

Задачи на собственные значения тензорных объектов с некоторыми приложениями к механике

Никабадзе Михаил Ушангиевич

Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
МГУ им. М.В.Ломоносова, МГТУ им. Н.Э.Баумана

9-13 августа 2021 г.





Аннотация

1. Рассмотрены задачи на собственные значения тензора и тензорно-блочной матрицы любого четного ранга.
2. В явном виде построена полная ортонормированная система собственных тензоров для симметрического тензора любого четного ранга, а также полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов для симметрической тензорно-блочной матрицы любого четного ранга.
3. Даны представления упругой энергии деформации и определяющих соотношений (закона Гука) с помощью введенных тензорных столбцов и тензорно-блочной матрицы.
4. Дано каноническое представление тензорно-блочной матрицы, в силу которой даны и канонические записи удельной энергии деформации и определяющих соотношений.
5. Приведены некоторые приложения к механике. Введен в рассмотрение понятие символа структуры тензора и тензорно-блочной матрицы и дана классификация некоторых анизотропных материалов.

Определяющие соотношения для некоторых сред. Наводящие соображения. Постановки задач на собственные значения для тензора и тензорно-блочной матрицы любого четного ранга. Обобщенные задачи на собственные значения

1.1 Линейно-упругий материал (закон Гука) (1660 г.

— открыл, 1676 г. — опуб. в виде анаграммы, 1678 г.

— опуб. в явном виде):

$\mathbf{P} = \mathbf{A}^2_{\otimes \underline{\varepsilon}}$ ($P_{ij} = A^{ijkl} \gamma_{kl}$). Можно ли $\mathbf{A}^2_{\otimes \underline{\varepsilon}} = \lambda \underline{\varepsilon}$?

1.2 Линейно-вязкая жидкость (закон Навье-Стокса):

$\underline{\mathbf{P}} = -p\underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{B}}^2 \underline{\otimes} \underline{\mathbf{v}}$ ($P^{ij} = -pg^{ij} + B^{ijkl}v_{kl}$). Можно ли $\underline{\mathbf{B}}^2 \underline{\otimes} \underline{\mathbf{v}} = \lambda \underline{\mathbf{v}}$?

1.3 Микрополярный линейно-упругий материал без центра симметрии (Эрингена, Аэро-Кувшинского

$(\gamma = \nabla \mathbf{u}, \varphi = 1/2 \nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{B} = 0)$ (1960), Коспера (1909):

$$\mathbf{\underline{P}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = \mathbf{\underline{A}}^2 \otimes \gamma + \mathbf{\underline{B}}^2 \otimes \kappa, \quad \mu = \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} = \mathbf{\underline{C}}^2 \otimes \gamma + \mathbf{\underline{D}}^2 \otimes \kappa, \quad \mathbf{\underline{B}}^T = \mathbf{\underline{C}},$$

$$\underline{\gamma} = \nabla \tilde{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\varphi} - \text{тенз. деф-ий}, \quad \underline{\kappa} = \nabla \underline{\varphi} - \text{тенз. изгибов-круч-ий};$$

$$P^{ij} = A^{ijkl}\gamma_{kl} + B^{ijkl}\varkappa_{kl}, \quad \mu^{ij} = C^{ijkl}\gamma_{kl} + D^{ijkl}\varkappa_{kl}.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{X}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\gamma}} \\ \underline{\underline{\varkappa}} \end{pmatrix} \left(\underline{\underline{\mathbb{X}}}^T = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\gamma}} & \underline{\underline{\varkappa}} \end{pmatrix} \right), \quad \underline{\underline{\mathbb{Y}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}}} \\ \underline{\underline{\mu}} \end{pmatrix} \left(\underline{\underline{\mathbb{Y}}}^T = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}}} & \underline{\underline{\mu}} \end{pmatrix} \right), \quad \underline{\underline{\mathbb{M}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{pmatrix} \otimes^2 \begin{pmatrix} \underline{\underline{\gamma}} \\ \underline{\underline{\varkappa}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}}} \\ \underline{\underline{\mu}} \end{pmatrix} \text{ или } \underline{\underline{\mathbb{M}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{X}}} = \underline{\underline{\mathbb{Y}}}. \text{ Можно ли } \underline{\underline{\mathbb{M}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{X}}} = \lambda \underline{\underline{\mathbb{X}}}?$$

1.4 Материал типа повторно градиентного (Джеремилло 1929 г.):

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\underline{\varepsilon}} + {}^5\underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes^3 \underline{\underline{\varkappa}}, \quad \underline{\underline{\mu}} = {}^5\underline{\underline{\mathbf{B}}}' \otimes^2 \underline{\underline{\varepsilon}} + {}^6\underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes^3 \underline{\underline{\varkappa}} \quad [\underline{\underline{\varepsilon}} = 1/2(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad \underline{\underline{\varkappa}} = \nabla \underline{\underline{\varepsilon}}],$$

$$p_{ij} = A^{ijkl} \varepsilon_{kl} + B^{ijklm} \varkappa_{klm}, \quad B'^{ijklm} = B^{lmijk},$$

$$\mu^{ijk} = B'^{ijklm} \varepsilon_{lm} + D^{ijklmn} \varkappa_{lmn}.$$

Если материал с центром симметрии, то ${}^5\underline{\underline{\mathbf{B}}} = 0$, ${}^5\underline{\underline{\mathbf{B}}}' = 0$ и

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (p_{ij} = A^{ijkl} \varepsilon_{kl}). \text{ Можно ли } \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\underline{\varepsilon}} = \lambda \underline{\underline{\varepsilon}}?$$

$$\underline{\underline{\mu}} = {}^6\underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes^3 \underline{\underline{\varkappa}} \quad (\mu^{ijk} = D^{ijklmn} \varkappa_{lmn}). \text{ Можно ли } {}^6\underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes^3 \underline{\underline{\varkappa}} = \lambda \underline{\underline{\varkappa}}?$$

1.5 Повторно-градиентный материал (материал Тупина, 1964 г.)

Удельная энергия деформации (у Тупина ${}^5\mathbb{B} = 0$)

$$\Phi = \Phi(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa}) = \frac{1}{2} (\underline{\gamma} \otimes \underline{\mathbf{A}} \otimes \underline{\gamma} + 2 \underline{\gamma} \otimes {}^5\mathbb{B} \otimes \underline{\varkappa} + \underline{\varkappa} \otimes {}^6\mathbb{D} \otimes \underline{\varkappa}), \quad \underline{\gamma} = \nabla \mathbf{u}, \quad \underline{\varkappa} = \nabla \nabla \mathbf{u}$$

Определяющие соотношения

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{A}} \otimes \underline{\gamma} + {}^5\mathbb{B} \otimes \underline{\varkappa}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = {}^5\mathbb{B}' \otimes \underline{\gamma} + {}^6\mathbb{D} \otimes \underline{\varkappa}, \quad {}^5\mathbb{B}' = {}^5\mathbb{B}^T,$$

$$P_{ij} = A^{ijkl} \gamma_{kl} + B^{ijklm} \varkappa_{klm}, \quad \mu^{ijk} = B'^{ijklm} \gamma_{lm} + D^{ijklmn} \varkappa_{lmn},$$

$$B'^{ijklm} = B^{lmijk}, \quad \gamma_{ij} = \nabla_i u_j, \quad \varkappa_{ijk} = \nabla_i \gamma_{jk}.$$

Вводя обозначения

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} \underline{\gamma} \\ \underline{\varkappa} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{P}} \\ \underline{\boldsymbol{\mu}} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}} & {}^5\mathbb{B} \\ {}^5\mathbb{B}' & {}^6\mathbb{D} \end{pmatrix},$$

будем иметь

$$2\Phi(\underset{\sim}{\gamma}, \underset{\sim}{\kappa}) = \mathbb{X}^T {}^2\otimes_3 \mathbb{M} {}^2\otimes_3 \mathbb{X}, \quad \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{A}} & {}^5\underset{\sim}{\mathbb{B}} \\ {}^5\underset{\sim}{\mathbb{B}}' & {}^6\underset{\sim}{\mathbb{D}} \end{pmatrix} {}^2\otimes_3 \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\gamma} \\ \underset{\sim}{\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{P}} \\ \underset{\sim}{\mu} \end{pmatrix}$$

$$\text{или } \boxed{\mathbb{M} {}^2\otimes_3 \mathbb{X} = \mathbb{Y}}, \quad \left({}^2\otimes_3 = \begin{pmatrix} \overset{2}{\otimes} & 0 \\ 0 & \overset{3}{\otimes} \end{pmatrix} \right).$$

Можно ли сформулировать постановку задачи на собственные значения $\boxed{\mathbb{M} {}^2\otimes_3 \mathbb{X} = \lambda \mathbb{X} ?}$

Если материал имеет центр симметрии, то ${}^5\underset{\sim}{\mathbb{B}} = 0$, ${}^5\underset{\sim}{\mathbb{B}}' = 0$ и

$$\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \underset{\sim}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\gamma}, \quad \underset{\sim}{\mu} = {}^6\underset{\sim}{\mathbb{D}} \overset{3}{\otimes} \underset{\sim}{\kappa}, \quad p_{ij} = A^{ijkl} \gamma_{kl}, \quad \mu^{ijk} = D^{ijklmn} \kappa_{lmn}.$$

Можно ли сформулировать постановку задачи на собственные значения $\underset{\sim}{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{\gamma} = \lambda \underset{\sim}{\gamma} ?$

Можно ли сформулировать постановку задачи на собственные значения ${}^6\underset{\sim}{\mathbb{D}} \overset{3}{\otimes} \underset{\sim}{\kappa} = \lambda \underset{\sim}{\kappa} ?$

1.6 Материал Миндлина (1964 г.):

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + {}^5\underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^3 \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}} \quad (\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2}(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x \mathbf{u}^T), \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T, \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T),$$

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}' \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + {}^5\underline{\underline{\mathbf{F}}} \otimes^3 \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}} \quad (\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} = \nabla_x \mathbf{u} - \underline{\underline{\boldsymbol{\psi}}}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\psi}}} = \nabla_\xi \mathbf{v}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T),$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}}} = {}^5\underline{\underline{\mathbf{C}}}' \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + {}^5\underline{\underline{\mathbf{F}}}' \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + {}^6\underline{\underline{\mathbf{H}}} \otimes^3 \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}} \quad (\underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}} = \nabla_x \nabla_\xi \mathbf{v} = \nabla_x \underline{\underline{\boldsymbol{\psi}}}, \quad {}^6\underline{\underline{\mathbf{H}}} = {}^6\underline{\underline{\mathbf{H}}}^T),$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}} \otimes^3 {}^6\underline{\underline{\mathbf{H}}} \otimes^3 \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \otimes^2 {}^5\underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^3 \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \otimes^2 {}^5\underline{\underline{\mathbf{F}}} \otimes^3 \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}},$$

$$P_{ij} = A^{ijkl} \varepsilon_{kl} + B^{ijkl} \gamma_{kl} + C^{ijklm} \varkappa_{klm} \quad (\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \quad B'^{ijkl} = B^{klij}),$$

$$Q_{ij} = B'^{ijkl} \varepsilon_{kl} + D^{ijkl} \gamma_{kl} + F^{ijklm} \varkappa_{klm} \quad (\gamma_{ij} = \nabla_i u_j - \psi_{ij}, \quad C'^{ijklm} = C^{lmijk}),$$

$$\mu^{ijk} = C'^{ijklm} \varepsilon_{lm} + F'^{ijklm} \gamma_{lm} + H^{ijklmn} \varkappa_{lmn} \quad (\varkappa_{ijk} = \nabla_i \psi_{jk}, \quad F'^{ijklm} = F^{lmijk}),$$

где $\mathbf{x}$ — макрорадиус-вектор, ξ — микрорадиус-вектор, $\mathbf{u}$ — вектор макроперемещений, $\mathbf{v}$ — вектор микроперемещений, $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ — тензор макродеформаций, $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}$ — тензор относительной дисторсии,

$\underline{\underline{\psi}} = \nabla_{\underline{\underline{\xi}}} \mathbf{v}$ — тензор микродисторсии, $\underline{\underline{\kappa}} = \nabla_{\mathbf{x}} \underline{\underline{\psi}}$ —

макроградиент тензора микродисторсии (эти тензоры не зависят от микрокоординат), $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ — симметричный тензор напряжений, $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ — несимметричный тензор относительных напряжений, $\underline{\underline{\mu}}$ — тензор моментных напряжений, Φ — удельная потенциальная энергия.

Если материал имеет центр симметрии, то ${}^5\mathbb{C}=0$, ${}^5\mathbb{F}=0$ и

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 \otimes \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2 \otimes \underline{\underline{\gamma}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\gamma}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}'}}^2 \otimes \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 \otimes \underline{\underline{\gamma}}, \quad \underline{\underline{\mu}} = {}^6\mathbb{H}^3 \otimes \underline{\underline{\kappa}},$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 \otimes \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\gamma}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 \otimes \underline{\underline{\gamma}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\kappa}}^3 \otimes {}^6\mathbb{H}^3 \otimes \underline{\underline{\kappa}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbf{B}}}^2 \otimes \underline{\underline{\gamma}}.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{X}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \underline{\underline{\gamma}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbb{Y}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbb{M}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}'}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}'}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{pmatrix}^2 \otimes \begin{pmatrix} \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \underline{\underline{\gamma}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \end{pmatrix}$$

или $\underline{\underline{\mathbb{M}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbb{X}}} = \underline{\underline{\mathbb{Y}}}$. Можно ли $\underline{\underline{\mathbb{M}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbb{X}}} = \lambda \underline{\underline{\mathbb{X}}}$? Можно ли ${}^6\mathbb{H}^3 \otimes \underline{\underline{\kappa}} = \lambda \underline{\underline{\kappa}}$?

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{A}} & \underset{\sim}{\mathbf{B}} & \underset{\sim}{^5\mathbf{C}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{B}'} & \underset{\sim}{\mathbf{D}} & \underset{\sim}{^5\mathbf{F}} \\ \underset{\sim}{^5\mathbf{C}'} & \underset{\sim}{^5\mathbf{F}'} & \underset{\sim}{^6\mathbf{H}} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\gamma}} \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\varkappa}} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\mathbf{P}} \\ \underset{\sim}{\mathbf{Q}} \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} \end{pmatrix}, \quad \boxed{\mathbb{M} \odot \mathbb{X} = \lambda \underset{\sim}{\mathbb{X}}}, \quad \odot = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{^2\otimes} & 0 & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{^2\otimes} & 0 \\ 0 & 0 & \underset{\sim}{^3\otimes} \end{pmatrix}.$$

1.6 Некоторые нелинейные материалы (Б.Е.Победря):

$$\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \sum_{n=1}^N \underset{\sim}{^2(n+1)} \underset{\sim}{\mathbb{A}} \underset{\sim}{\otimes} \underset{\sim}{^2n} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^n = \underset{\sim}{^4\mathbb{A}} \underset{\sim}{\otimes} \underset{\sim}{^2} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underset{\sim}{^6\mathbb{A}} \underset{\sim}{\otimes} \underset{\sim}{^4} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 + \underset{\sim}{^8\mathbb{A}} \underset{\sim}{\otimes} \underset{\sim}{^6} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^3 + \dots + \underset{\sim}{^2(N+1)} \underset{\sim}{\mathbb{A}} \underset{\sim}{\otimes} \underset{\sim}{^2N} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^N,$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}^n = \overbrace{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}^n.$$

Постановки задач на собственные значения тензора и тензорно-блочной матрицы (ТБМ) любого четного ранга, а также обобщенных задач на собственные значения.
Найти все тензорные столбцы $\mathbb{U}$ которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbb{M} \underset{\sim}{\otimes}^p \mathbb{U} = \lambda \mathbb{U}, \quad (1.1)$$

где λ — скаляр, а

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_m \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \cdots & \mathbf{A}_{1m} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \cdots & \mathbf{A}_{2m} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \cdots & \mathbf{A}_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \mathbf{A}_{m3} & \cdots & \mathbf{A}_{mm} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{R}^{i_1 \dots i_p} \mathbf{R}_{j_1 \dots j_p} = \mathbb{M}_i^j \mathbf{R}^i \mathbf{R}_j, \quad \mathbf{R}_{i_1 \dots i_p} = \mathbf{r}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{r}_p,$$

$$\mathbf{R}_i \otimes^p \mathbf{R}^j = \mathbf{g}_i^j, \quad \mathbf{A}_{kl} = A_{kl, j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}^{j_1 j_2 \dots j_p} = A_{kl, \cdot j}^{i \cdot} \mathbf{R}_i \mathbf{R}^j,$$

$$k, l = \overline{1, m}, \quad i_1, i_2, \dots, i_p, \quad j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad N = n^p. \quad (1.3)$$

Обобщенная задача на собственные значения для тензорно-блочной матрицы любого четного ранга.

Для некоторых $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$ и $\mathbb{N} \in \mathbb{R}_{2p}^{m \times m}(\Omega)$ найти все тензорные столбцы $\mathbb{W} \in \mathbb{R}_p^{m \times 1}(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbb{M} \otimes^p \mathbb{W} = \lambda \mathbb{N} \otimes^p \mathbb{W}, \quad (1.4)$$

где λ — скаляр, а p и m — произвольные фиксированные натуральные числа.

Краткий обзор. Собственные модули (знач-я) и собственные состояния (тензоры) для изотропного материала известны со времени Стокса (1845 г.) [1]. Для анизотропных материалов понятие собственных модулей и собственных состояний, под другими названиями, было введено Кельвином в середине позапрошлого века (1856 г.). Однако почему-то все это было надолго забыто и лишь примерно 40 лет назад исследователи вернулись к изучению этой проблемы. В частности, этой проблемой занимались Я. Рыхлевский [2,3], Л.М. Минкевич [4], Л.А. Толоконников, Н.М. Матченко [5], А.С. Пипкин [6], К.С. Александров [7], К.Л. Лурье [8], А.И. Чанышев [9,10], А.Ф. Ревуженко, А.И. Чанышев, Е.И. Шемякин [11], Н.И. Остросаблин [12–16] и другие. Для получения более полной информации о работах отечественных и зарубежных авторов по этой теме заинтересованного читателя отсылаем к докторской диссертации Н.И. Остросаблина [15], в списке литературы которой приведены многие работы по данной проблеме. Следует отметить, что Н.И. Остросаблин довольно полно изучил внутреннюю структуру классического тензора модулей упругости, дал классификацию анизотропных классических линейно-упругих материалов, а также изучил много других важных проблем, которые отражены в его докторской диссертации. Отметим также, что задачу о нахождении у комплексного тензора любого четного ранга собственных значений и собственных тензоров рассматривал И.Н. Векуа [17]. См. также [18,19,20] (Никабадзе М.У.). Понятие собственных упругих состояний нашло применение в построении теории пластичности [21,22] и теории течения [23] (Победря Б.Е.). Работы по этой теме для микрополярных материалов, автору не известны, кроме работы автора [19,20].

Микрополярный линейно-упругий материал

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{B}}}; \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) &= \frac{1}{2} (A^{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + 2B^{ijkl} \gamma_{ij} \kappa_{kl} + D^{ijkl} \kappa_{ij} \kappa_{kl}) = \\ &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + 2\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^4 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + 2\underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes^4 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes^4 \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ и $\underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений, $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ — тензор деформаций, $\underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} = \nabla \boldsymbol{\varphi}$ — тензор изгибов-кручений, $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ — материальные тензоры четвертого ранга (тензоры модулей упругости), $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ — дискрим-ый тензор, $\otimes^2$ — внутр-ее 2-произ-ие, $\otimes^4$ — внутр-ее 4-произ-ие.

Вводя в рассмотрение

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{Y}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}}} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{pmatrix} \quad (\underline{\underline{\mathbf{B}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{C}}}, \underline{\underline{\mathbf{M}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{M}}}), \quad (1.7)$$

ОС и УЭД можно записать в виде

$$\underline{\underline{\mathbf{Y}}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{X}}}, \quad 2\Phi(\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}) = \underline{\underline{\mathbf{X}}}^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{M}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{X}}} \left(\begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}}} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{pmatrix} \otimes^2 \begin{pmatrix} \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \end{pmatrix} \right). \quad (1.8)$$

Для материала с центром симметрии $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — нулевой тензор четвертого ранга. Поэтому $\mathbb{M}$ получит вид тензорно-блочной диагональной матрицы

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

В дальнейшем для несимметричных тензоров второго ранга используем двухиндексные и одноиндексные, а для несимметричных тензоров четвертого ранга — четырехиндексные и двухиндексные представления.

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}} = P_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sum_{m=1}^9 P_m \underline{\mathbf{e}}_m = P_m \underline{\mathbf{e}}_m, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = A_{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = A_{mn} \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{e}}_n, \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad \underline{\mathbf{e}}_m \otimes \underline{\mathbf{e}}_n = \delta_{mn}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad m, n = \overline{1, 9}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad \underline{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \quad \underline{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \\ \underline{\mathbf{e}}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1), \quad \underline{\mathbf{e}}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad \underline{\mathbf{e}}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3), \\ \underline{\mathbf{e}}_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1), \quad \underline{\mathbf{e}}_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad \underline{\mathbf{e}}_9 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Введем определение положительно-определенной симметричной тензорно-блочной матрицы и сформулируем теорему.

Определение

Симметрическая ТБМ $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ называется положительно-определенной, если образуемая по ней квадратичная форма $\underline{\underline{W}}^T \otimes \underline{\underline{\mathbb{M}}} \otimes \underline{\underline{W}}$ положительна для любого отличного от нуля вещественного тензорного столбца $\underline{\underline{W}}$ ($\underline{\underline{W}}^T = (\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}})$).

Теорема

Тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ тензоров модулей упругости положительно определена. Тензоры модулей упругости (субтензоры) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ также положительно определены.

Следствие

Тензорно-блочно-диагональная матрица $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ (1.9) тензоров модулей упругости положительно определена. Субтензоры $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ также положительно определены.

Постановка задачи на собственные значения тензорно-блочной матрицы тензоров модулей упругости. Найти все тензорные столбцы

$$\underline{\underline{W}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{u}} \\ \underline{\underline{v}} \end{pmatrix} \left(\underline{\underline{W}}^T = (\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}}) \right), \quad (1.12)$$

которые удовлетворяют уравнению

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}}^2 \underline{\underline{\mathbb{W}}} = \lambda \underline{\underline{\mathbb{W}}} \quad \left(\underline{\underline{\mathbb{W}}}^T \underline{\underline{\mathbb{M}}}^T = \lambda \underline{\underline{\mathbb{W}}}^T \right), \quad (1.13)$$

где $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{v}}}$ — тензоры второго ранга, а λ — скаляр.

Уравнение (1.13) всегда имеет тривиальное решение $\underline{\underline{\mathbb{W}}} = \underline{\underline{\mathbb{O}}}$, где $\underline{\underline{\mathbb{O}}}$ — нулевой тензорный столбец (второго ранга), состоящий из двух нулевых тензоров второго ранга. Далее, говоря о решении уравнения (1.13), будем иметь в виду только нетривиальное решение $\underline{\underline{\mathbb{W}}} \neq \underline{\underline{\mathbb{O}}}$. При этом будем

считать, что $\|\underline{\underline{\mathbb{W}}}\| = \sqrt{\underline{\underline{\mathbb{W}}}^T \underline{\underline{\mathbb{M}}}^2 \underline{\underline{\mathbb{W}}}} = 1$.

Если для некоторого скаляра λ уравнение (1.13) имеет решение $\underline{\underline{\mathbb{W}}}$, то λ называется собственным значением тензорно-блочной матрицы $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$, а $\underline{\underline{\mathbb{W}}}$ — собственным тензорным столбцом, соответствующим собственному значению λ .

Справедливы обычные теоремы о собственных значениях и собственных тензорных столбцах.

Утверждение

Если λ и λ' — два различных собственных значения тензорно-блочной матрицы $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$, то соответствующие им любые два собственных тензорных столбца $\underline{\underline{\mathbb{W}}}$ и $\underline{\underline{\mathbb{W}'}}$ линейно независимы.

Теорема

Собственные тензорные столбцы тензорно-блочной матрицы $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$, соответствующие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Теорема

Если λ и λ' — два различных собственных значения симметрической тензорно-блочной матрицы $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$, то соответствующие им любые два собственных тензорных столбца $\underline{\underline{\mathbb{W}}}$ и $\underline{\underline{\mathbb{W}'}}$ ортогональны (в множестве тензоров второго ранга в качестве скалярного произведения принято внутреннее 2-произведение).

Теорема

Собственные тензорные столбцы симметричной тензорно-блочной матрицы, соответствующие попарно различным собственным значениям, попарно ортогональны.

Теорема

Собственные значения положительно определенной симметрической тензорно-блочной матрицы $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ положительны.

Нетрудно заметить, что уравнение (1.13) можно записать в виде

$$(\underline{\underline{\mathbb{M}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}})^2 \otimes \underline{\underline{\mathbb{W}}} = \underline{\underline{\mathbb{O}}} \quad \left\{ \left(\begin{array}{cc} \underline{\underline{\mathbb{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}} & \underline{\underline{\mathbb{D}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}} \end{array} \right)^2 \otimes \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbb{u}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{v}}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{O}}}, \quad \underline{\underline{\mathbb{E}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{O}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{O}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} \end{pmatrix} \right\}. \quad (1.14)$$

где $\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{(2)}$ — единичный тензор четвертого ранга, а $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ — единичная ТБМ.

Видно, что (1.14) представляет однородную систему 18 уравнений относительно 18 неизвестных (два несимметричных тензора $\underline{\mathbf{u}}$ и $\underline{\mathbf{v}}$), которая должна иметь нетривиальное решение. Для существования нетривиального решения системы уравнений (1.14) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т.е.

$$\det(\underline{\mathbb{M}} - \lambda \underline{\mathbb{E}}) = 0, \quad \left(\det \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{A}} - \lambda \underline{\mathbf{E}} & \underline{\mathbf{B}} \\ \underline{\mathbf{C}} & \underline{\mathbf{D}} - \lambda \underline{\mathbf{E}} \end{pmatrix} = 0 \right). \quad (1.15)$$

Запишем характеристическое уравнение (1.15) в развернутом виде

$$\lambda^{18} - I_1(\underline{\mathbb{M}})\lambda^{17} + I_2(\underline{\mathbb{M}})\lambda^{16} - \dots - I_{17}(\underline{\mathbb{M}})\lambda + I_{18}(\underline{\mathbb{M}}) = 0, \quad I_{18}(\underline{\mathbb{M}}) = \det \underline{\mathbb{M}}. \quad (1.16)$$

Теорема

(Гамильтона-Кели) *Всякая тензорно-блочная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению.*

$$\underline{\mathbb{M}}^{18} - I_1(\underline{\mathbb{M}})\underline{\mathbb{M}}^{17} + I_2(\underline{\mathbb{M}})\underline{\mathbb{M}}^{16} - \dots + I_{16}(\underline{\mathbb{M}})\underline{\mathbb{M}}^2 - I_{17}(\underline{\mathbb{M}})\underline{\mathbb{M}} + I_{18}(\underline{\mathbb{M}})\underline{\mathbb{E}} = 0.$$

Инварианты ТБМ $\underline{\underline{\mathbb{M}}} \in \mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$ в уравнении (1.16) вычисляются по формулам

$$S_k = I_k(\underline{\underline{\mathbb{M}}}) = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & \cdots & 0 & 0 \\ S_4 & S_3 & S_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k-1} & S_{k-2} & S_{k-3} & \cdots & S_1 & k-1 \\ S_k & S_{k-1} & S_{k-2} & \cdots & S_2 & S_1 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, 18}, \quad (1.17)$$

$$S_k = I_1(\underline{\underline{\mathbb{M}}}^k), \quad k = \overline{1, 18}, \quad \underline{\underline{\mathbb{M}}}^k = \overbrace{\underline{\underline{\mathbb{M}}}^2 \otimes \underline{\underline{\mathbb{M}}}^2 \cdots \otimes \underline{\underline{\mathbb{M}}}^2}^k,$$

первый инвариант для $\underline{\underline{\mathbb{M}}} \in \mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$ определяется следующим образом:

$$I_1(\underline{\underline{\mathbb{M}}}) = I_1 \left(\begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{pmatrix} \right) = I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}) = I_1(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) + I_1(\underline{\underline{\mathbf{D}}}). \quad (1.18)$$

Обратные к (1.17) соотношения представляются в виде

$$s_k = I_1(\widetilde{\mathbb{M}}^k) = \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2S_2 & S_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3S_3 & S_2 & S_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (k-1)S_{k-1} & S_{k-2} & S_{k-3} & S_{k-4} & \cdots & S_1 & 1 \\ kS_k & S_{k-1} & S_{k-2} & S_{k-3} & \cdots & S_2 & S_1 \end{vmatrix}, \quad k=\overline{1,18}.$$

Характеристическое уравнение (1.15) (или (1.16)) тензорно-блочной матрицы $\widetilde{\mathbb{M}}$ имеет 18 положительных корней (собственных значений), считая каждый корень столько раз, какова его кратность. Обозначая корни уравнения (1.15) через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{18}$ и перенумеруя их в порядке убывания, будем иметь

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{18} > 0. \quad (1.19)$$

Далее приведем некоторые определения и теоремы из [Nikabadze M.U., **Topics on tensor calculus with applications to mechanics.** *J. Math. Sci.* **225**:1, 2017, 194 p. <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3467-4/>], которые сформулируем для тензорно-блочных матриц, имеющих матрицу 18-го порядка.

Определение

Комплексная тензорно-блочная матрица называется нормальной, если она коммутирует со своей сопряженной.

Следовательно, действительная симметрическая тензорно-блочная матрица, действительная ортогональная тензорно-блочная матрица, а также единичная тензорно-блочная матрица суть нормальные тензорно-блочные матрицы. Кроме того, эрмитова тензорно-блочная матрица и унитарная тензорно-блочная матрица суть нормальные тензорно-блочные матрицы.

Определение

Система тензорных столбцов $\underline{\mathbb{W}}_1, \underline{\mathbb{W}}_2, \dots, \underline{\mathbb{W}}_n$ называется ортонормированной, если выполняются условия

$$(\underline{\mathbb{W}}_p, \underline{\mathbb{W}}_q) = \underline{\mathbb{W}}_p^T \underline{\mathbb{W}}_q = \delta_{pq}, \quad p, q = \overline{1, n}. \quad (1.20)$$

Определение

Ортонормированная система собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы $\underline{\mathbb{M}}$ (соответствующая матрица имеет 18-ый порядок), состоящая из 18-и тензорных столбцов, называется полной ортонормированной системой собственных тензорных столбцов (ПОССТС) тензорно-блочной матрицы $\underline{\mathbb{M}}$.

Определение

Тензорно-блочная матрица $\underline{\mathbb{M}}$ (соответствующая матрица имеет 18-ый порядок) называется тензорно-блочной матрицей простой структуры, если она имеет 18 линейно независимых собственных тензорных столбцов.

Утверждение

Тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ имеет простую структуру, если все корни характеристического уравнения различны между собой.

Заметим, что обратное утверждение неверно, т.е. существуют тензорно-блочные матрицы простой структуры, характеристические уравнения которых имеют кратные корни (например, единичная тензорно-блочная матрица).

Теорема

Теорема 1.5. Действительная симметричная (нормальная) тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ всегда имеет полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов.

В силу теоремы 1.5 положительно-определенная симметрическая тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ всегда имеет ПОССТС. В рассматриваемом случае, очевидно, ПОССТС тензорно-блочной матрицы $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$, состоит из 18-и тензорных столбцов.

Обозначая через $\underline{\mathbb{W}}_p = (\underline{\mathbf{u}}_p, \underline{\mathbf{v}}_p)^T$, $p = \overline{1, 18}$ ПОССТС положительно определенной симметричной тензорно-блочной матрицы $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$, соответствующие собственным значениям λ_p , $p = \overline{1, 18}$ соответственно, ее можно представить в следующем виде:

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \\ \underline{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{v}}_p \\ \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

где, конечно, имеют место соотношения (условия ортонормированности)

$$(\mathbb{W}_p, \mathbb{W}_q) = \mathbb{W}_p^T \overset{2}{\otimes} \mathbb{W}_q = \underline{\mathbf{u}}_p \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{u}}_q + \underline{\mathbf{v}}_p \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{v}}_q = \delta_{pq}, \quad p, q = \overline{1, 18}. \quad (1.22)$$

Учитывая выражения для тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}$ (см. (1.7)), из (1.21) получим

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{u}}_p^T, \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{v}}_p^T, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{v}}_p^T. \quad (1.23)$$

Обратная к (1.21) тензорно-блочная матрица $\mathbb{M}^{-1}$ представляется в виде

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}}^{-1} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \mathbb{W}_p \mathbb{W}_p^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \\ \underline{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix} (\underline{\mathbf{u}}_p^T \quad \underline{\mathbf{v}}_p^T) = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{u}}_p^T & \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{v}}_p^T \\ \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{u}}_p^T & \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{v}}_p^T \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Вообще говоря, для любого целого числа α будем иметь

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}}^\alpha = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^\alpha \mathbb{W}_p \mathbb{W}_p^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^\alpha \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \\ \underline{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix} (\underline{\mathbf{u}}_p^T \quad \underline{\mathbf{v}}_p^T) = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^\alpha \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{u}}_p^T & \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{v}}_p^T \\ \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{u}}_p^T & \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{v}}_p^T \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

В частности, при $\alpha = 0$ имеем

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \underline{\underline{\mathbb{M}}}^0 = \sum_{p=1}^{18} \mathbb{W}_p \mathbb{W}_p^T = \sum_{p=1}^{18} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \\ \underline{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix} (\underline{\mathbf{u}}_p^T \quad \underline{\mathbf{v}}_p^T) = \sum_{p=1}^{18} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{u}}_p^T & \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{v}}_p^T \\ \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{u}}_p^T & \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{v}}_p^T \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Канонические представления УЭД и ОС

Учитывая (1.21), из (1.8) получим

$$2\Phi(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa}) = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\mathbb{X}}^T \otimes \underline{\mathbb{W}}_p \underline{\mathbb{W}}_p^T \otimes \underline{\mathbb{X}}, \quad \underline{\mathbb{Y}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\mathbb{W}}_p \underline{\mathbb{W}}_p^T \otimes \underline{\mathbb{X}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\mathbb{X}}_p \underline{\mathbb{W}}_p \quad (1.27)$$

соответственно. Умножая обе части второго соотношения (1.27) скалярно слева на $\underline{\mathbb{W}}_\alpha^T$ и учитывая (1.22), определяющие соотношения можно записать в виде

$$(\underline{\mathbb{Y}}, \underline{\mathbb{W}}_\alpha) = \lambda_\alpha (\underline{\mathbb{X}}, \underline{\mathbb{W}}_\alpha) \quad (\underline{\mathbb{Y}}^T \otimes \underline{\mathbb{W}}_\alpha = \lambda_\alpha \underline{\mathbb{X}}^T \otimes \underline{\mathbb{W}}_\alpha, \quad \underline{\mathbb{W}}_\alpha^T \otimes \underline{\mathbb{Y}} = \lambda_\alpha \underline{\mathbb{W}}_\alpha^T \otimes \underline{\mathbb{X}}), \quad \langle \alpha = \overline{1, 18} \rangle. \quad (1.28)$$

Формулами (1.28) даны эквивалентные записи определяющих соотношений.

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{X}}_\alpha &= (\underline{\mathbb{X}}, \underline{\mathbb{W}}_\alpha) = \underline{\mathbb{X}}^T \otimes \underline{\mathbb{W}}_\alpha = \underline{\mathbb{W}}_\alpha^T \otimes \underline{\mathbb{X}} = \underline{\mathbf{u}}_\alpha \otimes \underline{\gamma} + \underline{\mathbf{v}}_\alpha \otimes \underline{\varkappa}, \\ \underline{\mathbb{Y}}_\alpha &= (\underline{\mathbb{Y}}, \underline{\mathbb{W}}_\alpha) = \underline{\mathbb{Y}}^T \otimes \underline{\mathbb{W}}_\alpha = \underline{\mathbb{W}}_\alpha^T \otimes \underline{\mathbb{Y}} = \underline{\mathbf{u}}_\alpha \otimes \underline{\mathbf{p}} + \underline{\mathbf{v}}_\alpha \otimes \underline{\mu}, \quad \langle \alpha = \overline{1, 18} \rangle, \end{aligned} \quad (1.29)$$

первое равенство (1.27) (УЭД) и определяющие соотношения (1.28) представляются соответственно в форме

$$2\Phi(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa}) = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\mathbb{X}}_p^2, \quad \underline{\mathbb{Y}}_\alpha = \lambda_\alpha \underline{\mathbb{X}}_\alpha, \quad \langle \alpha = \overline{1, 18} \rangle. \quad (1.30)$$

Умножая обе части равенства (1.29) на $\mathbb{W}_\alpha$, а затем полученное соотношение суммируя от 1 до 18, в силу (1.26) получим

$$\underline{\mathbb{X}} = \sum_{\alpha=1}^{18} \mathbb{X}_\alpha \underline{\mathbb{W}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{18} (\underline{\mathbf{u}}_\alpha \otimes \underline{\boldsymbol{\gamma}} + \underline{\mathbf{v}}_\alpha \otimes \underline{\boldsymbol{\varkappa}}) \underline{\mathbb{W}}_\alpha, \quad \underline{\mathbb{Y}} = \sum_{\alpha=1}^{18} \mathbb{Y}_\alpha \underline{\mathbb{W}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{18} (\underline{\mathbf{u}}_\alpha \otimes \underline{\mathbf{P}} + \underline{\mathbf{v}}_\alpha \otimes \underline{\boldsymbol{\mu}}) \underline{\mathbb{W}}_\alpha. \quad (1.31)$$

Формулы (1.31) являются разложениями тензорных столбцов $\underline{\mathbb{X}}$ и $\underline{\mathbb{Y}}$ по ортонормированному базису $\underline{\mathbb{W}}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, 18}$, а $\mathbb{X}_\alpha$ и $\mathbb{Y}_\alpha$ — проекциями $\underline{\mathbb{X}}$ и $\underline{\mathbb{Y}}$ на $\underline{\mathbb{W}}_\alpha$.

Из второго соотношения (1.27) получим следующие представления тензоров напряжений и моментных напряжений:

$$\underline{\mathbf{P}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \mathbb{X}_p \underline{\mathbf{u}}_p = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p (\underline{\mathbf{u}}_p \otimes \underline{\boldsymbol{\gamma}} + \underline{\mathbf{v}}_p \otimes \underline{\boldsymbol{\varkappa}}) \underline{\mathbf{u}}_p, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \mathbb{X}_p \underline{\mathbf{v}}_p = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p (\underline{\mathbf{u}}_p \otimes \underline{\boldsymbol{\gamma}} + \underline{\mathbf{v}}_p \otimes \underline{\boldsymbol{\varkappa}}) \underline{\mathbf{v}}_p. \quad (1.32)$$

Обратные определяющие соотношения имеют вид

$$\underline{\mathbb{X}} = \underline{\mathbb{M}}^{-1} \otimes \underline{\mathbb{Y}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \underline{\mathbb{W}}_p \underline{\mathbb{W}}_p^T \otimes \underline{\mathbb{Y}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \mathbb{Y}_p \underline{\mathbb{W}}_p, \quad \mathbb{X}_\alpha = \lambda_\alpha^{-1} \mathbb{Y}_\alpha, \quad \langle \alpha = \overline{1, 18} \rangle. \quad (1.33)$$

$$\underline{\boldsymbol{\gamma}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \mathbb{Y}_p \underline{\mathbf{u}}_p = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} (\underline{\mathbf{u}}_p \otimes \underline{\mathbf{P}} + \underline{\mathbf{v}}_p \otimes \underline{\boldsymbol{\mu}}) \underline{\mathbf{u}}_p, \quad \underline{\boldsymbol{\varkappa}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \mathbb{Y}_p \underline{\mathbf{v}}_p = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} (\underline{\mathbf{u}}_p \otimes \underline{\mathbf{P}} + \underline{\mathbf{v}}_p \otimes \underline{\boldsymbol{\mu}}) \underline{\mathbf{v}}_p. \quad (1.34)$$

ПОСТРОЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ТЕНЗОРНЫХ СТОЛБЦОВ ТБМ

Прекрасно, скажет искушённый читатель, но ведь сама задача нахождения собственных упругих состояний для заданного упругого тела отнюдь не проста, во всяком случае с расчётной стороны. Я отвечаю на это: решать ее в лоб придется лишь в исключительных случаях. Напротив, я считаю, что целесообразно поступать совсем наоборот: надо задавать упругое тело набором его собственных упругих состояний и соответствующих им модулей жёсткости.

Ян Рыхлевский

На самом деле, ~~нет необходимости решить уравнение 18-ой степени (1.15), а просто~~ ТБМ и ОС следует представить в силу (1.21) и (1.28) в виде

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T, \quad (\underline{\underline{\mathbb{Y}}}, \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha) = \lambda_\alpha (\underline{\underline{\mathbb{X}}}, \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha) \quad \langle \alpha = \overline{1, 18} \rangle.$$

Видно, что для полного задания тензорно-блочной матрицы $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$, кроме 18-ых собственных значений λ_p , $p = \overline{1, 18}$, необходимо задать 18 собственных тензорных столбцов $\underline{\underline{\mathbb{W}}}_p$, $p = \overline{1, 18}$.

Построим эти собственные тензорные столбцы (СТС) в явном виде. Прежде всего отметим, что условия ортонормированности (1.22)

$$(\underline{\underline{\mathbb{W}}}_p, \underline{\underline{\mathbb{W}}}_q) = \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_q = \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{u}}}_q + \underline{\underline{\mathbf{v}}}_p^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{v}}}_q = \delta_{pq}, \quad p, q = \overline{1, 18}$$

суть 171 независимое соотношение, связывающее между собой 324 компоненты тензорных столбцов $\underline{\underline{\mathbb{W}}}_p = (\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p, \underline{\underline{\mathbf{v}}}_p)^T$, $p = \overline{1, 18}$. Итак, независимыми остаются 153 и с помощью них следует построить СТС ТБМ $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$.

В этой связи рассмотрим следующие тензоры четвертого ранга:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{W}}}_{11} &= \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{u}}_m \cdot = u_{mn} \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{e}}_n, & \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{12} &= \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{v}}_m \cdot = v_{mn} \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{e}}_n, & (m, n = \overline{1, 9}), \\ \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{21} &= \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{u}}_{9+m} \cdot = u_{9+mn} \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{e}}_n, & \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{22} &= \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{v}}_{9+m} \cdot = v_{9+mn} \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{e}}_n,\end{aligned}\quad (1.35)$$

посредством которых построим следующую тензорно-блочную матрицу:

$$\underline{\underline{\mathbb{W}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{11} & \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{12} \\ \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{21} & \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{22} \end{pmatrix} \quad \left(\underline{\underline{\mathbb{W}}}^T = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{11}^T & \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{21}^T \\ \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{12}^T & \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{22}^T \end{pmatrix} \right). \quad (1.36)$$

Если тензорные столбцы $\underline{\underline{\mathbb{W}}}_p = (\underline{\mathbf{u}}_p, \underline{\mathbf{v}}_p)^T$, $p = \overline{1, 18}$ удовлетворяют условиям ортонормированности (1.22), то ТБМ (1.36) удовлетворяет условию

$$\underline{\underline{\mathbb{W}}} \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{\mathbb{W}}}^T = \underline{\underline{\mathbb{W}}}^T \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{\mathbb{W}}} = \underline{\underline{\mathbb{E}}}. \quad (1.37)$$

В силу (1.37) заключаем, что $\underline{\underline{\mathbb{W}}}$ — ортогональная ТБМ четвертого ранга. Кроме того, условия ортонормированности (1.22) эквивалентны соотношению

$$\underline{\underline{\mathbb{W}}} \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{\mathbb{W}}}^T = \underline{\underline{\mathbb{E}}}. \quad (1.38)$$

Таким образом, ТБМ (1.36) имеет 324 компоненты, которые связаны между собой соотношением (1.38), равносильным 171 соотношению (1.22) и, следовательно, среди 324 компонент независимыми остаются 153, с помощью которых следует построить СТС ТБМ $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$. С этой целью используем теорему о разложении невырожденной квадратной матрицы, которую для ТБМ любого четного ранга можно сформулировать в виде.

Теорема

Для того чтобы квадратная невырожденная тензорно-блочная матрица представлялась в виде произведения левой треугольной (~~унитреугольной~~) и правой унитреугольной (~~треугольной~~) тензорно-блочных матриц, необходимо и достаточно, чтобы определители всех ведущих главных субтензоров (~~субматриц матриц компонент~~) этой тензорно-блочной матрицы были отличны от нуля.

Применяя теорему 1.8 к тензорно-блочной матрице (1.36), можем написать

$$\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{L} \overset{2}{\otimes} \underset{\sim}{R}, \quad (1.39)$$

где левая треугольная $\underset{\sim}{L}$ и правая унитреугольная $\underset{\sim}{R}$ ТБМ имеют вид

$$\underset{\sim}{L} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{L}_{11} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{L}_{21} & \underset{\sim}{L}_{22} \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{R} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{R}_{11} & \underset{\sim}{R}_{12} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{R}_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Следует заметить, что соответствующие тензорам $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{L}_{11}$, $\underset{\sim}{L}_{21}$, $\underset{\sim}{L}_{22}$ и $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{R}_{11}$, $\underset{\sim}{R}_{12}$, $\underset{\sim}{R}_{22}$ матрицы L , L_{11} , L_{21} , L_{22} и R , R_{11} , R_{12} , R_{22} представляются в форме

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

$$L_{11} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{61} & l_{62} & l_{63} & l_{64} & l_{65} & l_{66} & 0 & 0 & 0 \\ l_{71} & l_{72} & l_{73} & l_{74} & l_{75} & l_{76} & l_{77} & 0 & 0 \\ l_{81} & l_{82} & l_{83} & l_{84} & l_{85} & l_{86} & l_{87} & l_{88} & 0 \\ l_{91} & l_{92} & l_{93} & l_{94} & l_{95} & l_{96} & l_{97} & l_{98} & l_{99} \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

$$L_{21} = \begin{pmatrix} l_{101} & l_{102} & l_{103} & l_{104} & l_{105} & l_{106} & l_{107} & l_{108} & l_{109} \\ l_{111} & l_{112} & l_{113} & l_{114} & l_{115} & l_{116} & l_{117} & l_{118} & l_{119} \\ l_{121} & l_{122} & l_{123} & l_{124} & l_{125} & l_{126} & l_{127} & l_{128} & l_{129} \\ l_{131} & l_{132} & l_{133} & l_{134} & l_{135} & l_{136} & l_{137} & l_{138} & l_{139} \\ l_{141} & l_{142} & l_{143} & l_{144} & l_{145} & l_{146} & l_{147} & l_{148} & l_{149} \\ l_{151} & l_{152} & l_{153} & l_{154} & l_{155} & l_{156} & l_{157} & l_{158} & l_{159} \\ l_{161} & l_{162} & l_{163} & l_{164} & l_{165} & l_{166} & l_{167} & l_{168} & l_{169} \\ l_{171} & l_{172} & l_{173} & l_{174} & l_{175} & l_{176} & l_{177} & l_{178} & l_{179} \\ l_{181} & l_{182} & l_{183} & l_{184} & l_{185} & l_{186} & l_{187} & l_{188} & l_{189} \end{pmatrix}, \quad (1.43)$$

$$L_{22} = \begin{pmatrix} l_{1010} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{1110} & l_{1111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{1210} & l_{1211} & l_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{1310} & l_{1311} & l_{1312} & l_{1313} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{1410} & l_{1411} & l_{1412} & l_{1413} & l_{1414} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{1510} & l_{1511} & l_{1512} & l_{1513} & l_{1514} & l_{1515} & 0 & 0 & 0 \\ l_{1610} & l_{1611} & l_{1612} & l_{1613} & l_{1614} & l_{1615} & l_{1616} & 0 & 0 \\ l_{1710} & l_{1711} & l_{1712} & l_{1713} & l_{1714} & l_{1715} & l_{1716} & l_{1717} & 0 \\ l_{1810} & l_{1811} & l_{1812} & l_{1813} & l_{1814} & l_{1815} & l_{1816} & l_{1817} & l_{1818} \end{pmatrix}, \quad (1.44)$$

$$R_{11} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} & r_{17} & r_{18} & r_{19} \\ 0 & 1 & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & r_{27} & r_{28} & r_{29} \\ 0 & 0 & 1 & r_{34} & r_{35} & r_{36} & r_{37} & r_{38} & r_{39} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_{45} & r_{46} & r_{47} & r_{48} & r_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{56} & r_{57} & r_{58} & r_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{67} & r_{68} & r_{69} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{78} & r_{99} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

$$R_{12} = \begin{pmatrix} r_{110} & r_{111} & r_{112} & r_{113} & r_{114} & r_{115} & r_{116} & r_{117} & r_{118} \\ r_{210} & r_{211} & r_{212} & r_{213} & r_{214} & r_{215} & r_{216} & r_{217} & r_{218} \\ r_{310} & r_{311} & r_{312} & r_{313} & r_{314} & r_{315} & r_{316} & r_{317} & r_{318} \\ r_{410} & r_{411} & r_{412} & r_{413} & r_{414} & r_{415} & r_{416} & r_{417} & r_{418} \\ r_{510} & r_{511} & r_{512} & r_{513} & r_{514} & r_{515} & r_{516} & r_{517} & r_{518} \\ r_{610} & r_{611} & r_{612} & r_{613} & r_{614} & r_{615} & r_{616} & r_{617} & r_{618} \\ r_{710} & r_{711} & r_{712} & r_{713} & r_{714} & r_{715} & r_{716} & r_{717} & r_{718} \\ r_{810} & r_{811} & r_{812} & r_{813} & r_{814} & r_{815} & r_{816} & r_{817} & r_{818} \\ r_{910} & r_{911} & r_{912} & r_{913} & r_{914} & r_{915} & r_{916} & r_{917} & r_{918} \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

$$R_{22} = \begin{pmatrix} 1 & r_{1011} & r_{1012} & r_{1013} & r_{1014} & r_{1015} & r_{1016} & r_{1017} & r_{1018} \\ 0 & 1 & r_{1112} & r_{1113} & r_{1114} & r_{1115} & r_{1116} & r_{1117} & r_{1118} \\ 0 & 0 & 1 & r_{1213} & r_{1214} & r_{1215} & r_{1216} & r_{1217} & r_{1218} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1314} & r_{1315} & r_{1316} & r_{1317} & r_{1318} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1415} & r_{1416} & r_{1417} & r_{1418} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1516} & r_{1517} & r_{1518} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1617} & r_{1618} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1718} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Легко видеть, что левый треугольный тензор $\underline{\mathbf{L}}_{11}$, квадратный тензор $\underline{\mathbf{L}}_{21}$ и левый треугольный тензор $\underline{\mathbf{L}}_{22}$, а также правый унитреугольный тензор $\underline{\mathbf{R}}_{11}$, квадратный тензор $\underline{\mathbf{R}}_{12}$ и правый унитреугольный тензор $\underline{\mathbf{R}}_{22}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{11} &= \underline{\mathbf{e}}_p \underline{\mathbf{l}}_p \cdot, & \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{21} &= \underline{\mathbf{e}}_p \underline{\mathbf{m}}_p \cdot, & \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{22} &= \underline{\mathbf{e}}_p \underline{\mathbf{l}}_{9+p} \cdot, \\ \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{11} &= \underline{\mathbf{e}}_p \underline{\mathbf{r}}_p \cdot, & \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{12} &= \underline{\mathbf{e}}_p \underline{\mathbf{n}}_p \cdot, & \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{22} &= \underline{\mathbf{e}}_p \underline{\mathbf{r}}_{9+p} \cdot, \quad p = \overline{1, 9},\end{aligned}\quad (1.48)$$

где для составляющих тензоров введены следующие обозначения:

$$\underline{\mathbf{l}}_p \cdot = \sum_{q=1}^p l_{pq} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad \underline{\mathbf{m}}_p \cdot = \sum_{q=1}^9 l_{9+pq} \underline{\mathbf{e}}_p, \quad \underline{\mathbf{l}}_p \cdot = \sum_{q=1}^p l_{9+p \ 9+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad p = \overline{1, 9};$$

$$\underline{\mathbf{r}}_1 \cdot = \underline{\mathbf{e}}_1 + \sum_{p=2}^9 r_{1p} \underline{\mathbf{e}}_p, \quad \underline{\mathbf{r}}_2 \cdot = \underline{\mathbf{e}}_2 + \sum_{p=3}^9 r_{2p} \underline{\mathbf{e}}_p, \quad \underline{\mathbf{r}}_3 \cdot = \underline{\mathbf{e}}_3 + \sum_{p=4}^9 r_{3p} \underline{\mathbf{e}}_p,$$

$$\underline{\mathbf{r}}_4 \cdot = \underline{\mathbf{e}}_4 + \sum_{p=5}^9 r_{4p} \underline{\mathbf{e}}_p, \quad \underline{\mathbf{r}}_5 \cdot = \underline{\mathbf{e}}_5 + \sum_{p=6}^9 r_{5p} \underline{\mathbf{e}}_p, \quad \underline{\mathbf{r}}_6 \cdot = \underline{\mathbf{e}}_6 + \sum_{p=7}^9 r_{6p} \underline{\mathbf{e}}_p,$$

$$\underline{\mathbf{r}}_7 \cdot = \underline{\mathbf{e}}_7 + \sum_{p=8}^9 r_{7p} \underline{\mathbf{e}}_p, \quad \underline{\mathbf{r}}_8 \cdot = \underline{\mathbf{e}}_8 + r_{89} \underline{\mathbf{e}}_9, \quad \underline{\mathbf{r}}_9 \cdot = \underline{\mathbf{e}}_9, \quad p = \overline{1, 9};$$

$$\underline{\mathbf{n}}_1 \cdot = r_{19+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad \underline{\mathbf{n}}_2 \cdot = r_{29+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad \underline{\mathbf{n}}_3 \cdot = r_{39+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad \underline{\mathbf{n}}_4 \cdot = r_{49+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad \underline{\mathbf{n}}_5 \cdot = r_{59+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad (1.49)$$

$$\underline{\mathbf{n}}_6 \cdot = r_{69+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad \underline{\mathbf{n}}_7 \cdot = r_{79+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad \underline{\mathbf{n}}_8 \cdot = r_{89+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad \underline{\mathbf{n}}_9 \cdot = r_{99+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad (q = \overline{1, 9});$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{10} \cdot = \underline{\mathbf{e}}_1 + \sum_{q=2}^9 r_{109+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad \underline{\mathbf{r}}_{11} \cdot = \underline{\mathbf{e}}_2 + \sum_{q=3}^9 r_{119+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad \underline{\mathbf{r}}_{12} \cdot = \underline{\mathbf{e}}_3 + \sum_{q=4}^9 r_{129+q} \underline{\mathbf{e}}_q,$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{13} \cdot = \underline{\mathbf{e}}_4 + \sum_{q=5}^9 r_{139+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad \underline{\mathbf{r}}_{14} \cdot = \underline{\mathbf{e}}_5 + \sum_{q=6}^9 r_{149+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad \underline{\mathbf{r}}_{15} \cdot = \underline{\mathbf{e}}_6 + \sum_{q=7}^9 r_{159+q} \underline{\mathbf{e}}_q,$$

$$\underline{\mathbf{r}}_{16} \cdot = \underline{\mathbf{e}}_7 + \sum_{q=8}^9 r_{169+q} \underline{\mathbf{e}}_q, \quad \underline{\mathbf{r}}_{17} \cdot = \underline{\mathbf{e}}_8 + r_{1718} \underline{\mathbf{e}}_9, \quad \underline{\mathbf{r}}_{18} \cdot = \underline{\mathbf{e}}_9, \quad (q = \overline{1, 9}).$$

Учитывая (1.36) и (1.40), из (1.39) получим

$$\begin{aligned}\underline{\underline{W}}_{11} &= \underline{\underline{L}}_{11} \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{R}}_{11}, & \underline{\underline{W}}_{12} &= \underline{\underline{L}}_{11} \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{R}}_{12}, \\ \underline{\underline{W}}_{21} &= \underline{\underline{L}}_{21} \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{R}}_{11}, & \underline{\underline{W}}_{22} &= \underline{\underline{L}}_{21} \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{R}}_{12} + \underline{\underline{L}}_{22} \overset{2}{\otimes} \underline{\underline{R}}_{22}.\end{aligned}\quad (1.50)$$

Отсюда в силу (1.35), (1.48) и (1.49) будем иметь $(\underline{\underline{W}}_p = (\underline{\underline{u}}_p, \underline{\underline{v}}_p)^T)$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{u}}_p &= \sum_{m=1}^p l_{pm} \underline{\underline{r}}_{m\cdot}, & \underline{\underline{v}}_p &= \sum_{m=1}^p l_{pm} \underline{\underline{n}}_{m\cdot}, & \underline{\underline{u}}_{9+p} &= l_{9+pq} \underline{\underline{r}}_{q\cdot}, \\ \underline{\underline{v}}_{9+p} &= l_{9+pq} \underline{\underline{n}}_{q\cdot} + \sum_{m=1}^p l_{9+p9+m} \underline{\underline{r}}_{9+m\cdot}, & p &= \overline{1, 9}, & (q &= \overline{1, 9}).\end{aligned}\quad (1.51)$$

Следует отметить, что системы тензоров $\underline{\underline{r}}_{1\cdot}, \underline{\underline{r}}_{2\cdot}, \dots, \underline{\underline{r}}_{9\cdot}, \underline{\underline{r}}_{10\cdot}, \underline{\underline{r}}_{11\cdot}, \dots, \underline{\underline{r}}_{18\cdot}$ и $\underline{\underline{u}}_{1\cdot}, \underline{\underline{u}}_{2\cdot}, \dots, \underline{\underline{u}}_{9\cdot}$, участвующие в (1.51) линейно независимы.

Введем в рассмотрение тензорные столбцы

$$\underline{\underline{R}}_m = (\underline{\underline{r}}_{m\cdot}, \underline{\underline{n}}_{m\cdot})^T, \quad m = \overline{1, 9}, \quad \underline{\underline{R}}_n = (\underline{\underline{0}}, \underline{\underline{r}}_{n\cdot})^T, \quad n = \overline{10, 18}, \quad (1.52)$$

где $\underline{\underline{0}}$ — нулевой тензор второго ранга, а $\underline{\underline{r}}_{m\cdot}$, $\underline{\underline{n}}_{m\cdot}$ и $\underline{\underline{r}}_{9+m\cdot}$, $m = \overline{1, 9}$, задаются соответствующими формулами (1.49).

Нетрудно показать, что система тензорных столбцов $\underline{\underline{R}}_p$, $p = \overline{1, 18}$ линейно независима. Следовательно, линейно независимы и подсистемы $\underline{\underline{R}}_m$, $m = \overline{1, 9}$ и $\underline{\underline{R}}_n$, $n = \overline{10, 18}$, так же, как и любая подсистема системы $\underline{\underline{R}}_p$, $p = \overline{1, 18}$.

Далее не доставляет труда показать, что имеют место соотношения

$$\underline{\mathbb{W}}_p = (\underline{\mathbf{u}}_p, \underline{\mathbf{v}}_p)^T = \sum_{q=1}^p l_{pq} \underline{\mathbb{R}}_q, \quad p = \overline{1, 18}. \quad (1.53)$$

Из (1.53) видно, что ортонормированная система тензорных столбцов $\underline{\mathbb{W}}_p = (\underline{\mathbf{u}}_p, \underline{\mathbf{v}}_p)^T, p = \overline{1, 18}$ можно получить с помощью процесса ортонормирования (Грама-Шмидта) линейно независимой системы тензорных столбцов $\underline{\mathbb{R}}_p, p = \overline{1, 18}$ (см. (1.52)). В самом деле, проводя процесс ортонормирования системы тензорных столбцов $\underline{\mathbb{R}}_p, p = \overline{1, 18}$, для коэффициентов $l_{pq}, p = \overline{1, 18}, q = \overline{1, p}$ после простых, хотя громоздких, вычислений получим следующие выражения:

$$l_{11} = \frac{d_0}{\pm \sqrt{d_0 d_1}}, \quad l_{pk} = \frac{S_{pk}^{(p)}}{\pm \sqrt{d_{p-1} d_p}}, \quad S_{pk}^{(p)} = (-1)^{p+k} S \left(\begin{matrix} 1 \cdots k-1 & k & k+1 \cdots p-1 \\ 1 \cdots k-1 & k+1 & \cdots & p \end{matrix} \right),$$

$$p = \overline{2, 9}, \quad k = \overline{1, p}, \quad (1.54)$$

где введены следующие обозначения:

$$d_0 = 1, \quad d_p = \det S_p = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{vmatrix}, \quad \underline{s}_{pq} = \underline{\mathbb{R}}_p^T \otimes \underline{\mathbb{R}}_q, \quad p, q = \overline{1, 18},$$

$$S_{pk}^{(p)} = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1k} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2k} & \cdots & S_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k1} & S_{k2} & \cdots & S_{kk} & \cdots & S_{kp} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{p-11} & S_{p-12} & \cdots & S_{p-1k} & \cdots & S_{p-1p} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \quad \langle p = \overline{1, 18} \rangle, k = \overline{1, p},$$

$$S \left(\begin{matrix} 1 \cdots k-1 & k & k+1 \cdots p-1 \\ 1 \cdots k-1 & k+1 & \cdots p \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1k-1} & S_{1k+1} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & \cdots & S_{2k-1} & S_{2k+1} & \cdots & S_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{k1} & \cdots & S_{kk-1} & S_{kk+1} & \cdots & S_{kp} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{p-11} & \cdots & S_{p-1k-1} & S_{p-1k+1} & \cdots & S_{p-1p} \end{vmatrix},$$

$S_{pk}^{(p)}$ — алгебраическое дополнение элемента s_{pk} субматрицы $S_p = \text{matr}(s_{mn})$,

$m = \overline{1, p}, n = \overline{1, p}$, а $S \left(\begin{matrix} 1 \cdots k-1 & k & k+1 \cdots p-1 \\ 1 \cdots k-1 & k+1 & \cdots p \end{matrix} \right)$ — минор $(p-1)$ -го

порядка для определителя $\det S_p$, получающийся вычеркиванием p -ой строки и k -го столбца.

Учитывая (1.54), из (1.53) после несложных преобразований для собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ получим следующие выражения:

$$\underline{\mathbb{W}}_1 = \frac{1}{\pm\sqrt{d_0 d_1}} \underline{\mathbb{R}}_1, \quad \underline{\mathbb{W}}_p = \frac{1}{\pm\sqrt{d_{p-1} d_p}} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p-1} & \underline{\mathbb{R}}_1 \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p-1} & \underline{\mathbb{R}}_2 \\ s_{31} & s_{32} & \cdots & s_{3p-1} & \underline{\mathbb{R}}_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp-1} & \underline{\mathbb{R}}_p \end{vmatrix}, \quad p = \overline{2, 18}. \quad (1.55)$$

Следует заметить, что с помощью формул (1.55) собственные тензорные столбцы $\underline{\mathbb{W}}_p, p = \overline{1, 18}$ тензорно-блочной матрицы $\underline{\mathbb{M}}$ определяются с помощью 153 независимых параметров (компонент тензора $\underline{\mathbb{R}}$ или компонент составляющих $\underline{r}_p, \underline{n}_p$ и $\underline{r}_{9+p}, p = \overline{1, 9}$ тензора $\underline{\mathbb{R}}$) относительно произвольной системы координат (произвольного базиса $\underline{e}_p, p = 1, 2, 3$). Очевидно, за счет выбора системы координат число независимых параметров можно уменьшить. Это зависит от типа корней характеристического уравнения, например, тензора $\underline{r}_1$.

$$\begin{aligned} \underline{r}_1 = \underline{e}_1 + \sum_{p=2}^9 r_{1p} \underline{e}_p = \underline{e}_1 \underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{14} + r_{17}) \underline{e}_1 \underline{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{16} - r_{19}) \underline{e}_1 \underline{e}_3 + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{14} - r_{17}) \underline{e}_2 \underline{e}_1 + r_{12} \underline{e}_2 \underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{15} + r_{18}) \underline{e}_2 \underline{e}_3 + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{16} + r_{19}) \underline{e}_3 \underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{15} - r_{18}) \underline{e}_3 \underline{e}_2 + r_{13} \underline{e}_3 \underline{e}_3, \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\text{matr}(\underline{\mathbf{r}}_1) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{14} + r_{17}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{16} - r_{19}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{14} - r_{17}) & r_{12} & \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{15} + r_{18}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{16} + r_{19}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(r_{15} - r_{18}) & r_{13} \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

Если все три корня характеристического уравнения тензора $\underline{\mathbf{r}}_1$ — простые действительные числа, или среди корней имеются два комплексно-сопряженных корня, или еще характеристическое уравнение имеет трехкратный корень, то во всех этих случаях число независимых параметров уменьшается на 6 и становится 147. Если характеристическое уравнение тензора $\underline{\mathbf{r}}_1$ имеет один простой корень и один двукратный корень, то в этом случае число независимых параметров уменьшается на число, которое меньше 6.

Микрополярный материал с центром симметрии

В этом случае $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$, поэтому ОС (1.5) и УЭД (1.6) представляются в виде

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}}, \quad 2\Phi(\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}}) = \underline{\underline{\mathbf{X}}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}^2 \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}^2 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}}^2 \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}}, \quad (1.58)$$

а ТБМ (см. (1.7)) получит вид тензорно-блочной диагональной матрицы

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{pmatrix}, \quad (1.59)$$

где $\underline{\underline{\mathbf{0}}}$ — нулевой тензор четвертого ранга.

Характеристическое уравнение (1.15) для (1.59) записывается в виде

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{M}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \det \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}} \end{pmatrix} = \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}) \det(\underline{\underline{\mathbf{D}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}) = 0. \quad (1.60)$$

На основании (1.60) заключаем, что λ является собственным значением тензорно-блочно-диагональной матрицы (1.59), тогда и только тогда, когда оно является собственным значением либо тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, либо тензора $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$. Кроме того, субтензоры $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ тензорно-блочно-диагональной матрицы (1.59) положительно-определенные тензоры, т.е. собственные значения как тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, так и тензора $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ положительны. Вообще говоря, имеет место следующая теорема.

Теорема

Тензорно-блочно-диагональная (тензорно-блочно-треугольная) матрица положительно определена, тогда и только тогда, когда ее субтензоры (диагональные субтензоры) положительно определены.

Нахождение решений характеристического уравнения (1.60) равносильно нахождению решений уравнений

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}) = 0, \quad \det(\underline{\underline{\mathbf{D}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}) = 0. \quad (1.61)$$

Очевидно, каждое из уравнений (1.61) является уравнением девятой степени относительно λ и имеет девять положительных корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность.

Множество корней каждого уравнения (1.61) можно упорядочить в порядке убывания. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9$ — корни первого уравнения (1.61), а $\lambda_{10}, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{18}$ — корни второго уравнения. Тогда будем иметь

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_9 > 0, \quad \lambda_{10} \geq \lambda_{11} \geq \dots \geq \lambda_{18} > 0. \quad (1.62)$$

В дальнейшем рассмотрим такие материалы, для которых выполняется условие

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9\} \cap \{\lambda_{10}, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{18}\} = \emptyset, \quad (1.63)$$

где $\emptyset$ обозначает пустое множество. Другими словами, уравнения (1.61) не имеют общих корней (хотя, уравнения (1.61), вообще говоря, могут иметь общие корни).

Обозначая через $\mathbb{W}_p, p = \overline{1, 18}$ собственные тензорные столбцы тензорно-блочной диагональной матрицы $\mathbb{M}$ (1.59), отвечающие собственным значениям $\lambda_p, p = \overline{1, 18}$, будем иметь

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \mathbb{W}_p \mathbb{W}_p^T. \quad (1.64)$$

Для тензорно-блочных матриц справедливы следующие теоремы:

Теорема

Если λ_k , $1 \leq k \leq 9$ — собственное значение субтензора $\mathbf{A}$, но не является собственным значением $\mathbf{D}$, то собственный тензорный столбец $\mathbb{W}_k$ тензорно-блочной-диагональной матрицы $\mathbb{M}$ (1.59), соответствующий собственному значению λ_k имеет вид $\mathbb{W}_k \stackrel{\sim}{=} (\mathbf{u}_k, \mathbf{0})^T$, где $\mathbf{u}_k$ — собственный тензор субтензора $\mathbf{A}$, соответствующий собственному значению λ_k , а $\mathbf{0}$ — нулевой тензор второго ранга.

Теорема

Если λ_m , $10 \leq m \leq 18$ — собственное значение субтензора $\mathbf{D}$, но не является собственным значением $\mathbf{A}$, то собственный тензорный столбец $\mathbb{W}_m$ тензорно-блочной-диагональной матрицы $\mathbb{M}$ (1.59), соответствующий собственному значению λ_m имеет вид $\mathbb{W}_m \stackrel{\sim}{=} (\mathbf{0}, \mathbf{v}_m)^T$, где $\mathbf{v}_m$ — собственный тензор субтензора $\mathbf{D}$, соответствующий собственному значению λ_m , а $\mathbf{0}$ — нулевой тензор второго ранга.

Теорема

Если λ_k — общее собственное значение субтензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$, то собственный тензорный столбец $\mathbb{W}_k$ тензорно-блочной-диагональной матрицы $\mathbb{M}$ (1.59), соответствующий собственному значению λ_k , имеет вид $\mathbb{W}_k = (\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)^T$, где $\mathbf{u}_k$ и $\mathbf{v}_k$ — собственные тензоры субтензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ соответственно, соответствующие собственному значению λ_k .

В силу первых двух теорем матрицу $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ (1.64) можно представить в виде

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^9 \lambda_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T + \sum_{q=10}^{18} \lambda_q \underline{\underline{\mathbb{W}}}_q \underline{\underline{\mathbb{W}}}_q^T = \begin{pmatrix} \sum_{p=1}^9 \lambda_p \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \sum_{q=10}^{18} \lambda_q \underline{\underline{\mathbf{v}}}_q \underline{\underline{\mathbf{v}}}_q \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \sum_{p=1}^9 \lambda_p \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \sum_{q=10}^{18} \lambda_q \underline{\underline{\mathbf{v}}}_q \underline{\underline{\mathbf{v}}}_q. \quad (1.65)$$

Если $\lambda_1 = \dots = \lambda_9 \equiv \lambda$, $\lambda_{10} = \dots = \lambda_{18} \equiv \mu$, то тензоры (1.65) получают вид

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda \sum_{p=1}^9 \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p = \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \mu \sum_{q=10}^{18} \underline{\underline{\mathbf{v}}}_q \underline{\underline{\mathbf{v}}}_q = \mu \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)}. \quad (1.66)$$

Учитывая (1.66), тензорно-блочная матрица представится в форме

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}} = \begin{pmatrix} \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \mu \underline{\underline{\mathbf{E}}} \end{pmatrix} \quad (\text{изотропный}). \quad (1.67)$$

Если $\lambda = \mu$, то из (1.67) получим

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}} = \lambda \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{E}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{E}}} \end{pmatrix} = \lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}} \quad (\text{идеально изотропный}). \quad (1.68)$$

Классификация микрополярных линейно-упругих анизотропных материалов с центром симметрии

Определение

Символ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, где k — число различных собственных значений (симметрического положительно-определенного) тензора $\mathbf{A}$, а α_i — кратность собственного значения λ_i ($i = 1, 2, \dots, k$), называется символом анизотропии (структуры) тензора $\mathbf{A}$.

Далее будем считать, что тензоры модулей упругости $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ имеют одинаковую структуру (одинаковый символ анизотропии) при данной анизотропии микрополярного линейно-упругого материала, обладающего центром симметрии. Тогда введем определение.

Определение

Символ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, где k — число различных собственных значений тензора $\mathbf{A}$ ($\mathbf{D}$) модулей упругости, а α_i — кратность собственного значения λ_i ($i = 1, 2, \dots, k$), называется символом анизотропии (структуры) микрополярных линейно-упругих материалов, обладающих центром симметрии.

Нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае будем иметь

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 9, \quad 1 \leq \alpha_i \leq 9 - (k - 1) = 10 - k, \quad i = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq 9. \quad (1.69)$$

Имеются 9 классов (групп). Каждый класс содержит несколько подклассов (подгрупп). Ниже рассмотрены все 9 классов, а также в каждом классе выписаны символы анизотропии всех, входящих в этот класс, материалов. В некоторых случаях приведено соответствующее данному символу анизотропии выражение для тензора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$. При этом собственные значения выписаны только для тензора $\mathbf{A}$, а выражение для тензора $\mathbf{D}$ дается по аналогии. Число материалов в каждом классе выражается соответствующим биномиальным коэффициентом.

1. Символ анизотропии состоит из одного элемента

$$\{\alpha\}, \quad \alpha = 9, \quad \lambda \equiv \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_9 > 0, \quad \mathbf{A} = \lambda \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mu \mathbf{E}.$$

Число таких материалов равно $C_8^0 = 1$.

Здесь $\mathbf{E} = \mathbf{C}_{(2)}$ — единичный тензор четвертого ранга.

2. Символ анизотропии состоит из двух элементов

$$\begin{aligned} &\{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 9, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 8, \quad m = 1, 2; \\ &\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 4\}, \{6, 3\}, \{7, 2\}, \{8, 1\}. \\ &\{1, 8\} \Leftrightarrow (\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_9 > 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{A} = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = (\mu_1 - \mu_2)\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 + \mu_2\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{C}_{(2)}). \end{aligned}$$

Число таких материалов равно $C_8^1 = 8$.

3. Символ анизотропии состоит из трех элементов (среди них — традиционные изотропные микрополярные материалы)

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 9, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 7, \quad m = 1, 2, 3,$$

$\{1, 1, 7\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 4\}, \{1, 5, 3\}, \{1, 6, 2\}, \{1, 7, 1\}; \{2, 1, 6\},$
 $\{2, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 3\}, \{2, 5, 2\}, \{2, 6, 1\}; \{3, 1, 5\}, \{3, 2, 4\}, \{3, 3, 3\},$
 $\{3, 4, 2\}, \{3, 5, 1\}; \{4, 1, 4\}, \{4, 2, 3\}, \{3, 3, 2\}, \{4, 4, 4\}; \{5, 1, 3\}, \{5, 2, 2\},$
 $\{5, 3, 1\}; \{6, 1, 2\}, \{6, 2, 1\}; \{7, 1, 1\}.$

Число таких материалов равно $C_8^2 = 28$.

4. Символ анизотропии состоит из четырех элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 9, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 6, \quad m = 1, 2, 3, 4;$$

$\{1, 1, 1, 6\}, \{1, 1, 2, 5\}, \{1, 1, 3, 4\}, \{1, 1, 4, 3\}, \{1, 1, 5, 2\}, \{1, 1, 6, 1\}; \{1, 2, 1, 5\},$
 $\{1, 2, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 3\}, \{1, 2, 4, 2\}, \{1, 2, 5, 1\}; \{1, 3, 1, 4\}, \{1, 3, 2, 3\}, \{1, 3, 3, 2\},$
 $\{1, 3, 4, 1\}; \{1, 4, 1, 3\}, \{1, 4, 2, 2\}, \{1, 4, 3, 1\}; \{1, 5, 1, 2\}, \{1, 5, 2, 1\}; \{1, 6, 1, 1\};$
 $\{2, 1, 1, 5\}, \{2, 1, 2, 4\}, \{2, 1, 3, 3\}, \{2, 1, 4, 2\}, \{2, 1, 5, 1\}; \{2, 2, 1, 4\}, \{2, 2, 2, 3\},$
 $\{2, 2, 3, 2\}, \{2, 2, 4, 1\}; \{2, 3, 1, 3\}, \{2, 3, 2, 2\}, \{2, 3, 3, 1\}; \{2, 4, 1, 2\}, \{2, 4, 2, 1\};$
 $\{2, 5, 1, 1\}; \{3, 1, 1, 4\}, \{3, 1, 2, 3\}, \{3, 1, 3, 2\}, \{3, 1, 4, 1\}; \{3, 2, 1, 3\}, \{3, 2, 2, 2\},$
 $\{3, 2, 3, 1\}; \{3, 3, 1, 2\}, \{3, 3, 2, 1\}; \{3, 4, 1, 1\}; \{4, 1, 1, 3\}, \{4, 1, 2, 2\}, \{4, 1, 3, 1\};$
 $\{4, 2, 1, 2\}, \{4, 2, 2, 1\}; \{4, 3, 1, 1\}; \{5, 1, 1, 2\}, \{5, 1, 2, 1\}; \{5, 2, 1, 1\}; \{6, 1, 1, 1\}.$

Число таких материалов равно $C_8^3 = 56$.

5. Символ анизотропии состоит из 5 элементов

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 9$, $1 \leq \alpha_m \leq 5$, $m = 1, 2, 3, 4, 5$;
 $(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 = \lambda_6 = \dots = \lambda_9 > 0) \Leftrightarrow \{1, 1, 1, 1, 5\}, \dots$

$\{1, 1, 1, 1, 5\}$, $\{1, 1, 1, 2, 4\}$, $\{1, 1, 1, 3, 3\}$, $\{1, 1, 1, 4, 2\}$, $\{1, 1, 1, 5, 1\}$; $\{1, 1, 2, 1, 4\}$,
 $\{1, 1, 2, 2, 3\}$, $\{1, 1, 2, 3, 2\}$, $\{1, 1, 2, 4, 1\}$; $\{1, 1, 3, 1, 3\}$, $\{1, 1, 3, 2, 2\}$, $\{1, 1, 3, 3, 1\}$;
 $\{1, 1, 4, 1, 2\}$, $\{1, 1, 4, 2, 1\}$; $\{1, 1, 5, 1, 1\}$; $\{1, 2, 1, 1, 4\}$, $\{1, 2, 1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 1, 3, 2\}$,
 $\{1, 2, 1, 4, 1\}$; $\{1, 2, 2, 1, 3\}$, $\{1, 2, 2, 2, 2\}$, $\{1, 2, 2, 3, 1\}$; $\{1, 2, 3, 1, 2\}$, $\{1, 2, 3, 2, 1\}$;
 $\{1, 2, 4, 1, 1\}$; $\{1, 3, 1, 1, 3\}$, $\{1, 3, 1, 2, 2\}$, $\{1, 3, 1, 3, 1\}$; $\{1, 3, 2, 1, 2\}$, $\{1, 3, 2, 2, 1\}$;
 $\{1, 3, 3, 1, 1\}$; $\{1, 4, 1, 1, 2\}$, $\{1, 4, 1, 2, 1\}$; $\{1, 4, 2, 1, 1\}$; $\{1, 5, 1, 1, 1\}$; $\{2, 1, 1, 1, 4\}$,
 $\{2, 1, 1, 2, 3\}$, $\{2, 1, 1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 1, 4, 1\}$; $\{2, 1, 2, 1, 3\}$, $\{2, 1, 2, 2, 2\}$, $\{2, 1, 2, 3, 1\}$;
 $\{2, 1, 3, 1, 2\}$, $\{2, 1, 3, 2, 1\}$; $\{2, 1, 4, 1, 1\}$; $\{2, 2, 1, 1, 3\}$, $\{2, 2, 1, 2, 2\}$, $\{2, 2, 1, 3, 1\}$;
 $\{2, 2, 2, 1, 2\}$, $\{2, 2, 2, 2, 1\}$; $\{2, 2, 3, 1, 1\}$; $\{2, 3, 1, 1, 2\}$, $\{2, 3, 1, 2, 1\}$; $\{2, 3, 2, 1, 1\}$;
 $\{2, 4, 1, 1, 1\}$; $\{3, 1, 1, 1, 3\}$, $\{3, 1, 1, 2, 2\}$, $\{3, 1, 1, 3, 1\}$; $\{3, 1, 2, 1, 2\}$, $\{3, 1, 2, 2, 1\}$;
 $\{3, 1, 3, 1, 1\}$; $\{3, 2, 1, 1, 2\}$, $\{3, 2, 1, 2, 1\}$; $\{3, 2, 2, 1, 1\}$; $\{3, 3, 1, 1, 1\}$; $\{4, 1, 1, 1, 2\}$,
 $\{4, 1, 1, 2, 1\}$; $\{4, 1, 2, 1, 1\}$; $\{4, 2, 1, 1, 1\}$; $\{5, 1, 1, 1, 1\}$.

Число таких материалов равно $C_8^4 = 70$.

6. Символ анизотропии состоит из 6 элементов

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 9$, $1 \leq \alpha_m \leq 4$, $m = \overline{1, 6}$;

$(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6 = \lambda_7 \cdots = \lambda_9 > 0) \Leftrightarrow \{1, 1, 1, 1, 1, 4\}, \dots$

$\{1, 1, 1, 1, 1, 4\}$, $\{1, 1, 1, 1, 2, 3\}$, $\{1, 1, 1, 1, 3, 2\}$, $\{1, 1, 1, 1, 4, 1\}$; $\{1, 1, 1, 2, 1, 3\}$,
 $\{1, 1, 1, 2, 2, 2\}$, $\{1, 1, 1, 2, 3, 1\}$; $\{1, 1, 1, 3, 1, 2\}$, $\{1, 1, 1, 3, 2, 1\}$; $\{1, 1, 1, 4, 1, 1\}$;
 $\{1, 1, 2, 1, 1, 3\}$, $\{1, 1, 2, 1, 2, 2\}$, $\{1, 1, 2, 1, 3, 1\}$; $\{1, 1, 2, 2, 1, 2\}$, $\{1, 1, 2, 2, 2, 1\}$;
 $\{1, 1, 2, 3, 1, 1\}$; $\{1, 1, 3, 1, 1, 2\}$, $\{1, 1, 3, 1, 2, 1\}$; $\{1, 1, 3, 2, 1, 1\}$; $\{1, 1, 4, 1, 1, 1\}$;
 $\{1, 2, 1, 1, 1, 3\}$, $\{1, 2, 1, 1, 2, 2\}$, $\{1, 2, 1, 1, 3, 1\}$; $\{1, 2, 1, 2, 1, 2\}$, $\{1, 2, 1, 2, 2, 1\}$;
 $\{1, 2, 1, 3, 1, 1\}$; $\{1, 2, 2, 1, 1, 2\}$, $\{1, 2, 2, 1, 2, 1\}$; $\{1, 2, 2, 2, 1, 1\}$; $\{1, 2, 3, 1, 1, 1\}$;
 $\{1, 3, 1, 1, 1, 2\}$, $\{1, 3, 1, 1, 2, 1\}$; $\{1, 3, 1, 2, 1, 1\}$; $\{1, 3, 2, 1, 1, 1\}$; $\{1, 4, 1, 1, 1, 1\}$;
 $\{2, 1, 1, 1, 1, 3\}$, $\{2, 1, 1, 1, 2, 2\}$, $\{2, 1, 1, 1, 3, 1\}$; $\{2, 1, 1, 2, 1, 2\}$, $\{2, 1, 1, 2, 2, 1\}$;
 $\{2, 1, 1, 3, 1, 1\}$; $\{2, 1, 2, 1, 1, 2\}$, $\{2, 1, 2, 1, 2, 1\}$; $\{2, 1, 2, 2, 1, 1\}$; $\{2, 1, 3, 1, 1, 1\}$;
 $\{2, 2, 1, 1, 1, 2\}$, $\{2, 2, 1, 1, 2, 1\}$; $\{2, 2, 1, 2, 1, 1\}$; $\{2, 2, 2, 1, 1, 1\}$; $\{2, 3, 1, 1, 1, 1\}$;
 $\{3, 1, 1, 1, 1, 2\}$, $\{3, 1, 1, 1, 2, 1\}$; $\{3, 1, 1, 2, 1, 1\}$; $\{3, 1, 2, 1, 1, 1\}$; $\{3, 2, 1, 1, 1, 1\}$;
 $\{4, 1, 1, 1, 1, 1\}$.

Число таких материалов равно $C_8^5 = 56$.

7. Символ анизотропии состоит из 7 элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 9,$$

$$1 \leq \alpha_m \leq 3, \quad m = \overline{1, 7};$$

$$(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6 > \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 > 0) \Leftrightarrow \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 3\}, \dots$$

$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 3\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 3, 1\}; \{1, 1, 1, 1, 2, 1, 2\},$$

$$\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 1\}; \{1, 1, 1, 1, 3, 1, 1\}; \{1, 1, 1, 2, 1, 1, 2\}, \{1, 1, 1, 2, 1, 2, 1\},$$

$$\{1, 1, 1, 2, 2, 1, 1\}; \{1, 1, 1, 3, 1, 1, 1\}; \{1, 1, 2, 1, 1, 1, 2\}, \{1, 1, 2, 1, 1, 2, 1\},$$

$$\{1, 1, 2, 1, 2, 1, 1\}, \{1, 1, 2, 2, 1, 1, 1\}; \{1, 1, 3, 1, 1, 1, 1\}; \{1, 2, 1, 1, 1, 1, 2\},$$

$$\{1, 2, 1, 1, 1, 2, 1\}, \{1, 2, 1, 1, 2, 1, 1\}, \{1, 2, 1, 2, 1, 1, 1\}, \{1, 2, 2, 1, 1, 1, 1\};$$

$$\{1, 3, 1, 1, 1, 1, 1\}; \{2, 1, 1, 1, 1, 1, 2\}, \{2, 1, 1, 1, 1, 2, 1\}, \{2, 1, 1, 1, 2, 1, 1\},$$

$$\{2, 1, 1, 2, 1, 1, 1\}, \{2, 1, 2, 1, 1, 1, 1\}, \{2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}; \{3, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Число таких материалов равно $C_8^6 = 28$.

8. Символ анизотропии состоит из 8 элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 9,$$

$$1 \leq \alpha_m \leq 2, \quad m = \overline{1, 8};$$

$$(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6 > \lambda_7 > \lambda_8 = \lambda_9 > 0) \Leftrightarrow \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2\}, \dots$$

$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1\},$$

$$\{1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}, \{2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Число таких материалов равно $C_8^7 = 8$.

9. Символ анизотропии состоит из 9 элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 = 9,$$

$$1 \leq \alpha_m \leq 9, \quad m = \overline{1, 9};$$

$$(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6 > \lambda_7 > \lambda_8 > \lambda_9 > 0) \Leftrightarrow \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Число таких материалов равно $C_8^8 = 1$.

В итоге получили $\sum_{k=0}^8 C_8^k = 2^8 = 256$ материалов при условии, что тензоры модулей упругости $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ при рассматриваемой анизотропии имеют одинаковую структуру (один и тот же символ анизотропии). При данной анизотропии тензоры $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ могут иметь символы анизотропии различной структуры, но состоящие из одинакового числа элементов (тензоры $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ принадлежат одному и тому же классу, но имеют разные структуры). В таком случае число анизотропных материалов будет

$1^2 + 8^2 + 28^2 + 56^2 + 70^2 + 56^2 + 28^2 + 8^2 + 1^2 = 12870$. Если тензоры $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ имеют различную структуру, то число анизотропных материалов будет $256 \times 256 = 65536$.

Классификация микрополярных линейно-упругих анизотропных материалов без центра симметрии

Введем определение символа анизотропии (структуры) микрополярных линейно-упругих материалов, не обладающих центром симметрии.

Определение

Символ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, где k — число различных собственных значений тензорно-блочной матрицы тензоров модулей упругости, а α_i — кратность собственного значения λ_i ($i = 1, 2, \dots, k$), называется символом анизотропии (структуры) микрополярных линейно-упругих материалов, не обладающих центром симметрии.

Нетрудно заметить, что в этом случае имеет место соотношение

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 18, \quad 1 \leq \alpha_i \leq 18 - (k - 1) = 19 - k, \quad i = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq 18.$$

Имеются 18 классов (групп). Каждый класс содержит несколько подклассов (подгрупп). Ниже перечислены все классы при данной классификации. Для каждого класса приводится символ анизотропии. Для некоторых материалов дано представление тензорно блочной матрицы. Число материалов в каждом классе выражается соответствующим биномиальным коэффициентом.

1. Символ анизотропии состоит из одного элемента

$$\{\alpha\}, \quad \alpha = 18, \quad \lambda \equiv \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{18}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^0 = 1$. Тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ имеет представление

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T = \lambda \sum_{p=1}^{18} \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T = \lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}}$$

2. Символ анизотропии состоит из двух элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 17, \quad m = 1, 2$$

$$\{1, 17\}, \{2, 16\}, \{3, 15\}, \{4, 14\}, \{5, 13\}, \{6, 12\}, \{7, 11\}, \{8, 10\}$$

$$\{9, 9\}, \{10, 8\}, \{11, 7\}, \{12, 6\}, \{13, 5\}, \{14, 4\}, \{15, 3\}, \{16, 2\}, \{17, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^1 = 17$. Тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$, соответствующая, например, материалу $\{1, 17\}$ имеет вид

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}} = \lambda_1 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_1^T + \lambda_2 \sum_{p=2}^{18} \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T = (\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\underline{\mathbb{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_1^T + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbb{E}}}$$

3. Символ анизотропии состоит из трех элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 16, \quad m = 1, 2, 3$$
$$\{1, 1, 16\}, \{1, 2, 15\}, \{1, 3, 14\}, \{1, 4, 13\}, \{1, 5, 12\}, \{1, 6, 11\}, \{1, 7, 10\}$$
$$\{1, 8, 9\}, \{1, 9, 8\}, \{1, 10, 7\}, \{1, 11, 6\}, \{1, 12, 5\}, \{1, 13, 4\}, \{1, 14, 3\}$$
$$\{1, 15, 2\}, \{1, 16, 1\}; \{2, 1, 15\}, \{2, 2, 14\}, \{2, 3, 13\}, \{2, 4, 12\}, \{2, 5, 11\}$$
$$\{2, 6, 10\}, \{2, 7, 9\}, \{2, 8, 8\}, \{2, 9, 7\}, \{2, 10, 6\}, \{2, 11, 5\}, \{2, 12, 4\}, \{2, 13, 3\}$$
$$\{2, 14, 2\}, \{2, 15, 1\}; \{3, 1, 14\}, \dots, \{3, 14, 1\}; \dots, \{15, 1, 2\}, \{15, 2, 1\}; \{16, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^2 = 136$. Очевидно, например, для материала $\{1, 1, 16\}$ тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ представляется в форме

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}} = \lambda_1 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_1^T + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_2 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_2^T + \lambda_3 \sum_{p=3}^{18} \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T = (\lambda_1 - \lambda_3) \underline{\underline{\mathbb{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_1^T + (\lambda_2 - \lambda_3) \underline{\underline{\mathbb{W}}}_2 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_2^T + \lambda_3 \underline{\underline{\mathbb{E}}}$$

Далее в связи с тем, что остальные классы анизотропии содержат большое число материалов, не имеет смысла выписывать их. Поэтому ниже для остальных классов укажем символ анизотропии и соответствующее число материалов.

4. Символ анизотропии состоит из четырех элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 15, \quad m = 1, 2, 3, 4$$
$$\{1, 1, 1, 15\}, \dots, \{15, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^3 = 680$.

5. Символ анизотропии состоит из пяти элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 14, \quad m = \overline{1, 5}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 14\}, \dots, \{14, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^4 = 2380$.

6. Символ анизотропии состоит из шести элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_6 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 13, \quad m = \overline{1, 6}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 1, 13\}, \dots, \{13, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^5 = 6188$.

7. Символ анизотропии состоит из семи элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_7\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_7 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 12, \quad m = \overline{1, 7}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 12\}, \dots, \{12, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^6 = 12376$.

8. Символ анизотропии состоит из восьми элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_8\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_8 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 11, \quad m = \overline{1, 8}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 11\}, \dots, \{11, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^7 = 19448$.

9. Символ анизотропии состоит из девяти элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_9\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_9 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 10, \quad m = \overline{1, 9}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 10\}, \dots, \{10, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^8 = 24310$.

10. Символ анизотропии состоит из десяти элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{10}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{10} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 9, \quad m = \overline{1, 10}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 9\}, \dots, \{9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^9 = 24310$.

11. Символ анизотропии состоит из одиннадцати элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{11}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{11} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 8, \quad m = \overline{1, 11}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8\}, \dots, \{8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{10} = 19448$.

12. Символ анизотропии состоит из двенадцати элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{12}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{12} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 7, \quad m = \overline{1, 12}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 7\}, \dots, \{7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{11} = 12376$.

13. Символ анизотропии состоит из тринадцати элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{13}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{13} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 6, \quad m = \overline{1, 13}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6\}, \dots, \{6, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{12} = 6188$.

14. Символ анизотропии состоит из четырнадцати элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{14}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{14} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 5, \quad m = \overline{1, 14}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5\}, \dots, \{5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{13} = 2380$.

15. Символ анизотропии состоит из пятнадцати элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{15}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{15} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 4, \quad m = \overline{1, 15}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4\}, \dots, \{4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{14} = 680$.

16. Символ анизотропии состоит из шестнадцати элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{16}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{16} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 3, \quad m = \overline{1, 16}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3\}, \dots, \{3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{15} = 136$.

17. Символ анизотропии состоит из семнадцати элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{17}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{17} = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 2, \quad m = \overline{1, 17}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2\}, \dots, \{2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{16} = 17$.

18. Символ анизотропии состоит из восемнадцати элементов

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{18}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{18} = 18, \quad \alpha_m = 1, \quad m = \overline{1, 18}$$
$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{17} = 1$.

Нетрудно заметить, что общее число всех анизотропных микрополярных линейно-упругих не обладающих центром симметрии материалов равно $\sum_{k=0}^{17} C_{17}^k = 2^{17} = 131072$.

Следует заметить, что более подробная классификация анизотропных материалов должна производиться в зависимости от вида собственных тензоров тензорно-блочной матрицы $\underline{\underline{\mathbb{M}}} \in \mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$ или от вида $\underline{\underline{\mathbb{R}}} \in \mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$.

К классификации сред Джеремилло (1929 г.) (среда типа повторно-градиентной)

В этом случае определяющие соотношения для сред с центром симметрии представляются в виде

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (P_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}), \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = {}^6\underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}} \quad (\mu^{ijk} = D^{ijklmn} \varkappa_{lmn}),$$

$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = 1/2(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$, $\underline{\underline{\boldsymbol{\varkappa}}} = \nabla \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, $A_{ijkl} = A_{klij} = A_{jikl}$, $D_{ijklmn} = D_{lmnij k} = D_{ikjlmn}$, $\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}^T$ — тензор напряжений, $\underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}$ — тензор моментных напряжений третьего ранга.

Матрица компонент тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ имеет размеры 6×6 (имеется 6 классов), а матрица компонент тензора ${}^6\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ — размеры 18×18 (имеется 18 классов). Внутренняя структура такой матрицы выше были изучена. В этой связи здесь на этом останавливаться не будем. Отметим лишь, что число всех анизотропных сред Джеремилло равно

$$\left(\sum_{k=1}^6 C_5^{k-1} \right) \left(\sum_{l=1}^{18} C_{17}^{l-1} \right) = 2^5 \cdot 2^{17} = 2^{22} = 4\,194\,304$$

К классификации сред Миндлина (1964 г.)

В рассматриваемом случае определяющие соотношения для сред с центром симметрии имеют форму

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\mathbf{B}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}'}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = {}^6\underline{\underline{\mathbf{H}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}},$$

где $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$, $\underline{\underline{\mathbf{B}'}} = \underline{\underline{\mathbf{B}'}}^T$, $\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^T$, ${}^6\underline{\underline{\mathbf{H}}} = {}^6\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$, $\mathbf{x}$ — макрорадиус-вектор, $\boldsymbol{\xi}$ — микрорадиус-вектор, $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$ — вектор макроперемещений, $\mathbf{v}$ — вектор микроперемещений, $\boldsymbol{\varepsilon} = 1/2(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x \mathbf{u}^T)$ — тензор макродеформаций, $\boldsymbol{\gamma} = \nabla_x \mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}$ — тензор относительной дисторсии, $\boldsymbol{\psi} = \nabla_\xi \mathbf{v}$ — тензор микродисторсии, $\underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}} = \nabla_x \boldsymbol{\psi} = \nabla_x \nabla_\xi \mathbf{v}$ — макроградиент тензора

микродисторсии (эти тензоры не зависят от микрокоординаты), $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ — симметричный тензор напряжений, $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ — несимметричный тензор относительных напряжений, $\underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}$ — тензор моментных напряжений. Вводя в рассмотрение

$$\underline{\underline{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{Y}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{P}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}} & \underline{\underline{\mathbf{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{B}'}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{pmatrix} \quad (\underline{\underline{\mathbf{B}'}} = \underline{\underline{\mathbf{B}'}}^T, \underline{\underline{\mathbf{M}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{M}}}), \quad (1.70)$$

определяющие соотношения можно записать в виде

$$\underline{\underline{\mathbf{Y}}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{X}}}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = {}^6\underline{\underline{\mathbf{H}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\chi}}}. \quad (1.71)$$

Заметим, что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ — квадратные тензоры размеров 6×6 и 9×9 соответственно, $\mathbf{B}$ — прямоугольный тензор размеров 6×9 , конечно, $\mathbf{B}'$ — прямоугольный тензор размеров 9×6 . Поэтому матрица компонент тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}$ имеет размеры 15×15 . В силу (1.71) заключаем, что свойства среды Миндлина описываются с помощью симметричной тензорно-блочной матрицы размеров 15×15 (15 классов) и симметричного тензора шестого ранга размеров 27×27 (27 классов). Следовательно, число сред Миндлина равно

$$\left(\sum_{k=1}^{15} c_{14}^{k-1}\right) \left(\sum_{l=1}^{27} c_{26}^{l-1}\right) = 2^{14} \cdot 2^{26} = 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$$

К классификация сред Тупина (1964 г.) (повторно-градиентная среда)

Для этих сред определяющие соотношения имеют вид

$$\underline{\underline{\mathbf{p}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \quad (\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} = \nabla \mathbf{u}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} = \nabla \nabla \mathbf{u}),$$

где матрица компонент тензора $\mathbf{A}$ имеет размеры 9×9 (9 классов), а матрица компонент тензора $\mathbf{D}$ — размеры 18×18 (18 классов).

Число сред Тупина, очевидно, будет $2^8 \cdot 2^{17} = 2^{25} = 33\,554\,432$.

Вспомним, что для несимметричных (симметричных) тензоров второго ранга используем двухиндексные и одноиндексные, а для несимметричных (симметричных) тензоров четвертого ранга — четырехиндексные и двухиндексные представления.

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}} &= P_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sum_{m=1}^9 P_m \underline{\mathbf{e}}_m = P_m \underline{\mathbf{e}}_m, \quad \underline{\mathbf{A}} = A_{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = A_{mn} \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{e}}_n, \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= \delta_{ij}, \quad \underline{\mathbf{e}}_m \otimes \underline{\mathbf{e}}_n = \delta_{mn}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad m, n = \overline{1, 9}, \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad \underline{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \quad \underline{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \\ \underline{\mathbf{e}}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2), \quad \underline{\mathbf{e}}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad \underline{\mathbf{e}}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3), \\ \underline{\mathbf{e}}_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2), \quad \underline{\mathbf{e}}_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad \underline{\mathbf{e}}_9 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3). \end{aligned} \quad (1.73)$$

Классификация классических линейно-упругих анизотропных материалов

В этом случае аналогичное (1.69) соотношение имеет вид

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 6, \quad 1 \leq \alpha_i \leq 6 - (k - 1) = 7 - k, \quad i = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq 6. \quad (1.74)$$

Имеются 6 классов (групп). Каждый класс содержит несколько подклассов (подгрупп). Всего имеются 32 подгруппы.

I. Символ анизотропии состоит из одного элемента

$$\begin{aligned} &\{\alpha\}, \quad \alpha = 6, \quad \lambda \equiv \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_6. \\ &\text{Всего число таких материалов равно } C_5^0 = 1. \\ &\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda \sum_{p=1}^6 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_p \underline{\underline{\mathbf{W}}}_p = \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}) \right). \end{aligned} \quad (1.75)$$

II. Символ анизотропии состоит из двух элементов (среди них — традиционные изотропные материалы)

$$\begin{aligned} &\{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 6, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 5, \quad m = 1, 2; \\ &\underline{\underline{\{1, 5\}}}, \quad \underline{\underline{\{2, 4\}}}, \quad \underline{\underline{\{3, 3\}}}, \quad \underline{\underline{\{4, 2\}}}, \quad \underline{\underline{\{5, 1\}}}. \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_5^1 = 5$.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\{1, 5\}}} &\Leftrightarrow (\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_6) \Leftrightarrow (\underline{\underline{\mathbf{A}}} = (\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}), \\ \underline{\underline{\{2, 4\}}} &\Leftrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3 = \dots = \lambda_6) \Leftrightarrow (\underline{\underline{\mathbf{A}}} = (\lambda_1 - \lambda_3) (\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 + \underline{\underline{\mathbf{W}}}_2 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_2) + \lambda_3 \underline{\underline{\mathbf{E}}}). \end{aligned} \quad (1.76)$$

III. Символ анизотропии состоит из трех элементов

$$\begin{aligned} &\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 4, \quad m = 1, 2, 3; \\ &\{1, 1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{1, 4, 1\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 2, 2\}, \{2, 3, 1\}, \\ &\{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}, \{4, 1, 1\}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Всего число таких материалов равно $C_5^2 = 10$.

$$\begin{aligned} &\{1, 1, 4\} \Leftrightarrow (\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_6) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\underline{\mathbf{A}} = (\lambda_1 - \lambda_3)\underline{\mathbf{W}}_1\underline{\mathbf{W}}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\underline{\mathbf{W}}_2\underline{\mathbf{W}}_2 + \lambda_3\underline{\mathbf{E}}), \dots \end{aligned}$$

IV. Символ анизотропии состоит из четырех элементов

$$\begin{aligned} &\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 6, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 3, \quad m = 1, 2, 3, 4; \\ &\{1, 1, 1, 3\}, \{1, 1, 2, 2\}, \{1, 1, 3, 1\}, \{1, 2, 1, 2\}, \{1, 2, 2, 1\}, \{1, 3, 1, 1\}, \\ &\{2, 1, 1, 2\}, \{2, 1, 2, 1\}, \{2, 2, 1, 1\}, \{3, 1, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_5^3 = 10$.

$$\begin{aligned} &\{1, 1, 1, 3\} \Leftrightarrow (\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\underline{\mathbf{A}} = (\lambda_1 - \lambda_4)\underline{\mathbf{W}}_1\underline{\mathbf{W}}_1 + (\lambda_2 - \lambda_4)\underline{\mathbf{W}}_2\underline{\mathbf{W}}_2 + (\lambda_3 - \lambda_4)\underline{\mathbf{W}}_3\underline{\mathbf{W}}_3 + \lambda_4\underline{\mathbf{E}}). \end{aligned} \quad (1.78)$$

V. Символ анизотропии состоит из 5 элементов

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 6$, $1 \leq \alpha_m \leq 2$, $m = 1, 2, 3, 4, 5$;
 $\{1, 1, 1, 1, 2\}$, $\{1, 1, 1, 2, 1\}$, $\{1, 1, 2, 1, 1\}$, $\{1, 2, 1, 1, 1\}$, $\{2, 1, 1, 1, 1\}$.

Всего число таких материалов равно $C_5^4 = 5$.

$$\begin{aligned} \{1, 1, 1, 1, 2\} &\Leftrightarrow (\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 = \lambda_6) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\underline{\underline{\mathbf{A}}} = (\lambda_1 - \lambda_5) \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 + (\lambda_2 - \lambda_5) \underline{\underline{\mathbf{W}}}_2 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_2 + \\ &\quad + (\lambda_3 - \lambda_5) \underline{\underline{\mathbf{W}}}_3 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_3 + (\lambda_4 - \lambda_5) \underline{\underline{\mathbf{W}}}_4 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_4 + \lambda_5 \underline{\underline{\mathbf{E}}}). \end{aligned} \quad (1.79)$$

VI. Символ анизотропии состоит из 6 элементов

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 1$, $1 \leq \alpha_m \leq 1$, $m = \overline{1, 6}$;
 $\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$.

Всего число таких материалов равно $C_5^5 = 1$.

$$\begin{aligned} \{1, 1, 1, 1, 1, 1\} &\Leftrightarrow (\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_2 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_2 + \lambda_3 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_3 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_3 + \lambda_4 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_4 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_4 + \lambda_5 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_5 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_5 + \lambda_6 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6). \end{aligned} \quad (1.80)$$

В итоге число всех материалов равно 32.

Собственные значения и собственные тензоры для материалов кристаллографических сингоний

Более детальная классификация анизотропных материалов должна производиться от вида собственных тензоров (или от вида матрицы, определяющей эти тензоры) тензора модулей упругости.

Для материалов, например, с символами анизотропии $\{6\}$, $\{1, 5\}$ и $\{5, 1\}$ тензоры модулей упругости представляются соответственно в виде

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad (1.81)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = (\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad (1.82)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{E}}} - (\lambda_1 - \lambda_6) \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6. \quad (1.83)$$

Здесь $\underline{\underline{\mathbf{E}}} = (1/2)(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)})$ — единичный тензор четвертого ранга. Будем считать, что $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6$. Так как выбор системы координат произволен, то будем считать, что она является главной для тензора $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1$. Обозначим главные значения тензора $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1$ через α, β, γ . Тогда, обозначая через $\underline{\underline{\mathbf{e}}}_i^*$, $i = 1, 2, 3$ главный базис тензора $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1$, очевидно, будем иметь

$$\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6 = \alpha \underline{\underline{\mathbf{e}}}_1^* + \beta \underline{\underline{\mathbf{e}}}_2^* + \gamma \underline{\underline{\mathbf{e}}}_3^*, \quad (1.84)$$

$$(\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 \otimes \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 = 1) \Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1). \quad (1.85)$$

Видно, что в силу (1.85) материалы (1.82) и (1.83) характеризуются четырьмя параметрами: Двумя собственными значениями тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и двумя главными значениями тензора $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1$. Отличие (1.82) от (1.83) в том, что в (1.83) $-(\lambda_1 - \lambda_6) < 0$, а в (1.82) $(\lambda_1 - \lambda_2) > 0$.

Если взять тензоры $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1$ и $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_6$ шаровыми, т.е. положить

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pm\sqrt{3}}{3} \quad (\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6 = \frac{\pm\sqrt{3}}{3} \underline{\underline{\mathbf{E}}}), \quad (1.86)$$

то (1.82) и (1.83) примут вид

$$\{1, 5\} : \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2)\underline{\underline{\mathbf{E}}}\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \lambda_2\underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad (1.87)$$

$$\{5, 1\} : \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda_1\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_6)\underline{\underline{\mathbf{E}}}\underline{\underline{\mathbf{E}}}. \quad (1.88)$$

Материалы (1.87) и (1.88) изотропный в том смысле, что компоненты A_{ijkl} , $i, j = 1, 2, 3$ (A_{mn} , $m, n = \overline{1, 6}$) тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ не зависит от выбора ортогональной системы координат, но определяются двумя собственными значениями (модулями) и тензоры напряжений и деформаций не пропорциональны:

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{\epsilon}}} = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2)I_1(\underline{\underline{\mathbf{\epsilon}}})\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \lambda_2\underline{\underline{\mathbf{\epsilon}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{\epsilon}}} = \lambda_1\underline{\underline{\mathbf{\epsilon}}} - \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_6)I_1(\underline{\underline{\mathbf{\epsilon}}})\underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad (1.89)$$

поэтому с механической точки зрения эти материалы нельзя считать изотропными (Б.Д.Анин, Н.И.Остросаблин).

(Идеально) изотропным является материал с символом анизотропии (структуры) $\{6\}$. В этом случае, очевидно, имеем

$$\{6\} : \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 \underline{\underline{\mathbf{\epsilon}}} = \lambda \underline{\underline{\mathbf{\epsilon}}}. \quad (1.90)$$

Если в (1.87) обозначить $(\lambda_1 - \lambda_2)/3 = \lambda$, $\lambda_2 = 2\mu$, то придем к традиционной записи тензора модулей упругости "изотропного" материала.

Материалы (1.87) и (1.88) часто принимают за один, но это не так. Они качественно различные материалы, принадлежащие подклассам с разными структурными символами: $\{1, 5\}$ и $\{5, 1\}$. Их различие проявляется в вопросе о пределах значений коэффициента Пуассона ν . Найдем для материалов (1.87) и (1.88) коэффициенты Пуассона. В этой связи выпишем обратные к (1.87) и (1.88) тензоры

$$\{1, 5\} : \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1})\underline{\underline{\mathbf{E}}}\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \lambda_2^{-1}\underline{\underline{\mathbf{E}}}; \quad \{5, 1\} : \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \lambda_1^{-1}\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_6^{-1})\underline{\underline{\mathbf{E}}}\underline{\underline{\mathbf{E}}},$$

в силу которых обратные законы Гука для этих материалов получают вид

$$\begin{aligned} \{1, 5\} : \quad \underline{\underline{\mathbf{\epsilon}}} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1})I_1(\underline{\underline{\mathbf{P}}})\underline{\underline{\mathbf{E}}} + \lambda_2^{-1}\underline{\underline{\mathbf{P}}}, \\ \{5, 1\} : \quad \underline{\underline{\mathbf{\epsilon}}} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \lambda_1^{-1}\underline{\underline{\mathbf{P}}} - \frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_6^{-1})I_1(\underline{\underline{\mathbf{P}}})\underline{\underline{\mathbf{E}}}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Пусть $P_{ij} = P_{11} \delta_{1i} \delta_{1j} / I_1(\mathbf{P}) = P_{11}$. Тогда из (1.91) получим

$$\{1, 5\} : \quad \varepsilon_{ij} = \left[\frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1})\delta_{ij} + \lambda_2^{-1}\delta_{1i}\delta_{1j} \right] P_{11}, \quad (1.92)$$

$$\{5, 1\} : \quad \varepsilon_{ij} = \left[\lambda_1^{-1}\delta_{ij} - \frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_6^{-1})\delta_{1i}\delta_{1j} \right] P_{11}. \quad (1.93)$$

На основании (1.92) и (1.93) с помощью простых вычислений получим соответственно следующие выражения для коэффициентов Пуассона:

$$\{1, 5\} : \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\lambda_1 + \lambda_2} > 0, \quad (1.94)$$

$$\{5, 1\} : \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\lambda_1 - \lambda_6}{\lambda_1 + 2\lambda_6} < 0. \quad (1.95)$$

Так как $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 > \lambda_6 > 0$, то из (1.94) и (1.95) видно, что для материалов (1.87) и (1.88) коэффициенты Пуассона соответственно лежат в пределах

$$\{1, 5\} : \quad 0 < \nu < 1/2; \quad \{5, 1\} : \quad -1 < \nu < 0. \quad (1.96)$$

Итак, материал {1,5} традиционный "изотропный" и для него коэффициент Пуассона находится в пределах $0 < \nu < 1/2$, материал {5,1} качественно другой: при растяжении стержня в продольном направлении он увеличивается в поперечных размерах и коэффициент Пуассона находится в пределах $-1 < \nu < 0$.

"Изотропный" классический материал

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} A_{11} &= \lambda + 2\mu, & A_{12} &= \lambda, \\ A_{44} &= A_{11} - A_{12} = 2\mu. \end{aligned} \quad (1.97)$$

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \mu \underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \begin{vmatrix} A_{11} - \mu & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{11} - \mu & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{11} - \mu \end{vmatrix} (A_{44} - \mu)(A_{44} - \mu)(A_{44} - \mu) = 0.$$

$$\text{Корни: } \mu_1 = A_{11} + 2A_{12}, \quad \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = A_{11} - A_{12}. \quad (1.98)$$

▲ Легко проверить, что собственные тензоры произвольного изотропного тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ с матрицей (1.97), соответствующие собственным значениям (1.98), имеют вид

$$\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}(\underline{\underline{\mathbf{e}}}_1 + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_2 + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_3) = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}\underline{\underline{\mathbf{E}}},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{W}}}_k = W_{k,1}\underline{\underline{\mathbf{e}}}_1 + W_{k,2}\underline{\underline{\mathbf{e}}}_2 - (W_{k,1} + W_{k,2})\underline{\underline{\mathbf{e}}}_3 + W_{k,4}\underline{\underline{\mathbf{e}}}_4 + W_{k,5}\underline{\underline{\mathbf{e}}}_5 + W_{k,6}\underline{\underline{\mathbf{e}}}_6, \quad k = \overline{2, 6}.$$

Отсюда видно, что $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1$ — шаровой тензор, а $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_k, k = \overline{2, 6}$ — девиаторы. Если $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ — тензор модулей упругости, то в силу закона Гука девиаторы принимают соответствующий вид (см. ниже). ▼

Найдем собст. зн-я и собст. тенз-ы для тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$. Закон Гука запишем в виде

$$\begin{aligned} P_1 &= A_{11}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2 + A_{12}\varepsilon_3, & P_2 &= A_{12}\varepsilon_1 + A_{11}\varepsilon_2 + A_{12}\varepsilon_3, \\ P_3 &= A_{12}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2 + A_{11}\varepsilon_3, & P_4 &= A_{44}\varepsilon_4, & P_5 &= A_{44}\varepsilon_5, & P_6 &= A_{44}\varepsilon_6 \end{aligned} \quad (1.99)$$

и сравнить с законом Гука, представленным в форме

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{W}}} \alpha = \mu_\alpha \underline{\underline{\mathbf{E}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{W}}} \alpha \left(\sum_{m=1}^6 P_m W_{\alpha,m} = \mu_\alpha \sum_{m=1}^6 \varepsilon_m W_{\alpha,m} \right), \quad \alpha = \overline{1,6}. \quad (1.100)$$

На основании сравнения последних трех соотношений (1.99) и (1.100) получим

$$\mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = A_{44}, \quad \underline{\underline{\mathbf{W}}}_4 = \underline{\underline{\mathbf{e}}}_4, \quad \underline{\underline{\mathbf{W}}}_5 = \underline{\underline{\mathbf{e}}}_5, \quad \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6 = \underline{\underline{\mathbf{e}}}_6. \quad (1.101)$$

Далее нетрудно заметить, что из первых трех соотношений (1.99) имеем

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &= (A_{11} + 2A_{12})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), & P_1 - P_2 &= (A_{11} - A_{12})(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ P_1 + P_2 - 2P_3 &= (A_{11} - A_{12})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3). \end{aligned} \quad (1.102)$$

Сравнивая (1.102) с первыми тремя соотношениями (1.100), получим

$$\mu_1 = A_{11} + 2A_{12}, \quad \mu_2 = \mu_3 = A_{11} - A_{12}, \quad \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}(\underline{\underline{\mathbf{e}}}_1 + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_2 + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_3) = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}\underline{\underline{\mathbf{E}}},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{W}}}_2 = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}(\underline{\underline{\mathbf{e}}}_1 - \underline{\underline{\mathbf{e}}}_2), \quad \underline{\underline{\mathbf{W}}}_3 = \frac{\pm\sqrt{6}}{6}(\underline{\underline{\mathbf{e}}}_1 + \underline{\underline{\mathbf{e}}}_2 - 2\underline{\underline{\mathbf{e}}}_3); \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \sum_{m=1}^6 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_m \underline{\underline{\mathbf{W}}}_m$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \mu_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 + \mu_2 \sum_{m=2}^6 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_m \underline{\underline{\mathbf{W}}}_m = (\mu_1 - \mu_2) \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 + \mu_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}.$$

Классические "изотропные" материалы могут быть вида {1,5} и {5,1}.

$$(1.103)$$

Трансверсальная изотропия (5 независимых компонент)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{pmatrix}, \quad A_{44} = A_{11} - A_{12}. \quad (1.104)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= A_{11} \underline{\underline{C}}_{(1)} + (A_{11} - A_{12}) \underline{\underline{E}} + A_{13} (\underline{\underline{l}} \underline{\underline{e}}_3 + \underline{\underline{e}}_3 \underline{\underline{l}}) + A_{33} \underline{\underline{e}}_3 \underline{\underline{e}}_3 + A_{55} (\underline{\underline{e}}_5 \underline{\underline{e}}_5 + \underline{\underline{e}}_6 \underline{\underline{e}}_6), \\ \underline{\underline{C}}_{(1)} &= \underline{\underline{I}}, \quad \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}}_{(2)} + \underline{\underline{C}}_{(3)}) = \underline{\underline{e}}_1 \underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_2 \underline{\underline{e}}_2 + \underline{\underline{e}}_4 \underline{\underline{e}}_4, \quad \underline{\underline{l}} = \underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_2. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Собственные значения определяются формулами

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} (A_{11} + A_{12} + A_{33} - \sqrt{(A_{11} + A_{12} - A_{33})^2 + 8A_{13}^2}), \\ \mu_2 &= \frac{1}{2} (A_{11} + A_{12} + A_{33} + \sqrt{(A_{11} + A_{12} - A_{33})^2 + 8A_{13}^2}), \\ \mu_3 &= \mu_4 = A_{11} - A_{12}, \quad \mu_5 = \mu_6 = A_{55}. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Собственные тензоры представляются в виде

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{W}}_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha (\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2) + \cos \alpha \underline{\mathbf{e}}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \underline{\mathbf{l}} + \cos \alpha \underline{\mathbf{e}}_3, \\
 \underline{\mathbf{W}}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha (\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2) + \sin \alpha \underline{\mathbf{e}}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \underline{\mathbf{l}} + \sin \alpha \underline{\mathbf{e}}_3, \\
 \underline{\mathbf{W}}_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{\mathbf{e}}_1 - \underline{\mathbf{e}}_2), \quad \underline{\mathbf{W}}_4 = \underline{\mathbf{e}}_4, \quad \underline{\mathbf{W}}_5 = \underline{\mathbf{e}}_5, \quad \underline{\mathbf{W}}_6 = \underline{\mathbf{e}}_6, \\
 \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\sqrt{2}A_{13}}{A_{11} + A_{12} - A_{33}},
 \end{aligned} \tag{1.107}$$

а тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, очевидно, запишется в виде

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \mu_1 \underline{\mathbf{W}}_1 \underline{\mathbf{W}}_1 + \mu_2 \underline{\mathbf{W}}_2 \underline{\mathbf{W}}_2 + \mu_3 (\underline{\mathbf{W}}_3 \underline{\mathbf{W}}_3 + \underline{\mathbf{W}}_4 \underline{\mathbf{W}}_4) + \mu_5 (\underline{\mathbf{W}}_5 \underline{\mathbf{W}}_5 + \underline{\mathbf{W}}_6 \underline{\mathbf{W}}_6). \tag{1.108}$$

Трансверсально-изотропные материалы (материалы гексагональной сингонии) могут быть следующих видов: $\{1,1,2,2\}, \{1,2,1,2\}, \{1,2,2,1\}, \{2,1,1,2\}, \{2,1,2,1\}, \{2,2,1,1\}$.

Тетрагональная сингония (6 независимых компонент)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix}. \quad (1.109)$$

$$\begin{aligned} \text{Собст. зн-я : } \mu_1 &= \frac{1}{2}(A_{11} + A_{12} + A_{33} - \sqrt{(A_{11} + A_{12} - A_{33})^2 + 8A_{13}^2}), \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}(A_{11} + A_{12} + A_{33} + \sqrt{(A_{11} + A_{12} - A_{33})^2 + 8A_{13}^2}), \\ \mu_3 &= A_{11} - A_{12}, \quad \mu_4 = \mu_5 = A_{44}, \quad \mu_6 = A_{66}. \end{aligned} \quad (1.110)$$

$$\text{Собст. тен-ы : } \underline{\mathbf{w}}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha (\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2) + \cos \alpha \underline{\mathbf{e}}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \underline{\mathbf{l}} + \cos \alpha \underline{\mathbf{e}}_3,$$

$$\underline{\mathbf{w}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha (\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2) + \sin \alpha \underline{\mathbf{e}}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \underline{\mathbf{l}} + \sin \alpha \underline{\mathbf{e}}_3,$$

$$\underline{\mathbf{w}}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{\mathbf{e}}_1 - \underline{\mathbf{e}}_2), \quad \underline{\mathbf{w}}_4 = \underline{\mathbf{e}}_4, \quad \underline{\mathbf{w}}_5 = \underline{\mathbf{e}}_5, \quad \underline{\mathbf{w}}_6 = \underline{\mathbf{e}}_6, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}A_{13}}{A_{11} + A_{12} - A_{33}},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \mu_1 \underline{\mathbf{w}}_1 \underline{\mathbf{w}}_1 + \mu_2 \underline{\mathbf{w}}_2 \underline{\mathbf{w}}_2 + \mu_3 \underline{\mathbf{w}}_3 \underline{\mathbf{w}}_3 + \mu_4 (\underline{\mathbf{w}}_4 \underline{\mathbf{w}}_4 + \underline{\mathbf{w}}_5 \underline{\mathbf{w}}_5) + \mu_6 \underline{\mathbf{w}}_6 \underline{\mathbf{w}}_6).$$

Материалы тетрагональной сингонии могут быть следующих видов:

{1,1,1,1,2}, {1,1,1,2,1}, {1,1,2,1,1}, {1,2,1,1,1}, {2,1,1,1,1}.

Триклинная сингония

В этом случае матрица A тензора $\underline{\underline{A}}$ имеет общий вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} \end{pmatrix}. \quad (1.111)$$

$$\underline{\underline{A}} = \mu_1 \underline{\underline{W}}_1 \underline{\underline{W}}_1 + \mu_2 \underline{\underline{W}}_2 \underline{\underline{W}}_2 + \mu_3 \underline{\underline{W}}_3 \underline{\underline{W}}_3 + \mu_4 \underline{\underline{W}}_4 \underline{\underline{W}}_4 + \mu_5 \underline{\underline{W}}_5 \underline{\underline{W}}_5 + \mu_6 \underline{\underline{W}}_6 \underline{\underline{W}}_6.$$

По свойствам симметрии материалы триклинной сингонии не отличаются друг от друга, хотя в зависимости от собственных значений и собственных тензоров они могут быть качественно различными.

Некоторые микрополярные материалы.

Микрополярные материалы с центром симметрии, символы анизотропии которых состоят из трех элементов (среди них — изотропные материалы)

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 9, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 7, \quad m = 1, 2, 3,$
 $\{1, 1, 7\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 4\}, \{1, 5, 3\}, \{1, 6, 2\}, \{1, 7, 1\}; \{2, 1, 6\},$
 $\{2, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 3\}, \{2, 5, 2\}, \{2, 6, 1\}; \{3, 1, 5\}, \{3, 2, 4\}, \{3, 3, 3\},$
 $\{3, 4, 2\}, \{3, 5, 1\}; \{4, 1, 4\}, \{4, 2, 3\}, \{3, 3, 2\}, \{4, 4, 4\}; \{5, 1, 3\}, \{5, 2, 2\},$
 $\{5, 3, 1\}; \{6, 1, 2\}, \{6, 2, 1\}; \{7, 1, 1\}.$

Число таких материалов равно $C_8^2 = 28$.

Рассмотрим по отдельности следующие материалы $\{1, 5, 3\}, \{5, 1, 3\}$:

$$\{1, 5, 3\} \Leftrightarrow (\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 > \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1}} + \lambda_2 (\underline{\underline{\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2}} + \underline{\underline{\mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3}} + \dots + \underline{\underline{\mathbf{u}_6 \mathbf{u}_6}}) + \lambda_7 (\underline{\underline{\mathbf{u}_7 \mathbf{u}_7}} + \underline{\underline{\mathbf{u}_8 \mathbf{u}_8}} + \underline{\underline{\mathbf{u}_9 \mathbf{u}_9}}) = \right. \\ \left. = (\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\underline{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1}} + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{C}_{(2)}}} + (\lambda_7 - \lambda_2) (\underline{\underline{\mathbf{u}_7 \mathbf{u}_7}} + \underline{\underline{\mathbf{u}_8 \mathbf{u}_8}} + \underline{\underline{\mathbf{u}_9 \mathbf{u}_9}}) \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \lambda_1^{-1} \underline{\underline{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1}} + \lambda_2^{-1} (\underline{\underline{\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2}} + \underline{\underline{\mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3}} + \dots + \underline{\underline{\mathbf{u}_6 \mathbf{u}_6}}) + \lambda_7^{-1} (\underline{\underline{\mathbf{u}_7 \mathbf{u}_7}} + \underline{\underline{\mathbf{u}_8 \mathbf{u}_8}} + \underline{\underline{\mathbf{u}_9 \mathbf{u}_9}}) = \right. \\ \left. = (\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1}} + \lambda_2^{-1} \underline{\underline{\mathbf{C}_{(2)}}} + (\lambda_7^{-1} - \lambda_2^{-1}) (\underline{\underline{\mathbf{u}_7 \mathbf{u}_7}} + \underline{\underline{\mathbf{u}_8 \mathbf{u}_8}} + \underline{\underline{\mathbf{u}_9 \mathbf{u}_9}}) \right),$$

$$\begin{aligned}
\{5, 1, 3\} &\Leftrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 > \lambda_6 > \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda_1(\underline{\mathbf{u}}_1\underline{\mathbf{u}}_1 + \underline{\mathbf{u}}_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \dots + \underline{\mathbf{u}}_5\underline{\mathbf{u}}_5) + \lambda_6\underline{\mathbf{u}}_6\underline{\mathbf{u}}_6 + \lambda_7(\underline{\mathbf{u}}_7\underline{\mathbf{u}}_7 + \underline{\mathbf{u}}_8\underline{\mathbf{u}}_8 + \underline{\mathbf{u}}_9\underline{\mathbf{u}}_9) = \right. \\
&\quad \left. = \lambda_1\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} - (\lambda_1 - \lambda_6)\underline{\mathbf{u}}_6\underline{\mathbf{u}}_6 - (\lambda_1 - \lambda_7)(\underline{\mathbf{u}}_7\underline{\mathbf{u}}_7 + \underline{\mathbf{u}}_8\underline{\mathbf{u}}_8 + \underline{\mathbf{u}}_9\underline{\mathbf{u}}_9) \right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \lambda_1^{-1}(\underline{\mathbf{u}}_1\underline{\mathbf{u}}_1 + \underline{\mathbf{u}}_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \dots + \underline{\mathbf{u}}_5\underline{\mathbf{u}}_5) + \lambda_6^{-1}\underline{\mathbf{u}}_6\underline{\mathbf{u}}_6 + \lambda_7^{-1}(\underline{\mathbf{u}}_7\underline{\mathbf{u}}_7 + \underline{\mathbf{u}}_8\underline{\mathbf{u}}_8 + \underline{\mathbf{u}}_9\underline{\mathbf{u}}_9) = \right. \\
&\quad \left. = \lambda_1^{-1}\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} - (\lambda_1^{-1} - \lambda_6^{-1})\underline{\mathbf{u}}_6\underline{\mathbf{u}}_6 - (\lambda_1^{-1} - \lambda_7^{-1})(\underline{\mathbf{u}}_7\underline{\mathbf{u}}_7 + \underline{\mathbf{u}}_8\underline{\mathbf{u}}_8 + \underline{\mathbf{u}}_9\underline{\mathbf{u}}_9) \right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим традиционный "изотропный" микрополярный материал

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\mathbf{A}}} &= a_1\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + a_2\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + a_3\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)} = \lambda \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \underline{\mathbf{e}}_\alpha \underline{\mathbf{e}}_\beta + 2\mu \sum_{\alpha=1}^6 \underline{\mathbf{e}}_\alpha \underline{\mathbf{e}}_\alpha + 2\alpha \sum_{\beta=7}^9 \underline{\mathbf{e}}_\beta \underline{\mathbf{e}}_\beta = \\
&= a_1 \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \underline{\mathbf{e}}_\alpha \underline{\mathbf{e}}_\beta + (a_2 + a_3) \sum_{\alpha=1}^6 \underline{\mathbf{e}}_\alpha \underline{\mathbf{e}}_\alpha + (a_2 - a_3) \sum_{\beta=7}^9 \underline{\mathbf{e}}_\beta \underline{\mathbf{e}}_\beta,
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \underline{\mathbf{e}}_\alpha \underline{\mathbf{e}}_\beta, \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} = \sum_{\alpha=1}^9 \underline{\mathbf{e}}_\alpha \underline{\mathbf{e}}_\alpha, \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)} = \sum_{\alpha=1}^6 \underline{\mathbf{e}}_\alpha \underline{\mathbf{e}}_\alpha - \sum_{\beta=7}^9 \underline{\mathbf{e}}_\beta \underline{\mathbf{e}}_\beta,$$

$$A_{11} = a_1 + a_2 + a_3 = \lambda + 2\mu, \quad A_{12} = a_1 = \lambda,$$

$$A_{44} = A_{11} - A_{12} = a_2 + a_3 = 2\mu, \quad A_{77} = a_2 - a_3 = 2\alpha.$$

(1.112)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{77} \end{pmatrix}, \quad (1.113)$$

$$\text{Xap. yp=e: } \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = (A_{11} + 2A_{12} - \lambda)(A_{44} - \lambda)^5 (A_{77} - \lambda)^3 = 0. \quad (1.114)$$

$$\mu_1 = A_{11} + 2A_{12}, \quad \mu_2 = \mu_3 = A_{44} = A_{11} - A_{12},$$

$$\underline{\underline{u}}_1 = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}(\underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_2 + \underline{\underline{e}}_3) = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}\underline{\underline{E}}, \quad (1.115)$$

$$\underline{\underline{u}}_2 = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}(\underline{\underline{e}}_1 - \underline{\underline{e}}_2), \quad \underline{\underline{u}}_3 = \frac{\pm\sqrt{6}}{6}(\underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_2 - 2\underline{\underline{e}}_3).$$

$$\begin{aligned} \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = A_{44}, \quad \underline{\underline{u}}_4 = \underline{\underline{e}}_4, \quad \underline{\underline{u}}_5 = \underline{\underline{e}}_5, \quad \underline{\underline{u}}_6 = \underline{\underline{e}}_6, \\ \mu_7 = \mu_8 = \mu_9 = A_{77}, \quad \underline{\underline{u}}_7 = \underline{\underline{e}}_7, \quad \underline{\underline{u}}_8 = \underline{\underline{e}}_8, \quad \underline{\underline{u}}_9 = \underline{\underline{e}}_9. \end{aligned} \quad (1.116)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{\underline{\underline{A}}} &= \lambda_1 \mathbf{\underline{\underline{u}}}_1 \mathbf{\underline{\underline{u}}}_1 + \lambda_2 \sum_{m=2}^6 \mathbf{\underline{\underline{u}}}_m \mathbf{\underline{\underline{u}}}_m + \lambda_7 \sum_{m=7}^9 \mathbf{\underline{\underline{u}}}_m \mathbf{\underline{\underline{u}}}_m = \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{\underline{\underline{u}}}_1 \mathbf{\underline{\underline{u}}}_1 + \lambda_2 \mathbf{\underline{\underline{E}}} + (\lambda_7 - \lambda_2) \sum_{m=7}^9 \mathbf{\underline{\underline{u}}}_m \mathbf{\underline{\underline{u}}}_m = \\
&= \frac{1}{3} (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{\underline{\underline{C}}}_{(1)} + \lambda_2 \mathbf{\underline{\underline{C}}}_{(2)} + (\lambda_7 - \lambda_2) \sum_{m=7}^9 \mathbf{\underline{\underline{e}}}_m \mathbf{\underline{\underline{e}}}_m, \quad \mathbf{\underline{\underline{E}}} = \mathbf{\underline{\underline{C}}}_{(2)} = \sum_{m=1}^9 \mathbf{\underline{\underline{u}}}_m \mathbf{\underline{\underline{u}}}_m.
\end{aligned} \tag{1.117}$$

Нетрудно заметить, что материал структуры {1,5,3} совпадает с традиционным изотропным материалом (1.117), если $\mathbf{\underline{\underline{u}}}_1 = \pm\sqrt{3}/3 \mathbf{\underline{\underline{E}}}$ и $\mathbf{\underline{\underline{u}}}_m = \mathbf{\underline{\underline{e}}}_m$, $m = 7, 8, 9$.

Учитывая $\sum_{m=7}^9 \mathbf{\underline{\underline{e}}}_m \mathbf{\underline{\underline{e}}}_m = 1/2(\mathbf{\underline{\underline{C}}}_{(2)} - \mathbf{\underline{\underline{C}}}_{(3)})$, из (1.117) получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{\underline{\underline{A}}} &= \frac{1}{3} (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{\underline{\underline{C}}}_{(1)} + \frac{1}{2} (\lambda_2 + \lambda_7) \mathbf{\underline{\underline{C}}}_{(2)} + \frac{1}{2} (\lambda_2 - \lambda_7) \mathbf{\underline{\underline{C}}}_{(3)} = \\
&= \alpha_1 \mathbf{\underline{\underline{C}}}_{(1)} + \alpha_2 \mathbf{\underline{\underline{C}}}_{(2)} + \alpha_3 \mathbf{\underline{\underline{C}}}_{(3)}.
\end{aligned} \tag{1.118}$$

Далее для материалов {1,5,3} и {5,1,3} подсчитаем коэффициенты Пуассона. В этой связи запишем обратные определяющие соотношения для материалов, обладающих центром симметрии. Имеем

$$\mathbf{\underline{\underline{\gamma}}} = \mathbf{\underline{\underline{A}}}^{-1} \otimes \mathbf{\underline{\underline{P}}}, \quad \mathbf{\underline{\underline{\varkappa}}} = \mathbf{\underline{\underline{D}}}^{-1} \otimes \mathbf{\underline{\underline{\mu}}}. \tag{1.119}$$

Выпишем здесь выражения для тензоров $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$ следующих материалов $\{1,5,3\}$ и $\{5,1,3\}$. Имеем

$$\begin{aligned}\{1, 5, 3\} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= (\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\mathbf{u}}_1 \underline{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + (\lambda_7 - \lambda_2) (\underline{\mathbf{u}}_7 \underline{\mathbf{u}}_7 + \underline{\mathbf{u}}_8 \underline{\mathbf{u}}_8 + \underline{\mathbf{u}}_9 \underline{\mathbf{u}}_9), \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} &= (\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \underline{\mathbf{u}}_1 \underline{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2^{-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + (\lambda_7^{-1} - \lambda_2^{-1}) (\underline{\mathbf{u}}_7 \underline{\mathbf{u}}_7 + \underline{\mathbf{u}}_8 \underline{\mathbf{u}}_8 + \underline{\mathbf{u}}_9 \underline{\mathbf{u}}_9); \\ \{5, 1, 3\} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} - (\lambda_1 - \lambda_6) \underline{\mathbf{u}}_6 \underline{\mathbf{u}}_6 - (\lambda_1 - \lambda_7) (\underline{\mathbf{u}}_7 \underline{\mathbf{u}}_7 + \underline{\mathbf{u}}_8 \underline{\mathbf{u}}_8 + \underline{\mathbf{u}}_9 \underline{\mathbf{u}}_9), \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} &= \lambda_1^{-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} - (\lambda_1^{-1} - \lambda_6^{-1}) \underline{\mathbf{u}}_6 \underline{\mathbf{u}}_6 - (\lambda_1^{-1} - \lambda_7^{-1}) (\underline{\mathbf{u}}_7 \underline{\mathbf{u}}_7 + \underline{\mathbf{u}}_8 \underline{\mathbf{u}}_8 + \underline{\mathbf{u}}_9 \underline{\mathbf{u}}_9).\end{aligned}\tag{1.120}$$

Предположим, что

$$\underline{\mathbf{u}}_1 = \underline{\mathbf{u}}_6 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{u}}_m = \underline{\mathbf{e}}_m, \quad m = 7, 8, 9.\tag{1.121}$$

Тогда, учитывая $\sum_{m=7}^9 \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{e}}_m = 1/2(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)})$ и (1.121), из (1.120) получим

$$\begin{aligned}\{1, 5, 3\} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_7) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_7) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}, \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} &= \frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + \frac{1}{2}(\lambda_2^{-1} + \lambda_7^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \frac{1}{2}(\lambda_2^{-1} - \lambda_7^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}; \\ \{5, 1, 3\} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= -\frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_6) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_7) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_7) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}, \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} &= -\frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_6^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + \frac{1}{2}(\lambda_1^{-1} + \lambda_7^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \frac{1}{2}(\lambda_1^{-1} - \lambda_7^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}.\end{aligned}\tag{1.122}$$

Если положим $\underline{\mathbf{P}} = P_1 \underline{\mathbf{e}}_1$, то в силу (1.122) и первого соотношения (1.119)

$$\begin{aligned}
 \{1, 5, 3\} : \underline{\gamma} &= P_1 \underline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{\otimes}^2 \underline{\mathbf{e}}_1 = P_1 \left[\frac{1}{3} (\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \underline{\mathbf{E}} + \lambda_2^{-1} \underline{\mathbf{e}}_1 \right], \\
 \gamma_1 &= \underline{\gamma} \underline{\otimes}^2 \underline{\mathbf{e}}_1 = \frac{(\lambda_2 + 2\lambda_1)P_1}{3\lambda_1\lambda_2}, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \underline{\gamma} \underline{\otimes}^2 \underline{\mathbf{e}}_2 = -\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)P_1}{3\lambda_1\lambda_2} < 0, \\
 \nu &= -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + 2\lambda_1} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} > 0, \quad \underline{0 < \nu < \frac{1}{2} \quad (0 < \varepsilon < \frac{1}{2})}; \\
 \{5, 1, 3\} : \underline{\gamma} &= P_1 \underline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{\otimes}^2 \underline{\mathbf{e}}_1 = P_1 \left[-\frac{1}{3} (\lambda_1^{-1} - \lambda_6^{-1}) \underline{\mathbf{E}} + \lambda_1^{-1} \underline{\mathbf{e}}_1 \right], \quad (1.123) \\
 \gamma_1 &= \underline{\gamma} \underline{\otimes}^2 \underline{\mathbf{e}}_1 = \frac{(\lambda_1 + 2\lambda_6)P_1}{3\lambda_1\lambda_6}, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \underline{\gamma} \underline{\otimes}^2 \underline{\mathbf{e}}_2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_6)P_1}{3\lambda_1\lambda_6} < 0, \\
 \nu &= -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = -\frac{\lambda_1 - \lambda_6}{\lambda_1 + 2\lambda_6} > 0, \quad \underline{-1 < \nu < 0 \quad (-1 < \varepsilon < 0)}. \\
 \left(\varepsilon = -\frac{\kappa_{22}}{\kappa_{11}} = -\frac{\kappa_{33}}{\kappa_{11}} = \frac{\gamma}{2(\gamma + \delta)} \right)
 \end{aligned}$$

Аналогичная картина получается из второго соотношения (1.119). Однако случай, когда материал не обладает центром симметрии, заслуживает особого рассмотрения.

Ортотропный микроконтинуальный материал

В этом случае матрица компонент A тензора $\underline{\underline{A}}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} & A_{67} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{67} & A_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{88} & A_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{89} & A_{99} \end{pmatrix}. \quad (1.124)$$

Число независимых компонент равно 15.

Характеристическое уравнение тензора $\underline{\underline{A}}$ в силу (1.124) представляется в виде

$$\det(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{44} - \lambda & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} - \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{66} - \lambda & A_{67} \\ A_{67} & A_{77} - \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{88} - \lambda & A_{89} \\ A_{89} & A_{99} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.125)$$

Из (1.125) следует, что имеет место хотя бы одно из следующих уравнений:

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_{44} - \lambda & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.126)$$

$$\begin{vmatrix} A_{66} - \lambda & A_{67} \\ A_{67} & A_{77} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_{88} - \lambda & A_{89} \\ A_{89} & A_{99} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Первое из (1.126) — кубическое уравнение, которое имеет три положительных корня. Обозначим эти корни через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а соответствующие этим корням собственные тензоры через $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2$ и $\underline{\mathbf{u}}_3$. Собственные значения и собственные тензоры тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \quad \underline{\mathbf{u}}_i &= u_{i,1}\underline{\mathbf{e}}_1 + u_{i,2}\underline{\mathbf{e}}_2 + u_{i,3}\underline{\mathbf{e}}_3, \quad i = 1, 2, 3, \\ \lambda_{4,5} &= \frac{1}{2}(A_{44} + A_{55}) \pm \frac{1}{2}(A_{44} - A_{55})\frac{1}{\cos 2\alpha}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2A_{45}}{A_{44} - A_{55}}, \\ \underline{\mathbf{u}}_4 &= -\sin \alpha \underline{\mathbf{e}}_4 + \cos \alpha \underline{\mathbf{e}}_5, \quad \underline{\mathbf{u}}_5 = \cos \alpha \underline{\mathbf{e}}_4 + \sin \alpha \underline{\mathbf{e}}_5; \\ \lambda_{6,7} &= \frac{1}{2}(A_{66} + A_{77}) \pm \frac{1}{2}(A_{66} - A_{77})\frac{1}{\cos 2\beta}, \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2A_{67}}{A_{66} - A_{77}}, \\ \underline{\mathbf{u}}_6 &= -\sin \beta \underline{\mathbf{e}}_6 + \cos \beta \underline{\mathbf{e}}_7, \quad \underline{\mathbf{u}}_7 = \cos \beta \underline{\mathbf{e}}_6 + \sin \beta \underline{\mathbf{e}}_7; \\ \lambda_{8,9} &= \frac{1}{2}(A_{88} + A_{99}) \pm \frac{1}{2}(A_{88} - A_{99})\frac{1}{\cos 2\gamma}, \quad \operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2A_{89}}{A_{88} - A_{99}}, \\ \underline{\mathbf{u}}_8 &= -\sin \gamma \underline{\mathbf{e}}_8 + \cos \gamma \underline{\mathbf{e}}_9, \quad \underline{\mathbf{u}}_9 = \cos \gamma \underline{\mathbf{e}}_8 + \sin \gamma \underline{\mathbf{e}}_9. \end{aligned} \quad (1.127)$$

1. Уравнения движения в векторах перемещений и вращений для упругого материала с центром симметрии

Для линейно-упругого неоднор. анизотр. материала с центром симметрии

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\gamma}}, \quad \underline{\underline{\mu}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} \otimes \underline{\underline{\varkappa}} \quad (\underline{\underline{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\varphi}}, \quad \underline{\underline{\varkappa}} = \nabla \underline{\underline{\varphi}}), \quad (1.128)$$

а уравнения движения в перемещениях и вращениях можно записать в виде

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(1)} \cdot \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(2)} \cdot \underline{\underline{\varphi}} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(3)} \cdot \mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\varphi}} + \rho \mathbf{m} = 0, \quad (1.129)$$

где дифф. тензоры-операторы $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, имеют форму

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(1)} &= \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l (A^{ijkl} \nabla_i \nabla_k + \nabla_i A^{ijkl} \nabla_k) - \underline{\underline{\mathbf{E}}} \rho \partial_t^2, \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(2)} &= -\mathbf{r}_j \mathbf{r}^m C_{mkl} (A^{kl ij} \nabla_i + \nabla_i A^{kl ij}), \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(3)} = \mathbf{r}^m \mathbf{r}_j C_{mkl} A^{kl ij} \nabla_i, \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)} &= \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l (D^{ijkl} \nabla_i \nabla_k + \nabla_i D^{ijkl} \nabla_k) - \underline{\underline{\zeta}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\zeta}} - \underline{\underline{\mathbf{J}}} \partial_t^2. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Вводя в рассмотрение матричный дифф. тензор-оператор и векторы столбцы

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(1)} & \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(2)} \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(3)} & \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{U}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \underline{\underline{\varphi}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbf{X}}} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{F} \\ \rho \mathbf{m} \end{pmatrix}, \quad (1.131)$$

уравнения (1.129) можно коротко представить в следующем виде:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\underline{\mathbf{X}}} = 0. \quad (1.132)$$

В случае однородного изотропного материала дифференциальные тензоры-операторы $\underline{\mathbf{A}}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, представляются в форме

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{A}} &\equiv \underline{\mathbf{A}}^{(1)} = \underline{\mathbf{E}}Q_2 + d\nabla\nabla, \quad \underline{\mathbf{B}} \equiv \underline{\mathbf{A}}^{(2)} = \underline{\mathbf{A}}^{(3)} = -2\alpha\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla, \quad \underline{\mathbf{C}} \equiv \underline{\mathbf{A}}^{(4)} = \underline{\mathbf{E}}Q_4 + m\nabla\nabla, \\ Q_2 &= b\Delta - \rho\partial_t^2, \quad Q_4 = g\Delta - l - j\partial_t^2, \quad Q_1 = Q_2 + d\Delta, \quad Q_3 = Q_4 + m\Delta, \quad \underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{J}}\underline{\mathbf{E}}, \\ d &= \lambda + \mu - \alpha, \quad l = 4\alpha, \quad b = \mu + \alpha, \quad g = \delta + \beta, \quad m = \gamma + \delta - \beta.\end{aligned}\tag{1.133}$$

Обозначая через

$$\underline{\mathbf{M}}_* = \begin{pmatrix} \hat{\underline{\mathbf{A}}} & \hat{\underline{\mathbf{B}}}^{(1)} \\ \hat{\underline{\mathbf{B}}}^{(2)} & \hat{\underline{\mathbf{C}}} \end{pmatrix}\tag{1.134}$$

матричный дифференциальный тензор-оператор алгебраических дополнений дифференциального оператора $\underline{\mathbf{M}}$ уравнения (1.132), после простых, хотя очень громоздких вычислений получим

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\mathbf{A}}} &= Q_3 P \underline{\mathbf{R}} \quad (\hat{\underline{\mathbf{A}}}^T = \hat{\underline{\mathbf{A}}}), \quad \hat{\underline{\mathbf{B}}} = \hat{\underline{\mathbf{B}}}^{(1)} = \hat{\underline{\mathbf{B}}}^{(2)} = Q_1 Q_3 P \underline{\mathbf{B}} \quad (\hat{\underline{\mathbf{B}}}^T = -\hat{\underline{\mathbf{B}}}), \\ \hat{\underline{\mathbf{C}}} &= Q_1 P \underline{\mathbf{T}} \quad (\hat{\underline{\mathbf{C}}}^T = \hat{\underline{\mathbf{C}}}); \quad \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{E}}Q_1 Q_4 - (dQ_4 - 4\alpha^2)\nabla\nabla, \quad \underline{\mathbf{B}} = -2\alpha\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla, \\ \underline{\mathbf{T}} &= \underline{\mathbf{E}}Q_2 Q_3 - (mQ_2 - 4\alpha^2)\nabla\nabla, \quad P = Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta.\end{aligned}\tag{1.135}$$

Нетрудно видеть, что в силу (1.135) тензорно-блочный матричный оператор алгебраических дополнений (1.134) можно представить следующим образом:

$$\underline{\mathbb{M}}_* = P \begin{pmatrix} Q_3 \underline{\mathbf{R}} & Q_1 Q_3 \underline{\mathbf{B}} \\ Q_1 Q_3 \underline{\mathbf{B}} & Q_1 \underline{\mathbf{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PQ_3 & 0 \\ 0 & PQ_1 \end{pmatrix} \underline{\mathbb{N}}^{(1)} = \underline{\mathbb{N}}^{(2)} \begin{pmatrix} PQ_3 & 0 \\ 0 & PQ_1 \end{pmatrix}, \quad (1.136)$$

где введены в рассмотрение тензорно-блочные матричные операторы

$$\underline{\mathbb{N}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{R}} & Q_1 \underline{\mathbf{B}} \\ Q_3 \underline{\mathbf{B}} & \underline{\mathbf{T}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbb{N}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{R}} & Q_3 \underline{\mathbf{B}} \\ Q_1 \underline{\mathbf{B}} & \underline{\mathbf{T}} \end{pmatrix}. \quad (1.137)$$

Нетрудно доказать, что имеют место соотношения

$$\underline{\mathbb{M}} \cdot \underline{\mathbb{N}}^{(1)T} = \underline{\mathbb{N}}^{(2)T} \cdot \underline{\mathbb{M}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{E}} Q_1 P & \underline{\mathbf{O}} \\ \underline{\mathbf{O}} & \underline{\mathbf{E}} Q_3 P \end{pmatrix}, \quad |\underline{\mathbb{M}}| = \det(\underline{\mathbb{M}}) = Q_1 Q_3 P^2. \quad (1.138)$$

Далее если решение уравнения (1.132) будем искать в виде (анал. Галеркину)

$$\mathbf{U} = \underline{\mathbb{N}}^{(1)T} \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\psi} \end{pmatrix}, \quad (1.139)$$

то получим следующие уравнения:

$$Q_1(Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta) \mathbf{v} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad Q_3(Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta) \boldsymbol{\psi} + \rho \mathbf{m} = 0. \quad (1.140)$$

Если к уравнению (1.132) слева применить оператор $\underline{\mathbb{N}}^{(2)T}$, то будем иметь

$$\begin{aligned} Q_1[(Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta) \mathbf{u} + 2\alpha(\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla) \cdot (\rho \mathbf{m})] + [\underline{\mathbf{E}} Q_1 Q_4 - (d Q_4 - 4\alpha^2) \nabla \nabla] \cdot (\rho \mathbf{F}) &= 0, \\ Q_3[(Q_2 Q_4 + 4\alpha^2 \Delta) \boldsymbol{\varphi} + 2\alpha(\underline{\mathbf{C}} \cdot \nabla) \cdot (\rho \mathbf{F})] + [\underline{\mathbf{E}} Q_2 Q_3 - (m Q_2 - 4\alpha^2) \nabla \nabla] \cdot (\rho \mathbf{m}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.141)$$

При $\alpha = 0$ (случай редуцированной среды) из первого уравнения (1.141) следует классическое уравнение, а второе уравнение имеет аналогичный ему вид.

О граничных условиях в линейной трехмерной микрополярной теории упругости. Тензор-оператор напряжения и моментного напряжения

Граничные условия для линейно-упругого неоднородного анизотропного тела

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underline{\boldsymbol{\gamma}} + \underline{\mathbf{B}} \overset{2}{\otimes} \underline{\boldsymbol{\varkappa}}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \underline{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underline{\boldsymbol{\gamma}} + \underline{\mathbf{D}} \overset{2}{\otimes} \underline{\boldsymbol{\varkappa}} \quad (1.142)$$

без центра симметрии при изотермических процессах можно записать в виде

$$\underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{T}}^{(2)} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}} = \underline{\mathbf{P}}_{(n)}, \quad \underline{\mathbf{T}}^{(3)} \cdot \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{T}}^{(4)} \cdot \underline{\boldsymbol{\varphi}} = \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(n)}, \quad (1.143)$$

где введены в рассмотрение следующие дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}}^{(1)} &= \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l n_i A^{ijkl} \nabla_k, & \underline{\mathbf{T}}^{(2)} &= \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l n_i B^{ijkl} \nabla_k - \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{A}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{C}}, \\ \underline{\mathbf{T}}^{(3)} &= \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l n_i C^{ijkl} \nabla_k, & \underline{\mathbf{T}}^{(4)} &= \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l n_i D^{ijkl} \nabla_k - \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{C}} \overset{2}{\otimes} \underline{\mathbf{C}}. \end{aligned} \quad (1.144)$$

Введем тензор-оператор напряж. и момент. напряжения и векторные столбцы:

$$\underline{\mathbb{T}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{T}}^{(1)} & \underline{\mathbf{T}}^{(2)} \\ \underline{\mathbf{T}}^{(3)} & \underline{\mathbf{T}}^{(4)} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\boldsymbol{\varphi}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{Q}}_{(n)} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{P}}_{(n)} \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(n)} \end{pmatrix}. \quad (1.145)$$

Тогда в этом случае граничные условия можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{T}}^{(1)} & \underline{\mathbf{T}}^{(2)} \\ \underline{\mathbf{T}}^{(3)} & \underline{\mathbf{T}}^{(4)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\boldsymbol{\varphi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{P}}_{(n)} \\ \underline{\boldsymbol{\mu}}_{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{или коротко} \quad \underline{\mathbb{T}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Q}}_{(n)}. \quad (1.146)$$

В случае изотропного материала

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{A}}} &= a_1 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + a_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + a_3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}, & \underline{\underline{\mathbf{B}}} &= b_1 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + b_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + b_3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}, \\ \underline{\underline{\mathbf{D}}} &= d_1 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + d_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + d_3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}\end{aligned}\quad (1.147)$$

без центра симметрии имеем

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(1)} &= a_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}} \mathbf{n} \cdot \nabla + a_1 \mathbf{n} \nabla + a_3 (\mathbf{n} \nabla)^T, & \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(2)} &= b_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}} \mathbf{n} \cdot \nabla + b_1 \mathbf{n} \nabla + b_3 (\mathbf{n} \nabla)^T - (a_2 - a_3) \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}, \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(3)} &= b_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}} \mathbf{n} \cdot \nabla + b_1 \mathbf{n} \nabla + b_3 (\mathbf{n} \nabla)^T, & \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(4)} &= d_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}} \mathbf{n} \cdot \nabla + d_1 \mathbf{n} \nabla + d_3 (\mathbf{n} \nabla)^T - (b_2 - b_3) \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}.\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(2)} &= \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(3)} - (a_2 - a_3) \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}, & \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(4)} &= \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{'(4)} - (b_2 - b_3) \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}, \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{'(4)} &= d_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}} \mathbf{n} \cdot \nabla + d_1 \mathbf{n} \nabla + d_3 (\mathbf{n} \nabla)^T\end{aligned}\quad (1.148)$$

Предполагая, что тело имеет кусочно-плоскую границу и обозначая $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_*^{(1)}$ и $|\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(1)}|$, $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_*^{(3)}$ и $|\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(3)}|$, $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_*^{'(4)}$ и $|\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{'(4)}|$ дифф. тензоры-операторы алгебраических дополнений и определители тензоров-операторов $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(1)}$, $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(3)}$ и $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^{'(4)}$ соответственно, после простых, хотя громоздких, вычислений получим

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{T}}}_*^{(1)} &= [(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \underline{\underline{\mathbf{E}}} \mathbf{n} \cdot \nabla - a_3(a_1 + a_2) \mathbf{n} \nabla - \\ &\quad - a_1(a_2 + a_3) (\mathbf{n} \nabla)^T] \mathbf{n} \cdot \nabla + a_1 a_3 [\nabla \nabla + (\mathbf{n} \mathbf{n} - \underline{\underline{\mathbf{E}}}) \Delta],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\underline{\mathbf{T}}^{(1)}| &= a_2[(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\mathbf{nn}\overset{3}{\otimes}\nabla\nabla\nabla - a_1a_3\Delta\mathbf{n}\cdot\nabla] = \\
&= a_2[(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)\mathbf{nn}\overset{2}{\otimes}\nabla\nabla - a_1a_3\Delta]\mathbf{n}\cdot\nabla, \\
\underline{\mathbf{T}}^{(3)}_{*} &= [(b_1 + b_2)(b_2 + b_3)\underline{\mathbf{E}}\mathbf{n}\cdot\nabla - b_3(b_1 + b_2)\mathbf{n}\nabla - \\
&\quad - b_1(b_2 + b_3)(\mathbf{n}\nabla)^T]\mathbf{n}\cdot\nabla + b_1b_3[\nabla\nabla + (\mathbf{nn} - \underline{\mathbf{E}})\Delta], \\
|\underline{\mathbf{T}}^{(3)}| &= b_2[(b_1 + b_2)(b_2 + b_3)\mathbf{nn}\overset{2}{\otimes}\nabla\nabla - b_1b_3\Delta]\mathbf{n}\cdot\nabla, \\
\underline{\mathbf{T}}^{\prime(4)}_{*} &= [(d_1 + d_2)(d_2 + d_3)\underline{\mathbf{E}}\mathbf{n}\cdot\nabla - d_3(d_1 + d_2)\mathbf{n}\nabla - \\
&\quad - d_1(d_2 + d_3)(\mathbf{n}\nabla)^T]\mathbf{n}\cdot\nabla + d_1d_3[\nabla\nabla + (\mathbf{nn} - \underline{\mathbf{E}})\Delta], \\
|\underline{\mathbf{T}}^{\prime(4)}| &= d_2[(d_1 + d_2)(d_2 + d_3)\mathbf{nn}\overset{2}{\otimes}\nabla\nabla - d_1d_3\Delta]\mathbf{n}\cdot\nabla.
\end{aligned} \tag{1.149}$$

Отметим, что мы хотим по отдельности для $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ получить гран. усл-я. С целью сокращения письма рассмотрим случай, когда $\underline{b}_2 = b_3, \underline{a}_2 = a_3$. Тогда $\underline{\mathbf{T}}^{(2)} = \underline{\mathbf{T}}^{(3)}, \underline{\mathbf{T}}^{(4)} = \underline{\mathbf{T}}^{\prime(4)}$ и гран. усл-я (1.146) можно записать в виде

$$\underline{\mathbf{T}}^{(1)} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{T}}^{(3)} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{P}_{(n)}, \quad \underline{\mathbf{T}}^{(3)} \cdot \mathbf{u} + \underline{\mathbf{T}}^{\prime(4)} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\mu}_{(n)}. \tag{1.150}$$

В данном случае легко получить гран. усл-я по отдельности для $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\begin{aligned}
\left(|\underline{\mathbf{T}}^{\prime(4)}| \underline{\mathbf{T}}^{(3)T}_{*} \underline{\mathbf{T}}^{(1)} - |\underline{\mathbf{T}}^{(3)}| \underline{\mathbf{T}}^{\prime(4)T}_{*} \underline{\mathbf{T}}^{(3)} \right) \cdot \mathbf{u} &= |\underline{\mathbf{T}}^{\prime(4)}| \underline{\mathbf{T}}^{(3)T}_{*} \mathbf{P}_{(n)} - |\underline{\mathbf{T}}^{(3)}| \underline{\mathbf{T}}^{\prime(4)T}_{*} \boldsymbol{\mu}_{(n)}, \\
\left(|\underline{\mathbf{T}}^{(3)}| \underline{\mathbf{T}}^{(1)T}_{*} \underline{\mathbf{T}}^{(3)} - |\underline{\mathbf{T}}^{(1)}| \underline{\mathbf{T}}^{(3)T}_{*} \underline{\mathbf{T}}^{\prime(4)} \right) \cdot \boldsymbol{\varphi} &= |\underline{\mathbf{T}}^{(3)}| \underline{\mathbf{T}}^{(1)T}_{*} \mathbf{P}_{(n)} - |\underline{\mathbf{T}}^{(1)}| \underline{\mathbf{T}}^{(3)T}_{*} \boldsymbol{\mu}_{(n)}.
\end{aligned}$$

Расщепление уравнения в перемещениях классической теории упругости для трансверсально-изотропного тела

В этом случае уравнения и граничные условия представляются в форме

$$\underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (\underline{\mathbf{L}} = \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l A_{ijkl} \nabla_i \nabla_k, \quad \underline{\mathbf{T}} = \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l n_i A_{ijkl} \nabla_k), \quad (1.151)$$

где тензор упругости $\underline{\mathbf{A}}$, тензор-оператор $\underline{\mathbf{L}}$, тензор-оператор алгебраических дополнений $\underline{\mathbf{L}}_*$ для $\underline{\mathbf{L}}$ и определитель $\underline{\mathbf{L}}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}} &= A_1(\underline{\mathbf{e}}_1 \underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 \underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_6 \underline{\mathbf{e}}_6) + A_2(\underline{\mathbf{e}}_1 \underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_2 \underline{\mathbf{e}}_1 - \underline{\mathbf{e}}_6 \underline{\mathbf{e}}_6) + \\ &+ A_3(\underline{\mathbf{e}}_1 \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{e}}_2) + A_4 \underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{e}}_3 + 2A_5(\underline{\mathbf{e}}_4 \underline{\mathbf{e}}_4 + \underline{\mathbf{e}}_5 \underline{\mathbf{e}}_5), \\ \underline{\mathbf{L}} &= \underline{\mathbf{e}}_1 \underline{\mathbf{e}}_1 (1/2)[(A_1 - A_2)\Delta + (A_1 + A_2)\partial_1^2 + 2A_5\partial_3^2] + \\ &+ (\underline{\mathbf{e}}_1 \underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_2 \underline{\mathbf{e}}_1)(1/2)(A_1 + A_2)\partial_1 \partial_2 + (\underline{\mathbf{e}}_1 \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{e}}_1)(A_3 + A_5)\partial_1 \partial_3 + \\ &+ \underline{\mathbf{e}}_2 \underline{\mathbf{e}}_2 (1/2)[(A_1 - A_2)\Delta + (A_1 + A_2)\partial_2^2 + 2A_5\partial_3^2] + \\ &+ (\underline{\mathbf{e}}_2 \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{e}}_2)(A_3 + A_5)\partial_2 \partial_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{e}}_3 (A_5\Delta + A_4\partial_3^2), \quad \underline{\Delta} = \partial_1^2 + \partial_2^2, \end{aligned} \quad (1.152)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{L}}_* &= L_{*11} \underline{\mathbf{e}}_1 \underline{\mathbf{e}}_1 + L_{*22} \underline{\mathbf{e}}_2 \underline{\mathbf{e}}_2 + L_{*33} \underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{e}}_3 + L_{*12}(\underline{\mathbf{e}}_1 \underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_2 \underline{\mathbf{e}}_1) + \\ &+ L_{*23}(\underline{\mathbf{e}}_2 \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{e}}_2) + L_{*31}(\underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_1 \underline{\mathbf{e}}_3), \quad \partial_i = \partial / \partial x_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ 2L_{*11} &= 2A_1 A_5 \Delta^2 + (A_1 + A_2) A_5 \Delta \partial_1^2 + \{2[A_1 A_4 - A_3(A_3 + 2A_5)]\Delta - \\ &- [(A_1 + A_2)A_4 - 2(A_3 + A_5)^2]\partial_1^2\}\partial_1^2 + 2A_4 A_5 \partial_3^4, \\ 2L_{*12} &= \{-(A_1 + A_2)A_5 \Delta + [2(A_3 + A_5)^2 - (A_1 + A_2)A_4]\partial_3^2\}\partial_1 \partial_2, \end{aligned}$$

$$2L_{*13} = -[(A_1 - A_2)(A_3 + A_5)\Delta + 2(A_3 + A_5)A_5\partial_3^2]\partial_1\partial_3,$$

$$2L_{*22} = 2A_1A_5\Delta^2 - (A_1 + A_2)A_5\Delta\partial_2^2 + \{2[A_1A_4 - A_3(A_3 + 2A_5)]\Delta -$$

$$-[(A_1 + A_2)A_4 - 2(A_3 + A_5)^2]\partial_2^2\}\partial_3^2 + 2A_4A_5\partial_3^4,$$

$$2L_{*23} = -[(A_1 - A_2)(A_3 + A_5)\Delta + 2(A_3 + A_5)A_5\partial_3^2]\partial_2\partial_3,$$

$$2L_{*33} = [(A_1 - A_2)A_1\Delta^2 + (3A_1 - A_2)A_5]\Delta\partial_3^2 + 2A_5^2\partial_3^4,$$

$$2|\underline{\mathbf{L}}| = (A_1 - A_2)A_1A_5\Delta^3 + \{(A_1 - A_2)[A_1A_4 + A_3(A_3 - 2A_5)] + 2A_1A_5\}\Delta^2\partial_3^2 +$$

$$+ [(3A_1 - A_2)A_4A_5 - 2A_3A_5(A_3 + 2A_5)]\Delta\partial_3^4 + 2A_4A_5^2\partial_3^6,$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{\mathbf{e}}_m \otimes \underline{\mathbf{e}}_n = \delta_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \dots, 6,$$

$$\underline{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1, \quad \underline{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, \quad \underline{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \quad \underline{\mathbf{e}}_4 = (1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3),$$

$$\underline{\mathbf{e}}_5 = (1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1), \quad \underline{\mathbf{e}}_6 = (1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)$$

Здесь δ_{ij} — дельта Кронекера, $\mathbf{e}_i$, $i, j = 1, 2, 3$ — ортонормированный базис. Заметим также, что

$$2l_1(\underline{\mathbf{L}}) = (3A_1 - A_2 + 2A_5)\Delta + (A_4 + 2A_5)\partial_3^2,$$

$$2l_2(\underline{\mathbf{L}}) = [(3A_1 - A_2)A_5 + A_1(A_1 - A_2)]\Delta^2 + [(3A_1 - A_2)A_4 - 2A_3(A_3 + 2A_5) +$$

$$(2A_5 + 3A_1 - A_2)A_5]\Delta\partial_3^2 + 2(2A_4 + A_5)A_5\partial_3^4, \quad l_3(\underline{\mathbf{L}}) = |\underline{\mathbf{L}}|.$$

Нетрудно заметить, что определитель тензора-оператора уравнений можно записать в виде

$$2|\underline{\mathbf{L}}| = 2 \det \underline{\mathbf{L}} = (A_1 - A_2)A_1A_5\Delta^3 + \{(A_1 - A_2)[A_1A_4 + A_3(A_3 - 2A_5)] + 2A_1A_5\}\Delta^2\partial_3^2 + [(3A_1 - A_2)A_4A_5 - 2A_3A_5(A_3 + 2A_5)]\Delta\partial_3^4 + 2A_4A_5^2\partial_3^6; \quad (1.153)$$

$$|\underline{\mathbf{L}}| = A\Delta^3 + B\Delta^2\partial_3^2 + C\Delta\partial_3^4 + D\partial_3^6 = k(\Delta + k_1\partial_3^2)(\Delta + k_2\partial_3^2)(\Delta + k_3\partial_3^2);$$

$$A = (1/2)(A_1 - A_2)A_1A_5, \quad B = (1/2)\{(A_1 - A_2)[A_1A_4 + A_3(A_3 - 2A_5)] + 2A_1A_5\},$$

$$C = (1/2)[(3A_1 - A_2)A_4A_5 - 2A_3A_5(A_3 + 2A_5)], \quad D = A_4A_5^2, \quad k, k_1, k_2, k_3 \Big| A, B, C, D.$$

Расщепленные уравнения будут иметь вид

$$|\underline{\mathbf{L}}|\mathbf{u} + \underline{\mathbf{L}}_* \cdot (\rho \mathbf{F}) = 0 \quad \text{или} \quad (\text{если } \mathbf{u} = \underline{\mathbf{L}}_* \cdot \mathbf{v} : |\underline{\mathbf{L}}|\mathbf{v} + \rho \mathbf{F} = 0). \quad (1.154)$$

Уравнения для призматических тел в моментах относительно любой системы ортогональных полиномов, например, можно представить в виде

$$A\Delta^3 \mathbf{v}^{(k)} + B\Delta^2 \mathbf{v}^{(k)''} + C\Delta \mathbf{v}^{(k)IV} + D \mathbf{v}^{(k)VI} + \rho \mathbf{F}^{(k)} = 0, \quad k = \overline{0, \infty}; \quad (1.155)$$

$$\mathbf{u}^{(n)(2m)}(x') = (2n+1) \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+2m-2}^{2m-1} \prod_{s=1}^{2m-1} (2n+2k+2s-1) \mathbf{u}^{(n+2k+2m-2)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

(Последнее соотношение имеет место для системы полиномов Лежандра.)

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{(k)''} &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \partial_3^2 \mathbf{u}(x', x^3) P_k(x^3) dx^3 = (2k+1) \sum_{p=1}^{\infty} p(2k+2p+1) \mathbf{u}^{(k+2p)} = \\
&= \frac{2k+1}{4} \sum_{p=k}^{\infty} (p-k+2)(p+k+3)[1+(-1)^{k+p}] \mathbf{u}^{(p+2)} = \\
&= \frac{2k+1}{2} \{[(\partial_3 \mathbf{u})^+ - (-1)^k (\partial_3 \mathbf{u})^-] P_k(1) - [\mathbf{u}^{(+)} + (-1)^k \mathbf{u}^{(-)}] P'_k(1)\} + \underline{\mathbf{u}}'',
\end{aligned}$$

$$\underline{\mathbf{u}}'' = (2k+1)[(2k-1) \mathbf{u}^{(k-2)} + 2(2k-3) \mathbf{u}^{(k-4)} + 3(2k-5) \mathbf{u}^{(k-6)} + 4(2k-7) \mathbf{u}^{(k-8)} + \dots],$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{(k)IV} &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \partial_3^4 \mathbf{u}(x', x^3) P_k(x^3) dx^3 = (2k+1)[(2k+7)(2k+5)(2k+3) \mathbf{u}^{(k+4)} + \\
&+ 4(2k+9)(2k+7)(2k+5) \mathbf{u}^{(k+6)} + 10(2k+11)(2k+9)(2k+7) \mathbf{u}^{(k+8)} + \\
&+ 20(2k+13)(2k+11)(2k+9) \mathbf{u}^{(k+10)} + 35(2k+15)(2k+13)(2k+11) \mathbf{u}^{(k+12)} + \dots] = \\
&= (2k+1) \sum_{s=1}^{\infty} C_{s+2}^3 (2k+2s+1)(2k+2s+3)(2k+2s+5) \mathbf{u}^{(k+2s+2)} = \\
&= \frac{2k+1}{2} \{[(\partial_3^3 \mathbf{u})^+ - (-1)^k (\partial_3^3 \mathbf{u})^-] P_k(1) - [(\partial_3^2 \mathbf{u})^+ - (-1)^{k-1} (\partial_3^2 \mathbf{u})^-] P'_k(1) + \\
&+ [(\partial_3 \mathbf{u})^+ - (-1)^{k-2} (\partial_3 \mathbf{u})^-] P''_k(1) - [\mathbf{u}^{(+)} + (-1)^k \mathbf{u}^{(-)}] P'''_k(1)\} + \underline{\mathbf{u}}^{IV},
\end{aligned}$$

где $(\partial_3^k \mathbf{u})^+ = (\partial_3^k \mathbf{u})|_{x^3=1}$, $(\partial_3^k \mathbf{u})^- = (\partial_3^k \mathbf{u})|_{x^3=-1}$, $k = 0, 1, 2, 3$, $\underline{\mathbf{u}}^{(k)IV}$ имеет выражение

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}^{(k)IV} = & \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{u}(x', x^3) P_k^{IV}(x^3) dx^3 = (2k+1)[(2k-1)(2k-3)(2k-5) \mathbf{u}^{(k-4)} + \\ & + 4(2k-3)(2k-5)(2k-7) \mathbf{u}^{(k-6)} + 10(2k-5)(2k-7)(2k-9) \mathbf{u}^{(k-8)} + \\ & + 20(2k-7)(2k-9)(2k-11) \mathbf{u}^{(k-10)} + 35(2k-9)(2k-11)(2k-13) \mathbf{u}^{(k-12)} + \dots], \end{aligned}$$

а для $\underline{\mathbf{u}}^{(k)VI}$ имеем выражение

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}^{(n)VI}(x') = & (2n+1)[(2n+11)(2n+9)(2n+7)(2n+5)(2n+3) \mathbf{u}^{(n+6)} + \\ & + 6(2n+13)(2n+11)(2n+9)(2n+7)(2n+5) \mathbf{u}^{(n+8)} + \\ & + 21(2n+15)(2n+13)(2n+11)(2n+9)(2n+7) \mathbf{u}^{(n+10)} + \\ & + 56(2n+17)(2n+15)(2n+13)(2n+11)(2n+9) \mathbf{u}^{(n+12)} + \\ & + 126(2n+19)(2n+17)(2n+15)(2n+13)(2n+11) \mathbf{u}^{(n+14)} + \dots] = \\ = & (2n+1) \sum_{k=1}^{\infty} C_{k+4}^5 \prod_{s=1}^5 (2n+2k+2s-1) \mathbf{u}^{(n+2k+4)}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Расщепление статических граничных условий классической теории упругости в случае трансверсально-изотропного тела

В этом случае граничные условия можно записать в виде $\underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{P}}$
($\underline{\mathbf{T}} = \mathbf{r}_j \mathbf{r}_l n_l A^{ijkl} \nabla_k$), где тензор-оператор напряжения $\underline{\mathbf{T}}$, тензор-оператор алгебраических дополнений $\underline{\mathbf{T}}_*$ для $\underline{\mathbf{T}}$ и определитель $|\underline{\mathbf{T}}|$ имеют вид

$$\underline{\mathbf{T}} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 [A_1 n_1 \partial_1 + 1/2(A_1 - A_2) n_2 \partial_2 + A_5 n_3 \partial_3] +$$
$$+ \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 [1/2(A_1 - A_2) n_2 \partial_1 + A_2 n_1 \partial_2] + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 (A_3 n_1 \partial_3 + A_5 n_3 \partial_1) +$$
$$+ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 [1/2(A_1 - A_2) n_1 \partial_2 + A_2 n_2 \partial_1] + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 [A_1 n_2 \partial_2 + 1/2(A_1 - A_2) n_1 \partial_1 +$$
$$+ A_5 n_3 \partial_3] + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 (A_3 n_2 \partial_3 + A_5 n_3 \partial_2) + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 (A_3 n_3 \partial_1 + A_5 n_1 \partial_3) +$$
$$+ \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 (A_3 n_3 \partial_2 + A_5 n_2 \partial_3) + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 [A_4 n_3 \partial_3 + A_5 (n_1 \partial_1 + n_2 \partial_2)], \quad \underline{\mathbf{T}}^T \neq \underline{\mathbf{T}};$$

$$|\underline{\mathbf{T}}| = AA_5 \{ [-A_2 + (A_2 - A_3) n_3^2] \Delta + (A_1 + A_2) \mathbf{n}^0 \mathbf{n}^0 \otimes \nabla^0 \nabla^0 \} \mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0 +$$
$$+ \{ A_2 (A_5^2 - AA_4) + AA_3^2 - [(A_2 + A_3) A_5^2 + A (A_3^2 - A_2 A_4)] n_3^2 \} n_3 \Delta \partial_3 +$$
$$+ [2A (A_5^2 - A_3^2) + (A_1 + A_2) AA_4] n_3 \mathbf{n}^0 \mathbf{n}^0 \otimes \nabla^0 \nabla^0 \partial_3 + A_5 [-AA_3 +$$
$$+ (AA_3 + 3AA_4 + A_2 A_4 - A_3^2) n_3^2] \mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0 \partial_3^2 - A_5^2 [A_3 - (A_3 + A_4) n_3^2] n_3 \partial_3^3,$$
$$\underline{\Delta} = \underline{\partial_1^2} + \underline{\partial_2^2}, \quad \mathbf{n}^0 = n_l \mathbf{e}_l, \quad \nabla^0 = \mathbf{e}_l \partial_l, \quad \mathbf{n}^0 \mathbf{n}^0 \otimes \nabla^0 \nabla^0 = n_l n_j \partial_l \partial_j, \quad A = 1/2(A_1 - A_2);$$

$$T_{*11} = A_5 (An_1 \partial_1 + A_1 n_2 \partial_2) \mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0 - A_3 A_5 n_3^2 \partial_2^2 + [(AA_4 + A_5^2) n_1 \partial_1 + (A_1 A_4 - A_3^2) n_2 \partial_2] n_3 \partial_3 +$$
$$+ (A_4 n_3^2 - A_3 n_2^2) A_5 \partial_3^2,$$

$$T_{*12} = -A_5(A_2n_1\partial_2 + An_2\partial_1)\mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0 + [(A_3^2 - A_2A_4)n_1\partial_2 + (A_5^2 - AA_4)n_2\partial_1]n_3\partial_3 + \\ + A_3A_5(n_3^2\partial_1\partial_2 + n_1n_2\partial_3^2),$$

$$T_{*13} = (A_2A_5n_3\partial_2 - AA_3n_2\partial_3)\underline{\mathbf{C}} \otimes^2 \mathbf{n}^0 \nabla^0 - A(A_5n_3\partial_1 + A_3n_1\partial_3)\mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0 - \\ - A_5^2n_3^2\partial_1\partial_3 - A_3A_5n_1n_3\partial_3^2, \quad \underline{\mathbf{C}} = C_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j,$$

$$T_{*21} = -A_5(A_2n_2\partial_1 + An_1\partial_2)\mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0 + [(A_3^2 - A_2A_4)n_2\partial_1 + (A_5^2 - AA_4)n_1\partial_2]n_3\partial_3 + \\ + A_3A_5(n_3^2\partial_1\partial_2 + n_1n_2\partial_3^2),$$

$$T_{*22} = A_5(An_2\partial_2 + A_1n_1\partial_1)\mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0 - A_3A_5n_3^2\partial_1^2 + [(AA_4 + A_5^2)n_2\partial_2 + (A_1A_4 - A_3^2)n_1\partial_1]n_3\partial_3 + \\ + (A_4n_3^2 - A_3n_1^2)A_5\partial_3^2,$$

$$T_{*23} = -(A_2A_5n_3\partial_1 - AA_3n_1\partial_3)\underline{\mathbf{C}} \otimes^2 \mathbf{n}^0 \nabla^0 - A(A_5n_3\partial_2 + A_3n_2\partial_3)\mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0 - \\ - A_5^2n_3^2\partial_2\partial_3 - A_3A_5n_2n_3\partial_3^2,$$

$$T_{*31} = (AA_3n_3\partial_2 - A_2A_5n_2\partial_3)\underline{\mathbf{C}} \otimes^2 \mathbf{n}^0 \nabla^0 - A(A_3n_3\partial_1 + A_5n_1\partial_3)\mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0 - \\ - A_3A_5n_3^2\partial_1\partial_3 - A_5^2n_1n_3\partial_3^2,$$

$$T_{*32} = -(AA_3n_3\partial_1 - A_2A_5n_1\partial_3)\underline{\mathbf{C}} \otimes^2 \mathbf{n}^0 \nabla^0 - A(A_3n_3\partial_2 + A_5n_2\partial_3)\mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0 - \\ - A_3A_5n_3^2\partial_2\partial_3 - A_5^2n_2n_3\partial_3^2,$$

$$T_{*33} = -AA_2(1 - n_3^2)\Delta + A(A_1 + A_2)\mathbf{n}^0\mathbf{n}^0 \otimes^2 \nabla^0 \nabla^0 + (A_1A_5 + AA_3)n_3\mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0 \partial_3 + A_5^2n_3^2\partial_3^2.$$

Расщепленные граничные условия будут иметь вид: $\underline{\mathbf{T}}|\mathbf{u} = \underline{\mathbf{T}}_*^T \cdot \mathbf{P}$.

Динамические уравнения и уравнения равновесия в перемещениях для любого однородного анизотропного тела можно записать в виде

$$\underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \text{где} \quad \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{L}} - \underline{\mathbf{E}} \rho \partial_t^2, \quad \underline{\mathbf{L}} = A_{piqj} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \partial_p \partial_q. \quad (1.156)$$

Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} I_3(\underline{\mathbf{M}}) &= |\underline{\mathbf{M}}| = I_3(\underline{\mathbf{L}}) - I_2(\underline{\mathbf{L}}) \rho \partial_t^2 + I_1(\underline{\mathbf{L}}) \rho^2 \partial_t^4 - \rho^3 \partial_t^6, \\ \underline{\mathbf{M}}_* &= \underline{\mathbf{M}}^2 - I_1(\underline{\mathbf{M}}) \underline{\mathbf{M}} + I_2(\underline{\mathbf{M}}) \underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{L}}_* + [\underline{\mathbf{L}} - I_1(\underline{\mathbf{L}}) \underline{\mathbf{E}}] \rho \partial_t^2 + \underline{\mathbf{E}} \rho^2 \partial_t^4 = \\ &= \underline{\mathbf{L}}^2 - \underline{\mathbf{L}} [I_1(\underline{\mathbf{L}}) - \rho \partial_t^2] + \underline{\mathbf{E}} [I_2(\underline{\mathbf{L}}) - I_1(\underline{\mathbf{L}}) \rho \partial_t^2 + \rho^2 \partial_t^4], \\ \underline{\mathbf{L}}_* &= \underline{\mathbf{L}}^2 - I_1(\underline{\mathbf{L}}) \underline{\mathbf{L}} + I_2(\underline{\mathbf{L}}) \underline{\mathbf{E}}. \end{aligned} \quad (1.157)$$

Следовательно, расщепленные уравнения будут иметь вид

$$|\underline{\mathbf{M}}| \mathbf{u} + \underline{\mathbf{M}}_* \cdot (\rho \mathbf{F}) = 0, \quad |\underline{\mathbf{L}}| \mathbf{u} + \underline{\mathbf{L}}_* \cdot (\rho \mathbf{F}) = 0. \quad (1.158)$$

Далее представим $|\underline{\mathbf{M}}|$ в виде произведения простых операторов

$$\begin{aligned} |\underline{\mathbf{M}}| &= I_3(\underline{\mathbf{L}}) - I_2(\underline{\mathbf{L}}) \rho \partial_t^2 + I_1(\underline{\mathbf{L}}) \rho^2 \partial_t^4 - \rho^3 \partial_t^6 = (a - \rho \partial_t^2)(b - \rho \partial_t^2)(c - \rho \partial_t^2) = \\ &= abc - (ab + ac + bc) \rho \partial_t^2 + (a + b + c) \rho^2 \partial_t^4 - \rho^3 \partial_t^6; \\ I_1(\underline{\mathbf{L}}) &= a + b + c, \quad I_2(\underline{\mathbf{L}}) = ab + ac + bc, \quad I_3(\underline{\mathbf{L}}) = abc. \end{aligned} \quad (1.159)$$

Отсюда видно, что a, b и c — собственные операторы (значения) для $\underline{\mathbf{L}}$, а $a - \rho \partial_t^2, b - \rho \partial_t^2$ и $c - \rho \partial_t^2$ — собственные операторы (значения) для $\underline{\mathbf{M}}$.

Рассмотрим случай изотропной среды. В этом случае уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} &= 0, \quad \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{E}} Q_2 + (\lambda + \mu) \nabla \nabla, \quad \underline{\mathbf{M}}_* = Q_2 [\underline{\mathbf{E}} Q_1 - (\lambda + \mu) \nabla \nabla], \\ |\underline{\mathbf{M}}| &= Q_1 Q_2^2, \quad Q_1 = (\lambda + 2\mu) \Delta - \rho \partial_t^2, \quad Q_2 = \mu \Delta - \rho \partial_t^2, \quad \underline{\mathbf{M}}_* = Q_2 \underline{\mathbf{N}}, \\ \underline{\mathbf{N}} &= \underline{\mathbf{E}} Q_1 - (\lambda + \mu) \nabla \nabla; \quad \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_* = \underline{\mathbf{M}}_* \cdot \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{E}} |\underline{\mathbf{M}}|, \quad \underline{\mathbf{M}} \cdot \underline{\mathbf{N}} = \underline{\mathbf{N}} \cdot \underline{\mathbf{M}} = \underline{\mathbf{E}} Q_1 Q_2.\end{aligned}\quad (1.160)$$

Расщепленные уравнения имеют вид

$$Q_1 Q_2^2 \mathbf{u} + \underline{\mathbf{M}}_* \cdot (\rho \mathbf{F}) = 0, \quad Q_1 Q_2 \mathbf{u} + \underline{\mathbf{N}} \cdot (\rho \mathbf{F}) = 0. \quad (1.161)$$

Задача на собственные значения для $\underline{\mathbf{M}}$.

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{a} &= \lambda \mathbf{a}, \quad \det(\underline{\mathbf{M}} - \lambda \underline{\mathbf{E}}) = 0, \quad \lambda^3 - l_1(\underline{\mathbf{M}}) \lambda^2 + l_2(\underline{\mathbf{M}}) \lambda - l_3(\underline{\mathbf{M}}) = 0, \\ l_1(\underline{\mathbf{M}}) &= Q_1 + 2Q_2, \quad l_2(\underline{\mathbf{M}}) = Q_2(2Q_1 + Q_2), \quad l_3(\underline{\mathbf{M}}) = Q_1 Q_2^2, \\ \lambda_1 &= Q_1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = Q_2.\end{aligned}\quad (1.162)$$

Для определения собственных векторов получаем уравнения

$$(\underline{\mathbf{E}} \Delta - \nabla \nabla) \cdot \mathbf{a}_1 = 0, \quad \nabla \nabla \cdot \mathbf{a}_2 = 0, \quad (\mathbf{a}_1 = \nabla \varphi, \quad \mathbf{a}_2 = \nabla \times \Psi + 1/3 \mathbf{Ar}) \quad (1.163)$$

Выводы

1. Рассмотрены задачи на собственные значения тензора любого четного ранга и тензорно-блочной матрицы, состоящей из тензоров одинакового четного ранга. Подробно изучены внутренние структуры тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ (этот модуль состоит из множества тензоров $(2p)$ -го ранга) и введенной в рассмотрение тензорно-блочной матрицы модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$ (этот модуль состоит из множества тензорно-блочных матриц, состоящих из четырех тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$). Кроме того введен в рассмотрение тензорный столбец, состоящий из двух тензоров модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$. Множество этих тензорных столбцов образует модуль, который обозначается через $\mathbb{R}_p^{2 \times 1}(\Omega)$. Далее для тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ введены в рассмотрение тензор и расширенный тензор миноров любого ранга и порядка, а также соответствующие этим минорам тензор и расширенный тензор алгебраических дополнений. С помощью этих тензоров даны формулы обобщающую теорему Лапласа о разложении определителя тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Даны соотношения, выражающие классические (входящие в характеристическое уравнение) инварианты тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ как через тензоры и расширенные тензоры миноров, так и с помощью тензоров и расширенных тензоров алгебраических дополнений этого тензора. Получены также формулы, выражающие классические инварианты тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ через первые инварианты степеней этого тензора. Приведены и обратные к этим формулам соотношения.

Выводы

2. Сформулированы некоторые определения, утверждения и теоремы, касающиеся тензоров модулей $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ (этот модуль содержит множество комплексных тензоров $(2p)$ -го ранга), а также тензорно-блочных матриц модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$. В явном виде построена полная ортонормированная система собственных тензоров симметрического тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, а также полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов симметрической тензорно-блочной матрицы модуля $\mathbb{R}_{2p}^{2 \times 2}(\Omega)$.

3. В линейной микрополярной теории упругости анизотропных тел, не обладающих центром симметрии в смысле упругих свойств, аналогично общему случаю введены в рассмотрение тензорные столбцы тензоров напряжений и моментных напряжений и тензоров деформаций и изгиба-кручения, которые являются элементами модуля $\mathbb{R}_2^{2 \times 1}(\Omega)$. Введена также ТБМ тензоров модулей упругости, состоящая из четырех тензоров четвертого ранга и являющаяся, конечно, элементом модуля $\mathbb{R}_4^{2 \times 2}(\Omega)$.

4. Даны представления упругой энергии деформации и определяющих соотношений (закона Гука) с помощью введенных тензорных столбцов и ТБМ. Дано определение положительно-определенной ТБМ и показана положительная определенность ТБМ тензоров модулей упругости. Введены понятия собственного значения и собственного тензорного столбца ТБМ и рассмотрена задача о нахождении собственных значений и собственных тензорных столбцов ТБМ.

Выводы

5. Дано каноническое представление тензорно-блочной матрицы, на основании которого в свою очередь даны канонические записи удельной энергии деформации и определяющих соотношений. Введен в рассмотрение понятие символа структуры тензорно-блочной матрицы и дана классификация микрополярных линейно-упругих анизотропных материалов, не обладающих центром симметрии, а также микрополярных линейно-упругих анизотропных материалов, обладающих центром симметрии и классических линейно-упругих анизотропных материалов. Непосредственным подсчетом доказано, что если производить классификацию множества положительно-определенных симметричных тензоров четвертого ранга (тензоры модулей упругости в линейной микрополярной теории упругости анизотропных тел, обладающих центром симметрии, являются таковыми), то в итоге получаются 9 основных классов по числу различных собственных значений, а классы в зависимости от кратностей собственных значений подразделяются еще на подклассы. Всего имеем 256 подклассов (в классическом случае существует 6 классов, которые состоят из 32 подклассов). При этом если в случае микрополярных линейно-упругих анизотропных материалов, обладающих центром симметрии, каждому анизотропному материалу соответствуют тензоры модулей упругости одинаковой структуры (тензоры имеют одинаковый символ структуры и принадлежат одному и тому же подклассу), то число анизотропных материалов равно 256, а если тензоры модулей упругости имеют одинаковый символ

Выводы

структуры, а принадлежат различным подклассам, то число линейно упругих анизотропных материалов, обладающих центром симметрии в смысле упругих свойств, равно 12870. Наконец, если тензоры имеют различную структуру, то число анизотропных материалов равно $256 \times 256 = 65536$. В случае микрополярных линейно-упругих анизотропных материалов, не обладающих центром симметрии имеем 18 классов, а общее число всех анизотропных материалов равно $2 \times 65536 = 131072$.

6. В явном виде построены полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы тензоров модулей упругости с помощью 153 независимых параметров, полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов тензорно-блочно-диагональной матрицы тензоров модулей упругости с помощью 72 независимых параметров и полная ортонормированная система собственных тензоров для положительно определенного симметричного тензора модулей упругости микрополярной теории упругости с помощью 36 независимых параметров (Н.И. Остросаблин в классической теории упругости в явном виде построил собственные тензоры для тензора модулей упругости с помощью 15 независимых параметров). Рассмотрена классификация и классических анизотропных материалов.

7. Найдены собственные значения и собственные тензоры для классических материалов кристаллографических сингоний в отличной от полученных Н.И. Остросаблиным форме, а также для некоторых микрополярных материалов.

Список литературы

1. Ляв А. Математическая теория упругости. М., Л: ОНТИ НКТП СССР, 1935.
2. Рыхлевский Я. "CEIIINOSSTTUV" Математическая структура упругих тел. М.: Ин-т проблемы механики АН СССР. 1983. Препр. № 217. 113 с.
3. Рыхлевский Я. О законе Гука// ПММ. 1984. Т. 48, вып. 3. С. 420-435.
4. Минкевич Л.М. Представление тензоров упругости и податливости через собственные тензоры// Вопросы динамики механических систем виброударного действия. Новосибирск: НЭТИ, 1973. С. 107-110.
5. Толоконников Л.А., Матченко Н.М. О представлениях предельных условий для начально анизотропных тел// Пробл. прочности. 1974. № 3. С. 54-56.
6. Pipkin A.C. Constraints in linearly elastic materials// J. Elast. 1976. V. 6, № 2.
7. Александров К.С. Упругие свойства анизотропных сред. Автореф. докт. дисс. М.: Ин-т кристаллогр. АН СССР, 1967. 37 с.
8. Лурье К.А. Некоторые задачи оптимального изгиба и растяжения упругих пластин// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1979. № 6. С. 86-93.
9. Чанышев А.И. О пластичности анизотропных сред//ПМТФ.1984. № 2. 149-151.
10. Чанышев А.И. К решению задач о предельных нагрузках для жесткопластического анизотропного тела. ПМТФ. 1984. № 5. С. 151-154.
11. Ревуженко А.Ф., Чанышев А.И., Шемякин Е.И. Математические модели упругопластических тел// Актуальные проблемы выч. математики и математ. моделирование. Новосибирск: Наука, 1985. С. 108-119.

12. *Остросаблин Н.И.* О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния// Динамика сплошн. среды. Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР. 1984. Вып. 66. С. 113-125.
13. *Остросаблин Н.И.* О структуре тензора модулей упругости и классификация анизотропных материалов// ПМТФ. 1986. № 4. С. 127-135.
14. *Остросаблин Н.И.* Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний// Динамика сплошн. среды. Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР. 1984. Вып. 75. С. 113-125.
15. *Остросаблин Н.И.* Анизотропия и общие решения уравнений линейной теории упругости/ Дисс. доктора физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т гидромеханики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. 2000. 215 с.
16. *Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И.* Анизотропия упругих свойств материалов// ПМТФ. 2008. Т. 49. № 6. С. 131-151.
17. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978.
18. *Никабадзе М.У.* К задаче о нахождении у тензора четного ранга собственных значений и собственных тензоров// Изв. РАН. МТТ. 2008. № 4. 77-94.
19. *Никабадзе М.У.* К построению собственных тензорных столбцов в микрополярной линейной теории упругости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2014. № 1. С. 30-39.

20. *Никабадзе М.У.* О некоторых вопросах тензорного исчисления с приложениями к механике// Современная математика. Фундаментальные направления. 2015. Т. 55. С. 3-194.
21. *М. U. Nikabadze* Topics on tensor calculus with applications to mechanics// Journal of Math. Sciences. 2017. Vol. 225, No. 1. 194 p.
22. *Победра Б.Е.* Теория пластичности анизотропных материалов// Прикл. проблемы прочности и пластичности. Всесоюзн. межвуз. сб. Горький, 1984. Вып. 26. С. 110-115.
23. *Победра Б.Е.* О теории пластичности трансверсально-изотропных материалов// Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 3. 96-101.
24. *Победра Б.Е.* Теория течения анизотропной среды// Прочность, пластичность и вязкоупругость материалов и конструкций. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. С. 101-108.
25. *Никабадзе М.У.* О некоторых вопросах тензорного исчисления. I// Современная математика и ее приложения. Т. 62. М.: ВИНТИ, 2009. 67-95.
26. *Nikabadze M.U.* On some Problems of Tensor Calculus. I// Journal of Mathematical sciences. V. 161, № 5, 2009. P. 668-697.
27. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: методы и приложения. Т. 1. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 336 с.
28. *Победра Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986.
29. *Димитриенко Ю.И.* Тензорное исчисление. М.: Высш. шк., 2001. 575 с.
30. *Димитриенко Ю.И.* Механика сплошной среды. В четырех томах. Т. 1. Тензорный анализ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 463 с.
31. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

32. *Никабадзе М.У.* О некоторых вопросах тензорного исчисления. II// Современная математика и ее приложения. Т. 62. 2009. 96-130.
33. *Nikabadze M.U.* On some Problems of Tensor Calculus. II// Journal of Mathematical sciences. V. 161, № 5, 2009. P. 698-733.
34. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука. 1988. 552 с.
35. *Фаддеев Д.К., Соминский И.С.* Задачи по высшей алгебре. СПб: Изд-во «Лань»б 1999. 288 с.
36. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. Мю: Наука, 1974. 832 с.
37. *Уоткинс Д.С.* Основы матричных вычислений/ Пер. со втор. англ. изд-я. М.: БИНОМ.Лаборатория знаний, 2006. 664 с.
38. *Eringen A.C.* Microcontinuum field theories. 1. Foundation and solids. N.Y.: Springer-Verlag, 1999.
39. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
40. *Победря Б.Е.* О теории определяющих соотношений в механике деформируемого твердого тела// Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского/ Под ред. Д.М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 635-657.
41. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
42. *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ