УДК 511

МОДЕЛИ ЗАДАЧИ НАЧАЛЬНОЙ ВЫСТАВКИ БЕСКАРДАННОЙ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПРИ УГЛОВОМ ДВИЖЕНИИ ОСНОВАНИЯ

Г. О. Баранцев[1], А. А. Голован[2], П. Ю. Кузнецов[3]

Работа посвящена выводу опорных моделей задачи начальной выставки бескарданной инерциальной навигационной системы (БИНС) на неподвижном основании. Предполагается, что система не перемещается относительно Земли, но ее корпус может совершать неконтролируемые угловые движения. Описываемые модели основаны на аппроксимации показаний ньютонометров БИНС, взятых в проекциях на оси “замороженного” в инерциальном пространстве приборного трехгранника, ориентация которого определяется его положением в начальный момент выставки.

Ключевые слова: БИНС, начальная выставка, инерциальные датчики, аппроксимация.

The problem of strapdown inertial navigation system (INS) initial alignment is considered. It is assumed that this system does not move relative to the Earth, but its body frame can perform uncontrolled angular motions. The basic mathematical models of the mentioned problem are described. These models are based on a special approximation procedure applied to accelerometer measurements. These measurements are projected onto the axes of the “frozen” INS instrument reference at the initial time instant of the alignment.

Key words: strapdown INS, initial alignment, inertial sensors, approximation.

Введение. Рассматривается известная задача начальной выставки бескарданной инерциальной навигационной системы (БИНС) на неподвижном основании (см. [1]). Предполагается, что точка M — приведенный центр блока ньютонометров БИНС — неподвижна относительно Земли, а приборный трехгранник Mz БИНС может совершать неконтролируемые угловые движения, вызванные, например, колебаниями корпуса самолета из-за ветровых возмущений, работой двигателей, регламентными работами экипажа.

Требуется при помощи показаний датчиков угловой скорости (ДУС) ω_z' и ньютонометров (или акселерометров) f_z' БИНС определить параметры ориентации приборного трехгранника БИНС — углы истинного курса ψ, тангажа ϑ, крена γ в конце выставки.

Наиболее распространенный на практике вариант решения задачи наземной начальной выставки БИНС навигационного класса точности состоит в применении двухэтапной процедуры выставки

[1] *Баранцев Глеб Олегович* — мл. науч. сотр. лаб. управления и навигации мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gob.95@mail.ru.

[2] *Голован Андрей Андреевич* — доктор физ.-мат. наук, зав. лаб. управления и навигации мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: aagolovan@yandex.ru.

[3] *Кузнецов Павел Юрьевич* — студ. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: pav.kuznetsov@mail.ru.

Barantsev Gleb Olegovich — Junior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Laboratory of Control and Navigation.

Golovan Andrey Andreevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of Laboratory of Control and Navigation.

Kuznetsov Pavel Yurievich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.

— грубой алгебраической выставки и точной выставки [1]. Алгоритм этапа грубой выставки заключается в осреднении показаний инерциальных датчиков с целью предварительного оценивания углов ориентации. Методическая основа этапа: при отсутствии угловых движений приборного трехгранника Mz и неподвижности основания средние значения показаний акселерометров позволяют определить (с точностью до систематических ошибок инерциальных датчиков) углы тангажа и крена, а средние значения показаний ДУС — угол курса. Однако при возможных угловых движениях корпуса БИНС такие решения содержат недопустимо большие ошибки.

Поэтому на практике применяется второй этап выставки — точный. Он предполагает функционирование БИНС в режиме автономного инерциального счисления с одновременной коррекцией при помощи координат стартовой точки и/или нулевой скорости объекта. Целью коррекции БИНС является дооценивание ошибок углов ориентации, определенных на первом этапе выставки.

Гипотеза отсутствия поступательных составляющих движения точки M позволяет по-другому взглянуть на способ решения задачи выставки на первом этапе. Действительно, вне зависимости от углового движения приборного трехгранника Mz ньютонометры измеряют взятые с обратным знаком компоненты вектора удельной силы тяжести $\bar{g}_z$ на его оси. Тогда за счет выбора опорного трехгранника, свободного от угловых движений корпуса БИНС, можно осуществлять процедуры осреднения приведенных к его осям показаний ньютонометров.

В качестве такого опорного трехгранника выбран "замороженный" в инерциальном пространстве приборный трехгранник Mz_0, ориентация которого определяется положением трехгранника Mz в начальный момент t_0 выставки. Проектирование на оси Mz_0 показаний ньютонометров осуществляется при помощи вычисляемой по показаниям ДУС соответствующей матрицы ориентации.

В настоящей работе приводятся необходимые опорные соотношения, позволяющие решить задачу выставки БИНС — задачу определения углов истинного курса ψ, тангажа ϑ и крена γ. Для практической реализации алгоритмов выставки в соответствующих опорных моделях предлагается использовать реальные показания инерциальных датчиков.

Следует также отметить, что в литературе рассматриваются схожие подходы к решению задачи выставки (см. [2]), когда вводится "замороженный" в инерциальном пространстве опорный трехгранник. Однако предлагаемые нами опорные модели для решения задачи выставки представляются оригинальными.

Опорные модели в осях географического трехгранника. Для наглядности рассуждений рассмотрим идеализированную ситуацию, когда в начальный момент времени t_0 (далее, не нарушая общности, будем считать, что $t_0 = 0$) приборный трехгранник БИНС совпадает с географическим трехгранником Mx^0: третья ось Mx_3^0 направлена вверх вдоль географической вертикали места, оси Mx_1^0, Mx_2^0 лежат в плоскости горизонта, ось Mx_1^0 направлена на восток, ось Mx_2^0 — на север.

Положение географического трехгранника Mx^0 относительно инерциального пространства в момент времени t_0 обозначим через $Mx_0^0 = Mx^0(t_0)$. Текущий географический трехгранник $Mx^0(t)$ увлекается вращением Земли, и его ориентация относительно своего начального положения Mx_0^0 задается матрицей ориентации $A_{x^0x_0^0}(t)$:

$$A_{x^0x_0^0} = \begin{pmatrix} \cos ut & \sin\varphi\sin ut & -\cos\varphi\sin ut \\ -\sin\varphi\sin ut & \sin^2\varphi\cos ut + \cos^2\varphi & (1-\cos ut)\sin\varphi\cos\varphi \\ \cos\varphi\sin ut & (1-\cos ut)\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi\cos ut + \sin^2\varphi \end{pmatrix},$$

где φ — широта места, u — абсолютное значение угловой скорости вращения Земли.

Обозначим через $f_{x^0} = (0, 0, g)^T$ показания идеальных ньютонометров (здесь g — абсолютное значение удельной силы тяжести в точке M), если бы они были установлены в осях географического трехгранника Mx^0. В осях Mx_0^0 будем иметь

$$f_{x_0^0} = A_{x_0^0x^0} f_{x^0} = g\left(\cos\varphi\sin ut, \quad (1-\cos ut)\sin\varphi\cos\varphi, \quad \cos^2\varphi\cos ut + \sin^2\varphi\right)^T.$$

Далее нам понадобятся выражения для первого $V_{x_0^0}(t) = \int_0^t f_{x_0^0}(\tau)\,d\tau$ и второго $P_{x_0^0}(t) = \int_0^t V_{x_0^0}(\tau)\,d\tau$ интегралов от спроектированных на оси Mx_0^0 идеальных показаний ньютонометров. Имеем

$$V_{x_0^0}(t) = g\left(\frac{\cos\varphi}{u}(1-\cos ut), \quad \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{u}(ut-\sin ut), \quad t\sin^2\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{u}\sin ut\right)^T,$$

$$P_{x_0^0} = g\left(\frac{\cos\varphi}{u}\left(t - \frac{\sin ut}{u}\right), \quad \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{u}\left(\frac{ut^2}{2} + \frac{\cos ut - 1}{u}\right), \quad \frac{t^2\sin^2\varphi}{2} + \frac{\cos^2\varphi}{u^2}(1-\cos ut)\right)^T.$$

Опорные модели в “замороженных” осях приборного трехгранника Mz_0. Ориентация приборного трехгранника $Mz_0 = Mz(t_0)$ БИНС относительно географического Mx_0^0 характеризуется значениями углов курса ψ_0, крена γ_0, тангажа ϑ_0 в момент времени t_0:

$$Mx_0^0 \quad \xrightarrow[3]{-\psi_0}\xrightarrow[1]{\vartheta_0}\xrightarrow[2]{\gamma_0} \quad Mz_0.$$

Здесь в дробном выражении нижняя цифра обозначает номер оси поворота, верхний буквенный параметр — угол поворота, знак минус — вращение по часовой стрелке.

Соответствующая матрица $A_{z_0x_0^0}$ взаимной ориентации трехгранников Mz_0 и Mx_0^0 имеет вид (полагаем, что ось Mz_2 — продольная ось БИНС; ось Mz_3 направлена вверх, ось Mz_1 дополняет оси Mz_2 и Mz_3 до правой тройки):

$$A_{z_0x_0^0} = \begin{pmatrix} \cos\psi_0\cos\gamma_0 + \sin\psi_0\sin\vartheta_0\sin\gamma_0 & -\sin\psi_0\cos\gamma_0 + \cos\psi_0\sin\vartheta_0\sin\gamma_0 & \cos\vartheta_0\sin\gamma_0 \\ \sin\psi_0\cos\vartheta_0 & \cos\psi_0\cos\vartheta_0 & \sin\vartheta_0 \\ \cos\psi_0\sin\gamma_0 - \sin\psi_0\sin\vartheta_0\cos\gamma_0 & -\sin\psi_0\sin\gamma_0 - \cos\psi_0\sin\vartheta_0\cos\gamma_0 & \cos\vartheta_0\cos\gamma_0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно имеем

$$f_{z_0}(t) = A_{z_0x_0^0} f_{x_0^0}(t), \quad V_{z_0}(t) = A_{z_0x_0^0} V_{x_0^0}(t), \quad P_{z_0}(t) = A_{z_0x_0^0} P_{x_0^0}(t).$$

Таким образом, компоненты векторов f_{z_0}, V_{z_0}, P_{z_0} зависят от функций времени t вида $\cos ut$, $\sin ut$, t^2, t и некоторых констант.

Произвольное угловое движение приборного трехгранника Mz. Пусть приборный трехгранник Mz БИНС совершает произвольные угловые движения с абсолютной угловой скоростью ω_z. Матрица взаимной ориентации A_{zz_0} трехгранников $Mz = Mz(t)$, $Mz_0 = Mz(t_0)$ удовлетворяет кинематическому уравнению Пуассона

$$\dot{A}_{zz_0} = \widehat{\omega}_z A_{zz_0}, \qquad A_{zz_0}(t_0) = I,$$

где I — единичная матрица. Тогда

$$f_{z_0}(t) = A^T_{zz_0}(t), \quad f_z(t) = A_{z_0x_0^0} f_{x_0^0}(t).$$

Здесь f_z — показания идеальных ньютонометров в осях приборного трехгранника Mz.

Модели аппроксимации (сглаживания) векторов $f_{z_0}(t)$, $V_{z_0}(t)$, $P_{z_0}(t)$. Исходя из сделанного вывода о характере зависимости векторов $f_{z_0}(t)$, $V_{z_0}(t)$, $P_{z_0}(t)$ от функций $\cos ut$, $\sin ut$, t^2, t, осуществим нормализованную аппроксимацию этих функций:

$$\begin{aligned} f_{z_0}(t) &\simeq a_f \frac{1-\cos ut}{u^2} + b_f \frac{\sin ut}{u} + c_f, \\ V_{z_0}(t) &\simeq a_v \frac{ut - \sin ut}{u^3} + b_v \frac{1-\cos ut}{u^2} + c_v \frac{\sin ut}{u} + d_v, \\ P_{z_0}(t) &\simeq a_p \frac{\frac{u^2t^2}{2} - (1-\cos ut)}{u^4} + b_p \frac{ut-\sin ut}{u^3} + c_p \frac{1-\cos ut}{u^2} + d_p \frac{\sin ut}{u} + e_p, \end{aligned}$$

где $\{a_k, b_k, c_k\}$ $(k = f, v, p)$, d_v, d_p, e_p — векторные коэффициенты аппроксимаций.

Смысл нормализованной аппроксимации заключается в том, что при относительно малых значениях интервала выставки t эти функции имеют следующие порядки:

$$\frac{\sin ut}{u} \simeq t, \quad \frac{1-\cos ut}{u^2} \simeq \frac{t^2}{2}, \quad \frac{ut-\sin ut}{u^3} \simeq \frac{t^3}{6}, \quad \frac{\frac{u^2t^2}{2} - (1-\cos ut)}{u^4} \simeq \frac{t^4}{24}.$$

Значения векторных коэффициентов аппроксимации определяются при помощи метода наименьших квадратов (МНК). Для примера приведем модель задачи оценивания коэффициентов $\{a_f, b_f, c_f\}$. В каждый момент времени t_j имеем

$$z_j = \begin{pmatrix} f_{z_{01}}(t_j) \\ f_{z_{02}}(t_j) \\ f_{z_{03}}(t_j) \end{pmatrix} = \left(\frac{1-\cos ut_j}{u^2}, \frac{\sin ut_j}{u}, 1 \right) \begin{pmatrix} a_f \\ b_f \\ c_f \end{pmatrix}.$$

Далее набор измерений $z_0, z_1, \ldots, z_N$ (индекс соответствует конечному времени выставки) обрабатывается в соответствии с известной рекуррентной процедурой МНК, результат — оценки величин $\{a_f, b_f, c_f\}$.

Вспоминая, что $V_{z_0}(t)$ и $P_{z_0}(t)$ — это первый и второй интегралы от показаний ньютонометров, получим следующие выражения для трех вариантов аппроксимации (сглаживания) вектора f_{z_0}:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}_{z_0}(t) = a_f \frac{1-\cos ut}{u^2} + b_f \frac{\sin ut}{u} + c_f,\\
&\widetilde{f}_{z_0}(t) = \dot{V}_{z_0}(t) = a_v \frac{1-\cos ut}{u^2} + b_v \frac{\sin ut}{u} + c_v \cos ut,\\
&\widetilde{f}_{z_0}(t) = \ddot{P}_{z_0}(t) = a_p \frac{1-\cos ut}{u^2} + b_p \frac{\sin ut}{u} + c_p \cos ut - d_p u \sin ut.
\end{aligned}$$

Здесь верхней тильдой подчеркивается, что $\widetilde{f}_{z_0}$ — это аппроксимация вектора f_{z_0} в момент времени t.

Определение углов крена и тангажа на выставке. При помощи матрицы ориентации A_{zz_0} осуществим обратную перепроектировку сглаженных значений $\widetilde{f}_{z_0}(t)$ на оси приборного трехгранника Mz, результатом является $\widetilde{f}_z(t)$ — аппроксимация вектора $f_z(t)$:

$$\widetilde{f}_z(t) = A_{zz_0}\widetilde{f}_{z_0}(t).$$

Далее по стандартным формулам задачи выставки БИНС на неподвижном основании [1] определяются оценки $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\vartheta}$ углов крена γ и тангажа ϑ в каждый момент времени:

$$\widetilde{\vartheta} = \operatorname{atan2}\left(\widetilde{f}_{z_2}, \sqrt{\widetilde{f}_{z_1}^2 + \widetilde{f}_{z_3}^2}\right), \quad \widetilde{\gamma} = -\operatorname{atan2}\left(\widetilde{f}_{z_1}, \widetilde{f}_{z_3}\right).$$

Здесь $\operatorname{atan2}(a_1, a_2)$ — функция арктангенса, вычисляющая значение угла с учетом знаков ее аргументов a_1, a_2, пропорциональных значениям синуса и косинуса искомого угла.

Определение угла курса. Далее нам понадобятся еще две системы координат:

инерциальная $O\xi$: точка O — центр навигационного эллипсоида Земли, ось $O\xi_3$ — ось вращения Земли, оси $O\xi_1$, $O\xi_2$ лежат в плоскости экватора и направлены на неподвижные звезды;

географический трехгранник Mx, азимутальная ориентация которого относительно трехгранника Mx^0 характеризуется углом курса:

$$Mx^0 \xrightarrow[3]{-\psi} Mx, \quad Mx_0^0 \xrightarrow[3]{-\psi_0} Mx_0.$$

Рассмотрим цепочки переходов между введенными системами координат и трехгранниками:

$$Mz_0 \underbrace{\xrightarrow[2]{-\widetilde{\gamma}_0}\xrightarrow[1]{-\widetilde{\vartheta}_0}} Mx_0 \xrightarrow[3]{\widetilde{\psi}_0} Mx_0^0 \underbrace{\xrightarrow[1]{-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\xrightarrow[3]{-\left(\frac{\pi}{2}+\lambda\right)}\xrightarrow[3]{-ut_0}} O\xi \underbrace{\xrightarrow[3]{ut}\xrightarrow[3]{\frac{\pi}{2}+\lambda}\xrightarrow[1]{\frac{\pi}{2}-\varphi}} Mx^0 \xrightarrow[3]{-\widetilde{\psi}} Mx \underbrace{\xrightarrow[1]{\widetilde{\vartheta}}\xrightarrow[2]{\widetilde{\gamma}}} Mz. \qquad (1)$$

Выделенным цепочкам поворота соответствуют матрицы взаимной ориентации координатных трехгранников, которые являются функциями известной широты φ и долготы λ места, времени t, t_0, оценок значений углов $\widetilde{\vartheta}$, $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\vartheta}_0$, $\widetilde{\gamma}_0$, определенных при помощи описанной выше процедуры аппроксимации показаний ньютонометров.

На основе цепочки поворотов (1) несложно вывести следующее матричное уравнение:

$$\underbrace{A_{xz}\left(\widetilde{\vartheta}, \widetilde{\gamma}\right) A_{zz_0} A_{z_0x_0}\left(\widetilde{\vartheta}_0, \widetilde{\gamma}_0\right)}_{C} = A_{xx^0}\left(\widetilde{\psi}\right) \underbrace{A_{x^0x_0^0}}_{D} A^T_{x_0x_0^0}\left(\widetilde{\psi}_0\right).$$

Матрицы $C = \{c_{ij}\}$, $D = \{d_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ вычисляются в явном виде. Тогда

$$\begin{aligned}
\cos\psi &= \frac{c_{13}d_{13} + c_{23}d_{23}}{d_{13}^2 + d_{23}^2}, &\quad \sin\psi &= \frac{-c_{13}d_{23} + c_{23}d_{13}}{d_{13}^2 + d_{23}^2},\\
\cos\psi_0 &= \frac{c_{31}d_{31} + c_{32}d_{32}}{d_{31}^2 + d_{32}^2}, &\quad \sin\psi_0 &= \frac{-c_{31}d_{32} + c_{32}d_{31}}{d_{31}^2 + d_{32}^2}.
\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\psi_0 = \mathrm{atan2}(\sin\psi_0, \cos\psi_0), \quad \psi = \mathrm{atan2}(\sin\psi, \cos\psi),$$

и последние угловые параметры задачи выставки определены.

Заключение. Рассмотрена задача начальной выставки БИНС на неподвижном основании в условиях неконтролируемых угловых движений приборного трехгранника БИНС. Предложен способ и представлены опорные модели обработки показаний инерциальных датчиков БИНС.

Хотя все рассуждения велись для так называемых идеальных моделей задачи начальной выставки — идеальных показаний f_z, ω_z ньютонометров и ДУС, представленные алгоритмы обработки очевидным образом переносятся на случай реальных измерений f_z', ω_z' инерциальных датчиков ровно так, как это делается при построении модельных уравнений инерциальной навигации.

Поскольку целью статьи было представление опорных моделей и алгоритмов обработки, вопросы чувствительности предложенного способа выставки к инструментальным погрешностям инерциальных датчиков и соответствующее расширение моделей выставки не рассматривались — это составляет предмет отдельной будущей публикации.

Вместе с тем отметим, что опыт практической реализации описанных алгоритмов выставки положителен (некоторые детали изложены в [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы инерциальных навигационных систем. М.: Изд-во МГУ, 2020.
2. *Liu Y., Xu X., Liu X., Yao Y., Wu L., Sun J.* A self-alignment algorithm for SINS based on gravitational apparent motion and sensor data denoising // Sensors. 2015. **15**. 9827–9853.
3. *Голован А.А., Баранцев Г.О., Кузнецов П.Ю., Некрасов А.В., Шаймарданов И.Х., Тенюшев Е.Н.* Исследование точностных характеристик алгоритмов начальной выставки БИНС. Результаты натурных испытаний навигационной системы // Тез. докл. XXXII конф. памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. СПб., 2020. 89–92.

Поступила в редакцию
13.01.2021