

УДК 537.84

Н. Г. Тактаров, А. Н. Тятюшкин

К ТЕОРИИ УПРУГИХ МАГНИТНЫХ ПЛЕНОК НА ЖИДКОЙ ПОДЛОЖКЕ

В последнее время значительно возрос интерес к исследованию поверхностных явлений, происходящих на поверхностях раздела объемных фаз, а также в пленках поверхностно-активных веществ (ПАВ), адсорбирующихся на межфазных поверхностях [1]. Электромагнитное поле позволяет весьма эффективно управлять движением намагничивающихся и поляризующихся поверхностей раздела (пленок ПАВ) [2, 3].

Приведем здесь некоторые новые результаты исследования твердых (упругих) магнитных пленок на жидкой подложке, изготавливаемых нанесением небольшого количества ферромагнитной жидкости на поверхность немагнитной жидкости, например воды. Одной из особенностей упругих магнитных пленок является то, что они могут противодействовать только силам, действующим в их касательной плоскости, а их сопротивление на изгиб пренебрежимо мало.

1. Взаимодействие упругой магнитной пленки с неоднородным магнитным полем. Схема опыта приведена на рис. 1. В мелкую стеклянную кювету 1 налита тонким слоем вода, на поверхность которой нанесена твердая магнитная пленка. Невозмущенная горизонтальная поверхность воды обозначена штриховой линией. Над кюветой помещен постоянный магнит 2, к одному из полюсов которого прикреплен удлиненный магнитопровод 3. При достаточном приближении конца магнитопровода к магнитной пленке ее форма заметно отклоняется от плоской. Для визуализации этого отклонения фотографировалось отражение правильной сетки с квадратными ячейками размером 0,5 см от поверхности пленки. Перемещение магнита с магнитопроводом в вертикальном направлении производилось посредством микрометрического винта. На рис. 2 а, б изображены отражения сетки для расстояний между концом магнитопровода и невозмущенной плоской поверхностью, равных соответственно 0,375 и 0,094 мм. Во втором случае конец магнитопровода прикасается к поверхности пленки. Видно, что по мере приближения конца магнитопровода к поверхности пленки искажение формы ее поверхности увеличивается.

Общие уравнения теории упругости ненамагничивающихся двухмерных континуумов можно найти, например, в монографии [4]. Уравнения двухмерной магнитоупругости могут быть получены по аналогии с трехмерными уравнениями [5, § 42]. Мы, однако, не будем выписывать этих общих уравнений, а ограничимся упрощенными уравнениями, которые тем не менее достаточно точно описывают рассматриваемые здесь эксперименты.

Уравнения двухмерной упругости пишем в виде

$$\nabla_{\beta}(x^{\alpha} p_{S}^{\alpha\beta}) - \{p n^r\} + M_S G^r = 0. \quad (1)$$

Здесь $x^{\alpha} = \partial x^r / \partial \eta^{\alpha}$, $G = \nabla |H|$, ∇_{β} — ковариантная производная, p — гидростатическое давление в объемных фазах, $p_S^{\alpha\beta}$ — поверх-

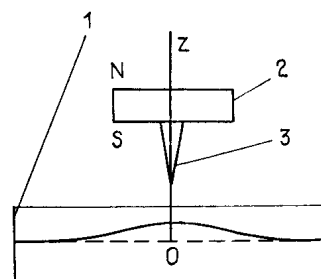


Рис. 1.

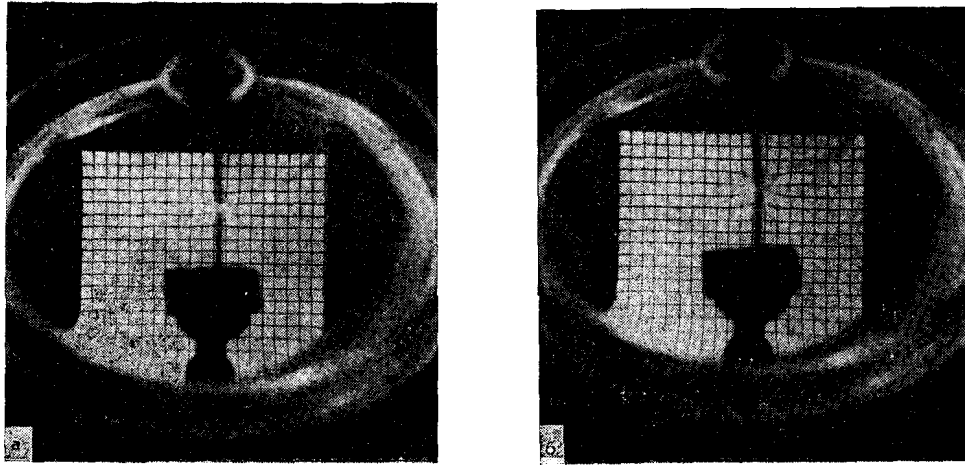


Рис. 2.

ностный тензор напряжений, M_S — поверхностная намагниченность, $\mathbf{H}$ — напряженность приложенного магнитного поля, $\mathbf{n}^r$ — единичная нормаль к поверхности, направленная из первой объемной фазы во вторую; $\{A\} = A_2 - A_1$ — скачок величины A ; индекс 1 относится к величинам в жидкой фазе; 2 — к атмосфере; x^r — пространственные координаты ($r=1, 2, 3$).

Ось z направлена вертикально вверх, начало координат O выбрано на невозмущенной плоской поверхности пленки (см. рис. 1). Уравнение искривленной поверхности пленки пишем в виде $z = \zeta(x, y)$. В связи с тем, что ζ значительно меньше диаметра кюветы, деформацию пленки можно считать слабой и линеаризовать уравнение (1) по ζ и двумерному вектору смещения $\mathbf{u}$.

Сделаем следующие предположения:

1) в связи с удлиненной формой магнитопровода создаваемое им магнитное поле заменяем полем фиктивного точечного магнитного заряда m , находящегося в нижнем конце магнитопровода:

$$\mathbf{G} = \nabla (m/R^2)_{z=\zeta},$$

где $R = [(h-z)^2 + x^2 + y^2]^{1/2}$, h — расстояние от конца магнитопровода до начала координат O ;

2) считаем, что пленка занимает всю бесконечную плоскость, так что $\zeta(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Выбирая в качестве поверхностных координат η^α декартовы координаты x, y [6, с. 271], можно показать, что поверхностный базис имеет вид

$$\mathbf{e}_x = \frac{\partial(\mathbf{r} + \mathbf{w})}{\partial x} = \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \mathbf{i} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \mathbf{k}. \quad (2)$$

Аналогично находится $\mathbf{e}_y$. В формуле (2) $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; $\mathbf{w} = \mathbf{u}(x, y) + \zeta(x, y)\mathbf{k}$ — вектор деформации плоской поверхности. Фундаментальный тензор деформированной поверхности определяется равенством $a_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$, на недеформированной (плоской) поверхности этот тензор равен $\delta_{\alpha\beta}$ (двухмерный символ Кронекера).

По определению двухмерного тензора деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta} = 1/2(a_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta})$ [4, 7] имеем

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_\beta}. \quad (3)$$

Здесь буквами α и β обозначены индексы, принимающие два значения x и y .

В предположении двухмерной изотропности поверхностный тензор напряжений пишем в виде

$$p_S^{\alpha\beta} = K_S a^{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu_S (\epsilon^{\alpha\beta} - 1/2 a^{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\gamma}). \quad (4)$$

Здесь K_S и μ_S — поверхностный модуль всестороннего сжатия и модуль сдвига; по дважды повторяющимся индексам — суммирование. Жонглирование индексами далее проводится при помощи тензора $a_{\alpha\beta}$.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$x_\alpha r \nabla_\beta p_S^{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} n^r p_S^{\alpha\beta} - \{pn^r\} + M_S G^r = 0. \quad (5)$$

Здесь $b_{\alpha\beta}$ — второй фундаментальный тензор поверхности. Отметим, что $b_{\alpha\beta}$ содержит члены первого порядка по ζ .

Раскладывая уравнение (5) соответственно на касательные и нормальную компоненты, находим

$$\begin{aligned} \nabla_\beta p_S^{\alpha\beta} + M_S G^\alpha &= 0, \\ b_{\alpha\beta} p_S^{\alpha\beta} - \{p\} + M_S G_n &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В связи с осевой симметрией тензор напряжений (4) принимает вид

$$p_S^{\alpha\beta} = K_S a_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\gamma}. \quad (7)$$

Линеаризуя второе уравнение (6) с учетом (7) и предполагая $\zeta \ll h$, находим уравнение для $\zeta(r)$:

$$\frac{r\zeta'}{(h^2 + r^2)^2} + \left[\frac{3h^2 - r^2}{(h^2 + r^2)^3} - \frac{\rho g}{2mM_S} \right] \zeta = - \frac{h}{(h^2 + r^2)^2}. \quad (8)$$

Отсюда следует

$$\zeta(0) = \frac{h}{a-3}, \quad a = \frac{\rho g h^4}{2mM_S},$$

где ρ — плотность жидкости-подложки, g — ускорение свободного падения.

Отметим, что из предположения $\zeta \ll h$ следует $a \gg 1$. Решение уравнения (8) записывается в виде ряда

$$\begin{aligned} \zeta(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r) a^{-n}, \\ \varphi_{n+1} &= \frac{rh^4 \varphi_n'}{(h^2 + r^2)^2} + \frac{h^4 (3h^2 - r^2) \varphi_n}{(h^2 + r^2)^3}, \quad \varphi_1 = \frac{h^5}{(h^2 + r^2)^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ограничиваясь двумя первыми членами ряда (9), имеем

$$\zeta(r) = \frac{h}{a(h^2 + r^2)^2} + \frac{3h^9(h^2 - r^2)}{a^2(h^2 + r^2)^5}. \quad (10)$$

Нетрудно проверить, что нормальное сечение магнитной пленки $\zeta(r)$ имеет две симметричные точки перегиба. Именно такая поверхность дает при отражении от нее прямолинейной сетки изображение, приведенное на рис. 2.

Первое уравнение (6) позволяет определить компоненты двухмерного вектора смещения $\mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j}$.

Отметим, что отсутствие у магнитной пленки сопротивления на изгиб частично компенсируется гидростатическим давлением $\rho g \zeta$, стремящимся возвратить пленку в плоское состояние.

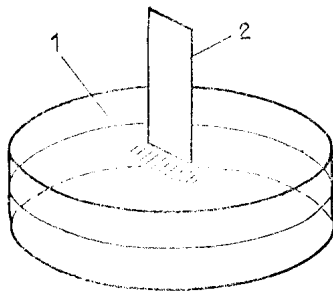


Рис. 3.

2. Эффект гофрирования твердой магнитной пленки, связанный с массообменом между пленкой и объемными фазами. Если к поверхности магнитной пленки 1 поднести достаточно близко полоску пористого материала 2, пропитанного керосином, не прикасаясь к пленке (рис. 3), поверхность пленки покрывается складками, поперечными нижнему краю полоски (рис. 4). При удалении пористой полоски, а также по мере ее высыхания складки исчезают. Исчезновения складок можно добиться также путем удаления паров керосина из-под

пористой полоски потоком воздуха.

Это явление объясняется следующим образом. При нанесении на поверхность воды небольшого количества ферромагнитной жидкости на основе керосина происходит интенсивное испарение последнего. Это приводит к значительному сокращению площади пленки, ее затвердеванию, а также к гофрированию пленки по краям. При неоднородном испарении керосина с поверхности пленки возникают внутренние напряжения, приводящие к ее растрескиванию. Возникновение складок связано с поглощением пленкой паров керосина, приводящим к увеличению ее площади. Этому увеличению препятствует окружающая слабосжимаемая пленка, что и приводит к гофрированию. Магнитная пленка является, таким образом, двухмерным гелем, увеличивающим свою площадь при поглощении растворителя. Это явление аналогично тепловому расширению и может быть описано аналогичными методами. Будем предполагать, что поверхность пленки не деформирована при заданной поверхностной концентрации растворителя c_0 и при отсутствии внешних сил. При концентрации c , не равной c_0 , поверхность будет деформирована. Ограничиваясь линейным приближением по $c - c_0$, тензор напряжений пишем в виде

$$p_s^{\alpha\beta} = -K_s A (c - c_0) a^{\alpha\beta} + K_s a^{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma}^{\gamma} + 2\mu_s (\epsilon^{\alpha\beta} - 1/2 a^{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma}^{\gamma}). \quad (11)$$

Здесь A — поверхностный коэффициент расширения пленки при поглощении растворителя.

Для выяснения механизма гофрирования пленки решим следующую упрощенную задачу. Магнитная пленка, занимающая бесконечную плоскость, имеет концентрацию растворителя, равную c_0 . Затем на части поверхности пленки, определяемой условиями $0 \leq x \leq l$ и $-\infty < y < +\infty$, создается концентрация растворителя $c > c_0$, что при-

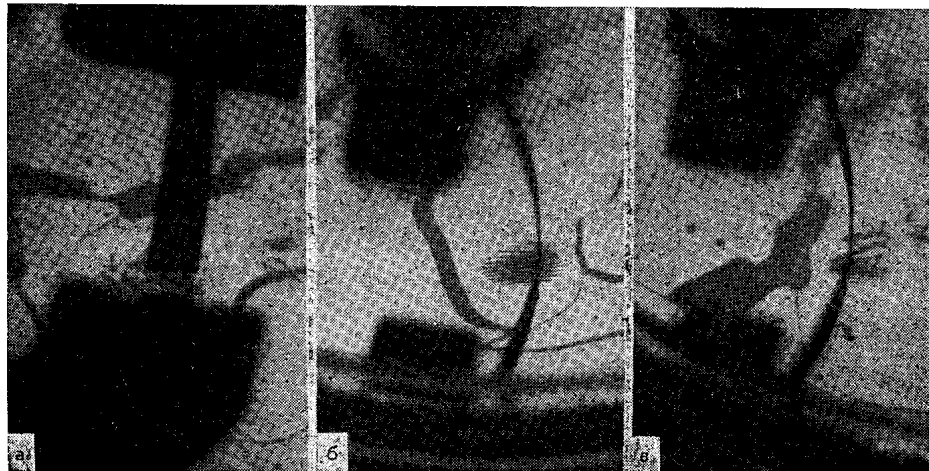


Рис. 4.

водит к расширению пленки и возникновению складок, так как на краях $x=0$; l пленка по условию закреплена. В связи с симметрией задачи предполагаем, что функция $z=\zeta(x)$, описывающая форму гофрированной поверхности, зависит только от x . Нахождение формы поверхности $\zeta(x)$ проведем в следующей последовательности. Сначала предположим, что полоса пленки при поглощении растворителя, оставаясь плоской, свободно (при отсутствии внешних сил) расширилась параллельно оси x до ширины l_1 , которую можно определить из условия $p_s^{xx}=0$. Затем полоска пленки сжимается с обеих сторон силой, касательной к поверхности пленки, направленной параллельно плоскости (x, z) и равной по абсолютной величине T на единицу длины края пленки по оси y , при этом на краях пленки $\zeta=0$. Можно рассмотреть также случай, когда пленка сжимается таким образом, что на ее краях выполняется условие $\zeta'=0$, а сила T направлена параллельно оси x .

Сила T находится из условия, чтобы полоса пленки приняла после деформации первоначальную ширину l , при этом, однако, пленка будет уже гофрированной.

Из первого уравнения (6), в котором надо принять $G=0$, следует:

$$p_s^{xx} = -Ta^{xx}; \quad T = \text{const}, \quad (12)$$

т. е. деформация является однородной.

Подставляя (12) во второе уравнение (6), находим

$$\frac{T\zeta''}{(1+\zeta'^2)^{3/2}} + \rho g \zeta = 0.$$

Параметрическое решение этого уравнения с граничными условиями $\zeta(0)=\zeta(l)=0$ выражается через эллиптические интегралы [8]:

$$\zeta = \pm k^{-1} [2(E(m) - E(\varphi, m)) - (K(m) - F(\varphi, m))] \cos \pi(j-1),$$

$$x = \frac{2m}{k} (\cos \varphi + j - 1); \quad K(m) = \frac{kl_2}{4n}; \quad K(m) = F\left(\frac{\pi}{2}, m\right);$$

$$E(\varphi, m) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi; \quad F(\varphi, m) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}; \quad (13)$$

$$E(m) = E\left(\frac{\pi}{2}, m\right); \quad k^2 = \frac{\rho g}{T}; \quad l_2 = \int_0^l \sqrt{1 + \zeta'^2} \, dx;$$

$$n = 1/2, 1, 1 1/2, \dots, \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Здесь φ — параметр; m — неизвестная величина, определяемая из третьего уравнения (13); n — число периодов (длин волн) гофрирования на длине l ; j — номер полупериода волны для любого периодического решения (13), характеризуемого числом n .

Из формул (11), (12) следует

$$Ta_{xx} = K_S A (c - c_0) a_{xx} - K_S a_{xx} \varepsilon_\gamma^\gamma - 2\mu_S \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{2} a_{xx} \varepsilon_\gamma^\gamma \right). \quad (14)$$

Далее, поскольку ζ зависит только от x , имеем согласно (2), (3)

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yy} = 0; \quad \varepsilon_\gamma^\gamma = \varepsilon_{xx}/a_{xx}; \quad \varepsilon_{xx} = 1/2 (a_{xx} - 1); \quad a_{xx} = [1 + u_x'(x)]^2 + \zeta'^2(x). \quad (15)$$

Из симметрии задачи очевидно следует, что $u_y(x, y) = 0$, а $u_x(x)$ зависит только от x .

Из уравнений (14), (15) находим

$$T = AK_S(c - c_0) - 1/2(K_S + \mu_S)(a_{xx} - 1)a_{xx}^{-1}. \quad (16)$$

Отсюда, в частности, следует, что $a_{xx} = \text{const}$. На основании этого можно написать $dl_2(x)/dx = l_2/l$, поскольку [7] $(dl_2/dx)^2 = a_{xx}$.

Из второго уравнения (13) при $\varphi = 0$ и $j = 2n$ следует $l = 4mn/k$.

Окончательно из формул (13), (16) находим систему уравнений для определения силы T в зависимости от концентрации растворителя c :

$$T = AK_S(c - c_0) - 1/2(K_S + \mu_S)[1 - l^2/l_2^2], \quad (17)$$

$$l_2/l = 4nl^{-1}T^{1/2}(\rho g)^{-1/2}K[l(4n)^{-1}(\rho g)^{1/2}T^{-1/2}].$$

Из уравнений (17) следует, что каждому значению концентрации c соответствует бесконечное множество значений T , получаемых изменением числа n . Для выяснения вопроса о том, какое решение из полученного множества (13) реализуется в действительности, необходимо исследование решений на устойчивость. Такая задача в общем случае должна решаться методами динамики [8, с. 127, 218], однако в простейшей постановке ее можно решить, минимизируя упругую энергию пленки. При этом необходимо отметить, что все реальные пленки имеют конечные размеры, в отличие от рассмотренного здесь упрощенного случая бесконечной пленки. Реализация того или иного решения существенно связана с наличием границ у пленки. Наличие границы у гофрированной пленки обуславливает, в частности, то, что длина волны гофрирования $\lambda = l/n$ не может быть очень малой, поскольку это привело бы к неограниченному накоплению упругой энергии на контуре пленки, так как деформации максимальны именно на контуре.

Приведем оценку силы T , используя параметрические уравнения гофрированной поверхности (13). Из этих уравнений следует

$$k\zeta_{\max} = 2E(lk/4n) - K(lk/4n). \quad (18)$$

Согласно эксперименту (см. рис. 4а) принимаем следующие значения величин: $l = 0,5$ см, $n = 5$, $\zeta_{\max} \approx 1/4\lambda = l/4n$, а также $\rho = 1$ г/см³, $g = 10^3$ см/с².

Вводя обозначение $lk/4n = \kappa$ и используя оценку $\zeta_{\max}$, находим из (18)

$$2E(\kappa) - K(\kappa) = \kappa.$$

Это уравнение имеет решение $\kappa \approx 0,74$. Окончательно из восьмой формулы (13) следует

$$T \approx (0,74)^{-2}\rho g l^2 (4n)^{-2} \approx 1,14 \text{ дин/см} = 1,14 \text{ мН/м}.$$

В заключение отметим, что эксперименты проводились с магнитной жидкостью, изготовленной во ВНИПИГазпереработки (г. Краснодар) и имеющей намагниченность около 100 кА/м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамсон А. У. Физическая химия поверхностей. М.: Мир, 1979. 568 с.
2. Тактаров Н. Г. К обоснованию условий для электромагнитных величин на поверхности двумерных континуумов. — ДАН СССР (в печати).
3. Тактаров Н. Г. О структурированных пленках намагничивающихся поверхностно-активных веществ. — Магнитная гидродинамика, 1982, № 4, с. 28—32.
4. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.
6. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ. М.: ГИФМЛ, 1963. 412 с.
7. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 536 с.
8. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

Поступила 24 сентября 1984 г.