УДК 534.2

Нелинейная динамика жидких капель под воздействием интенсивных акустических волн

© Авторы, 2020
© ООО «Издательство «Радиотехника», 2020

Е.А. Анненкова – к.ф.-м.н.,
Физический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
E-mail: a-a-annenkova@yandex.ru
О.А. Сапожников – д.ф.-м.н., профессор,
Физический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова
E-mail: oleg@acs366.phys.msu.ru

Аннотация

Постановка проблемы. Проблема описания нелинейной эволюции сферической стоячей волны в жидкой капле акустического фонтана является важной для такой задачи медицинской акустики, как гистотрипсия. В течение последних лет развивалась инновационная модификация метода под названием «гистотрипсия с кипением», в котором акустический фонтан имеет достаточно сложную форму. Наиболее просто акустический фонтан наблюдается на границе вода-воздух под воздействием фокусированного ультразвука мегагерцового диапазона частот. Скоростная съемка акустических фонтанов показала, что через некоторое время после включения источника ультразвука из жидкости вырывается струя, распадающаяся на цепочку из капель одинакового размера. Через некоторое время капли, обычно начиная с самой верхней, начинают по невыясненной пока причине терять устойчивость и взрываться, приводя к распылению жидкости. Проведенные недавно экспериментальные исследования поведения капель в акустическом фонтане позволили выявить, что непосредственно перед потерей устойчивости в центре прозрачной капли появляется темная точка, что указывает на возможный разрыв жидкости, т.е. возникновение кавитации. Теоретическая модель описания данной задачи сложна, и получение аналитических решений представляется возможным только в рамках упрощенных моделей. Для более полного описания задачи требуется использование методов численного моделирования.

Цель. Теоретическое исследование физических процессов в жидких каплях при воздействии интенсивных акустических волн, используемых в ультразвуковой визуализации и терапии.

Результаты. Построена численная модель нелинейной эволюции сферической стоячей волны в акустическом резонаторе сферической формы с абсолютно мягкой границей. Рассчитаны временные зависимости давлений и распределения температуры внутри акустического резонатора сферической формы и установлено, что на границе резонатора реализуются условия для возникновения неустойчивостей. На основе данной модели проанализировано поведение капли акустического фонтана и выявлены возможные причины ее неустойчивости (кавитация в центре капли и возникновение неустойчивостей на границе капли), приводящей к взрыву капли, который является одним из механизмов осуществления гистотрипсии в ультразвуковой терапии.

Практическая значимость. Разработанная теоретическая модель нелинейного акустического резонатора сферической формы имеет характер фундаментальной задачи, имеющей аналоги в различных областях акустики помимо капель акустического фонтана.

Ключевые слова

Нелинейные сферические волны, интенсивный ультразвук, генерация гармоник, резонатор, акустический фонтан.

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ (проект № 18-32-00683_мол_а).

DOI:

Для цитирования: *Анненкова Е.А., Сапожников О.А.* Нелинейная динамика жидких капель под воздействием интенсивных акустических волн // Радиотехника. 2020. Т.18. № 2. С. 33−41. DOI: 10.18127/j20700970-202002-03.

Введение

Среди задач медицинской акустики в настоящее время активно исследуется метод разрушения ткани под названием «гистотрипсия» [1, 2] и модификация данного метода – гистотрипсия с кипением [3]. Отличие метода от традиционной ультразвуковой хирургии состоит в том, что разрушение ткани происходит механическим методом, без нагревания. Суть метода заключается в использовании нелинейных акустических волн, профиль которых содержит ударные фронты — резкие скачки давления — для механического разрушения тканей, например, при лечении доброкачественных и злокачественных опухолей. Высокоинтенсивные, но очень короткие (миллисекундной длительности) ультразвуковые импульсы фокусируются внутрь биоткани. В результате в фокусе происходит локальное взрывное вскипание ткани и образуется паровая полость миллиметрового размера. При этом размер

перегретой области — около ста микрон, а размер образующейся полости гораздо больше, поэтому при расширении полость быстро охлаждается. Взаимодействие ультразвука с этой полостью приводит к разрушению ткани вокруг нее, генерации акустического фонтана и атомизации биоткани внутрь полости. Таким образом, изучение общих принципов процессов акустического фонтанирования позволит прояснить механизмы, задействованные в гистотрипсии с кипением.

Наблюдение акустического фонтана проще всего проводится под воздействием фокусированного ультразвука мегагерцового диапазона частот на границе вода-воздух. Разные независимые научные группы проводили экспериментальные исследования подобных фонтанов [4,5] и получили скоростные съемки, на которых акустический фонтан генерировался с поверхности жидкости вскоре после включения источника ультразвука в виде вырывающейся струи, распадающейся на цепочку из капель одинакового размера, примерно равного длине действующей ультразвуковой волны. Далее капли начинали терять устойчивость и взрываться, что приводило к распылению (атомизации) жидкости. На видео обеих групп было зафиксировано, что в центре прозрачной капли непосредственно перед взрывом появляется темная точка. Это указывает на возможный разрыв жидкости, т.е. возникновение кавитации. Помимо этого, перед началом образования тумана вокруг капель, вызванного распылением жидкости, сами капли мутнеют, что можно объяснить появлением облака микропузырей в объёме капли или искривлениями поверхности капли на микронном уровне. Данная статья посвящена анализу возможности описанных причин взрыва капель акустического фонтана на основе теоретической модели нелинейной динамики внутри уже сформировавшейся капли акустического фонтана.

Ц е л ь р а б о т ы – теоретическое исследование физических процессов в жидких каплях при воздействии интенсивных акустических волн, используемых в ультразвуковой визуализации и терапии.

Численная модель нелинейной эволюции сферической стоячей волны в акустическом резонаторе сферической формы с абсолютно мягкой границей

Теоретической моделью капли акустического фонтана, предмета нашего рассмотрения, является акустический резонатор сферической формы с абсолютно мягкой границей. Для описания процессов в данном резонаторе в условиях сферической симметрии акустическое поле рассматривается в форме стоячей волны. Исходное уравнение – уравнение Кузнецова [6-8], общий вид волнового уравнения для потенциала колебательной скорости φ акустического поля в жидкости или газе при учете квадратично-нелинейных членов:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{b}{\rho_0 c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\varphi\right) + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\beta-1}{c_0^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\nabla\varphi\right)^2\right], \tag{1}$$

где c_0 – скорость звука, ρ_0 – равновесная плотность среды, $b = \varsigma + 4\eta/3$ – диссипативный коэффициент, ς и η – коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости, β – параметр акустической нелинейности среды.

Решение для потенциала колебательной скорости представляется в виде суперпозиции стоячих волн:

$$\varphi = \Phi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(t)\frac{\sin(k_n r)}{k_n r}, \tag{2}$$

где $\Phi_0(t) = \varphi(a,t)$ – значение потенциала на невозмущенной поверхности капли, a – радиус капли в невозбужденном состоянии, Φ_n – весовые коэффициенты, зависящие только от времени, $k_n = \pi n/a$ – волновое число, r – расстояние от центра капли.

Подстановка решения (2) в уравнение (1) с применением метода медленно изменяющихся амплитуд [9] приводит к следующей системе укороченных уравнений:

$$\frac{dC_n}{dt} + \delta_n C_n =$$
$$-\frac{1}{4a^2}\left\{\begin{array}{l} 2\sum_{m=1}^{\infty}\left[-\frac{n^2+m^2+mn}{m(n+m)} + \frac{n\beta\pi}{2}\left(S_{2n}+S_{2m}-S_{2m+2n}\right)\right]C_m^* C_{m+n} \\ +\sum_{m=1}^{n-1}\left[\frac{n+m}{n-m} + \frac{n\beta\pi}{2}\left(S_{2n}-S_{2m}-S_{2n-2m}\right)\right]C_{n-m}C_m \end{array}\right\}, \quad (3)$$

где C_n – комплексные амплитуды ($\Phi_n = \frac{C_n}{2}e^{-i\omega_n t} + \frac{C_n^*}{2}e^{i\omega_n t}, \omega_n = k_n c_0$ – резонансные частоты), $\delta_n = b\omega_n^2 / \left(2\rho_0 c_0^2\right)$ – декременты затухания мод. Количество удерживаемых гармоник при численном решении системы (3) подбиралось достаточно большим, чтобы результаты расчетов не зависели от него. Вычисления проводились методом конечных разностей на языке Фортран с использованием метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

Потенциал колебательной скорости φ позволяет полностью охарактеризовать акустическое поле, так как колебательная скорость $\mathbf{v}$ и акустическое давление p связаны с потенциалом следующим образом:

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi, \quad (4)$$

$$p = -\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2c_0^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{\rho_0}{2}\left(\nabla\varphi\right)^2. \quad (5)$$

Временные зависимости давлений и распределения температуры внутри акустического резонатора сферической формы и неустойчивость на его границе

Для анализа причин взрыва капель акустического фонтана нужны не значения потенциала колебательной скорости в резонаторе сферической формы, являющимся моделью капли, а значения колебательной скорости и акустического давления в нем. Расчет временных зависимостей давлений внутри резонатора (Рис. 1) показал, что за счет генерации высших гармоник акустическая энергия в резонаторе распределяется так, что ее основная часть скапливается в центре резонатора. В процессе нелинейной эволюции стоячая волна приобретает вид попеременно сходящегося и расходящегося импульса с острой вершиной, пиковое давление в котором вблизи центра резонатора может намного превышать исходную амплитуду волны.

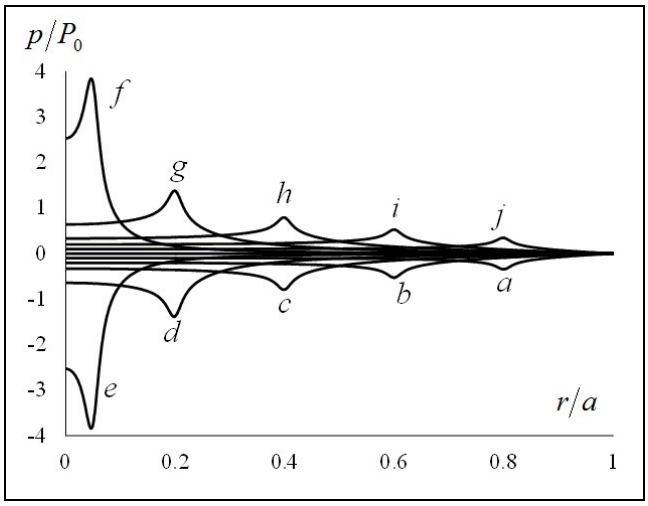

Рис. 1. Волновые профили нормированного акустического давления в нормированные моменты времени: -0.8 (a), -0.6 (b), 0.4 (c), -0.2 (d), -0.05 (e), 0.05 (f), 0.2 (g), 0.4 (h), 0.6 (i), 0.8 (j)

Fig. 1. The wave profiles of the normalized acoustic pressure at normalized moments of time: -0.8 (a), -0.6 (b), 0.4 (c), -0.2 (d), -0.05 (e), 0.05 (f), 0.2 (g), 0.4 (h), 0.6 (i), 0.8 (j)

Распределение температуры соответственно анализировалось тоже в центре акустического резонатора, так как энергия более высоких гармоник локализована вблизи центра резонатора и тепловыделение наиболее эффективно в самом центре резонатора. За основу бралось уравнение теплового баланса:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \chi \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{Q_{heat}(r,t)}{\rho_0 C_p}, \tag{6}$$

где T – приращение температуры относительного исходного равновесного уровня, $\chi = \kappa / \rho_0 C_p$ – температуропроводность, κ – коэффициент теплопроводности, C_p – удельная теплоемкость жидкости, $Q_{heat}(r,t)$ – энергия, диссипируемая в единице объема в единицу времени (в среднем по периоду). С учетом того факта, что область локализации тепловых источников чрезвычайно мала и эффект диффузии тепла значителен, приращение температуры рассматривалось в виде разложения по пространственным гармоникам – аналогично тому, как это делалось для акустического давления:

$$T(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t) \cdot \frac{\sin k_n r}{k_n r}, \tag{7}$$

где $\theta_n(t)$ – амплитуды соответствующих гармоник.

Задача об устойчивости сферической формы акустического резонатора, совершающего сферически симметричные колебания, рассматривалась в пренебрежении влиянием газа на жидкость, то есть давление газа считалось нулевым. Жидкость в приповерхностном слое принимается несжимаемой:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{9}$$

Поскольку вначале движение жидкости было безвихревым, а вязкости нет, то поток будет потенциальным всегда:

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi. \tag{10}$$

С учётом (10) уравнение Эйлера (8) сведётся к интегралу Бернулли, уравнение неразрывности (9) превратится в уравнение Лапласа:

$$\rho\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2\right] + p = P(t), \tag{11}$$

$$\Delta \varphi = 0. \tag{12}$$

Здесь $P(t)$ – некоторая функция (только) времени, имеющая размерность давления.

Рассмотрим теперь границу раздела жидкости и газа. В 0-м приближении она сферическая. Любые отклонения от сферической формы будем считать возмущениями. Поверхность резонатора Σ можно описать в сферической системе координат:

$$r = r_\Sigma(\theta,\psi,t) = R(t) + \xi(\theta,\psi,t), \tag{13}$$

где $R(t)$ – невозмущенное значение $r_\Sigma(\theta,\psi,t)$, θ и ψ – зенитный и азимутальный углы, соответственно.

Отклонение поверхности резонатора от сферы разложим по сферическим гармоникам:

$$\xi(t,\theta,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_{nm}(t) Y_{nm}(\theta,\psi), \tag{14}$$

где $a_{nm}(t)$ – коэффициенты разложения (амплитуды возмущений), $Y_{nm}(\theta,\varphi)$ – сферические гармоники. Разные составляющие разложения возмущений по сферическим гармоникам (разные «моды») ведут себя независимо друг от друга. Поэтому рассмотрим одну из мод возмущений (n,m) и для краткости записи опустим индексы при $a = a_{nm}$.

Посредством ряда математических действий получим в итоге уравнение для амплитуды возмущений:

$$\ddot{a} + 3\frac{\dot{R}}{R}\dot{a} + (n+2)\left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\sigma n(n-1)}{\rho R^3}\right]a = 0\,, \tag{15}$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения. В отличие от газового пузырька, колеблющегося в жидкости, в случае осциллирующей капли её радиус меняется незначительно: $R(t) = R_0 + \delta R(t)$, где $|\delta R| << R_0$. Учет данного факта в модели резонатора и замена переменных приводят к следующему виду искомого уравнения для амплитуды возмущений:

$$\ddot{a} + \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\dot{V}}{R_0} + \Omega_n^2\right]a = 0\,, \tag{16}$$

где $\Omega_n = \sqrt{\dfrac{\sigma n(n-1)(n+2)}{\rho R_0^3}}$ – собственная частота свободных колебаний соответствующей моды, $\dot{V}$ – ускорение на поверхности резонатора, рассчитываемое из задачи динамики акустического поля в сферическом резонаторе.

Для маловязких жидкостей типа воды анализ вязких явлений можно проводить по аналогии с выводом, проведённым в работе [10] для случая колебаний сферического пузырька газа в жидкости. Тогда в уравнение для амплитуды возмущений (16) добавится еще одно слагаемое, обусловленное наличием вязкости:

$$\ddot{a} + 2\delta_n\dot{a} + \left[\frac{n+1/2}{R_0}\dot{V} + \Omega_n^2\right]a = 0\,, \tag{17}$$

где $\delta_n = (n-1)(2n+1)\dfrac{\nu}{R_0^2}$ – декремент затухания n-й моды поверхностных волн, ν – кинематическая вязкость.

Анализ возможных причин взрыва капли акустического фонтана

На основе временных зависимостей давлений в центре акустического резонатора сферической формы было рассчитано пиковое давление в центре капли акустического фонтана при различных начальных условиях. Можно оценить, какая акустическая энергия окажется в капле при воздействии мощного ультразвукового пучка. Для пучка с мощностью 1 Вт и частотой 1 МГц энергия будет составлят 1 мкДж. Для значения начального давления 0.7 МПа (Рис. 2) энергия в капле примерно в 30 раз меньше, что говорит о большом запасе в оценке возможности достижимости порога кавитации в капле, максимум которого составляет 30 МПа для воды: кавитация может возникнуть, даже если в каждую каплю фонтана в сферически симметричную моду колебаний поступает в 100 раз меньшая энергия, чем это дает проведенная выше идеализированная оценка для пучка мощностью 1 Вт. Достижимость порога кавитации в центре капли подтверждает гипотезу о том, что кавитация может являться причиной последующего взрыва капли.

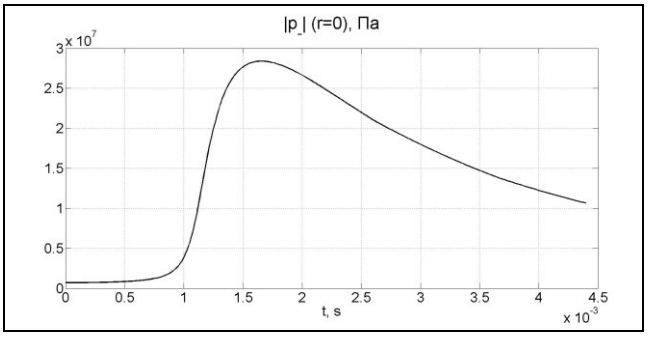

Рис. 2. Зависимость пикового давления в центре капли от времени при начальном давлении 0.7 МПа

Fig. 2. Dependence of the peak pressure in the center of the drop on time at an initial pressure of 0.7 MPa

При подстановке решения (7) в уравнение (6)

и последующего решения полученной системы в условиях, характерных для капель акустического фонтана, нагрев в центре капли оказывается не выше долей градуса, несмотря на концентрацию энергии и эффективное тепловыделение в центре капли, то есть кипение не может являться причиной взрыва капли.

Рассмотрим вопрос об устойчивости решения уравнения для амплитуды поверхности капли с учетом вязкости жидкости на основе уравнения для амплитуды возмущений (17) аналогично анализу уравнения Матье с учетом затухания [11]. Для проведения данного анализа перейдем в уравнении (17) к новой независимой переменной $\tau = \omega t$ и примем $V(t) = V_0 \sin \omega t$, где $V(t) = V_0 \sin \omega t$, $\omega = \dfrac{\pi c_0}{R_0}$:

$$\frac{d^2 a}{d\tau^2} + 2\frac{\delta_n}{\omega}\frac{da}{d\tau} + \left(\frac{n+1/2}{R_0\omega^2}\omega V_0 \cos\tau + \frac{\Omega_n^2}{\omega^2}\right)a = 0, \tag{18}$$

Введем переобозначения $\delta'_n = \dfrac{\delta_n}{\omega} = (n-1)(2n+1)\dfrac{\nu}{\omega R_0^2}$, $\gamma_n = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{P_0}{\pi^2 \rho c_0^2}$ и $\lambda_n = \dfrac{\Omega_n^2}{\omega^2} = \dfrac{\sigma n(n-1)(n+2)}{\rho R_0^3 \omega^2}$. Тогда (18) примет вид:

$$\frac{d^2 a}{d\tau^2} + 2\delta'_n \frac{da}{d\tau} + (\gamma_n \cos\tau + \lambda_n)a = 0, \tag{19}$$

Условия на первую и вторую зоны неустойчивости решения уравнения (19), исходя из поиска действительных корней характеристического уравнения, при которых амплитуда a будет возрастать по экспоненциальному закону [11], примут вид:

$$1 - \sqrt{\left(\frac{\gamma_n}{2\lambda_n}\right)^2 - (4\delta_n)^2} < 4\lambda_n < 1 + \sqrt{\left(\frac{\gamma_n}{2\lambda_n}\right)^2 - (4\delta_n)^2}, \tag{20}$$

$$4 + \frac{2}{3}\left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^2 - 64(2\delta_n)^2} < 4\lambda_n < 4 + \frac{2}{3}\left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^2 - 64(2\delta_n)^2}. \tag{21}$$

Так как в задаче с каплей нас больше интересуют пороги неустойчивости в параметрах (P_0, n), то учитывая, что $\gamma_n = \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{P_0}{\pi^2 \rho_0 c_0^2}$, получим, что на графике $P_0(n)$ в окрестности параметрического резонанса, то есть такого n, при котором $\lambda_n = \dfrac{1}{4}$ для первой зоны и $\lambda_n = 1$ для второй зоны (это оказались $n = 386$ и $n = 613$ соответственно), неустойчивость будет развиваться при P_0, находящихся выше кривых $P_0 = \dfrac{8\lambda_n}{n+\frac{1}{2}}\left[\left(\lambda_n - \dfrac{1}{4}\right)^2 + (\delta_n)^2\right]\pi^2 \rho_0 c_0^2$ и $P_0 = \dfrac{\lambda_n}{n+\frac{1}{2}}\pi^2 \rho_0 c_0^2 \left(\dfrac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)_*$, где $\left(\dfrac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)_*^2$ – положительный корень уравнения $\dfrac{5}{9}\left(\dfrac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^4 - 2(4-4\lambda_n)\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\gamma_n}{\lambda_n}\right)^2 - (4-4\lambda_n)^2 - 256(\delta_n)^2 = 0$ (Рис. 3).

Видно, что учет вязкости жидкости существенно повышает порог неустойчивости, и в линейном режиме необходимо давление P_0 в центре капли больше 10 МПа, чтобы достичь неустойчивого режима.

Для получения более точных границ зон неустойчивости дифференциальное уравнение второго порядка (19) было решено численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка, и найдены такие пары (P_0, n), при которых начинается раскачка решения уравнения (19). Полученные результаты представлены на Рис. 3: *a* – красные кривые, *b* – точечные значения: Δ – без учета вязкости, ○ – с учетом вязкости. Расчеты также подтвердили, что наличие вязкости повышает порог неустойчивости, и вблизи параметрического резонанса результаты численных расчетов хорошо согласуются с результатами, полученными по методу Боголюбова-Метропольского, а при отсутствии вязкости согласуются с известными теоретическими кривыми зон неустойчивости уравнения Матье. Так, мы убедились, что наш численный алгоритм подходит для анализа неустойчивости поверхности капли, значит, можно применять его и к более общему случаю – решению уравнения (17).

Таким образом, анализ неустойчивости поверхности капли показал, что при определенных начальных параметрах в капле возможна раскачка амплитуды возмущений поверхности, что приводит к значительным искривлениям поверхности, которые могут спровоцировать дальнейший разрыв капли. Более мутный вид верхней капли перед ее взрывом на съемке акустического фонтана скоростной камерой может быть вызван именно указанными микроскопическими искажениями ее поверхности, которые не видны глазу непосредственно, но рассеивают световые волны и создают оптический эффект в виде помутнения.

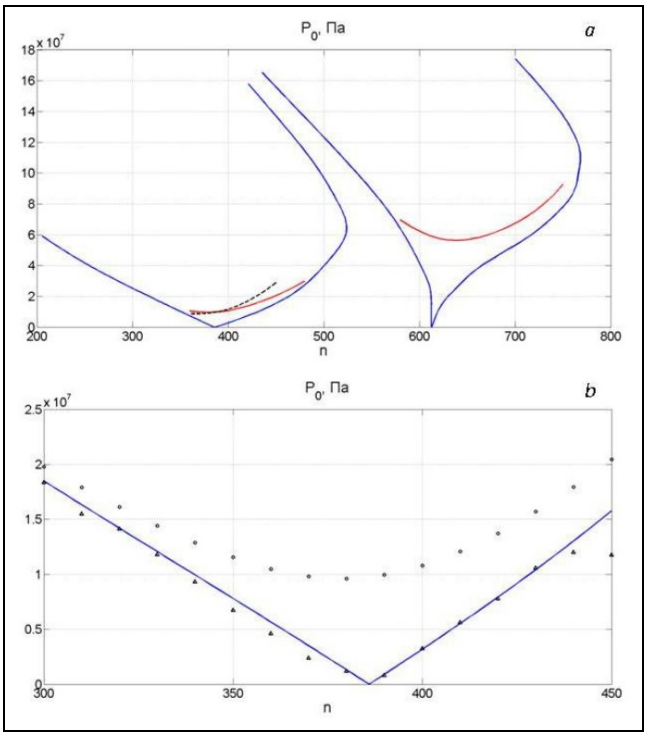

Рис. 3. *a* – первые две зоны неустойчивости поверхности капли в параметрах (P_0, n): синие кривые – без учета вязкости жидкости, красные кривые – с учетом вязкости, черная – приближение Боголюбова-Митропольского, *b* – первая зона неустойчивости: синяя кривая – теоретическая без учета вязкости, Δ – численная без учета вязкости, ○ – численная с учетом вязкости

Fig. 3. *a* – the first two zones of instability of the drop surface in the parameters (P_0, n): blue curves – without taking into account the viscosity of the liquid, red curves – taking into account the viscosity, black – the Bogolyubov-Mitropolsky approximation, *b* – first zone of instability : blue curve – theoretical without taking into account viscosity, Δ – numerical without taking into account viscosity, ○ – numerical taking into account viscosity

Заключение

Построена численная модель нелинейной эволюции сферической стоячей волны в акустическом резонаторе сферической формы с абсолютно мягкой границей. Показано, что в процессе нелинейной эволюции стоячая волна приобретает вид попеременно сходящегося и расходящегося импульса с острой вершиной, пиковое давление в котором вблизи центра резонатора может намного превышать исходную амплитуду волны. Наибольшее усиление пикового давления происходит в центре резонатора, где зависимость акустического давления от времени имеет вид периодической последовательности коротких биполярных импульсов. При этом, несмотря на общую убыль энергии, вблизи центра резонатора на определенном временном интервале может достигаться экстремально высокая концентрация энергии.

На основе разработанной численной модели нелинейной эволюции сферической стоячей волны в акустическом резонаторе сферической формы с абсолютно мягкой границей проанализированы физические процессы внутри капель жидкости, возникающих в акустическом фонтане при фокусировке ультразвукового пучка на ее свободную поверхность. Показано, что в результате нелинейной эво-

люции сферической стоячей волны в центре капли могут достигаться уровни отрицательного давления, превышающие порог механической прочности воды (более 30 МПа), что является одним из механизмов разрушения капель. Показано, что нагрев жидкости при этом не превышает сотых долей градуса.

Проведен анализ устойчивости поверхности акустически возбужденной капли жидкости на основе полученного уравнения для амплитуд мод возмущения в базисе сферических гармоник. Построены зоны параметрической (фарадеевской) неустойчивости, позволяющие анализировать поведение капель акустического фонтана. Показано, что при превышении амплитуды акустического давления в центре капли нескольких мегапаскалей возможно развитие неустойчивости поверхности, приводящее к атомизации (распылению) жидкости на ее поверхности.

Литература

1. *Roberts W. W., Hall T. L., Ives K., Wolf J. S. Jr., Fowlkes J. B., and Cain C. A.*, Pulsed cavitational ultrasound: A noninvasive technology for controlled tissue ablation (histotripsy) in the rabbit kidney, J. Urol. 175(2), 734–738 (2006).
2. *Hall T.L., Hempel C.R., Wojno K., Xu Z., Cain C.A., and Roberts W. W*. Histotripsy of the prostate: dose effects in a chronic canine model. Urology. 74(4), 932–937 (2009).
3. *Maxwell A., Sapozhnikov O., Bailey M., Crum L., Xu Z., Fowlkes B., Cain Ch., Khokhlova V.* Disintegration of tissue using HIFU. Acoustics Today: 24-36, 2012.
4. *Tomita Y.* Jet atomization and cavitation induced by interactions between focused ultrasound and a water surface // Physics of Fluids. 2014. V. 26. P. 097105-1–097105-11.
5. *Simon J.C., Sapozhnikov O.A., Khokhlova V.A., Crum L.A., Bailey M.R.* Ultrasonic atomization of liquids in drop-chain acoustic fountains // J. Fluid Mech. 2015. V. 766. P. 129–146.
6. *Кузнецов В.П.* Уравнения нелинейной акустики // Акуст. журн. 1970. Т. 26. № 4. С. 548–553.
7. *Bednarik M., Cervenka M.* Equations for description of nonlinear standing waves in constant-cross-sectioned resonators // J. Acoust. Soc. Am. 2014. V. 135. № 3. P. EL134–EL139.
8. *Jordan P.M.* An analytical study of Kuznetsov's equation: diffusive solutions, shock formation, and solution bifurcation // Physics Letters A. 2004. P. 77–84.
9. *Сапожников О.А*., *Анненкова Е.А.* Нелинейные сферические стоячие волны в акустически возбужденной жидкой капле // Акустический журнал. 2018, т. 64, № 3, с. 308–317.
10. *Prosperetti A*. Viscous effects on perturbed spherical flows // Quarterly of Applied Mathematics, 34, pp. 339-352 (1977).
11. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1958.

Поступила 2 марта 2020 г.

UDC 534.2

Nonlinear dynamics of liquid drops under the influence of intense acoustic waves

© Authors, 2020
© Radiotekhnika, 2020

E.A. Annenkova – Ph.D.(Phys.-Math.)
Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
E-mail: a-a-annenkova@yandex.ru
O.A. Sapozhnikov – Doctor of Science (Phys.-Math.), Professor,
Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
E-mail: oleg@acs366.phys.msu.ru

Abstract

Formulation of the problem.
Goal.
Results.
Practical significance.

Keywords

The research was supported by RFBR (project No. 18-32-00683_mol_a).

DOI:

For citation:

References