебра H абелева (значит, и нильпотентна) и при этом самонормализуема (ввиду разложения в прямую сумму $L = H + \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$), т. е. H является картановской подалгеброй. Ясно, что Φ — соответствующая система корней. $\square$

7.3 Применение: теоремы существования и единственности.

Наши усилия, наконец, вознаграждены.

Теорема 18. (a) *Пусть* Φ *— некоторая система корней. Тогда существует полупростая алгебра Ли с системой корней* Φ.

(b) *Пусть* L, L' *— полупростые алгебры Ли с картановскими подалгебрами* H, H' *и системами корней* Φ, Φ' *соответственно. Пусть также дан изоморфизм* $\Phi \to \Phi'$, *переводящий данный базис* Δ *в* Δ', *и ему соответствует изоморфизм* $\pi : H \to H'$. *Каждому* $\alpha \in \Delta$ ($\alpha' \in \Delta'$) *сопоставим произвольный ненулевой элемент* $x_\alpha \in L_\alpha$ ($x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$). *Тогда существует единственный изоморфизм* $\pi : L \to L'$, *продолжающий* $\pi : H \to H'$ *и отображающий* x_α *в* $x'_{\alpha'}$ ($\alpha \in \Delta$).

Доказательство. Утверждение (a) непосредственно вытекает из теоремы Серра.

Докажем утверждение (b). Ясно, что достаточно рассмотреть алгебру L, построенную в теореме Серра, взяв в качестве x_α, y_α и $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ выбранные там образующие ($\alpha \in \Delta$). Положим $h'_{\alpha'} = \pi(h_\alpha)$ и возьмем (единственный) элемент $y'_{\alpha'}$, удовлетворяющий соотношениям $[x'_{\alpha'}, y'_{\alpha'}] = h'_{\alpha'}$ при всех $\alpha' \in \Delta'$. Так как $\Phi \cong \Phi'$, то выбранные элементы из L' удовлетворяют соотношениям Серра. В силу теоремы Серра существует единственный гомоморфизм $\pi : L \to L'$, при котором $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) переходят в $x'_{\alpha'}, y'_{\alpha'}, h'_{\alpha'}$ соответственно. Он является продолжением заданного гомоморфизма $\pi : H \to H'$. Поскольку

$$\dim L = \dim H + |\Phi| = \dim H' + |\Phi'| = \dim L',$$

то $\pi : L \to L'$ является изоморфизмом. $\square$

В соответствии с теоремой классификации существует (с точностью до изоморфизма) ровно одна простая алгебра Ли с каждой из систем корней $\mathbf{A}_l$, $l \geqslant 1$, $\mathbf{B}_l$, $l \geqslant 2$, $\mathbf{C}_l$, $l \geqslant 3$, $\mathbf{D}_l$, $l \geqslant 4$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{G}_2$. Мы уже дали достаточно полное описание классических типов **A**–**D** и на этом остановимся, чтобы не заниматься слишком долго вычислениями.

7.4 Задачи

1. Докажите, что идеал K алгебры L_0 содержится в каждом ее идеале конечной коразмерности (то есть L — наибольшая конечномерная факторалгебра для L_0).

2. Докажите, что любое отношение включения между схемами Дынкина (например, $E_6 \subset E_7 \subset E_8$ индуцирует естественное отношение включения между соответствующими полупростыми алгебрами Ли.

3. Докажите полупростоту построенных нами в прошлом семестре матричных алгебр одного из типов $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$, $\mathbf{D}_l$.

8 Лекция 8. Теория представлений, часть 1

8.1 Веса и старшие векторы. Весовые подпространства

В ближайшее время наша цель — изучение конечномерных L-модулей (то есть представлений) для полупростой алгебры Ли L (над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль) с фиксированной картановской подалгеброй H, системой корней Φ. Ввиду теоремы Вейля о полной приводимости ведущую роль в конечномерном случае играют неприводмые модули.

Мы уже показывали, что для линейной алгебры Ли полупростые в абстрактном смысле элементы (те, для которых опрератор ad диагонализируем) являются полупростыми и в обычном смысле, то есть диагонализируемы. Так как H является максимальной торической подалгеброй (то есть состоящей из полупростых элементов), то в любом представлении алгебры L подалгебра H представляется в некотором базисе диагональными операторами.

Таким образом,

$$V = \oplus V_\lambda, \text{ где } \lambda \in H^*,$$

при этом

$$V_\lambda = \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda(h)v \text{ для всех } h \in H\}.$$

Подпространство V_λ корректно определено и для произвольного (не конечномерного) пространства V. Если $V_\lambda \neq 0$, то мы называем его *весовым подпространством*, а λ — *весом* пространства V.

Пример 2. **1.** Превратив саму алгебру L в L-модуль посредством присоединенного представления, мы видим, что весами являются корни $\alpha \in \Phi$ (с весовыми пространствами L_α размерности 1), а также 0 (с весовым подпространством H размерности l).

2. Если $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, то линейная функция λ на H полностью определяется своим значением $\lambda(h)$ на базисном векторе h; получается, что мы уже использовали веса, когда в прошлом семестре проходили неприводимые представления этой алгебры.

Если $\dim V = \infty$, то нет никакой уверенности, что V окажется суммой своих весовых пространств. Тем не менее, сумма V' всех весовых пространств V_λ — прямая; по существу это доказывается так же, как линейная независимость собственных векторов линейного преобразования, отвечающих различным собственным значениям. При этом V' является L-подмодулем в V, ввиду того, что L_α, $\alpha \in \Phi$, переставляет весовые подпространства. А именно, если $x \in L_\alpha$, $v \in V_\lambda$, $h \in H$, то

$$h \cdot x \cdot v = x \cdot h \cdot v + [h, x] \cdot v = (\lambda(h) + \alpha(h)) x \cdot v,$$

то есть L_α отображает V_λ в $V_{\lambda+\alpha}$.

В итоге установлена

Лемма 6. *Пусть V — произвольный L-модуль. Тогда*

(a) L_α *отображает* V_λ *в* $V_{\lambda+\alpha}$ $(\lambda \in H^*, \alpha \in \Phi)$;

(b) *сумма* $V' = \bigoplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda$ *является прямой, и* V' *является* L*-подмодулем в* V;

(c) *если* $\dim V < \infty$, *то* $V = V'$.

8.2 Стандартные циклические модули

По определению *старший вектор* (веса λ) в L-модуле V — это ненулевой вектор $v^+ \in V_\lambda$, который аннулируется всеми подпространствами L_α (для $\alpha > 0$ или, что равносильно, для $\alpha \in \Delta$). Разумеется, это понятие зависит от выбора базиса Δ. Например, если алгебра L проста, а β — старший корень в Φ относительно Δ, то любой ненулевой элемент в L_β является старшим вектором присоединенного представления алгебры L; очевидно, что других старших векторов в этом случае нет. Если $\dim V = \infty$, то старший вектор не обязательно существует. Напротив, если $\dim V < \infty$, то борелевская подалгебра $B(\Delta) = H + \bigoplus\limits_{\alpha>0} L_\alpha$ имеет общий собственный вектор (так как она разрешима, благодаря теореме Ли), который аннулируется всеми подпространствами L_α, $\alpha > 0$ (так как все соответствующие операторы нильпотентны и обнуляют любые собственные векторы). Он и является старшим вектором в указанном смысле.

При изучении конечномерных неприводимых L-модулей полезно рассмотреть вначале более широкий класс L-модулей, порожденных старшим вектором. Если $V = \mathcal{U}(L) \cdot v^+$ для старшего вектора v^+ (веса λ), то будем кратко говорить, что модуль V является *стандартным циклическим* (*веса* λ) и называть λ *старшим весом* для V.

Строение такого модуля легко описать. Фиксируем ненулевой элемент $x_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha > 0$, и возьмем (единственный) элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, для которого $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Нам потребуется такой частичный порядок, что $\lambda > \mu$ если и только если $\lambda - \mu$ является суммой положительных корней ($\lambda, \mu \in H^*$). Утверждение (b) следующей теоремы оправдывает название “старший вес” для λ.

Теорема 19. *Пусть V — стандартный циклический L-модуль со старшим вектором $v^+ \in V_\lambda$. Пусть при этом $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Тогда*

(a) *V порождается векторами $y_{\beta_1}^{i_1} \ldots y_{\beta_m}^{i_m} \cdot v^+$, $i_j \in \mathbb{Z}^+$; как следствие, V является прямой суммой своих весовых подпространств;*

(b) *веса в V имеют вид $\mu = \lambda - \sum\limits_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$, $k_i \in \mathbb{Z}^+$, то есть удовлетворяют условию $\mu < \lambda$;*

(c) $\dim V_\lambda = 1$, *и если $\mu \in H^*$, то* $\dim V_\mu < \infty$;

(d) *каждый подмодуль в V является прямой суммой своих весовых подпространств;*

(e) *L-модуль V неразложим, имеет единственный максимальный (собственный) подмодуль и соответственно единственный неприводимый фактормодуль;*

(f) *каждый ненулевой гомоморфный образ модуля V также является стандартным циклическим модулем веса λ.*

Доказательство. Мы имеем $L = N^- + B$, где $N- = \bigoplus\limits_{\alpha<0} L_\alpha$ и $B = B(\Delta)$. Из теоремы ПБВ (два последних следствия) вытекает, что $\mathcal{U}(L) \cdot v^+ = \mathcal{U}(N^-)\mathcal{U}(B) \cdot v^+ = \mathcal{U}(N-) \cdot \mathbb{F}v^+$ (поскольку v^+ — общий собственный вектор для B). Алгебра $\mathcal{U}(N^-)$ имеет базис, состоящий из мономов $y_{\beta_1}^{i_1} \ldots y_{\beta_m}^{i_m}$, откуда следует утверждение (a).

Вектор

$$y_{\beta_1}^{i_1} \ldots y_{\beta_m}^{i_m} \cdot v^+ \qquad (*)$$

имеет вес $\lambda - \sum_j i_j \beta_i$. Выразив каждый корень β_j как неотрицательную $\mathbb{Z}$-линейную комбинацию простых корней, получаем утверждение (b).

Очевидно, что имеется лишь конечное число векторов вида $(*)$, для которых $\sum i_j \beta_j$ равняется заданному вектору $\sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$. Ввиду утверждения (a) они порождают весовое подпространство V_μ, где $\mu = \lambda - \sum k_i \alpha_i$. при этом единственный вектор вида $(*)$ с весом $\mu = \lambda$ — это сам v^+, откуда следует утверждение (c).

Чтобы доказать утверждение (d), возьмем подмодуль W в V и запишем $w \in W$ как сумму векторов $v_i \in V_{\mu_i}$, принадлежащих различным весам. Нужно показать, что все векторы v_i лежат в W. В противном случае возьмем соответствующий вектор $w = v_1 + \cdots + v_n$ с минимальным значением n, $n > 1$. Тогда векторы v_i не принадлежат подмодулю W. Найдем элемент $h \in H$, для которого $\mu_1(h) \neq \mu_2(h)$. Тогда вектор $h \cdot w = \sum \mu_i(h) v_i$ лежит в W, так же как и

$$(h - \mu_1(h) \cdot 1) \cdot w = (\mu_2(h) - \mu_1(h)) v_2 + \cdots + (\mu_n(h) - \mu_1(h)) v_n \neq 0.$$

Из выбора элемента w вытекает, что $v_2 \in W$, что невозможно.

Мы заключаем из утверждений (c) и (d), что каждый собственный подмодуль в V лежит в сумме весовых подпространств, отличных от V_λ, так что сумма W всех таких подмодулей по-прежнему не совпадает с V. Как следствие, V имеет единственный максимальный подмодуль и единственный неприводимый фактормодуль. Далее, V не может быть прямой суммой двух собственных подмодулей, так как оба они лежат в W. Этим доказано утверждение (e).

Наконец, утверждение (f) очевидно. □

Следствие 8. *Пусть L-модуль V таков, как в условии теоремы, и при этом неприводим. Тогда v^+ — единственный старший вектор в V с точностью до ненулевого скалярного множителя.*

Доказательство. Если w^+ — другой старший вектор, то $\mathcal{U}(L) \cdot w^+ = V$ (поскольку модуль V неприводим). Следовательно, теорема одинаково применима и к v^+, и к w^+. Если вектор w^+ имеет вес λ', то $\lambda' < \lambda$ и $\lambda < \lambda'$ (ввиду утверждения (b)), а значит $\lambda = \lambda'$. Но тогда (согласно утверждению (c)) вектор w^+ пропорционален v^+. □

8.3 Теоремы существования и единственности

Мы хотим показать, что для каждого $\lambda \in H^*$ существует единственный (с точностью до изоморфизма) неприводимый стандартный циклический L-модуль старшего веса λ, который может быть и бесконечномерным. Доказать единственность нетрудно.

Теорема 20. *Пусть V, W — стандартные циклические модули старшего веса λ. Если V и W неприводимы, то они изоморфны.*

Доказательство. Образуем L-модуль $X = V \oplus W$. Если v^+, w^+ — старшие векторы веса λ в V, W соответственно, то пусть $x^+ = (v^+, w^+) \in X$, так что x^+ — старший вектор веса λ. Порожденный им (стандартный циклический) L-подмодуль в X обозначим Y , и пусть $p : Y \to V$, $p' : Y \to W$ — отображения, индуцированные проектированием модуля X на первое и второе слагаемое. Очевидно, что p, p' являются гомоморфизмами L- модулей. Поскольку $p(x^+) = v^+$, $p'(x^+) = w^+$, ясно также, что $\Im p = V$, $\Im p' = W$. Согласно пункту (e) предыдущей теоремы V и W изоморфны как неприводимые фактормодули стандартного циклического модуля. $\square$

Теперь рассмотрим проблему существования. Оставляя в стороне все связанное с неприводимостью, приходим к следующему вопросу: как вообще можно построить стандартный циклический модуль $Z(\lambda)$? Усматриваются два пути решения, которые приведут к одинаковым результатам.

Начнем с одномерного векторного пространства D_λ с базисом v^+ и определим действие алгебры B $(= B(\Delta))$ на D_λ по правилу

$$\left(h + \sum_{\alpha>0} x_\alpha\right) \cdot v^+ = h \cdot v^+ = \lambda(h)v^+$$

для фиксированного $\lambda \in H^*$. Можно легко убедиться (упражнение), что эта операция превращает D_λ в B-модуль. Разумеется, D_λ точно так же является и $\mathcal{U}(L)$-модулем, так что можно образовать тензорное произведение

$$Z(\lambda) = \mathcal{U}(L) \otimes_{\mathcal{U}(B)} D_\lambda,$$

которое становится модулем над алгеброй $\mathcal{U}(L)$ при ее естественном (левом) действии.

Мы утверждаем, что модуль $Z(\lambda)$ — стандартный циклический веса λ. С одной стороны, ясно, что $1 \otimes v^+$ порождает $Z(\lambda)$. с другой стороны, этот вектор ненулевой, так как $\mathcal{U}(L)$ является свободным $\mathcal{U}(B)$-модулем с базисом, состоящим из 1 и всевозможных мономов $y_{\beta_1}^{i_1} \dots y_{\beta_m}^{i_m}$. Следовательно, $1 \otimes v^+$ — старший вектор веса λ. Для краткости обозначим его v^+.

Эта конструкция делает также очевидным, что если $N^- = \bigoplus_{\alpha<0} L_\alpha$, то $Z(\lambda)$ как $\mathcal{U}(N^-)$-модуль изоморфен $\mathcal{U}(N^-)$. Точнее,

$$\mathcal{U}(L) \cong \mathcal{U}(N^-) \otimes \mathcal{U}(B) \text{ (теорема ПБВ)},$$

так что

$$Z(\lambda) \cong \mathcal{U}(N^-) \otimes \mathbb{F} \text{ (как левые } \mathcal{U}(N^-)\text{-модули)}.$$

Можно задать $Z(\lambda)$ образующими и соотношениями. Для этого возьмем ненулевые элементы $x_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha > 0$, и пусть $I(\lambda)$ — левый идеал в $\mathcal{U}(L)$, порожденный всеми x_α, $\alpha > 0$, вместе со всеми $h_\alpha - \lambda(h_\alpha) \cdot 1$, $\alpha \in \Phi$. Заметим, что эти образующие идеала $I(\lambda)$ аннулируют старший вектор v^+ модуля $Z(\lambda)$. Значит, это верно и для всего $I(\lambda)$, и существует канонический гомоморфизм левых $\mathcal{U}(L)$-модулей $\mathcal{U}(L)/I(\lambda) \to Z(\lambda)$, который отображает смежный класс единицы в старший вектор v^+. Снова используя ПБВ-базис в $\mathcal{U}(L)$, мы видим, что это отображение переводит смежные классы алгебры $\mathcal{U}(B)$ в одномерный модуль $\mathbb{F}v^+$, откуда следует, что оно взаимно однозначно. Иначе говоря, $\mathcal{U}(L)$-модули $Z(\lambda)$ и $\mathcal{U}(L)/I(\lambda)$ изоморфны.

Теорема 21. *Пусть $\lambda \in H^*$. Тогда существует неприводимый стандартный циклический модуль $V(\lambda)$ веса λ.*

Доказательство. Модуль $Z(\lambda)$ (построенный выше) является стандартным циклическим веса λ и имеет единственный максимальный подмодуль $Y(\lambda)$. Следовательно, модуль $V(\lambda) = Z(\lambda)/Y(\lambda)$ является неприводимым и циклическим веса λ. □

Остаются две проблемы: 1) определить, какие из модулей $V(\lambda)$ конечномерны; 2) для таких $V(\lambda)$ точно определить, какие в них встречаются веса.

8.4 Задачи

1. Пусть неприводимый L-модуль V имеет хотя бы одно (ненулевое) весовое подпространство. Докажите, что V является прямой суммой своих весовых подпространств.

2. Опишите веса и старшие векторы естественных представлений линейных алгебр типов $\mathbf{A}_l$ и $\mathbf{B}_l$.

3. Старший вектор веса w^+ веса μ в $Z(\lambda)$ индуцирует гомоморфизм L-модулей $\varphi : Z(\mu) \to Z(\lambda)$, образ которого им порождается. Докажите, что гомоморфизм φ инъективен.

9 Лекция 9. Теория представлений. Часть 2

9.1 Абстрактная теория весов

Пусть Λ — множество всех таких элементов $\lambda \in \mathbb{R}^l$, что $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in \Phi$. Назовем его элементы (абстрактными) весами. Поскольку

$$\langle \lambda, \alpha \rangle = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

линейно зависит от λ, множество Λ является подгруппой в $\mathbb{R}^l$, содержащей Φ. Обозначим через Λ_r решетку корней (то есть подгруппу в Λ, которую порождает система Φ). Она является решеткой в $\mathbb{R}^l$ в стандартном смысле: это целочисленная линейная оболочка некоторого $\mathbb{R}$-базиса в $\mathbb{R}^l$ (а именно, любого множества простых корней).

Зафиксируем базис $\Delta \subset \Phi$ и назовем вес $\lambda \in \Lambda$ *доминантным*, если все числа $\langle \lambda, \alpha \rangle$, $\alpha \in \Delta$, неотрицательны, и *строго доминантным*, если они положительны. Пусть Λ^+ — множество всех доминантных весов. Это означает (см. прошлый семестр), что Λ^+ — множество всех весов, лежащих в замыкании камеры Вейля, порожденной простыми корнями.

Пусть $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Тогда векторы $\frac{2\alpha_j}{(\alpha_j, \alpha_j)}$ также образуют базис в $\mathbb{R}^l$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ — двойственный базис (относительно скалярного произведения в $\mathbb{R}^l$):

$$\frac{2(\lambda_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij}.$$

Поскольку все значения $\langle \lambda_i, \alpha \rangle$, $\alpha \in \Delta$, — неотрицательные целые, то λ_i являются доминантными весами. Назовем из фундаментальными доминантными весами (относительно Δ).

Заметим, что $\sigma_i(\lambda_j) = \lambda_j - \delta_{ij}\alpha_i$.Для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}^l$ положим $m_i = \langle \lambda, \alpha_i \rangle$. Тогда

$$0 = \langle \lambda - \sum m_i \lambda_i, \alpha \rangle$$

для любого простого корня α, а значит

$$(\lambda - \sum m_i \lambda_i, \alpha) = 0 \text{ и } \lambda = \sum m_i \lambda_i.$$

Следовательно, Λ является решеткой с базисом $\{\lambda_i \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$, причем $\lambda \in \Lambda^+$ если и только если все m_i неотрицательны.

Из элементарных свойств решеток следует, что Λ/Λ_r — конечная группа (она называется фундаментальной группой системы Φ). Это можно непосредственно увидеть следующим образом. Пусть $\alpha_i = \sum_j m_{ij}\lambda_j$, $m_{ij} \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle = \sum_j m_{ij} \langle \lambda_j, \alpha_k \rangle = m_{ik}.$$

Другими словами, матрица Картана описывает преобразование базиса. Чтобы выразить λ_j через α_i, надо лишь обратить матрицу Картана; определитель последней — целое число, и он измеряет индекс подгруппы Λ_r в Λ. Например, для типа $\mathbf{A}_1$ имеем $\alpha_1 = 2\lambda_1$. Для типа $\mathbf{A}_2$ матрица Картана равна

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\alpha_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2 \text{ и } \alpha_2 = -\lambda_1 + 2\lambda_2.$$

После обращения получаем

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2) \text{ и } \lambda_2 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Вычисляя определители матриц Картана, получаем следующий набор порядков фундаментальных групп Λ/Λ_r для неприводимых систем:

$$\mathbf{A}_l : l+1; \quad \mathbf{B}_l, \mathbf{C}_l, \mathbf{E}_7 : 2; \quad \mathbf{D}_l : 4; \quad \mathbf{E}_6 : 3; \quad \mathbf{E}_8, \mathbf{F}_4, \mathbf{G}_2 : 1.$$

После некоторой дополнительной работы удается явно выразить λ_i через α_j (например, в книге Хафриса есть на стр. 88 таблица с явным выражением).

9.2 Доминантные веса

Группа Вейля W системы Φ сохраняет скалярное произведение в нашем евклидовом пространстве и поэтому оставляет множество Λ инвариантным. На самом деле мы уже сделали даже более точное наблюдение $\sigma_i(\lambda_j) = \lambda_j - \delta_{ij}\alpha_i$.

Лемма 7. *Если $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_t$ — выражение элемента $\sigma \in W$ через отражения, отвечающие простым корням, причем t — минимально возможное, то $\sigma(\alpha_t) < 0$.*

Доказательство. Положим $\beta_i := \sigma_{i+1} \dots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$, $0 \leqslant i \leqslant t-2$, $\beta_{t-1} = \alpha_t$.

Предположим, что $\beta_0 < 0$.

Так как $\beta_0 < 0$, $\beta_{t-1} > 0$, то можно найти наименьший индекс s, для которого $\beta_s > 0$. Тогда $\sigma_{\alpha_s}(\beta_s) = \beta_{s-1} < 0$, а так как простое отражение переставляет местами все положительные корни, кроме “своего”, то $\beta_s = \alpha_s$. Так как $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$, то $\sigma_s = (\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{t-1} \dots \sigma_{s+1})$, откуда

$$\begin{aligned} \sigma_1 \dots \sigma_{s-1}\sigma_s\sigma_{s+1} \dots \sigma_t = \sigma_1 \dots \sigma_{s-1} \cdot (\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{t-1} \dots \sigma_{s+1}) \cdot \sigma_{s+1} \dots \sigma_t = \\ = \sigma_1 \dots \sigma_{s-1} \cdot \sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1}, \end{aligned}$$

то есть есть исходная длина элемента σ не была самой короткой. Противоречие.

Таким образом, $\beta_0 > 0$, то есть $\sigma_1 \dots \sigma_{t-1}(\alpha_t) > 0$, откуда $\sigma(\alpha_t) = \sigma_1 \dots \sigma_{t-1} \cdot \sigma_t(\alpha_t) = \sigma_1 \dots \sigma_{t-1}(-\alpha_t) < 0$. □

Определение 7. Если элемент $\sigma \in W$ выражен как $\sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$, $\alpha_i \in \Delta$, с минимальным t, то назовем такое выражение *приведенным* и положим $l(\sigma) = t$: это *длина* элемента σ относительно базиса Δ. По определению $l(1) = 0$. Пусть $n(\sigma)$ — количество положительных корней α, для которых $\sigma(\alpha) \in \Phi^-$.

Лемма 8. *Для всех $\sigma \in W$ справедливо равенство $l(\sigma) = n(\sigma)$.*

Доказательство. Проведем индукцию по $l(\sigma)$. Случай $l(\sigma) = 0$ тривиален.

Пусть лемма верна для всех таких $\tau \in W$, что $l(\tau) < l(\sigma)$. Запишем σ. в приведенной форме как $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$ и положим $\alpha = \alpha_t$. По предыдущей лемме $\sigma(\alpha) < 0$. Так как простое отражение переставляет положительные корни, отличные от "своего", то справедливо равенство $n(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$. С другой стороны, $l(\sigma\sigma_\alpha) = l(\sigma) - 1$, и по предположению индукции $l(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma\sigma_\alpha)$. Соединив эти утверждения, получаем, $l(\sigma) = n(\sigma)$. $\square$

Теперь мы можем утверждать следующее:

Лемма 9. *Каждый вес эквивалентен относительно W ровно одному доминантному весу. Если вес λ доминантен, то $\sigma\lambda < \lambda$ для всех $\sigma \in W$, а если он строго доминантен, то $\sigma\lambda = \lambda$ только при $\sigma = E$.*

Доказательство. Сначала докажем, что каждый вес эквивалентен какому-то доминантному весу.

Если вес не доминантен, то он имеет вид $\mu = \sum\limits_{i=1}^{l} m_i\lambda_i$, где некоторое $m_i < 0$. Тогда $\sigma_i(\mu) = \mu + |m_i|\alpha_i$. Значит, каждый вес, не являющийся доминантным, с помощью действия некоторого элемента группы Вейля, можно (строго) увеличить относительно введенного нами порядка $<$. Так как группа Вейля конечна, мы не можем бесконечно увеличивать наш вес, то есть когда-то придем к доминантному весу.

Теперь покажем, что два доминантных веса не могут быть сопряжены относительно группы Вейля.

Действительно, пусть $\lambda, \mu \in \Lambda^+$, $\sigma(\lambda) = \mu$ для некоторого $\sigma \in W$. Докажем, что тогда σ является произведением простых отражений, оставляющих на месте λ (откуда будет следовать $\lambda = \mu$).

Для этого проведем индукцию по $l(\sigma)$. Случай $l(\sigma) = 0$ очевиден. Пусть $l(\sigma) > 0$. Тогда по предыдущей лемме σ должно переводить некоторый положительный корень в отрицательный; значит, σ не может перевести все простые корни в положительные. Пусть $\sigma(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in \Delta$. Тогда

$$0 \geqslant (\mu, \sigma\alpha) = (\sigma^{-1}\mu, \alpha) = (\lambda, \alpha) \geqslant 0,$$

так как $\lambda, \mu \in \Lambda^+$. Значит, $(\lambda, \alpha) = 0$, откуда $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda$, следовательно, $(\sigma\sigma_\alpha)\lambda = \mu$. Тогда по предыдущей лемме $l(\sigma\sigma_\alpha) = l(\sigma) - 1$, поэтому можно применить предположение индукции.

Таким образом, мы доказали, что каждый вес эквивалентен относительно W ровно одному доминантному весу.

Теперь пусть $\lambda \in \Lambda^+$, нам нужно доказать, что $\sigma\lambda < \lambda$ для всех $\sigma \in W$. Также докажем это по индукции по $l(\sigma)$. Для $l(\sigma) = 0$ это очевидно. Пусть утверждение выполнено для всех τ с $l(\tau) < l(\sigma) = t$, $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$.

Пусть $\sigma' = \sigma \cdot \sigma_{\alpha_t}$. Как мы уже знаем, $\sigma'(\alpha_t) > 0$.

Пусть $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{l} m_i\lambda_i$, $m_i \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\sigma(\lambda) = \sigma'\sigma_{\alpha_t}(\lambda) = \sigma'(\lambda - m_t\alpha_t) = \sigma'(\lambda) - m_t\sigma'(\alpha_t)$.

Таким образом,

$$\lambda - \sigma(\lambda) = (\lambda - \sigma'(\lambda) + m_t\sigma'(\alpha_t),$$

где первое слагаемое есть неотрицательная линейная комбинация простых корней по предположению индукции, а второе, так как $m_t \geqslant 0$ и $\sigma'(\alpha_t) \in \Phi^+$.

Наконец, последнее утверждение леммы оставим в качестве упражнения. $\square$

Как подмножество в $\mathbb{R}^l$, Λ частично упорядочивается отношением $\lambda \geqslant \mu$, означающим, что $\lambda - \mu$ является суммой положительных корней. К сожалению, это упорядочение не очень тесно связано с понятием доминантности; легко построить пример, когда корень μ доминантен, $\mu \leqslant \lambda$, но корень λ не доминантен (упражнение). Однако небольшая связь есть.

Лемма 10. *Пусть $\lambda \in \Lambda^+$. Тогда количество доминантных весов $\mu \leqslant \lambda$ конечно.*

Доказательство. Поскольку $\lambda + \mu \in \Lambda^+$, а $\lambda - \mu$ является сумой положительных корней, то

$$0 \leqslant (\lambda + \mu, \lambda - \mu) = (\lambda, \lambda) - (\mu, \mu).$$

Как следствие, μ лежит в компактном множестве

$$\{x \in \mathbb{R}^l \mid (x, x) \leqslant (\lambda, \lambda)\},$$

пересечение которого с дискретным множеством Λ^+ конечно. $\square$

9.3 Вес δ

Введем вес

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha,$$

Докажем, что δ и правда является абстрактным весом. Если рассмотреть $\sigma_i(\delta)$, то так как простое отражение переставляет все положительные корни, кроме α_i, то

$$\delta - \langle\delta, \alpha_i\rangle\alpha_i = \sigma_i(\delta) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0, \alpha\neq\alpha_i} \alpha + \frac{1}{2}\sigma_i(\alpha_i) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0, \alpha\neq\alpha_i} \alpha - \frac{1}{2}\alpha_i = \delta - \alpha_i,$$

откуда $\langle\delta, \alpha_i\rangle = 1$ для всех $\alpha_i \in \Delta$.

Понятно, что δ может не принадлежать решетке корней (например, тип $\mathbf{A}_1$), но всегда лежит в Λ.

Лемма 11. *Выполняется равенство $\delta = \sum\limits_{j=1}^{l} \lambda_j$, то есть δ является стого доминантным весом.*

Доказательство. Равенство следует из того, что

$$\delta = \sum_i \langle \delta, \alpha_i \rangle \lambda_i \text{ и } \langle \delta, \alpha_i \rangle = 1.$$

□

Лемма 12. *Пусть $\mu \in \Lambda^+$, $\nu = \sigma^{-1}\mu$, $\sigma \in W$. Тогда*

$$(\nu + \delta, \nu + \delta) \leqslant (\mu + \delta, \mu + \delta),$$

причем равенство достигается только при $\nu = \mu$.

Доказательство. Мы имеем:

$$(\nu + \delta, \nu + \delta) = (\sigma(\nu + \delta), \sigma(\nu + \delta)) = (\mu + \sigma\delta, \mu + \sigma\delta) = (\mu + \delta, \mu + \delta) - 2(\mu, \delta - \sigma\delta).$$

Поскольку $\mu \in \Lambda^+$, а $\delta - \sigma\delta$ является суммой положительных корней, правая часть не преводсходит $(\mu + \delta, \mu + \delta)$, причем равенство достигается только при $(\mu, \delta - \sigma\delta) = 0$. Тогда $(\mu, \delta) = (\mu, \sigma\delta) = (\nu, \delta)$ и $(\mu - \nu, \delta) = 0$. Но $\mu - \nu$ является суммой положительных корней, а вес δ строго доминантен, поэтому $\mu = \nu$. □

9.4 Насыщенные множества весов

Особую роль в теории представлений имеют некоторые конечные множества весов, инвариантные относительно W. Назовем подмножество Π в Λ *насыщенным*, если для всех $\lambda \in \Pi$, $\alpha \in \Phi$ и для всех i между нулем и $\langle \lambda, \alpha \rangle$ вес $\lambda - i\alpha$ также лежит в Π.

Прежде всего заметим, что каждое насыщенное множество автоматически инвариантно относительно W, поскольку $\sigma_\alpha \lambda = \lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle \alpha$, а W порождается отражениями. Мы говорим, что насыщенное множество Π имеет *старший вес* λ ($\lambda \in \Lambda^+$), если $\lambda \in \Pi$ и $\mu < \lambda$ при всех $\mu \in \Pi$.

Пример 3. (1) Множество, состоящее только из нуля, является насыщенным и имеет старший вес ноль; (2) множество Φ всех корней полупростой алгебры Ли с добавлением нуля тоже является насыщенным.

В случае неприводимой системы корней, как мы знаем из прошлого семестра, имеется единственный максимальный корень, так что этот корень является старшим весом для Π.

Лемма 13. *Насыщенное множество весов, имеющее старший вес λ, обязательно конечно.*

Доказательство. Следует из леммы 10. □

Лемма 14. *Пусть множество Π насыщенно и имеет старший вес λ. Если $\mu \in \Lambda^+$ и $\mu < \lambda$, то $\mu \in \Pi$.*

Доказательство. Пусть

$$\mu' = \mu + \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha \in \Pi \quad (k_\alpha \in \mathbb{Z}^+)$$

(мы не предполагаем, что вес μ' доминантен).

Покажем, что можно уменьшить одно из значений k_α на единицу, оставаясь в множестве Π (отсюда в конечном счете вытекает, что $\mu \in \Pi$). Разумеется, мы начнем с того, что вес λ сам имеет вид такого μ'. Пусть теперь $\mu \neq \mu'$, так что некоторое значение k_α положительно. Из неравенства

$$\left(\sum_\alpha k_\alpha \alpha, \sum_\alpha k_\alpha \alpha\right) > 0$$

получаем, что

$$\left(\sum_\alpha k_\alpha \alpha, \beta\right) > 0$$

для некоторого β, удовлетворяющего условию $\beta \in \Delta$ с $k_\beta > 0$. Как следствие, величина $\left\langle \sum\limits_\alpha k_\alpha \alpha, \beta \right\rangle$ положительна. Так как вес μ доминантен, значение $\langle \mu, \beta \rangle$ неотрицательно, и потому $\langle \mu', \beta \rangle > 0$. В силу определения насыщенного множества теперь можно вычесть β из μ', оставаясь в множестве Π. Тем самым k_β уменьшается на единицу. $\square$

Из этой леммы очень четко вырисовывается строение насыщенного множества Π со старшим весом λ: Π состоит из всех доминантных весов, меньших либо равных λ в смысле частичного упорядочения, а также эквивалентных им относительно W. В частности, для данного $\lambda \in \Lambda^+$ существует не более одного такого Π. Обратно, для данного $\lambda \in \Lambda^+$ можно определить Π просто как множество доминантных весов, меньших либо равных λ, вместе с эквивалентными им относительно W. Из инвариантности множества Π при действии группы W можно вывести, что оно насыщенно и его старший вес равен λ.

9.5 Необходимое условие конечномерности

Пусть V — конечномерный неприводимый L-модуль. Тогда V имеет хотя бы один старший вектор (однозначно определенного веса λ), который порождает весь модуль V (ввиду неприводимости). Следовательно, модуль V изоморфен $V(\lambda)$.

Если α_i — простой корень, то пусть S_i — соответствующий экземпляр алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ в L. Тогда V является также (конечномерным) модулем над S_i, а старший вектор относительно L будет старшим и относительно S_i. В частности, имеется старший вектор веса λ; его вес относительно картановской подалгебры $H_i \subset S_i$ полностью определется скаляром $\lambda(h_i)$. Но тогда из описания представлений алгебры S_i (прошлый семестр) следует, что $\lambda(h_i)$ — неотрицательное целое число. Доказана

Теорема 22. *Если V — конечномерный неприводимый L-модуль со старшим весом Λ, то $\lambda(h_i)$ — неотрицательное целое число* $(1 \leqslant i \leqslant l)$.

Если V — любой конечномерный L-модуль, μ — его вес, то $\mu(h_i) = \langle \mu, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ при $1 \leqslant i \leqslant l$. Поэтому веса конечномерного модуля обязательно являются весами в смысле только что развитой абстрактной теории, а старший вес λ оказывается доминантным,

Чтобы избежать недоразумений, мы будем и далее называть весами все элементы из H^*, а линейную функцию λ, для которой все $\lambda(h_i)$ целые, будем называть *целочисленной*.

Если все $\lambda(h_i)$ — неотрицательные целые числа, то назовем функцию λ *доминантной целочисленной*. Как следствие, множество Λ всех целочисленных линейных функций является решеткой в H^* и содержит решетку корней.

Если V — некоторый L-модуль, то $\Pi(V)$ будет обозначать множество всех его весов. В случае $V = V(\lambda)$ будем писать $\Pi(\lambda)$.

9.6 Задачи

1. Докажите последнее утверждение леммы 9.

2. Пусть $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_m$ — разложение системы корней Φ на неприводимые компоненты, причем $\Delta = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$. Докажите, что Λ распадается в прямую сумму $\Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_m$; что можно сказать о Λ^+?

3. Покажите не примере (скажем, для $\mathbf{A}_2$), что возможен случай $\lambda \notin \Lambda^+$, $\alpha \in \Delta$, $\lambda - \alpha \in \Lambda^+$.

4. Докажите, что каждое подмножество из Λ содержится в единственном минимальном насыщенном множестве, конечном, если данное подмножество конечно.

10 Лекция 10. Элементарные присоединенные группы Шевалле

10.1 Достаточное условие конечномерности модуля

Теорема 23. *Если $\lambda \in H^*$ — доминантный целочисленный вес, то неприводимый L-модуль $V = V(\lambda)$ конечномерен и группа W действует на множестве его весов $\Pi(\lambda)$, причем $\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$ при $\sigma \in W$.*

Следствие 9. *Отображение $\lambda \mapsto V(\lambda)$ индуцирует взаимно однозначное соответствие между Λ^+ и классами изоморфных конечномерных неприводимых L-модулей.*

Доказательство. Вытекает из предыдущих теорем. □

Доказательство теоремы. Будет удобно начать с некоторых сведений о коммутаторах в $\mathcal{U}(L)$. Фиксируем в L стандартные образующие $\{x_i, y_i\}$.

Лемма 15. *В $\mathcal{U}(L)$ выполняются следующие тождества при $k \geqslant 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$:*
(a) $[x_j, y_i^{k+1}] = 0$ *при* $i \neq j$;
(b) $[h_j, y_i^{k+1}] = -(k+1)\alpha_i(h_j)y_i^{k+1}$;
(c) $[x_i, y_i^{k+1}] = -(k+1)y_i^k(k \cdot 1 - h_i)$.

Доказательство. Тождество (a) вытекает из того, что $\alpha_j - \alpha_i$ при $i \neq j$ не является корнем.

Тождество (b) докажем индукцией по k. В случае $k = 0$ имеем $[h_j, y_i] = -\alpha_i(h_j)y_i$.

В общем случае левая часть равна

$$h_j y_i^{k+1} - y_i^{k+1} h_j = (h_j y_i^k - y_i^k h_j) y_i + y_i^k (h_j y_i - y_i h_j) = \\ = -k\alpha_i(h_j) y_i^k y_i + y_i^k(-\alpha_i(h_j) y_i) = -(k+1)\alpha_i(h_j) y_i^{k+1}$$

с учетом индуктивного предположения.

Докажем тождество (c). Мы имеем

$$[x_i, y_i^{k+1}] = x_i y_i^{k+1} - y_i^{k+1} x_i = [x_i, y_i] y_i^k + y_i [x_i, y_i^k] = h_i y_i^k + y_i [x_i, y_i^k].$$

Теперь применим индукцию по k и формулу (b). □

Доказательство теоремы разобьем на шаги. Его идея состоит в том, чтобы показать, что группа W действует транзитивно на множестве весов модуля V, и потому это множество конечно. Для удобства обозначим представление алгебры L, соответствующее модулю V, через $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$. Фиксируем старший вектор v^+ в V (веса λ) и множество $m_i = \lambda(h_i)$, $1 \leqslant i \leqslant l$. По предположению m_i — неотрицательные целые числа.

1. *Справедливо равенство* $y_i^{m_i+1} \cdot v^+ = 0$. Пусть $w = y_i^{m_i+1} \cdot v^+$. Согласно утверждению (a) из леммы, $x_j \cdot w = 0$ при $i \neq j$. С другой стороны, ввиду утверждений (b) и (c) мы имеем

$$x_i y_i^{m_1+1} \cdot v^+ = y_i^{m_i+1} x_i \cdot v^+ - (m_i+1) y_i^{m_i} \cdot (m_i v^+ - m_i v^+) = 0,$$

то есть $x_i \cdot w = 0$. При $w \neq 0$ в V нашелся бы старший вектор веса $\lambda - (m_i+1)\alpha_i \neq \lambda$, вопреки следствию с прошлой лекции о том, что для неприводимого циклического модуля старший вектор определяется с точностью до ненулевого скалярного множителя.

2.. *При $1 \leqslant i \leqslant l$ модуль V содержит ненулевой конечномерный S_i-модуль.* Подпространство, натянутое на v^+, $y_i \cdot v^+$, $y_i^2 \cdot v^+$, $\ldots$, $y_i^{m_i} \cdot v^+$, инваринантно относительно y_i согласно шагу 1. Оно также инвариантно относительно h_i, поскольку каждый из этих векторов принадлежит некоторому весовому подпространству; поэтому оно инвариантно и относительно x_i (что вытекает из утверждения (c) леммы и индукции по индексу k).

3. *Модуль V является суммой конечномерных S_i-подмодулей.* Пусть V' обозначает сумму всех таких подмодулей в V. Тогда $V' \neq 0$ согласно шагу 2. С другой стороны, пусть W — любой конечномерный S_i-подмодуль в V. Линейная оболочка всех подпространств $x_\alpha W$, $\alpha \in \Phi$, заведомо конечномерна и при этом S_i-инвариантна. Поэтому подпространство V' инвариантно относительно L, и $V' = V$ ввиду неприводимости V.

4. *При $1 \leqslant i \leqslant l$ отображения $\varphi(x_i)$ и $\varphi(y_i)$ — локально нильпотентные эндоморфизмы модуля V.* Действительно, если $v \in V$, то ввиду шага 3 v лежит конечной сумме конечномерных S_i-подмодулей (следовательно, в конечномерном S_i-подмодуле). На таком модуле $\varphi(x_i)$ и $\varphi(y_i)$ нильпотентны.

5. *Отображение $s_i = \exp\varphi(x_i)\exp\varphi(-y_i)\exp\varphi(x_i)$ корректно определено и является автоморфизмом модуля V.* Это следует из шага 4.

6. *Если μ — некоторый вес в V, то $s_i(V_\mu) = V_{\sigma_i\mu}$ (σ_i — отражение относительно α_i).* Подпространство V_μ лежит в конечномерном S_i-подмодуле V' (см. шаг 3), а $s_i|_{V'}$ совпадает с автоморфизмом, который мы уже разбирали.

7. *Множество весов $\Pi(\lambda)$ инвариантно относительно W, и $\dim_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$ ($\mu \in \Pi(\lambda)$, $\sigma \in W$).* Так как элементы $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ порождают W, это утверждение вытекает из шага 6.

8. *Множество $\Pi(\lambda)$ конечно.* Мы уже знаем конечность множества функций, W-эквивалентных всем доминантным линейным функциям $\mu < \lambda$. Но это множество включает $\Pi(\lambda)$, что видно из шага 7.

9. *Размерность модуля V конечна.* Мы знаем, что $\dim V_\mu$ конечно для всех $\mu \in \Pi(\lambda)$. Вместе с шагом 8 это доказывает наше утверждение. □

10.2 Пары корней

Мы скоро докажем, что алгебра L имеет базис, которому отвечают целочисленные структурные константы. Но сначала, имея в виду равенство $[x_\alpha, x_\beta] = c_{\alpha\beta}x_{\alpha+\beta}$, мы должны установить ряд фактов о парах корней α, β, для которых $\alpha+\beta$ также является корнем. В следующем предложении фигурирует только система корней Φ (но не алгебра L).

Предложение 10. *Пусть α, β — линейно независимые корни, причем α-серия, порожденная корнем β, имеет вид*

$$\beta - r\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + q\alpha.$$

Тогда

(a) $\langle\beta, \alpha\rangle = r - q$;

(b) *в строке встречаются корни не более двух различных длин;*

(c) *если* $\alpha+\beta\in\Phi$*, то* $r+1=\frac{q(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\beta,\beta)}$.

Доказательство. Соотношение (a) мы доказывали в прошлом семестре (поэтому оставим его в качестве упражнения).

Докажем утверждение (b): $\Phi'=(\mathbb{Z}\alpha+\mathbb{Z}\beta)\cap\Phi$ — система корней ранга 2. Если система приводима, то она принадлежит типу $\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_1$, то есть $\Phi'=\{\pm\alpha,\pm\beta\}$, и доказывать нечего. Если же она неприводима, то $\Phi'=\mathbf{A}_2,\mathbf{B}_2$ или $\mathbf{G}_2$, откуда следует наше утверждение.

Очевидно, что и утверждение (c) можно доказать, рассмотрев системы корней ранга 2. Однако имеется геометрическое рассуждение, применимое в общей ситуации.

Во-первых, из утверждения (a) вытекает, что

$$(r+1)-\frac{q(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\beta,\beta)}=q+\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}+1-\frac{q(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\beta,\beta)}=$$
$$=\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}+1-\frac{q(\alpha,\alpha)}{\beta,\beta)}-\frac{2q(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}=(\langle\beta,\alpha\rangle+1)\left(1-\frac{1(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}\right).$$

Множители последнего произведения обозначим через A,B. Нужно показать, что какой-то из них равен нулю. Ситуация не симметрична по α,β, поэтому нужно выделить два случая.

Случай 1: $(\alpha,\alpha)\geqslant(\beta,\beta)$. Тогда $|\langle\beta,\alpha\rangle|\leqslant|\langle\alpha,\beta\rangle|$. Поскольку α и β линейно независимы, то $\langle\beta,\alpha\rangle\cdot\langle\alpha,\beta\rangle=0,1,2$ или 3. Значит, по предыдущему неравенству $\langle\beta,\alpha\rangle=-1,0$ или 1. В первом случае $A=0$, что и требовалось. В противном случае $(\beta,\alpha)\geqslant0$, поэтому $(\beta+\alpha,\beta+\alpha)$ строго больше, чем β и α. Поскольку $\alpha+\beta\in\Phi$, из утверждения (b) следует, что $(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)$. Аналогично $(\beta+2\alpha,\beta+2\alpha)>(\beta+\alpha,\beta+\alpha)$, и утверждение (b) влечет условие $\beta+2\alpha\notin\Phi$, откуда $q=1$, то есть $B=0$.

Случай 2: $(\alpha,\alpha)<(\beta,\beta)$. Тогда $(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)$ или (β,β), откуда в обоих случаях мы получаем $(\alpha,\beta)<0$ (и потому $\langle\alpha,\beta\rangle<0$). Далее, $(\beta-\alpha,\beta-\alpha)>(\beta,\beta)>(\alpha,\alpha)$, поэтому $\beta-\alpha\notin\Phi$, то есть $r=0$. Как и выше, $\langle\beta,\alpha\rangle\cdot\langle\alpha,\beta\rangle=0,1,2$ или 3, однако здесь $|\langle\alpha,\beta\rangle|<|\langle\beta,\alpha\rangle|$ откуда следует, что $\rangle\alpha,\beta\rangle=-1,0$ или 1. Но мы знаем, что $\langle\alpha,\beta\rangle<0$, поэтому $\langle\alpha,\beta\rangle=-1$. Ввиду утверждения (a) мы имеем

$$q=-\langle\beta,\alpha\rangle=\frac{\langle\beta,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\beta\rangle}=\frac{(\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)}.$$

Значит, $B=0$. □

10.3 Существование базиса Шевалле

Лемма 16. *Пусть* α,β *— независимые корни. Возьмем элементы* $x_\alpha\in L_\alpha$*,* $x_{-\alpha}\in L_{-\alpha}$*, для которых* $[x_\alpha,x_{-\alpha}]=h_\alpha$*, и произвольный элемент* $x_\beta\in L_\beta$*. Тогда если* α*-серия, порожденная корнем* β*, имеет вид* $\beta-r\alpha,\dots,\beta+q\alpha$*, то* $[x_{-\alpha},[x_\alpha,x_\beta]]=q(r+1)x_\beta$.

Доказательство. Если $\alpha+\beta\notin\Phi$, то $q=0$ и $[x_\alpha,x_\beta]=0$, поэтому обе части рассматриваемого равенства равны нулю.

В общем случае можно использовать присоединенное представление алгебры S_α ($\cong\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$) на L. А именно, S_α-подмодуль в L, порожденный элементом x_β, имеет размерность

$r+q+1$ (число корней в α-серии, порожденной весом β) и старший вес $r+q$. Тогда элемент x_β является ненулевым кратным вектора v_q, и последовательное применение отображений $\operatorname{ad} x_\alpha$ и $\operatorname{ad} x_{-\alpha}$ умножает v_q (значит, и x_β) на скаляр $q(r+1)$. $\square$

Предложение 11. *Корневые векторы $x_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha \in \Phi$, можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие условия:*

(a) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$;

(b) *если $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$, $[x_\alpha, x_\beta] = c_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$, то $c_{\alpha\beta} = -c_{-\alpha,-\beta}$.*

При любом таком выборе корневых векторов скаляры $c_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$) автоматически удовлетворяют условию

(c) $c_{\alpha\beta}^2 = q(r+1)\frac{(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\beta,\beta)}$, *где $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ составляют α-серию, порожденную корнем β.*

Доказательство. Напомним, что алгебра L обладает автоморфизмом σ порядка два, отображающим L_α в $L_{-\alpha}$, $\alpha \in \Phi$, и действующим на H как умножение на -1. Для произвольного ненулевого $x_\alpha \in L_\alpha$ элемент $x_{-\alpha} = -\sigma(x_\alpha) \in L_{-\alpha}$ не равен нулю, при этом $\varkappa(x_\alpha, x_{-\alpha}) \neq 0$ ($\varkappa$ — форма Киллинга). При замене x_α на cx_α, $c \in \mathbb{F}$, это значение умножается на c^2. Поскольку поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, при подходящем выборе x_α можно получить любое заданное ненулевое значение. Возьмем $\varkappa(x_\alpha, x_{-\alpha}) = 2/(\alpha,\alpha)$. В этом случае (прошлый семестр) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ $(= 2t_\alpha/(\alpha,\alpha))$. Если для каждой пары корней $\{\alpha, -\alpha\}$ выбрать $\{x_\alpha, x_{-\alpha}\}$ таким образом, то условие (a) будет выполнено.

Пусть теперь $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$, так что $[x_\alpha, x_\beta] = c_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$ для некоторого $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{F}$. Применив к этому уравнению автоморфизм σ, получаем

$$[-x_{-\alpha}, -x_{-\beta}] = -c_{\alpha\beta} x_{-\alpha-\beta}.$$

С другой стороны,

$$[x_{-\alpha}, x_{-\beta}] = c_{-\alpha,-\beta} x_{-\alpha-\beta},$$

откуда вытекает условие (b).

Выбрав корневые векторы $\{x_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$, для которых выполняются условия (a) и (b), рассмотрим ситуацию, когда $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$ (как следствия, α и β, а тогда и t_α, t_β линейно независимы). Поскольку $t_{\alpha+\beta} = t_\alpha + t_\beta$, из условия (a) вытекает, что

$$[c_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}, c_{\alpha\beta} x_{-\alpha-\beta}] = c_{\alpha\beta}^2 h_{\alpha+\beta} = \frac{2c_{\alpha\beta}^2}{(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}(t_\alpha + t_\beta).$$

С другой стороны, ввиду условия (b) левая часть также равняется

$$\begin{aligned} -[[x_\alpha, x_\beta], [x_{-\alpha}, x_{-\beta}]] &= -[x_\alpha, [x_\beta, [x_{-\alpha}, x_{-\beta}]]] + [x_\beta, [x_\alpha, [x_{-\alpha}, x_{-\beta}]]] = \\ &= [x_\alpha, [x_\beta, [x_{-\beta}, x_{-\alpha}]]] + [x_\beta, [x_\alpha, [x_{-\alpha}, x_{-\beta}]]]. \end{aligned}$$

Пусть β-серия, порожденная корнем α, имеет вид $\alpha - r'\beta, \ldots, \alpha + q'\beta$. Тогда к каждому слагаемому можно применить предыдущую лемму (умножив α, β на -1, что не влияет на r, q, r', q'), и мы получим

$$q'(r'+1)[x_\alpha, x_{-\alpha}] + q(r+1)[x_\beta, x_{-\beta}] = \frac{2q'(r'+1)}{(\alpha,\alpha)} t_\alpha + \frac{2q(r+1)}{(\beta,\beta)} t_\beta.$$

Сопоставив эти коэффициенты с полученными выше, с учетом линейной независимости элементов t_α и t_β, получаем условие (c). $\square$

Теперь мы готовы к тому, чтобы построить *базис Шевалле* для L. По определению это любой базис $\{x_\alpha; h_i \mid \alpha \in \Phi, 1 \leqslant i \leqslant l\}$, в котором элементы x_α удовлетворяют условиям (a) и (b) предыдущего предложения и $h_i = h_{\alpha_i}$ для некоторого базиса $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ системы Φ.

Теорема 24 (Шевалле)**.** *Пусть $\{x_\alpha; h_i \mid \alpha \in \Phi, 1 \leqslant i \leqslant l\}$ — базис Шевалле в алгебре L. Тогда соответствующие структурные константы лежат в $\mathbb{Z}$. Более точно,*

(a) $[h_i, h_j] = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$;

(b) $[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha$, $1 \leqslant i \leqslant l$, $\alpha \in \Phi$;

(c) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ *является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией векторов* $h_1, \ldots, h_l$;

(d) *если α, β — независимые корни, $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ составляют α-серию, порожденную корнем β, то $x_\alpha, x_\beta] = 0$ при $q = 0$ и $[x_\alpha, x_\beta] = \pm(r+1)x_{\alpha+\beta}$ при $\alpha + \beta \in \Phi$.*

Доказательство. Утверждение (a) нам известно, утверждение (b) вытекает из $\alpha(h_i) = \langle \alpha, \alpha_i \rangle$. Что касается (c), то вспомним, что двойственные корни $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$ тоже образуют систему корней с базисом $\Delta^\vee = \{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_l^\vee\}$ (упражнение). При отождествлении H и H^* с помощью формы Киллинга элемент t_α соответствует α, а h_α соответствует $\alpha^\vee$. Поскольку каждый корень $\alpha^\vee$ является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией элементов из $\Delta^\vee$, каждый элемент h_α является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией элементов $h_1, \ldots, h_l$. Наконец, утверждение (d) вытекает из утверждения (c) предыдущего предложения в сочетании с утверждением (c) предложения 10. $\square$

Может показаться странным, что в определении базиса Шевалле требуется выполнение равенства $c_{\alpha\beta} = -c_{-\alpha,-\beta}$, а не $c_{\alpha\beta} = c_{-\alpha,-\beta}$. Однако эта ассиметрия неизбежна.

В самом деле, пусть выполнено условие (a) последнего предложения. Можно показать, применяя подходящим образом тождество Якоби, что $c_{\alpha\beta}c_{-\alpha,-\beta} = -(r+1)^2$. Но это означает, что условие (d) теоремы не могло бы выполняться без условия (b) предложения.

В упражнении мы предложим проверить, что из базисов классических алгебр (которые приводились и весной, и в начале этого семестра) можно получить базисы Шевалле.

10.4 Вопросы единственности

Единственен ли базис Шевалле? Если базис Δ фиксирован, то элементы h_i полностью определены. С другой стороны, можно варьировать выбор элементов x_α. Например, можно заменить x_α на $\eta(\alpha)x_\alpha$, $\alpha \in \Phi$. Тогда

$$[\eta(\alpha)x_\alpha, \eta(-\alpha)x_{-\alpha}] = \eta(\alpha)\eta(-\alpha)h_\alpha.$$

Чтобы выполнялось условие (a) предыдущего предложения, необходимо равенство

$$\eta(\alpha)\eta(-\alpha) = 1. \qquad (*)$$

Если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$, то

$$[\eta(\alpha)x_\alpha, \eta(\beta)x_\beta] = \eta(\alpha)\eta(\beta)[x_\alpha, x_\beta] = c_{\alpha\beta}\eta(\alpha)\eta(\beta)x_{\alpha+\beta} = c'_{\alpha\beta}\eta(\alpha+\beta)x_{\alpha+\beta},$$

где
$$c'_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}\eta(\alpha)\eta(\beta)}{\eta(\alpha+\beta)}.$$
Аналогичная выкладка с использованием $(*)$ показывает, что для выполнения условия (b) предыдущего предложения мы должны иметь также
$$c'_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}\eta(\alpha+\beta)}{\eta(\alpha)\eta(\beta)},$$
то есть
$$\eta(\alpha)\eta(\beta) = \pm\eta(\alpha+\beta). \qquad (**)$$
Очевидно и обратное: для изменения элемента x_α можно использовать любую функцию $\eta : \Phi \to \mathbb{F}$, удовлетворяющую условиям $(*)$ и $(**)$.

Более тонок вопрос о знаках. Мы имеем $[x_\alpha, x_\beta] = \pm(r+1)x_{\alpha+\beta}$, но при выводе этого равенства не был выбран плюс или минус. Это не случайно, в чем можно убедиться, заменив в базисе Шевалле для $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ на $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: нет причин предпочесть один выбор другому.

Существует алгоритм согласованного выбора знаков, основанный лишь на знании системы Φ, мы в нашем курсе не будем этим заниматься.

10.5 Построение присоединенных групп Шевалле

Предложение 12. *Пусть $\alpha \in \Phi$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда эндоморфизм $(\operatorname{ad} x_\alpha)^m/m!$ представляется целочисленной матрицей в базисе Шевалле.*

Доказательство. Мы имеем
$$(\operatorname{ad} x_\alpha)(h_i) = [x_\alpha, h_i] = -\langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha$$
и
$$\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^m}{m!}(h_i) = 0 \text{ при всех } m \geqslant 2$$
— целочисленно выражаются через базис Шевалле.

Кроме того,
$$\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^2}{2}(x_{-\alpha}) = \frac{1}{2}[x_\alpha, h_\alpha] = -x_\alpha$$
и
$$\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^m}{m!}(x_{-\alpha}) = 0 \text{ при всех } m \geqslant 3$$
— также целочисленно выражаются через базис Шевалле.

Разумеется,
$$\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^m}{m!}(x_\alpha) = 0 \text{ при } m \geqslant 1.$$
Остается рассмотреть базисные элементы x_β, $\beta \neq \pm\alpha$.

Если $\beta - r\alpha, \dots, \beta + q\alpha$ составляют α-серию, порожденную корнем β, то роль числа r для корней $\beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + q\alpha$ играют (соответственно) $r+1, r+2, \dots, r+q$.

Следовательно,

$$\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^m}{m!}(x_\beta) = \pm \frac{(r+1)(r+2)\dots(r+m)}{m!} x_{\beta+m\alpha} \text{ (или 0, если } \beta + m\alpha \notin \Phi).$$

Значит, правая часть является целочисленным кратным вектора $x_{\beta+m\alpha}$, что нам и требовалось. $\square$

Таким образом, каждый эндоморфизм $\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^m}{m!}$ при $\alpha \in \Phi$, $m \in \mathbb{N}$, представляется в базисе Шевалле целочисленной матрицей.

Теперь представим себе, что у нас имеется некоторое коммутативное кольцо R с единицей. В этом случае мы можем представить в R аналог целых чисел — подкольцо в R, являющееся образом целых чисел при их гомоморфизме в R, продолжающем естественное отображение $1 \mapsto 1$. Так как мы отобразили в R целые числа, то целочисленные матрицы также можно рассматривать как матрицы над кольцом $M_N(R)$.

Учитывая это, рассмотрим для каждого $\alpha \in \Phi$, $t \in R$ отображение

$$x_\alpha(t) := \exp(t(\operatorname{ad} x_\alpha)) = E + t \cdot (\operatorname{ad} x_\alpha) + t^2 \frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^2}{2!} + \dots + t^m \frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^m}{m!}.$$

Заметим, что все отображения $x_\alpha(t)$ являются автоморфизмами в N-мерного свободного R-модуля, то есть лежат в $\operatorname{GL}_N(R)$.

Таким образом мы можем породить подгруппу в $\operatorname{GL}_N(R)$:

$$E_{\operatorname{ad}}(\Phi, R) := \langle x_\alpha(t) \mid \alpha \in \Phi, t \in R \rangle \subset \operatorname{GL}_N(R).$$

Она и называется *элементарной присоединенной группой Шевалле типа* Φ *над кольцом* R.

10.6 Задачи

1. Докажите утверждение (a) предложения 10.

2. Докажите, что двойственный корни $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ образуют систему корней.

3. Получите базисы Шевалле из базисов классических алгебр типов $\mathbf{C}_l$ и $\mathbf{D}_l$.

4. Докажите, что если в каждой компоненте системы Φ встречаются только корни одной длины, то все элементы $c_{\alpha\beta}$ равны ± 1 (когда $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$).