ГРУППЫ ШЕВАЛЛЕ

Бунина Елена Игоревна

Введение

Данный спецкурс посвящен описанию, классификации и основным свойствам групп Шевалле. В конце спецкурса мы докажем теорему об описании автоморфизмов групп Шевалле над полями.

Определение групп Шевалле само по себе довольно сложное, поэтому мы дадим разные его варианты и вообще посвятим описанию, что такое группы Шевалле, немало лекций.

Мы стартуем не с нуля, а будем считать, что уже разобрались с системами корней и строением полупростых алгебр Ли. Однако в первых двух лекциях мы напомним слушателям вкратце все необходимые определения, факты, теоремы и примеры.

1 Лекция 1. Системы корней и алгебры Ли: напоминание

1.1 Системы корней

Определение 1. Конечный непустой набор векторов $\Phi \in V$ (V — евклидово пространство), не содержащий нулевого вектора, называется *системой корней*, если выполнены следующие условия:

(R1) $\alpha \in \Phi$ тогда и только тогда, когда $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$;

(R2) Если $\alpha \in \Phi$, то $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$.

Сами векторы из набора Φ называются *корнями*.

Мы будем требовать для корней еще одну более сильную аксиому целочисленности:

(R3) Для всех пар корней $\alpha, \beta \in \Phi$ число $\langle \alpha, \beta \rangle := 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ — целое.

По аксиоматически определенной системе корней Φ можно построить группу отражений $W = W(\Phi)$: это будет группа, порожденная отражениями относительно всех корней из Φ.

Выберем и зафиксируем какой-нибудь линейный порядок на V.

Определение 2. *Системой положительных корней* в Φ называется множество

$$\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi \mid 0 < \alpha\}.$$

Множество $\Phi^- := -\Phi$ называется *системой отрицательных корней*. Ясно, что $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$.

Определение 3. Подмножество $\Delta \subset \Phi$ называется *системой простых корней* или *базисом системы корней*, если

(1) Δ является базисом для линейной оболочки системы корней Φ;

(2) всякий вектор $\alpha \in \Phi$ есть линейная комбинация $\sum c_\gamma \gamma$, где все γ принадлежат Δ, а все c_γ или все неотрицательны, или все неположительны.

Теорема 1. 1. *Если Δ — система простых корней, то существует единственная система положительных (относительно некоторого упорядочения на V) корней Φ^+, содержащая Δ.*

2. *Всякая система положительных корней Φ^+ содержит единственную систему простых корней Δ.*

3. *Для систем корней, удовлетворяющих свойству* (R3)*, любой корень является целочисленной линейной комбинацией простых корней.*

4. *Если Δ — система простых корней, то $(\alpha, \beta) \leqslant 0$ для всех $\alpha, \beta \in \Delta$. Иными словами, углы между простыми корнями не бывают острыми.*

Важно, что системы простых корней внутри одной системы корней устроены одинаково:

Теорема 2. *Как любые две системы положительных корней, так и любых две системы простых корней сопряжены относительно действия группы Вейля.*

Оказывается, что группа Вейля W порождается простыми отражениями:

Теорема 3. *Пусть Δ — система простых корней. Тогда $W = \langle \sigma_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$.*

Таким образом, группа отражений W порождается отражениями $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ относительно простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Эти отражения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sigma_i^2 = E, \quad (\sigma_i \sigma_j)^{n_{ij}} = E,$$

где число n_{ij} определяется углом между векторами α_i и α_j:

$$\angle(\alpha_i, \alpha_j) = \pi - \pi / n_{ij}.$$

Оказывается, что других соотношений, не следующих из этих, в группе отражений нет.

Вся информация о системе корней и соответствующей группе W задается набором чисел n_{ij}, то есть углами между простыми корнями. Эти данные можно наглядно представить следующим образом.

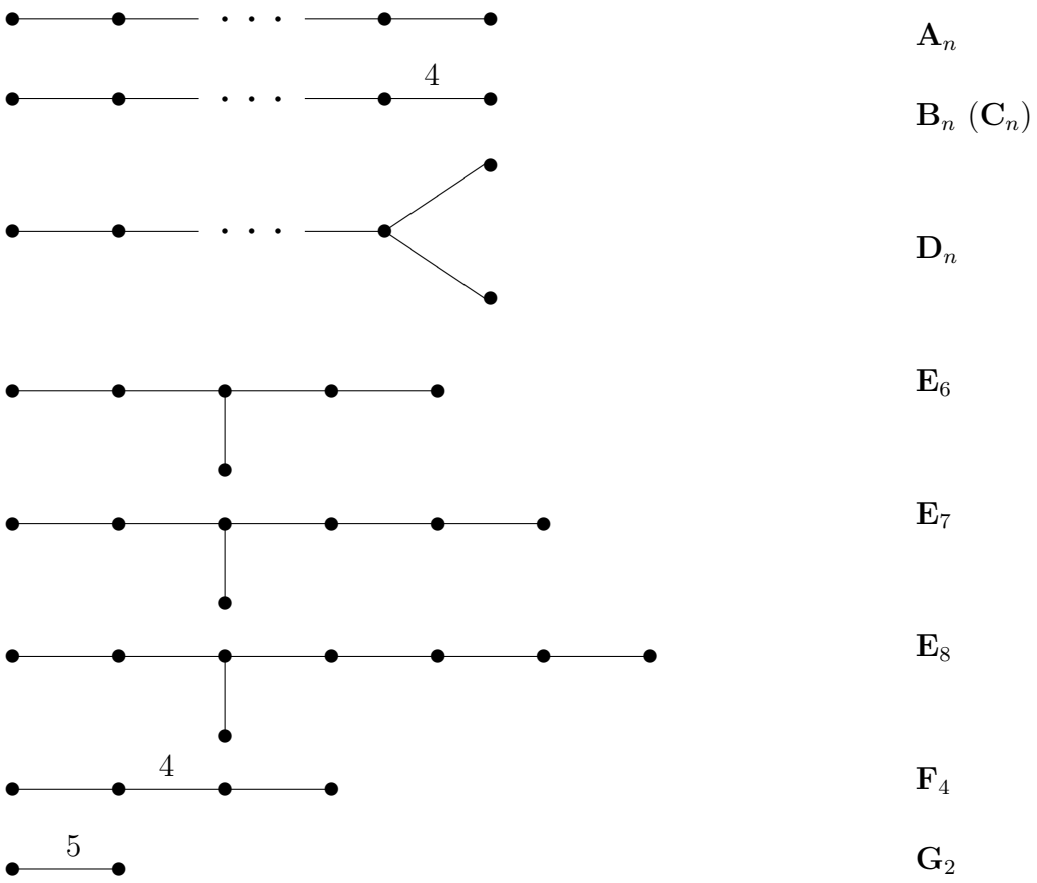
Определение 4. Пусть W — группа отражений, $\Phi \supset \Delta$ — соответствующие система корней и система простых корней. *Графом Кокстера*, построенным по группе отражений W (или по системе корней Φ), называется неориентированный граф с $|\Delta|$ вершинами (без кратным ребер и петель), ребра которого отмечены числами, не меньшими трех, определенный по следующему правилу:

— i-я и j-я вершины не соединены ребром, если $n_{ij} = 2$ (то есть простые корни α_i и α_j ортогональны);

— в противном случае i-я и j-я вершины соединены ребром, снабженным отметкой n_{ij}.

Граф Кокстера с n вершинами называется *допустимым*, если он соответствует некоторой конечной группе отражений.

Теорема 4. *Граф Кокстера является допустимым тогда и только тогда, когда каждая из его компонент связности принадлежит следующему списку:*



$\mathbf{A}_n$

$\mathbf{B}_n$ $(\mathbf{C}_n)$

$\mathbf{D}_n$

$\mathbf{E}_6$

$\mathbf{E}_7$

$\mathbf{E}_8$

$\mathbf{F}_4$

$\mathbf{G}_2$

При этом системы корней исчерпываются списком, предъявленным выше.

1.2 Алгебры Ли, основные понятия

Определение 5. Векторное пространство L над полем $\mathbb{F}$ с операцией $L \times L \to L$, обозначаемой $(x, y) \mapsto [x, y]$ и называемой *скобкой* или *коммутатором* элементов x и y, называется *алгеброй Ли* над полем $\mathbb{F}$, если выполняются следующие аксиомы:

(L1) операция коммутирования билинейна;

(L2) $[x, x] = 0$ для всех $x \in L$;

(L3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ для всех $x, y, z \in L$ (*тождество Якоби*).

Заметим, что из аксиом (L1) и (L2), примененных к элементу $[x + y, x + y]$, следует соотношение коммутативности

$$[x, y] = -[yx].$$

Алгебры Ли L и L' над полем $\mathbb{F}$ будем называть *изоморфными*, если существует изоморфизм

векторных пространств $\varphi : L \to L'$, удовлетворяющий соотношению

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \text{ для всех } x, y \in L$$

(и тогда φ называется изоморфизмом алгебр Ли).

Также очевидно определение подалгебры в L: подпространство K пространства L называется подалгеброй, если для всех $x, y \in K$ выполнено $[x, y] \in K$.

Мы в лекциях будем рассматривать исключительно алгебры Ли, векторное пространство которых конечномерно над полем $\mathbb{F}$. Это будет всегда подразумеваться, если не указано противное.

Если V — конечномерное пространство над $\mathbb{F}$, то рассмотрим его кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} V$ (кольцо матриц, если фиксировать базис пространства). Определим новую операцию $[x, y] = xy - yx$, называемую *скобкой* элементов x и y. С этой операцией $\operatorname{End} V$ становится алгеброй Ли над $\mathbb{F}$ (простая проверка). Чтобы отличать эту новую алгебраическую структуру от прежней, ассоциативной, мы обозначим через $\mathfrak{gl}(V)$ пространство $\operatorname{End} V$, рассматриваемое как алгебра Ли.

Любая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$ называется *линейной алгеброй Ли*. Если ввести в пространстве V базис, то в алгебре $\mathfrak{gl}(V)$ базисом будет система матричных единиц E_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, а соотношения для коммутаторов будут иметь вид

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}.$$

Теперь рассмотрим четыре очень важных примера классических алгебр Ли — $\mathbf{A}_l, \mathbf{B}_l, \mathbf{C}_l$ и $\mathbf{D}_l$.

1. Алгебра Ли типа $\mathbf{A}_l$: Пусть $\dim V = l+1$. Множество эндоморфизмов пространства V. с нулевым следом обозначим $\mathfrak{sl}(V)$ или $\mathfrak{sl}_{l+1}(\mathbb{F})$. Множество $\mathfrak{sl}(V)$ является подалгеброй в $\mathfrak{gl}(V)$ и называется *специальной линейной алгеброй Ли*. Стандартным базисом этой алгебры является базис, состоящий из всех матричных единиц E_{ij}, где $i \neq j$, и из всех элементов $H_i := E_{ii} - E_{i+1,i+1}$, $i = 1, \ldots, l-1$.

2. Алгебра Ли типа $\mathbf{C}_l$: Пусть $\dim V = 2l$, и пусть $(v_1, \ldots, v_{2l})$ — базис. Определим невырожденную кососимметрическую форму f на пространстве V посредством матрицы $s = \begin{pmatrix} 0 & E_l \\ -E_l & 0 \end{pmatrix}$. *Симплектическая алгебра*, обозначаемая $\mathfrak{sp}(V)$ или $\mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{F})$, по определению состоит из всех эндоморфизмов x пространства V, удовлетворяющих условию $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$. Легко можно проверить, что множество $\mathfrak{sp}(V)$ замкнуто относительно коммутирования. На матричном языке условие симплектичности для $x = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, где $m, n, p, q \in \mathfrak{gl}_l(\mathbb{F})$, состоит в том, что $sx = x^T s$, то есть $n^T = n$, $p^T = p$, $m^T = -q$. Теперь легко найти базис в $\mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{F})$. Возьмем диагональные матрицы $E_{ii} - E_{l+i,l+i}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, и все матрицы $E_{ij} - E_{l+i,l+j}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant l$, а также $E_{i,l+i}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, и $E_{i,l+j} + E_{j,l+i}$, $1 \leqslant i < j \leqslant l$. Суммируя, получаем

$$\dim \mathfrak{sp}_{2l}(\mathbb{F}) = 2l^2 + l.$$

3. Алгебра Ли типа $\mathbf{B}_l$: Пусть размерность $\dim V = 2l+1$ нечетна, а f — невырожденная

симметрическая билинейная форма на V с матрицей

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_l \\ 0 & E_l & 0 \end{pmatrix}.$$

Ортогональная алгебра $\mathfrak{o}(V)$ или $\mathfrak{o}_{2l+1}(\mathbb{F})$ состоит из всех эндоморфизмов пространства V, удовлетворяющих условию

$$f(x(v), w) = -f(v, x(w))$$

(то же требование, что и для случая $\mathbf{C}_l$).

Если мы разобьем x на блоки так же, как s, скажем,

$$x = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{pmatrix},$$

то равенство $sx = -x^T s$ превратится в следующую совокупность условий: $a = 0$, $c_1 = -b_2^T$, $c_2 = -b_1^T$, $q = -m^T$, $n^T = -n$, $p^t = -p$.

В качестве базисных элементов возьмем, во-первых, l диагональных матриц $E_{ii} - E_{l+i,l+i}$, $2 \leqslant i \leqslant l+1$. Добавим $2l$ матриц, в которых ненулевыми являются только первая строка и первый столбец: $E_{1,l+i+1} - E_{i+1,1}$ т $E_{1,i+1} - E_{l+i+1,1}$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Подматрице $q = -m^t$ сопоставим (как и для $\mathbf{C}_l$) матрицы $E_{i+1,j+1} - E_{l+j+1,l+i+1}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant l$. Подматрице n сопоставим $E_{i+1,l+j+1} - E_{j+1,l+i+1}$, $1 \leqslant i < j \leqslant l$, а подматрице p — $E_{i+l+1,j+1} - E_{j+l+1,j+1}$, $1 \leqslant j < i \leqslant l$. Общее количество базисных элементов равно $2l^2 + l$.

4. Алгебра Ли типа $\mathbf{D}_l$. Здесь мы получим другую ортогональную алгебру. Она строится так же, как и $\mathbf{B}_l$, с теми отличиями, что размерность $\dim V = 2l$ четна, а s имеет более простой вид

$$s = \begin{pmatrix} 0 & E_l \\ E_l & 0 \end{pmatrix}.$$

Построение базиса этой алгебры оставим в качестве упражнения.

Кроме перечисленных важных алгебр нам будут интересны и полезны в дальнейшем еще несколько линейных алгебр Ли: это алгебра Ли $\mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$ всех верхнетреугольных матриц; алгебра Ли $\mathfrak{n}_n(\mathbb{F})$ всех строго верхнетреугольных матриц (треугольных матриц с нулевой диагональю); алгебра $\mathfrak{d}_n(\mathbb{F})$ всех диагональных матриц.

Некоторые линейные алгебры Ли возникают наиболее естественно при рассмотрении дифференцирований алгебр. Под $\mathbb{F}$-алгеброй (не обязательно ассоциативной) будем понимать просто векторное пространство $\mathfrak{A}$ над $\mathbb{F}$, наделенное билинейной операцией $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, обозначение которой обычно опускается. Дифференцированием в алгебре $\mathfrak{A}$ мы называем линейное отображение $\delta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, удовлетворяющее обычному правилу дифференцирования

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b.$$

Легко проверяется, что совокупность $\operatorname{Der}\mathfrak{A}$ всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$ является векторным подпространством в $\operatorname{End}\mathfrak{A}$. Легко проверить, что коммутатор двух дифференцирований снова является дифференцированием (хотя их обычное произведение не обязательно им является). Таким образом, $\operatorname{Der}\mathfrak{A}$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{A})$.

Поскольку алгебра Ли L является $\mathbb{F}$-алгеброй в указанном смысле, то определена алгебра Ли $\operatorname{Der} L$. Некоторые дифференцирования вполне естественно возникают следующим образом. Если $x \in L$, то отображение $y \mapsto [x, y]$ является эндоморфизмом пространства L, который мы обозначим $\operatorname{ad} x$. В действительности $\operatorname{ad} x \in \operatorname{Der} L$, так как можно переписать тождество Якоби в следующем виде:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

Дифференцирования такого вида называются внутренними, а все остальные — внешними.

Отображение $L \to \operatorname{Der} L$, имеющее вид $x \mapsto \operatorname{ad} x$, называется присоединенным представлением алгебры L; оно для нас будет крайне важно.

1.3 Идеалы алгебр Ли

Подпространство I алгебры Ли L называется *идеалом* в L, если из того, что $x \in L$, $y \in I$ следует, что $[x, y] \in I$. В теории алгебр Ли идеалы играют роль нормальных подгрупп в группах или двухсторонних идеалов в ассоциативных кольцах — они являются ядрами гомоморфизмов.

Очевидно, что 0 и сама алгебра L являются идеалами. Еще один пример — центр алгебры L:

$$Z(L) := \{x \in L \mid [x, y] = 0 \text{ для всех } y \in L\}.$$

Другой важный пример — производная алгебра, обозначаемая через $[L, L]$ и аналогичная коммутанту группы. Она состоит из всех линейных комбинаций коммутаторов $[x, y]$ и, очевидно, является идеалом.

Если I, J — два идеала алгебры Ли, то

$$I + J := \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$

также является идеалом. Аналогично идеалом является и

$$[I, J] := \left\{\sum x_i y_i \mid x_i \in I, y_i \in J\right\}.$$

Производная алгебра $[L, L]$ — частный случай этой конструкции.

Если в алгебре L нет идеалов, кроме нее самой и нуля, причем $[L, L] \neq 0$, то L называется *простой алгеброй*. Ясно, что если L — простая алгебра, то $Z(L) = 0$ и $L = [L, L]$.

В случае когда алгебра Ли L не проста (и не одномерна), можно профакторизовать ее по ненулевому собственному идеалу I, получив алгебру Ли меньшей размерности. Конструкция факторалгебры L/I формально та же, что и для факторкольца: L/I совпадает с факторпространством, а коммутатор определяется формулой

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I.$$

Нормализатор подалгебры (и вообще подпространства) K алгебры L определяется условием

$$N_L(K) := \{x \in L \mid [x, K] \subset K\}.$$

Ввиду тождества Якоби $N_L(K)$ является подалгеброй в L; ее можно описать как наибольшую подалгебру в L, в которой K является идеалом. Если $K = N_L(K)$, то подалгебра K называется *самонормализуемой*.

Централизатором подмножества X в L называется множество

$$C_L(X) = \{x \in L \mid [x, X] = 0\}.$$

Опять-таки из тождества Якоби следует, что $C_L(X)$ является подалгеброй в L.

Линейное преобразование $\varphi : L \to L'$ (где L и L' — алгебры Ли над $\mathbb{F}$) называется *гомоморфизмом*, если

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \text{ для всех } x, y \in L.$$

Гомоморфизм φ называется *мономорфизмом*, если $\ker \varphi = 0$, *эпиморфизмом* — если $\Im \varphi = L'$ и *изоморфизмом* — если φ является одновременно и мономорфизмом, и эпиморфизмом. Как и ожидалось, $\ker \varphi$ является идеалом в L.

Отображение ad является гомоморфизмом, ядро его состоит из всех таких элементов $x \in L$, для которых $[x, y] = 0$ при всех $y \in L$, поэтому $\ker \operatorname{ad} = Z(L)$. Таким образом, если алгебра проста, то $Z(L) = 0$, откуда отображение ad является вложением. Это означает, что любая простая алгебра Ли изоморфна линейной.

1.4 Автоморфизмы

Автоморфизм алгебры Ли L — это ее изоморфизм на себя. Группа всех автоморфизмов обозначается $\operatorname{Aut} L$. Важные примеры автоморфизмов возникают, когда L — линейная алгебра Ли. Если $g \in \operatorname{GL}(V)$ обратимый эндоморфизм пространства V, причем $gLg^{-1} = L$, то непосредственно проверяется, что отображение $x \mapsto gxg^{-1}$ является автоморфизмом алгебры L.

Рассмотрим теперь случай $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$. Предположим, что для элемента $x \in L$ оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен, то есть $(\operatorname{ad} x)^k = 0$ при некотором $k > 0$. Тогда разложение экспоненты линейного преобразования в ряд над полем $\mathbb{C}$ имеет смысл и над полем $\mathbb{F}$, так как этот ряд будет содержать конечное число членов:

$$\exp(\operatorname{ad} x) = 1 + \operatorname{ad} x + \frac{(\operatorname{ad} x)^2}{2!} + \frac{(\operatorname{ad} x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\operatorname{ad} x)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Оказывается, что $\exp(\operatorname{ad} x) \in \operatorname{Aut} L$. Более того, результат останется верным, если заменить $\operatorname{ad} x$ на любое нильпотентное дифференцирование δ из L.

1.5 Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли; радикал

Определим следующую последовательность идеалов алгебры L (*производный ряд*):

$$L^{(0)} := L, \quad L^{(1)} := [L, L], \quad L^{(2)} := [L^{(1)}, L^{(1)}], \quad \ldots, \quad L^{(i+1)} := [L^{(i)}, L^{(i)}].$$

Алгебра L называется *разрешимой*, если $L^{(n)} = 0$ для некоторого натурального n. В определенном смысле общим примером разрешимой алгебры служит алгебра верхнетреугольных матриц $\mathfrak{t}_n(\mathbb{F})$.

Теперь приведем несколько простых свойств разрешимых алгебр.

Предложение 1. *Пусть L — алгебра Ли.*

(a) *Если алгебра L разрешима, то разрешимы все ее подалгебры и гомоморфные образы.*

(b) *Если I — такой разрешимый идеал в L, что алгебра L/I разрешима, то разрешима и сама алгебра L.*

(c) *Если I и J — разрешимые идеалы в L, то идеал $I + J$ также разрешим.*

Рассмотрим алгебру Ли L и ее максимальный разрешимый идеал S (такой разрешимый идеал, который не содержится ни в одном большем разрешимом идеале). Если I — любой другой разрешимый идеал в L, то $S+I = S$ (ввиду максимальности идеала S), то есть $I \subset S$. Это доказывает существование единственного максимального (то есть наибольшего) разрешимого идеала, называемого *радикалом* алгебры L и обозначаемого через $\operatorname{Rad} L$. Если $L \neq 0$ и $\operatorname{Rad} L = 0$, то алгебра L называется *полупростой*. Мы будем изучать именно полупростые алгебры Ли.

Определим последовательность идеалов алгебры Ли L (*убывающий* или *нижний центральный ряд*), полагая

$$L^0 := L, \quad L^1 := [L, L], \quad L^2 := [L, L^1], \quad \ldots, \quad L^k := [L, L^{k-1}].$$

Алгебра L называется *нильпотентной*, если $L^n = 0$ при некотором натуральном n. Например, любая абелева алгебра нильпотентна. Все нильпотентные алгебры Ли разрешимы, но не все разрешимые алгебры Ли нильпотентны (например, алгебра верхне-треугольных матриц).

Предложение 2. *Пусть L — алгебра Ли.*

(a) *Если алгебра L нильпотентна, то все ее подалгебры и гомоморфные образы также нильпотентны.*

(b) *Если нильпотентна алгебра $L/Z(L)$, то нильпотентна и алгебра L.*

(c) *Если алгебра L нильпотентна и $L \neq 0$, то $Z(L) \neq 0$.*

2 Лекция 2. Полупростые алгебры Ли и их свойства

2.1 Теорема Энгеля и Ли и разложение Жордана–Шевалле

Если x — элемент произвольной алгебры Ли L, то назовем x ad-*нильпотентным*, если эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. Если алгебра L нильпотентна, то все ее элементы ad-нильпотентны. Замечательно, что верно и обратное:

Теорема 5 (Энгель)**.** *Если все элементы алгебры Ли L ad-нильпотентны, то алгебра L нильпотентна.*

С этого момента мы будем считать, что поле $\mathbb{F}$ имеет нулевую характеристику и алгебраически замкнуто.

Теорема 6 (Теорема Ли)**.** *Пусть L — разрешимая подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, $\dim V = n < \infty$. Тогда в некотором базисе матрицы элементов из L верхнетреугольны.*

Назовем элемент $x \in \operatorname{End} V$ (V конечномерно) *полупростым*, если все корни его минимального многочлена над $\mathbb{F}$ различны. В случае алгебраически замкнутого поля это равносильно диагонализируемости оператора. Два коммутирующих диагонализируемых эндоморфизма можно привести к диагональному виду одновременно, поэтому сумма и разность двух полупростых эндоморфизмов снова полупроста. Кроме того, если элемент x полупрост и отображает подпространство $W \subset V$ в себя, то очевидно, что ограничение отображения x на W полупросто.

Предложение 3. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{F}$, $x \in \operatorname{End} V$.*

(a) *Существуют единственные элементы $x_s, x_n \in \operatorname{End} V$, где x_s полупрост, x_n нильпотентен, x_s и x_n коммутируют, $x = x_s + x_n$.*

(b) *Существуют такие многочлены $p(t)$, $q(t)$ от одного переменного без свободного члена, что $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Как следствие, x_s и x_n коммутируют с любым элементом, коммутирующим с x.*

(c) *Если $A \subset B \subset V$ — некоторые подпространства и x отображает B в A, то x_s и x_n также отображают B в A.*

Разложение $x = x_s + x_n$ называется *разложением Жордана–Шевалле* эндоморфизма x; x_s и x_n называются, соответственно, *полупростой* и *нильпотентной частями* эндоморфизма x.

2.2 Критерий Картана и форма Киллинга

Теорема 7 (Критерий Картана)**.** *Пусть L — подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, где пространство V конечномерно. Предположим, что*

$$\operatorname{tr}(xy) = 0 \text{ при всех } x \in [L, L],\ y \in L.$$

Тогда L разрешима.

Следствие 1. *Пусть L — такая алгебра Ли, что*

$$\operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0 \text{ для всех } x \in [L, L],\ y \in L.$$

Тогда алгебра L разрешима.

Пусть L — произвольная алгебра Ли. Если $x, y \in L$, то положим

$$\varkappa(x, y) := \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y).$$

Тогда $\varkappa$ — симметрическая билинейная форма на L, которая называется *формой Киллинга*.

Теорема 8. *Пусть L — ненулевая алгебра Ли. Тогда L полупроста если и только если ее форма Киллинга невырожденна.*

2.3 Простые идеалы алгебры Ли

Алгебра Ли называется *прямой суммой* идеалов $I_1, \ldots, I_t$, если $L = I_1 + \cdots + I_t$ — прямая сумма подпространств. Из этого условия вытекает, что

$$[I_i, I_j] \subset I_i \cap I_j = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Мы будем писать

$$L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_t.$$

Теорема 9. *Пусть алгебра L полупроста. Тогда в ней существуют такие простые идеалы $L_1, \ldots, L_t$, что $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_t$. Любой простой идеал алгебры L совпадает с одним из L_i. При этом форма Киллинга на L_i является ограничением формы $\varkappa$ на $L_i \times L_i$.*

Следствие 2. *Если L алгебра полупроста, то $L = [L, L]$, и все идеалы и гомоморфные образы алгебры L полупросты (или равны нулю). При этом каждый идеал в алгебре L является суммой некоторых ее простых идеалов.*

2.4 Разложение Картана

Подалгебру в алгебре L, состоящую только из полупростых элементов, будем называть *торической*. Любая торическая подалгебра в полупростой алгебре Ли оказывается абелевой.

Зафиксируем *максимальную торическую подалгебру* H в L, то есть такую, которая не содержится больше ни в какой торической подалгебре. Поскольку подалгебра H абелева, $\operatorname{ad}_L H$ представляет собой коммутирующее семейство полупростых эндоморфизмов алгебры L. Согласно известному результату из линейной алгебры, их можно одновременно диагонализировать. Иными словами, L является прямой суммой подпространств

$$L_\alpha = \{x \in L \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ для всех } h \in H\},$$

где α пробегает H^*; при этом L_0 — это просто $C_L(H)$, централизатор подалгебры H он содержит H.

Множество всех ненулевых элементов $\alpha \in H^*$, для которых $L_\alpha \neq 0$, обозначается Φ; его элементы называются *корнями* алгебры L относительно H (и их количество конечно). В этих обозначениях мы получаем *разложение на корневые подпространства* (или *разложение Картана*):

$$L = C_L(H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha.$$

Предложение 4. *Для любых $\alpha, \beta \in H^*$ выполняется включение $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$. Если $x \in L_\alpha$, $\alpha \neq 0$, то оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. Если $\alpha, \beta \in H^*$, $\alpha + \beta \neq 0$, то подпространство L_α ортогонально к L_β относительно формы Киллинга $\varkappa$ на L.*

Предложение 5. *Пусть H — максимальная торическая подалгебра в L. Тогда $H = C_L(H)$.*

Следствие 3. *Ограничение формы $\varkappa$ на H невырожденно.*

Это следствие позволяет нам отождествить H с H^*: элементу $\varphi \in H^*$ отвечает (единственный) такой элемент $t_\varphi \in H$, что $\varphi(h) = \varkappa(t_\varphi, h)$ для всех $h \in H$. Тогда Φ отвечает подмножеству $\{t_\varphi \mid \alpha \in \Phi\}$ в H.

2.5 Свойства ортогональности

Мы уже видели, что $\varkappa(L_\alpha, L_\beta) = 0$, если $\alpha, \beta \in H^*$, $\alpha + \beta \neq 0$; в частности, $\varkappa(H, L_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in \Phi$, так что форма $\varkappa$ имеет невырожденное ограничение на H.

Предложение 6. (a) *Множество Φ порождает H^*.*

(b) *Если $\alpha \in \Phi$, то $-\alpha \in \Phi$.*

(c) *Пусть $\alpha \in \Phi$, $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$. Тогда*

$$[x, y] = \varkappa(x, y) t_\alpha.$$

(d) *Если $\alpha \in \Phi$, то пространство $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ одномерно с образующим t_α.*

(e) *Справедливо соотношение $\alpha(t_\alpha) = \varkappa(t_\alpha, t_\alpha) \neq 0$ для $\alpha \in \Phi$.*

(f) *Если $\alpha \in \Phi$, а x_α — любой ненулевой элемент в L_α, то существует такой элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, что элементы x_α, y_α,*
$h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ порождает трехмерную простую подалгебру в L. Ее изоморфизм с $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ задают формулы

$$x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(g) *Справедливы равенства*

$$h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\varkappa(t_\alpha, t_\alpha)}; \quad h_\alpha = -h_{-\alpha}.$$

2.6 Выводы

В этом пункте L — полупростая алгебра Ли (над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ характеристики ноль), H — ее максимальная торическая подалгебра, $\Phi \subset H^*$ — множество корней в L (относительно H),

$$L = H + \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$$

— разложение на корневые подпространства.

Так как ограничение формы Киллинга на H невырожденно, мы можем перенести ее на H^*, положив $(\gamma, \delta) = \varkappa(t_\gamma, t_\delta)$ при всех $\gamma, \delta \in H^*$. Мы знаем, что Φ порождает H^*, поэтому в H^* можно выбрать базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, состоящий из корней.

Рассмотрим $\mathbb{Q}$-подпространство $\mathbb{E}_\mathbb{Q}$ в H^*, натянутое на все корни, и пусть теперь $\mathbb{E}$ — вещественное векторное пространство, получаемое при замене основного поля $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{E} := \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{E}_\mathbb{Q}.$$

Форма продолжается на $\mathbb{E}$ естественным образом и остается положительно определенной, то есть $\mathbb{E}$ превращается в евклидово пространство. В множестве Φ содержится его базис и $\dim_\mathbb{R} \mathbb{E} = l$.

Основные факты о множестве Φ собраны в следующей теореме:

Теорема 10. *Пусть $L, H, \Phi, \mathbb{E}$ таковы, как выше. Тогда*

(a) *Множество Φ порождает $\mathbb{E}$ и не содержит нуля.*

(b) *Если $\alpha \in \Phi$, то $-\alpha \in \Phi$, но никакое другое произведение скаляра на α не является корнем.*

(c) *Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то*

$$\beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \in \Phi.$$

(d) *Если $\alpha, \beta \in \Phi$, то*

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, мы видим, что Φ является настоящей системой корней.

2.7 Теорема об изоморфизме

Теорема 11. *Пусть L, L' — простые алгебры Ли над $\mathbb{F}$ с максимальными торическими подалгебрами H, H' и системами корней Φ, Φ' соответственно. Предположим, что существует изоморфизм между Φ и Φ' (обозначаемый $\alpha \mapsto \alpha'$), который индуцирует изоморфизм $\pi : H \to H'$. Зафиксируем базис $\Delta \subset \Phi$, тогда $\Delta' = \{\alpha' \mid \alpha \in \Delta\}$ будет базисом в Φ'.*

Для каждого $\alpha \in \Delta$ выберем произвольные (ненулевые) $x_\alpha \in L_\alpha$, $x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$ (то есть выберем произвольный изоморфизм алгебр Ли $\pi_\alpha : L_\alpha \to L'_{\alpha'}$). Тогда существует единственный изоморфизм $\pi : L \to L'$, продолжающий $\pi : H \to H'$ и все π_α, $\alpha \in \Delta$.

Очевидно, что теорема легко распространяется на полупростые алгебры.

Теорема об изоморфизме оказывается весьма полезной при доказательстве существования автоморфизмов полупростой алгебры Ли L (здесь H, Φ такие же, как раньше). Каждый автоморфизм системы Φ определяет автоморфизм подалгебры H, который можно продолжить на L.

В качестве полезного примера возьмем отображение, меняющее знак у каждого корня. Оно, очевидно, лежит в $\operatorname{Aut}\Phi$ и индуцированное отображение $\sigma : H \to H$ переводит h в $-h$. В частности, $\sigma(h_\alpha) = -(h_\alpha)$, но мы помним, что этот элемент совпадает с $h_{-\alpha}$. применить только что доказанную теорему, потребуем, чтобы элемент x_α отображался в $-y_\alpha$, $\alpha \in \Delta$. (Отметим, что единственный элемент $z \in L_\alpha$, для которого $[-y_\alpha, z] = h_{-\alpha}$, равен $-x_\alpha$). Согласно теореме σ продолжается до автоморфизма алгебры L, отображающего x_α в $-y_\alpha$, $\alpha \in \Delta$. Из предыдущего замечания в скобках тогда вытекает, что y_α отображается в $-x_\alpha$ при $\alpha \in \Delta$. При этом σ имеет порядок два, поскольку σ^2 оставляет на месте образующие алгебры L. В итоге получаем

Предложение 7. *Пусть алгебра L такова, как в теореме, но не обязательно проста. Зафиксируем (ненулевой) элемент $x_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha \in \Delta$, и пусть $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ удовлетворяет условию $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Тогда L обладает таким автоморфизмом σ порядка два, что*

$$\sigma(x_\alpha) = -y_\alpha, \quad \sigma(y_\alpha) = -x_\alpha, \quad \alpha \in \Delta; \qquad \sigma(h) = -h, \quad h \in H.$$

2.8 Картановские подалгебры

Картановская подалгебра алгебры Ли L — это нильпотентная подалгебра, совпадающая со своим нормализатором в L. Недостаток этого определения в том, что он не гарантирует существования таких подалгебр (и действительно, над конечными полями этот вопрос до сих пор не выяснен полностью). Если алгебра L полупроста и $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, то максимальная торическая подалгебра H абелева (и, значит, нильпотентна). При этом $N_L(H) = H$, так как

$$L = H + \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha, \text{ где } [H, L_\alpha] = L_\alpha \text{ при } \alpha \in \Phi.$$

Таким образом, в этом случае картановские подалгебры действительно существуют (и играют важную роль).

Теорема 12. *Пусть алгебра L полупроста* ($\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$). *Тогда картановские подалгебры в L — это в точности ее максимальные торические подалгебры.*

2.9 Группа $\mathcal{E}(L)$ и сопряженность картановских подалгебр.

Пусть L — алгебра Ли. Назовем элемент $x \in L$ *строго* ad*-нильпотентным*, если $x \in L_a(\operatorname{ad} y)$ для некоторого $y \in L$ и a — некоторого ненулевого собственного значения отображения $\operatorname{ad} y$. Этот термин оправдан тем, что такой элемент x должен быть ad-нильпотентен. Пусть $\mathcal{N}(L)$ обозначает множество всех строго ad-нильпотентных элементов в L, $\mathcal{E}(L)$ — подгруппу в $\operatorname{Int} L$, порожденную всеми операторами $\exp\operatorname{ad} x$, $x \in \mathcal{N}(L)$. Отметим, что множество $\mathcal{N}(L)$ инвариантно относительно $\operatorname{Aut} L$, поэтому подгруппа $\mathcal{E}(L)$ нормальна в $\operatorname{Aut} L$.

Теорема 13. *Картановские подалгебры произвольной алгебры Ли L сопряжены относительно группы $\mathcal{E}(L)$.*

Данная теорема позволяет приписать произвольной алгебре Ли L над полем $\mathbb{F}$ численный инвариант $\operatorname{rank} L$ (называемый *рангом*), а именно, размерность картановской подалгебры в L. Если алгебра полупроста (а дальше мы сосредоточимся именно на полупростых алгебрах), то $\operatorname{rank} L$ совпадает с $\operatorname{rank} \Phi$, где Φ — система корней в L относительно любой картановской подалгебры.

Борелевской подалгеброй B алгебры Ли L называется ее максимальная разрешимая подалгебра. Наряду с теоремой о сопряженности картановских подалгебр было также доказано, что все борелевские подалгебры любой алгебры Ли L также сопряжены относительно группы $\mathcal{E}(L)$.

Теперь пусть алгебра L полупроста и имеет картановскую подалгебру H и систему корней Φ. Тогда любая борелевская подалгебра B в L, содержащая H, стандартна, то есть имеет вид $B(\Delta) = H + \bigoplus\limits_{\alpha\in\Phi^+} L_\alpha$ для некоторого базиса Δ системы Φ.

Действительно, пусть $\sigma(B(\Delta)) = B$, где Δ — некоторый базис в Φ, $\sigma \in \mathcal{E}(L)$. Поскольку H и $\sigma(H)$ — картановские подалгебры в B, они сопряжены относительно $\mathcal{E}(L)$ и можно считать, что $\sigma(H) = H$. Тогда ясно, что если $\alpha \in \Phi^+$, то $\sigma\alpha$ является корнем и $\sigma(L_\alpha) = L_{\sigma(\alpha)}$. При этом перестановка корней под действием σ сохраняет суммы, так что $\sigma(\Delta) = \Delta'$ снова является базисом в Φ и подалгебра $B = B(\Delta')$ стандартна.

2.10 Группы автоморфизмов

Пусть алгебра L полупроста, H — ее картановская подалгебра с системой корней Φ и фиксированным базисом Δ. Если τ — автоморфизм алгебры L, а $B = B(\Delta)$, то, разумеется, $\tau(B)$ также является борелевской подалгеброй в L, поэтому при некотором автоморфизме $\sigma_1 \in \mathcal{E}(L)$ она возвращается в L. Поскольку H и $\sigma_1\tau(H)$ — картановские подалгебры в L (следовательно, и в B), то найдется автоморфизм $\sigma_2 \in \mathcal{E}(L)$, отображающий $\sigma_1\tau(H)$ в H и сохраняющий B. Так как автоморфизм $\sigma_2\sigma_1\tau$ сохраняет и H, и B, он индуцирует автоморфизм системы Φ, сохраняющий Δ. Мы уже изучали все такие автоморфизмы: нетождественные возникают из нетождественных автоморфизмов схемы Дынкина, которые существуют (для неприводимой системы корней) лишь в случаях $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{D}_l$, $\mathbf{E}_6$. Пусть ρ — соответствующий автоморфизм алгебры L. Поскольку ρ не совсем единственен, можно подобрать скаляры c_α так, чтобы автоморфизм $\rho\sigma_2\sigma_1\tau$ отображал x_α в $c_\alpha x_\alpha$ ($\alpha \in \Phi^+$), y_α в c_α^{-1} и как следствие h_α в h_α (а тогда и все элементы h в себя). В итоге получаем, что τ отличается от элемента группы $\mathcal{E}(L)\cdot\Gamma(L)$ (где $\Gamma(L)$ — группа диаграммных автоморфизмов алгебры L) лишь на диагональный автоморфизм, то есть тождественный на H и скалярный на каждом корневом подпространстве L_α.

На этом мы завершаем повторение материала весеннего семестра и переходим к новым темам.

В ближайшее время наша главная тема — это теоремы существования (полупростых алгебр Ли всех нужных нам типов).

2.11 Тензорные и симметрические алгебры

До конца этой и следующую лекцию $\mathbb{F}$ может быть произвольным полем (если не оговорено противное). Мы сопоставим каждой алгебре Ли L над $\mathbb{F}$ ассоциативную алгебру с единицей (вообще говоря, бесконечномерную), которую L порождает настолько свободно, насколько это возможно для сохранения соотношений коммутирования в L. Эта *универсальная обертывающая алгебра* служит основным орудием теории представлений.

Пока забудем всю специальную теорию полупростых алгебр Ли.

Вначале введем ряд алгебр, определяемых универсальными свойствами. Фиксируем конечномерное векторное пространство V над $\mathbb{F}$. Пусть

$$T^0V = \mathbb{F}, \quad T^1V = V, \quad T^2V = V \otimes V, \ldots, T^m = V \otimes \cdots \otimes V.$$

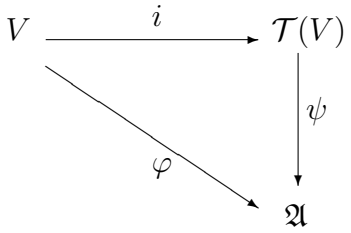
Положим

$$\mathcal{T}(V) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i V$$

и введем ассоциативное произведение, которое определено на однородных образующих пространства $\mathcal{I}(V)$ очевидным правилом

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \in T^{k+m}V.$$

Тогда $\mathcal{T}(V)$ превращается в ассоциативную алгебру с единицей, которую порождает (вместе с единицей) произвольный базис в V. Назовем ее *тензорной алгеброй* на V. Она является универсальной ассоциативной алгеброй с n образующими ($n = \dim V$) в следующем смысле: для каждого $\mathbb{F}$-линейного отображения $\varphi : V \to \mathfrak{A}$ (где $\mathfrak{A}$ — ассоциативная алгебра с единицей над $\mathbb{F}$) существует такой единственный гомоморфизм $\mathbb{F}$-алгебр $\psi : \mathcal{T}(V) \to \mathfrak{A}$, что $\psi(1) = 1$ и следующая диаграмма коммутативна (i — включение V в $\mathcal{T}(V)$):



3 Лекция 3. Универсальная обертывающая алгебра, формулировка теоремы ПБВ и следствия из нее

3.1 Градуировка и фильтрация

Определение 6. Пусть A — алгебра над полем $\mathbb{F}$, G — полугруппа (чаще всего $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{N}$). Алгебра A называется *G-градуированной*, если A разлагается в прямую сумму $\mathbb{F}$-подпространств A_g:

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g,$$

причем

$$A_g A_h \subset A_{gh} \text{ для всех } g, h \in G.$$

Элемент $a \in A_g$ называется *однородным степени g*.

Заметим, что введенная нами тензорная алгебра $\mathcal{T}(V)$ является градуированной (неотрицательными целыми числами).

Говорят, что на алгебре A задана *фильтрация*, если она есть объединение вложенных подпространств

$$A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i, \quad A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots,$$

при этом

$$A_m A_n \subseteq A_{m+n}.$$

3.2 Тензорные и симметрические алгебры, продолжение

Пусть теперь I — двухсторонний идеал в тензорной алгебре $\mathcal{T}(V)$, порожденный всеми элементами вида

$$x \otimes y - y \otimes x, \qquad x, y \in V.$$

Назовем

$$\mathcal{S}(V) := \mathcal{T}(V)/I$$

симметрической алгеброй на V; каноническое отображение обозначим через

$$\sigma : \mathcal{T}(V) \to \mathcal{S}(V).$$

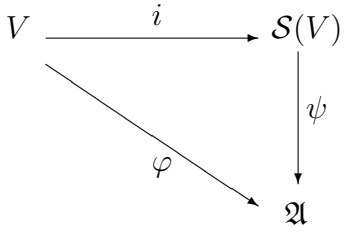
Заметим, что образующие идеала I лежат в T^2V; отсюда очевидно, что

$$I = (I \cap T^2V) \oplus (I \cap T^3) \oplus \dots$$

Следовательно, отображение σ инъективно на $T^0V = \mathbb{F}$, $T^1V = V$ (что позволяет отождествить V с подпространством в $\mathcal{S}(V)$), и $\mathcal{S}(V)$ наследует прямое разложение (*градуировку*) из $\mathcal{T}(V)$:

$$\mathcal{S}(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i V.$$

Цель факторизации по I именно в том, чтобы заставить элементы из V коммутировать: в результате алгебра $\mathcal{S}(V)$ оказывается универсальной (в определенном в конце прошлой лекции смысле) по отношению к линейным отображениям из V в коммутативные ассоциативные $\mathbb{F}$-алгебры с единицей:



Если при этом $(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольный базис в V, то алгебра $\mathcal{S}(V)$ канонически изоморфна алгебре многочленов от n переменных над $\mathbb{F}$ с базисом, состоящим из единицы и всех мономов $x_{i_1} \ldots x_{i_t}$, $t \leqslant 1$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_t \leqslant n$.

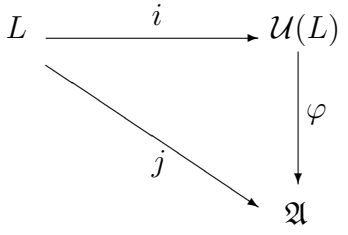
Аналогичные построения выполнимы даже для бесконечномерного пространства V.

3.3 Построение алгебры $\mathcal{U}(L)$

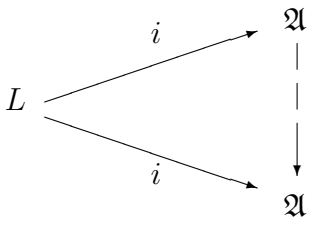
Вначале дадим абстрактное определение для случая произвольной алгебры Ли L (которая может быть и бесконечномерной, в противоположность нашему обычному соглашению). *Универсальная обертывающая алгебра* для L — это пара $(\mathcal{U}, i)$, где $\mathcal{U}$ — ассоциативная алгебра с единицей над $\mathbb{F}$, а $i : L \to \mathcal{U}$ — линейное отображение, удовлетворяющее условию

$$i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x) \qquad (*)$$

при $x, y \in L$, причем выполнено следующее: для любой ассоциативной алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей и любого линейного отображения $j : L \to \mathfrak{A}$, удовлетворяющего условию $(*)$, существует такой единственный гомоморфизм алгебр с единицей $\varphi : \mathcal{U} \to \mathfrak{A}$, что $\varphi \circ i = j$:



Легко доказывается *единственность* такой пары $(\mathcal{U}, j)$. Если другая пара $(\mathcal{B}, i')$ удовлетворяет тем же условиям, то имеются гомоморфизмы $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{B}$, $\psi : \mathcal{B} \to \mathcal{U}$. В силу определения существует единственное отображение μ из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}$ (показанное штрихами), которое делает диаграмму коммутативной:



Но для этого годится и $1_{\mathcal{U}}$, и $\psi \circ \varphi$, поэтому $\psi \circ \varphi = 1_{\mathcal{U}}$. Аналогично $\varphi \circ \psi = 1_{\mathcal{B}}$.

Нетрудно установить и существование нужной пары $(\mathcal{U}, i)$. Пусть $\mathcal{T}(L)$ — тензорная алгебра над L, а J — двусторонний идеал в $\mathcal{T}(L)$, порожденный всеми элементами вида

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \qquad x, y \in L.$$

Положим

$$\mathcal{U}(L) := \mathcal{T}(L)/J,$$

и пусть

$$\pi : \mathcal{T}(L) \to \mathcal{U}(L)$$

— канонический гомоморфизм. Заметим, что

$$J \subset \bigoplus_{i>0} T^i L,$$

поэтому π изоморфно отображает $T^0 L = \mathbb{F}$ в $\mathcal{U}(L)$ (как следствие, $\mathcal{U}(L)$ во всяком случае содержит скаляры). Совсем не очевидно, что π отображает $T^1 L = L$ в $\mathcal{U}(L)$ изоморфно; мы докажем это позже.

Как бы то ни было, мы утверждаем, что $(\mathcal{U}, i)$ — универсальная обертывающая алгебра для L, где $i : L \to \mathcal{U}(L)$ — ограничение отображения π на L.

Действительно, пусть отображение $j : L \to \mathfrak{A}$ таково, как в определении. В силу универсального свойства алгебры $\mathcal{T}(L)$ существует гомоморфизм алгебр $\varphi' : \mathcal{T}(L) \to \mathfrak{A}$, который продолжает j и отображает 1 в 1. Поскольку j обладает свойством $(*)$, все элементы вида $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ лежат в $\ker \varphi'$, поэтому φ' индуцирует такой гомоморфизм $\varphi : \mathcal{U}(L) \to \mathfrak{A}$, что $\varphi \circ i = j$. Его единственность очевидна, поскольку 1 и $i(L)$ вместе порождают $\mathcal{U}(L)$.

Пример 1. Пусть алгебра L абелева. Тогда упомянутый идеал J порождается элементами вида $x \otimes y - y \otimes x$ и потому совпадает с идеалом I, описанным выше. Это означает, что $\mathcal{U}(L)$ совпадает с симметрической алгеброй $\mathcal{S}(L)$.

3.4 Теорема Пуанкаре–Биргкофа–Витта

До сих пор мы узнали очень мало о строении алгебры $\mathcal{U}(L)$, а именно, что она содержит скаляры. Для краткости положим $\mathcal{T} = \mathcal{T}(L)$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(L)$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(L)$; аналогично будем писать T^m, S^m.

Определим фильтрацию на $\mathcal{T}$, положив $T_m = T^0 \oplus T^1 \oplus \cdots \oplus T^m$, и пусть $U_m = \pi(T_m)$, $U_{-1} = 0$. Ясно, что $U_m U_p \subset U_{m+p}$, $U_m \subset U_{m+1}$. Положим $G^m = U_m / U_{m-1}$ в смысле

векторных пространств; тогда умножение в $\mathcal{U}$ определяет билинейное отображение $G^m \times G^p \to G^{m+p}$. Оно очевидным образом продолжается до билинейного отображения

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}, \qquad \mathcal{G} = \bigoplus_{m=0}^{\infty} G^m,$$

превращая $\mathcal{G}$ в градуированную ассоциативную алгебру с единицей.

Так как π отображает T^m в U_m, определена композиция линейных отображений

$$\varphi_m : T^m \to U_m \to G^m = U_m/U_{m-1}.$$

Она сюръективна, поскольку

$$\pi(T_m - T_{m-1}) = U_m - U_{m-1}.$$

Как следствие, отображения φ_m вместе определяют сюръективное линейное отображение $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{G}$ (переводящее 1 в 1).

Лемма 1. *Отображение $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{G}$ является гомоморфизмом алгебр. При этом $\varphi(I) = 0$, так что φ индуцирует гомоморфизм ω алгебры $\mathcal{S} = \mathcal{T}/I$ на $\mathcal{G}$.*

Доказательство. Пусть $x \in T^m$, $y \in T^p$ — однородные тензоры. По определению произведения в $\mathcal{G}$ имеем $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, поэтому отображение φ мультипликативно на $\mathcal{T}$. Пусть

$$x \otimes y - y \otimes x, \qquad x, y \in L,$$

— типичный образующий в I. Тогда

$$\pi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_2$$

по определению. С другой стороны,

$$\pi(x \otimes y - y \otimes x) = \pi([x, y]) \in U_1,$$

а значит,

$$\varphi(x \otimes y - y \otimes x) \in U_1/U_1 = 0.$$

Как следствие, $I \subset \ker \varphi$. $\square$

Основной результат об алгебре $\mathcal{U}(L)$ заключается в следующей теореме; она (а также ее следствие 3) называется *теоремой Пуанкаре–Биркгофа–Витта* (или теоремой ПБВ).

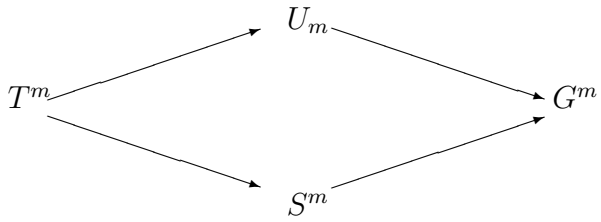
Доказательство самой теоремы мы дадим уже после доказательств следствий.

Теорема 14. *Гомоморфизм $\omega : \mathcal{S} \to \mathcal{G}$ является изоморфизмом.*

3.5 Следствия из теоремы ПБВ

Следствие 4. *Пусть W — некоторое подпространство в T^m, причем каноническое отображение $T^n \to S^m$ индуцирует изоморфизм между W и S^m. Тогда $\pi(W)$ является дополнением для U_{m-1} в U_m.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму (все отображения — канонические)



В силу предыдущей леммы (и определений) она коммутативна. Так как отображение $\omega : \mathcal{S} \to \mathcal{G}$ является изоморфизмом (согласно теореме), нижняя последовательность стрелок отображает $W \subset T^m$ изоморфно на G^m. Переходя к верхней последовательности, получаем искомый результат. □

Следствие 5. *Каноническое отображение $L \to \mathcal{U}(L)$ инъективно (так что L можно отождествить с $i(L)$).*

Доказательство. Это частный случай $W = T^1(= L)$ предыдущего следствия. □

Мы допустим, что алгебра L может быть бесконечномерной. Практически для наших целей достаточно рассматривать алгебры со счетным базисом.

Следствие 6. *Пусть $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ — любой упорядоченный базис в L. Тогда элементы*

$$x_{i(1)} \dots x_{i(m)} = \pi(x_{i(1)} \otimes \dots \otimes x_{i(m)}), \quad m \in \mathbb{Z}^+, \quad i(1) \leqslant \dots \leqslant i(m),$$

вместе с единицей составляют базис в $\mathcal{U}(L)$.

Доказательство. Пусть W — подпространство в T^m, натянутое на все элементы вида

$$x_{i(1)} \oplus \dots \oplus x_{i(m)}, \quad i(1) \leqslant \dots \leqslant i(m).$$

Очевидно, что W изоморфно отображается на S^m, и ввиду первого следствия подпространство $\pi(W)$ является дополнением к U_{m-1} в U_m. □

Базис построенного вида в $\mathcal{U}(L)$ будем кратко называть ПБВ-базисом.

Следствие 7. *Пусть H — подалгебра в L, и ее упорядоченный базис $(h_1, h_2, \dots)$ содержится в упорядоченном базисе $(h_1, \dots, x_1, \dots)$ алгебры L. Тогда гомоморфизм $\mathcal{U}(H) \to \mathcal{U}(L)$, индуцированный вложением $H \to L \to \mathcal{U}(L)$, сам является вложением, причем $\mathcal{U}(L)$ является свободным $\mathcal{U}(H)$-модулем со свободным базисом, состоящим из всех элементов вида*

$$x_{i(1)} \dots x_{i(m)}, \quad i(1) \leqslant i(2) \leqslant \dots \leqslant i(m),$$

вместе с 1.

Доказательство. Очевидно из предыдущего следствия. □

Задачи.

1. Докажите, что если $\dim L < \infty$, то $\mathcal{U}(L)$ не имеет делителей нуля.

2. Пусть L — двумерная неабелева алгебра Ли, у которой $[x, y] = x$. Получите прямое доказательство инъективности отображения $i : L \to \mathcal{U}(L)$, т. е.покажите, что $J \cap L = 0$.

3. Какая универсальная обертывающая алгебра у одномерной алгебры Ли?

4 Лекция 4. Доказательство теоремы ПБВ

Фиксируем в L упорядоченный базис $(x_\lambda \mid \lambda \in \Omega)$. Это позволяет отождествить $\mathcal{S}$ с алгеброй многочленов от переменных z_λ $(\lambda \in \Omega)$. Для каждой последовательности индексов $\Sigma = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ (m называется ее *длиной*) положим $z_\Sigma = z_{\lambda_1} \dots z_{\lambda_m} \in S^m$ и $x_\Sigma = x_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes x_{\lambda_m} \in T^m$.

Назовем последовательность Σ *возрастающей*, если $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_m$ при данном упорядочении в Ω; будем считать, что пустая последовательность возрастающая, причем $z_\emptyset = 1$. Тогда множество $\{z_\Sigma \mid \Sigma \text{ возрастает}\}$ является базисом в $\mathcal{S}$.

Градуировке (прямому разложению $\mathcal{S} = \oplus S^m$ соответствует фильтрация $S_m = S^0 \oplus \dots \oplus S^m$. В последующих леммах запись $\lambda \leqslant \Sigma$ означает, что $\lambda \leqslant \mu$ для всех $\mu \in \Sigma$.

Лемма 2. *Для каждого $m \in \mathbb{Z}^+$ существует единственное такое линейное отображение $f_m : L \oplus S_m \to \mathcal{S}$, что*
(a_m) $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) = z_\lambda z_\Sigma$ *при* $\lambda \leqslant \Sigma$, $z_\Sigma \in S_m$;
(b_m) $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) - z_\lambda z_\Sigma \in S_k$ *при* $k \leqslant m$, $z_\Sigma \in S_k$;
(c_m) $f_m(x_\lambda \otimes f_m(x_\mu \otimes z_T)) = f_m(x_\mu \otimes f_m(x_\lambda \otimes z_T)) + f_m([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_T)$ *при всех* $z_T \in S_{m-1}$.
При этом ограничение отображения f_m на $L \otimes S_{m-1}$ совпадает с f_{m-1}.

Доказательство. Заметим, что если доказано условие (b_m), то все слагаемые в условии (c_m) корректно определены. Заметим также, что ограничение отображения f_m на $L \otimes S_{m-1}$ автоматически удовлетворяют условиям (a_{m-1}), (b_{m-1}), (c_{m-1}) и в силу утверждаемой единственности должно совпадать с f_{m-1}. Существование и единственность отображения f_m мы докажем индукцией по m. При $m = 0$ имеем $z_\Sigma = 1$; поэтому можно положить $f_0(x_\lambda \otimes 1) = z_\lambda$ (и продолжить линейно на $L \otimes S_0$). Ясно, что условия (a_0), (b_0), (c_0) выполнены, причем из (a_0) видно, что наш выбор — единственно возможный.

Предположив существование единственного отображения f_{m-1}, удовлетворяющего условиям (a_{m-1}), (b_{m-1}), (c_{m-1}), покажем, как продолжить f_{m-1} до f_m. Для этого достаточно определить $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma)$ для возрастающих последовательностей Σ длины m.

В случае $\lambda \leqslant \Sigma$ условие (a_m) будет выполнено, лишь если мы положим

$$f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma) = z_\lambda z_\Sigma.$$

Если неравенство $\lambda \leqslant \Sigma$ не выполнено, то первый индекс μ в Σ строго меньше чем λ, поэтому $\Sigma = (\mu, T)$, где, разумеется, $\mu \leqslant T$ и T имеет длину $m-1$. Ввиду условия (a_{m-1}) мы имеем

$$z_\Sigma = x_\mu z_T = f_{m-1}(x_\mu \otimes z_T).$$

Поскольку $\mu \leqslant T$, то

$$f_m(x_\mu \otimes z_T) = z_\mu z_T$$

уже определено, так что левая часть соотношения (c_m) принимает вид $f_m(x_\lambda \otimes z_\Sigma)$. С другой стороны, из (b_{m-1}) следует, что

$$f_m(x_\lambda \otimes z_T) = f_{m-1}(x_\lambda \otimes z_T) = z_\lambda z_T \mod S_{m-1}.$$

Это означает, что правая часть соотношения (c_m) уже определена:

$$z_\mu z_\lambda z_T + f_{m-1}(x_\mu \otimes y) + f_{m-1}([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_T), \qquad y \in S_{m-1}.$$

Предыдущие замечания показывают, что определить отображение f_m можно, и только одним способом. При этом условия (a_m) и (b_m) очевидным образом выполняются, так же как и (c_m) при $\mu < \lambda$, $\mu \leqslant T$. Но $[x_\mu, x_\lambda] = -[x_\lambda, x_\mu]$, так что условие (c_m) выполнено и при $\lambda < \mu$, $\lambda \leqslant T$. Оно справедливо и при $\lambda = \mu$. Остается рассмотреть случай, когда условия $\lambda \leqslant T$ и $\mu \leqslant T$ не выполнены. Положим $T = (\nu, \Psi)$, где $\nu \leqslant \Psi$, $\nu < \lambda$, $\nu < \mu$. Для удобства обозначений будем писать xz вместо $f_m(x \otimes z)$ при $x \in L$, $z \in S_m$.

Из предположения индукции следует, что

$$x_\mu z_T = x_\mu(x_\nu z_\Psi) = x_\nu(x_\mu z_\Psi) + [x_\mu, x_\nu] z_\Psi,$$

и при этом

$$x_\mu z_\Psi = z_\mu z_\Psi + w \qquad (w \in S_{m-2})$$

ввиду условия (b_{m-2}). Так как $\nu \leqslant \Psi$ и $\nu < \mu$, мы получим, что (c_m) можно применить уже к $x_\lambda(x_\nu(z_\mu z_\Psi))$. По предположению индукции можно также применить (c_m) к $x_\lambda(x_\nu w)$, а тогда и к $x_\lambda(x_\nu(x_\mu z_\Psi))$. В итоге

$$x_\lambda(x_\mu z_T) = x_\nu(x_\lambda(x_\mu z_\Psi)) + [x_\lambda, x_\nu](x_\mu z_\Psi) + [x_\mu, x_\nu](x_\lambda z_\Psi) + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] z_\Psi. \qquad (*)$$

Вспомним, что λ и μ в этом рассуждении не менялись местами. Если переставить их в $(*)$ и вычесть полученное уравнение из исходного, то мы получим (с помощью тождества Якоби):

$$\begin{aligned} x_\lambda(x_\mu z_T) - x_\mu(x_\lambda z_T) &= x_\nu(x_\lambda(x_\mu z_\Psi)) - x_\nu(x_\mu(x_\lambda z_\Psi)) + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] z_\Psi - \\ &- [x_\mu, [x_\lambda, x_\nu]] z_\Psi = x_\nu([x_\lambda, x_\mu] z_\Psi) + [x_\lambda, [x_\mu, x\nu]] z_\Psi + [x_\mu, [x_\nu, x_\lambda]] z_\Psi = \\ &= [x_\lambda, x_\mu](x_\nu z_\Psi) + ([x_\nu, [x_\lambda, x_\mu]] + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] + [x_\mu, [x_\nu, x_\lambda]]) z_\Psi = [x_\lambda, x_\mu] z_T. \end{aligned}$$

Этим доказано соотношение (c_m), а тогда и вся лемма. $\square$

Лемма 3. *Существует представление $\rho : L \to \mathfrak{gl}(\mathcal{S})$, удовлетворяющее условиям*
(a) $\rho(x_\lambda) z_\Sigma = z_\lambda z_\Sigma$ *при* $\lambda \leqslant \Sigma$;
(b) $\rho(x_\lambda) z_\Sigma = z_\lambda z_\Sigma \mod S_m$, *если* Σ *имеет длину* m.

Доказательство. Согласно предыдущей лемме найдется линейное отображение $f : L \otimes \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, удовлетворяющее условиям (a_m), (b_m), (c_m) при всех m (поскольку f_m ввиду единственности совпадает с f_{m-1} на $L \otimes S_{m-1}$).

Другими словами, $\mathcal{S}$ превращается в L-модуль (условие (c_m)), который в силу условий (a_m) и (b_m) имеет представление ρ со свойствами (a) и (b). $\square$

Лемма 4. *Пусть $t \in T_m \cap J = \ker \pi$, где $\pi : \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ — каноническое отображение. Тогда однородная компонента t_m степени m в t лежит в ядре I канонического отображения $\mathcal{T} \to \mathcal{S}$.*

Доказательство. Запишем t_m как линейную комбинацию базисных элементов $x_{\Sigma(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, где каждая последовательность $\Sigma(i)$ имеет длину m. Гомоморфизм алгебр Ли $\rho : L \to \mathfrak{gl}(\mathcal{S})$, построенный в предыдущей лемме, в силу универсального свойства алгебры $\mathcal{U}$,

продолжается до гомоморфизма алгебр (который мы также обозначим ρ) $\mathcal{T} \to \operatorname{End}\mathcal{S}$, причем $J \subset \ker\rho$. Поэтому $\rho(t) = 0$. Но единица под действием гомоморфизма $\rho(t)$ отображается в многочлен, старший член которого ввиду предыдущей леммы является линейной комбинацией элементов $z_{\Sigma(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Значит, эта линейная комбинация равна нулю в $\mathcal{S}$, и $t_m \in I$, что и требовалось. $\square$

Доказательство теоремы ПБВ. Пусть $t \in T^m$, $\pi : \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ — каноническое отображение. Нужно показать, что из условия $\pi(t) \in U_{m-1}$ вытекает, что $t \in I$. Но если $t \in T^m$, $\pi(t) \in U_{m-1}$, то $\pi(t) = \pi(t')$ для некоторого $t' \in T_{m-1}$; следовательно, $t - t;' inJ$. Применим предыдущую лемму к тензору $t - t'' inT_m \cap J$: однородная компонента степени m равна t, и мы получаем $t \in I$. $\square$

Задачи.

1. Постройте в явном виде f_2 и f_3 для двумерной неабелевой алгебры Ли.

2. Пусть дан базис $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ в Φ. Положим $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$ (все k_i неотрицательны или все k_i неположительны). Докажите, что либо вектор λ кратен корню (возможно, равен нулю), либо существует такой элемент $\sigma \in W$, что $\sigma\lambda = \sum\limits_{i=1}^{l} k_i'\alpha_i$ где среди коэффициентов k_i' имеются и положительные, и отрицательные.

Набросок доказательства: если вектор λ не кратен корню, то ортогональная ему гиперплоскость P_λ не содержится в $\bigcup\limits_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$. Возьмем $\mu \in P_\lambda \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$. Затем найдем $\sigma \in W$, для которого все значения $(\alpha_i, \sigma\mu)$ положительны. Тогда

$$0 = (\lambda, \mu) = (\sigma\lambda, \sigma\mu) = \sum k_i(\alpha_i, \sigma\mu).$$

5 Образующие и соотношения

5.1 Свободные алгебры Ли.

Скорее всего, вам знаком способ задания групп образующими и соотношениями. Скоро мы применим аналогичный метод для построения полупростых алгебр Ли. Здесь потребуется понятие свободной алгебры Ли.

Пусть L — алгебра Ли над $\mathbb{F}$, порожденная множеством X. Скажем, что алгебра L *свободна над* X, если любое отображение φ множества X в алгебру Ли M продолжается единственным образом до гомоморфизма $\psi : L \to M$. Легко проверить единственность такой алгебры (с точностью до единственного изоморфизма). Что касается существования, то возьмем векторное пространство V с базисом X, построим тензорную алгебру $\mathcal{T}(V)$ (рассматриваемую как алгебра Ли относительно коммутатора), и пусть L — подалгебра Ли в $\mathcal{T}(V)$, натянутая на X. Если дано произвольное отображение $\varphi : X \to M$, то сначала продолжим его до линейного отображения $V \to M \subset \mathcal{U}(M)$, затем (канонически) до гомоморфизма ассоциативных алгебр $\mathcal{T}(V) \to \mathcal{U}(M)$, который является и гомоморфизмом алгебр Ли (его ограничение на L будет искомым гомоморфизмом $\psi : L \to M$, поскольку ψ отображает порождающее множество X в M).

Заметим, что если алгебра L свободна над множеством X, то векторное пространство V можно превратить в L-модуль, просто сопоставив каждому элементу $x \in X$ элемент алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ и канонически продолжив это отображение.

Наконец, если алгебра L свободна над X, а R — идеал в L, порожденный элементами f_j (где j пробегает некоторое множество индексов), то назовем L/R алгеброй Ли с образующими x_i и определяющими соотношениями $f_j = 0$, где x_i — образы в L/R элементов из X.

Теперь мы можем продолжить изучение полупростой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль. Наша цель — получить представление алгебры L образующими и соотношениями, зависящими только от системы корней Φ, тем самым доказав и существование, и единственность полупростой алгебры Ли с данной системой корней. В этой лекции алгебры Ли могут быть и бесконечномерными.

5.2 Определяющие соотношения в L.

Пусть L — полупростая алгебра Ли, H — ее картановская подалгебра, Φ — соответствующая система корней, $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ — ее фиксированный базис. Напомним, что

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \alpha_i(h_i).$$

Фиксируем такое множество образующих $x_i \in L_{\alpha_i}$, $y_i \in L_{-\alpha_i}$, что $[x_i, y_i] = h_i$.

Предложение 8. *Во введенных обозначениях алгебра L порождается множеством образующих $\{x_i, y_i, h_i \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$, которые удовлетворяют по крайней мере следующим соотношениям:*

(S1) $[h_i, h_j] = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$;

(S2) $[x_i, y_i] = h_i$, $[x_i, y_j] = 0$ *при* $i \neq j$;
(S3) $[h_i, x_j] = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle x_j$, $[h_i, y_j] = -\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle y_j$;
(S_{ij}^+) $(\operatorname{ad} x_i)^{-\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle + 1}(x_j) = 0$, $i \neq j$;
(S_{ij}^-) $(\operatorname{ad} y_i)^{-\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle + 1}(y_j) = 0$, $i \neq j$.

Доказательство. Мы уже доказывали, что L порождается элементами x_i и y_i, так что про порождение все ясно.

Соотношение (S1) очевидно, так же как и (S2), поскольку $\alpha_i - \alpha_j \notin \Phi$ при $i \neq j$. Соотношение (S3) очевидно. Рассмотрим теперь $(S_{ij}^+$; для $(S_{ij}^-$ рассуждения аналогичны. Так как $i \neq j$, то вектор $\alpha_j - \alpha_i$ не является корнем и α_i-серия, порожденная корнем α_j, состоит из элементов

$$\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \ldots, \alpha_j + q\alpha_i, \text{ где } -q = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle.$$

Поскольку $\operatorname{ad} x_i$ последовательно отображает x_j в корневые подпространства для $\alpha_j + \alpha_i, \alpha_j + 2\alpha_i, \ldots$, мы получаем (S_{ij}^+). $\square$

Отметим, что соотношения из этого предложения содержат константы, зависящие только от системы корней. Серр доказал, что они составляют полную систему определяющих соотношений для L (мы докажем эту теорему).

В качестве первого шага к доказательству теоремы Серра мы изучим алгебру Ли (возможно, бесконечномерную), которая определяется лишь соотношениями (S1)–(S3).

5.3 Следствия из соотношений (S1)–(S3)

Фиксируем систему корней Φ с базисом $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Числа Картана $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ будем кратко обозначать c_{ij}.

Возьмем свободную алгебру Ли $\widehat{L}$ с $3l$ образующими $\{\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{h}_i \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$. Пусть $\hat{K}$ — идеал в $\hat{L}$, порожденный следующими элементами:

$$[\hat{h}_i, \hat{h}_j],\ [\hat{x}_i \hat{y}_j] - \delta_{ij} \hat{h}_i,\ [\hat{h}_i, \hat{x}_j] - c_{ij} \hat{x}_j,\ [\hat{h}_i, \hat{y}_j] + c_{ij} \hat{y}_j.$$

Положим $L_0 = \hat{L}/\hat{K}$, и пусть образующие переходят при факторизации в элементы x_i, y_i, h_i.

Проблема в том, что алгебра L_0 определена чересчур абстрактно (из сказанного не видно, например, что она не тривиальна). Чтобы изучить L_0 более конкретно, попробуем построить для нее подходящее представление. Для этого мы применим прообраз конструкции, которая сыграет скоро важнейшую роль.

Как было уже отмечено, модуль над алгеброй $\hat{L}$ строится без труда: нужно лишь сопоставить каждому из $3l$ ее образующих некоторое линейное преобразование.

Пусть V — тензорная алгебра (то есть свободная ассоциативная алгебра) над векторным пространством с базисом $(v_1, \ldots, v_l)$. Забудем об умножении и для простоты обозначений будем писать $v_{i_1} \ldots v_{i_t}$ вместо $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_t}$. Эти тензоры (вместе с 1) образуют в V базис

над $\mathbb{F}$. Далее, определим следующие эндоморфизмы пространства V:

$$\begin{cases} \hat{h}_j \cdot 1 = 0, \\ \hat{h}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t} = -(c_{i_1 j} + \dots + c_{i_t j}) v_{i_1} \dots v_{i_t}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{y}_j \cdot 1 = v_j, \\ \hat{y}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t} = v_j v_{i_1} \dots v_{i_t}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{x}_j \cdot 1 = 0 = \hat{x}_j \cdot v_i, \\ \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t} = v_{i_1}(\hat{x}_j \cdot v_{i_2} \dots v_{i_t}) - \delta_{i_1 j}(c_{i_2 j} + \dots + c_{i_t j}) v_{i_2} \dots v_{i_t}. \end{cases}$$

Это действие продолжается (единственным образом) на всю алгебру $\hat{L}$ и дает ее представление $\hat{\varphi} : \hat{L} \to \mathfrak{gl}(V)$.

Предложение 9. *Пусть $\hat{K}_0 = \ker \hat{\varphi}$. Тогда $\hat{K} \subset \hat{K}_0$, то есть $\hat{\varphi}$ пропускается через L_0, тем самым превращая V в L_0-модуль.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что $\hat{h}_j$ действует на V диагонально (в выбранном базисе), так что $\hat{\varphi}(\hat{h}_i)$ и $\hat{\varphi}(\hat{h}_j)$ коммутируют, то есть $[\hat{h}_i, \hat{h}_j] \in \hat{K}_0$. С другой стороны, $\hat{\varphi}(\hat{y}_j)$ — это просто левое умножение на v_j. (Всю сложность вносит лишь $\hat{x}_j$.)

Положив в формулах для действия $j = i_1$, получаем

$$\hat{x}_i \cdot \hat{y}_j \cdot \hat{v}_{i_2} \dots v_{i_t} - \hat{y}_j \cdot \hat{x}_i \cdot v_{i_2} \dots v_{i_t} = -\delta_{ji}(c_{i_2 i} + \dots + c_{i_t i}) v_{i_2} \dots v_{i_t} = \delta_{ji} \hat{h}_i \cdot v_{i_2} \dots v_{i_t}.$$

Кроме того,

$$(\hat{x}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \hat{x}_i) \cdot 1 = 0 = \delta_{ij} \hat{h}_i \cdot 1.$$

Следовательно,

$$[\hat{x}_i, \hat{y}_j] - \delta_{ij} \hat{h}_i \in \hat{K}_0.$$

Далее,

$$(\hat{h}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \hat{h}_i) \cdot 1 = \hat{h}_i \cdot v_j = -c_{ji} v_j = -c_{ji} \hat{y}_j \cdot 1.$$

Аналогично,

$$(\hat{h}_i \hat{y}_j - \hat{y}_j \hat{h}_i) \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t} = \hat{h}_i \cdot v_j v_{i_1} \dots v_{i_t} + (c_{i_1 i} + \dots + c_{i_t i}) v_j v_{i_1} \dots v_{i_t} = -c_{ji} \hat{y}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t}.$$

Следовательно,

$$[\hat{h}_i, \hat{y}_j] + c_{ji} \hat{y}_j \in \hat{K}_0.$$

Переходя к последнему шагу, предварительно заметим, что

$$\hat{h}_i \cdot \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t} = -(c_{i_1 i} + \dots + c_{i_t i} - c_{ji}) \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t}. \qquad (*)$$

Это доказывается индукцией по t. При $t = 0$ мы считаем, что $v_{i_1} \dots v_{i_t} = 1$, и обе части обращаются в нуль. Предположение индукции означает, что $\hat{x}_j \cdot v_{i_2} \dots v_{i_t}$ является собственным вектором для $\hat{h}_i$ с собственным значением $-(c_{i_2 i} + \dots + c_{i_t i} - c_{ji})$. Ясно, что при умножении этого вектора слева на v_i мы получим другой собственный вектор для $\hat{h}_i$,

с собственным значением $-(c_{i_1 i} + \dots c_{i_t i} - c_{ji})$. Отсюда и из определений легко следует соотношение $(*)$.

С помощью $(*)$ получаем

$$(\hat{h}_i \hat{x}_j - \hat{x}_j \hat{h}_i) \cdot 1 = 0,$$

$$(\hat{h}_i \hat{x}_j - \hat{x}_j \hat{h}_i) \cdot v_{i_1} \dots v_{i_y} = (-(c_{i_1 i} + \dots c_{i_t i} - c_{ji}) + (c_{i_1 i} + \dots c_{i_t i}))\hat{x}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t} = c_{ji} \hat{x}_j \cdot v_{i_1} \dots v_{i_t}.$$

Таким образом,

$$[\hat{h}_i, \hat{x}_j] - c_{ji} \hat{x}_j \in \hat{K}_0.$$

В итоге $\hat{K} \subset \hat{K}_0$. $\square$

Задачи.

1. Пусть L — свободная алгебра Ли над множеством X. Докажите, что алгебра $\mathcal{U}(L)$ изоморфна тензорной алгебре на векторном пространстве с базисом X.

2. Проверьте единственность (с точностью до единственного изоморфизма) свободной алгебры Ли над множеством X.

3. Опишите свободную алгебру Ли над множеством $X = \{x\}$.

6 Лекция 6. Теорема Серра

6.1 Теорема про алгебру L_0

Теорема 15. *Пусть Φ — система корней с базисом $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, а L_0 — алгебра Ли с образующими $\{x_i, y_i h_i \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$ и соотношениями $(S1)$–$(S3)$. Тогда элементы h_i составляют базис l-мерной абелевой подалгебры $H \subset L_0$, причем $L_0 = Y + H + X$ (прямая сумма подпространств), гд Y (соответственно X) — подалгебра в L_0, порожденная элементами y_i (соответственно x_i).*

Доказательство. Разобьем доказательство на шаги, используя построенное выше представление $\varphi : L_0 \to \mathfrak{gl}(V)$: если x — образ в L_0 элемента $\hat{x} \in L$, то $\varphi(x) = \hat{\varphi}(\hat{x})$.

Шаг 1. $\sum \mathbb{F}\hat{h}_j \cap \ker \hat{\varphi} = 0$.

Если

$$\hat{h} = \sum_{j=1}^{l} a_j \hat{h}_j \text{ и } \hat{\varphi}(\hat{h}) = 0,$$

то и собственные значения — $\sum\limits_j a_j c_{ij}$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$ этого отображения равны 0. Но матрица Картана (c_{ij}) системы Φ невырожденна, поэтому все a_j равны нулю, т. е. $\hat{h} = 0$. $\square$

Шаг 2. *Каноническое отображение $\hat{L} \to L_0$ является изоморфизмом между $\sum \mathbb{F}\hat{h}_j$ и $\sum \mathbb{F}h_j$.*

Это непосредственно вытекает из шага 1. $\square$

Шаг 3. *Подпространство $\sum \mathbb{F}\hat{x}_j + \sum \mathbb{F}\hat{y}_j + \sum \mathbb{F}\hat{h}_j$ в $\hat{L}$ изоморфно отображается в L_0.*

Фиксируем i. Ввиду соотношений $(S1)$–$(S3)$ мы имеем

$$[x_i, y_i] = h_i, \quad [h_i, x_i] = 2x_i, \quad [h_i, y_i] = -2y_i;$$

поэтому $\mathbb{F}x_i + \mathbb{F}y_i + \mathbb{F}h_i$ — гомоморфный образ алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Но последняя проста, и при этом $h_i \neq 0$ (шаг 2). Значит, алгебра $\mathbb{F}x_i + \mathbb{F}y_i + \mathbb{F}h_i$ изоморфна алгебре $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$.

Рассмотрим некоторый элемент

$$A = \sum a_i x_i + \sum b_i y_i + \sum c_i h_i,$$

пусть он равен нулю.

Прокоммутируем его с h_k:

$$0 = A_1 = [h_k, A] = \sum a_i c_{ik} x_i - \sum b_i c_{ik} y_i.$$

Теперь прокоммутируем A_1 с x_k:

$$0 = A_2 = [x_k, A_1] = \sum a_i c_{ik} [x_k, x_i] - b_k c_{kk} [x_k, y_k] = \sum_{i \neq k} a_i c_{ik} [x_k, x_i] - 2 b_k h_k.$$

Прокоммутируем A_2 с y_k:

$$0 = A_3 = [y_k, A_2] = \sum_{i \neq k} a_i c_{ik} [y_k, [x_k, x_i]] - 2b_k [y_k, h_k] =$$
$$= \sum_{i \neq k} a_i c_{ik} [[y_k, x_k], x_i] + \sum_{i \neq k} a_i c_{ik} [[x_i, y_k], x_k] - 4b_k y_k = \sum_{i \neq k} a_i c_{ik} [h_k, x_i] - 4b_k y_k =$$
$$= \sum_{i \neq k} a_i c_{ik}^2 x_i - 4b_k y_k.$$

Таким образом, мы видим, что собственный вектор для операторов $\operatorname{ad} h_m$ с собственными значениями $-c_{km}$ совпадает с линейной комбинацией нескольких собственных векторов этих же операторов с собственными значениями c_{im}, что невозможно. То есть вся эта линейная комбинация равна нулю, то есть $b_k = 0$. Так как k было выбрано произвольно, то все коэффициенты $b_i = 0$, аналогично для a_i, а значит и для c_i. □

Шаг 4. *Подпространство $H = \sum \mathbb{F} h_j$ является l-мерной абелевой подалгеброй в L_0.*

Это вытекает из шага 2 и соотношения $(S1)$. □

Шаг 5. *Если $[x_{i_1} \dots x_{i_t}]$ обозначает $[x_{i_1}, [x_{i_2}, \dots [x_{i_{t-1}}, x_{i_t}], \dots]]$, то*

$$[h_j, [x_{i_1} \dots x_{i_t}]] = (c_{i_1 j} + \dots + c_{i_t j}) [x_{i_1} \dots x_{i_t}],$$

и равенство сохраняется при замене x_i на y_i и c_{ij} на $-c_{ij}$.

При $t = 1$ это соотношение $(S3)$. Общий случай легко доказывается по индукции с помощью тождества Якоби (см. задачу 1). □

Шаг 6. *Если $t \geqslant 2$, то $[y_i, [x_{i_1} \dots x_{i_t}]] \in X$, и аналогично для Y.*

Ввиду соотношения $(S2)$ мы имеем $[y_j, x_i] = -\delta_{ij} h_i$, и случай $t = 2$ очевиден из $(S3)$ и тождества Якоби. Легко проводится и индукция по t (см. задачу 1). □

Шаг 7. *Подпространство $Y + H + X$ является подалгеброй в L_0 и потому совпадает с L_0.*

Это подалгебра ввиду шагов 4, 5 и 6. Но в ней содержится множество образующих для L_0, и потому $Y + H + X$ совпадает с L_0. □

Шаг 8. *Сумма $L_0 = Y + H + X$ прямая.*

Действительно, из шага 5 видно, как разложить L_0 в сумму собственных подпространств отображения $\operatorname{ad} H$; с учетом шагов 1 и 2 эта сумма прямая. □

Доказательство теоремы окончено. □

Разложение $L_0 = Y + H + X$ удобно описывать в терминах весов. При $\lambda \in H^*$ положим

$$(L_0)_\lambda = \{t \in L_0 \mid [h, t] = \lambda(h) t \text{ при всех } h \in H\}.$$

Из доказательства предыдущей теоремы видно, что $H = (L_0)_0$. При этом все ненулевые векторы λ с ненулевыми $(L_0)_\lambda$ имеют вид

$$\lambda = \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i \quad (k_i \in \mathbb{Z}),$$

где либо все k_i неотрицательны (в этом случае пишем $\lambda > 0$), либо все неположительны (пишем $\lambda < 0$). Тогда

$$X = \sum_{\lambda>0}(L_0)_\lambda \text{ и } Y = \sum_{\lambda<0}(L_0)_\lambda.$$

6.2 Теорема Серра

В предыдущем пункте мы изучили строение алгебры Ли L_0, определяющие соотношения которой сводятся к $(S1)$–$(S3)$. Теперь спросим, что произойдет, если наложить условия конечности (S_{ij}^+), (S_{ij}^-). Положим

$$x_{ij} = (\operatorname{ad} x_i)^{-c_{ji}+1}(x_j), \quad y_{ij} = (\operatorname{ad} y_i)^{-c_{ji}+1}(y_j) \qquad (i \neq j).$$

(Подразумеваются элементы из L_0.)

Лемма 5. *В алгебре L_0 выполнены равенства $\operatorname{ad} x_k(y_{ij}) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant l$, при любых $i \neq j$.*

Доказательство. *Случай* (a): $k \neq i$. Тогда $[x_k, y_i] = 0$ ввиду соотношения $(S2)$, так что $\operatorname{ad} x_k$ и $\operatorname{ad} y_i$ коммутируют. Следовательно,

$$\operatorname{ad} x_k(y_{ij}) = (\operatorname{ad} y_i)^{-c_{ij}+1} \operatorname{ad} x_k(y_i).$$

Если $k = j$, то этот элемент равен

$$(\operatorname{ad} y_i)^{-c_{ji}+1}(h_j).$$

Но ввиду $(S3)$ мы имеем $\operatorname{ad} y_i(h_j) = c_{ij}y_i$. Если этот элемент не равен нулю, то и c_{ji} не равно нулю (и отрицательно, поскольку $i \neq j$), но тогда $-c_{ji} + 1 \geqslant 2$. Как следствие,

$$(\operatorname{ad} y_i)^{-c_{ji}+1}(h_j) = 0.$$

Если же $k \neq j$, то $[x_k, y_j] = 0$ в соответствии с соотноошением $(S2)$, и мы получим тот же результат.

Случай (b): $k = i$. Из доказательства предыдущей теоремы мы знаем, что $S = \mathbb{F}x_i + \mathbb{F}y_i + \mathbb{F}h_i$ — подалгебра в L_0, изоморфная $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$. Поэтому можно сказать кое-что о присоединенном действии подалгебры S на L_0. Хотя размерность алгебры L_0 может оказаться бесконечной, все равно можно вспомнить разные рассуждения из теории представлений. В частности, поскольку $j \neq i$, мы заключаем, что $[x_i, y_j] = 0$, так что y_j — старший вектор для S веса $m = -c_{ji}$(поскольку $[h_i, y_j] = -c_{ji}y_j$). Нетрудная индукция по t показывает, что

$$\operatorname{ad} x_i(\operatorname{ad} y_i)^t(y_j) = t(m - t + 1)(\operatorname{ad} y_i)^{t-1}(y_j).$$

Поэтому при $t = -c_{ji} + 1$ правая часть обращается в ноль. □

Прежде чем формулировать теорему Серра, упомянем об одной полезной конструкции. Назовем эндоморфизм x бесконечномерного векторного пространства V *локально нильпотентным*, если каждый элемент из V аннулируется некоторой его степенью. В этом случае x нильпотентен на каждом конечномерном подпространстве $W \subset V$, так что можно определить $\exp(x|_W)$. Ясно, что $\exp(x|_W)$ и $\exp(x|_{W'})$ совпадают на $W \cap W'$, так что мы можем *сшить* все такие отображения, получив автоморфизм $\exp x$ пространства V.

Теорема 16 (Серр)**.** *Фиксируем систему корней Φ с базисом $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Пусть L — алгебра Ли, порожденная $3l$ элементами $\{x_i, y_i, h_l \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$, которые подчинены соотношениям $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$, (S_{ij}^+), (S_{ij}^-). Тогда L является конечномерной полупростой алгеброй с системой корней Φ, причем картановская подалгебра порождается элементами h_i.*

Разобьем доказательство на шаги, на этой лекции докажем первые пять из них;

Первые 5 шагов доказательства теоремы Серра.

По определению $L = L_0/K$, где алгебра L_0 такова, как выше, а K — идеал, порожденный элементами x_{ij}, y_{ij}, $i \neq j$. Ради простоты обозначений вначале мы будем работать в L_0. Пусть I (соответственно, J) — идеал в X (соответственно, в Y), порожденный элементами x_{ij} (соответственно, y_{ij}). Таким образом, K включает идеалы I, J.

Шаг 1. *Множества I и J являются идеалами в L_0.*

Достаточно рассмотреть J (случай I аналогичен). С одной стороны, y_{ij} — собственный вектор для $\operatorname{ad} h_k$, $1 \leqslant k \leqslant l$, с собственным значением $-c_{jk} + (c_{ji} - 1)c_{ik}$. Поскольку $\operatorname{ad} h_k(Y) \subset Y$, ввиду тождества Якоби $\operatorname{ad} h_k(J) \subset J$. С другой стороны, согласно предыдущей лемме $\operatorname{ad} x_k(y_{ij}) = 0$. Ясно, что $\operatorname{ad} x_k$ отображает Y в $Y+H$; соединив это утверждение с тождеством Якоби и тем фактом, что $\operatorname{ad} h_k(J) \subset J$, получаем, что $\operatorname{ad} x_k(J) \subset J$. Наконец, $\operatorname{ad} L_0(J) \subset J$, снова ввиду тождества Якоби (так как x_k, y_k порождают L_0). $\square$

Шаг 2. *Справедливо соотношение $K = I + J$.*

По определению $I + J \subset K$. Но ввиду шага 1 $I + J$ — идеал в L_0, содержащий все элементы x_{ij}, y_{ij}, а K — наименьший такой идеал. $\square$

Шаг 3. *Справедливо соотношение $L = N^- + H + N$ (прямая сумма подпространств), где $N^- = Y/J$, $N = X/I$, а подпространство отождествлено со своим образом при каноническом отображении $L_0 \to L$.*

Применим шаг 2 и разложение в прямую сумму $L_0 = Y + H + X$. $\square$

Шаг 4. *Подпространство*

$$\sum \mathbb{F}x_i + \sum \mathbb{F}h_i + \sum \mathbb{F}y_i$$

отображается в L изоморфно.

Это доказывается аналогично шагу 3 доказательства предыдущей теоремы, поскольку H отображается в L изоморфно (см. предыдущий шаг). Как следствие, можно отождествить x_i, h_i, y_i с элементами из L (которые порождают L). $\square$

Шаг 5. *Если $\lambda \in H^*$, то пусть*

$$L_\lambda := \{x \in L \mid [h, x] = \lambda(h)x \text{ при всех } h \in H\}.$$

Тогда $H = L_0$, $N = \sum\limits_{\lambda>0} L_\lambda$, $N^- = \sum\limits_{\lambda<0} L_\lambda$, причем все пространства L_λ конечномерны.

Это ясно из шагов 3 и 4. $\square$

Доказательство теоремы продолжим на следующей лекции.

6.3 Задачи

1. Докажите по индукции шаги 5 и 6 теоремы 15.

2. Докажите случай (б) леммы 5 напрямую, не используя теорию представлений.

3. Используя представление алгебры L_0 на V, докажите, что алгебры Ли X, Y являются свободными над множествами элементов x_i, y_i соответственно.

7 Лекция 7. Существование и единственность.

7.1 Автоморфизмы специального вида

Прежде, чем снова возвращаться к доказательству теоремы Серра, позанимаемся немного экспоненциальными автоморфизмами.

Предположим, что для элемента $x \in L$ оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен, $(\operatorname{ad} x)^k = 0$. Тогда разложение экспоненты линейного преобразования в ряд над полем $\mathbb{C}$ имеет смысл и над полем $\mathbb{F}$, так как этот ряд будет содержать конечное число членов:

$$\exp(\operatorname{ad} x) = 1 + \operatorname{ad} x + \frac{(\operatorname{ad} x)^2}{2!} + \frac{(\operatorname{ad} x)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\operatorname{ad} x)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Мы утверждаем, что $\exp(\operatorname{ad} x) \in \operatorname{Aut} L$.

Нам нужно показать, что $\exp(\operatorname{ad} x)([y,z]) = [\exp(\operatorname{ad} x)(y), \exp(\operatorname{ad} x)(z)]$.

Вспомним, что отображение $\operatorname{ad} x$ (и вообще любое дифференцирование) удовлетворяет обобщенному правилу Лейбница (доказывается по индукции благодаря обычному правилу Лейбница):

$$\frac{(\operatorname{ad} x)^n}{n!}([y,z]) = \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{1}{i!}(\operatorname{ad} x)^i(y), \frac{1}{(n-i)!}(\operatorname{ad} x)^{n-i}(z) \right],$$

и воспользуемся им при доказательстве того, что $\exp(\operatorname{ad} x)$ сохраняет скобку Ли.

Действительно, при $x, y, z \in L$

$$\begin{aligned}
[\exp \operatorname{ad}(x)(y), \exp \operatorname{ad} x(z)] &= \left[\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\operatorname{ad} x)^i(y)}{i!} \right), \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\operatorname{ad} x)^j(z)}{j!} \right) \right] = \\
&= \sum_{n=0}^{2k-2} \left(\sum_{i=0}^{n} \left[\frac{(\operatorname{ad} x)^i(y)}{i!}, \frac{(\operatorname{ad} x)^{n-i}(z)}{(n-i)!} \right] \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{2k-2} \frac{(\operatorname{ad} x)^n([y,z])}{n!} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\operatorname{ad} x)^n([y,z])}{n!} = \exp(\operatorname{ad} x)([y,z])
\end{aligned}$$

Обратимость элемента $\exp(\operatorname{ad} x)$ следует (обычным образом) из явного выражения для обратного элемента: $\exp(-\operatorname{ad} x)$.

Автоморфизм вида $\exp(\operatorname{ad} x)$, где оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен, называется *внутренним*, подгруппа в $\operatorname{Aut} L$, порожденная такими элементами, обозначается через $\operatorname{Int} L$, и ее элементы также называются внутренними. Это нормальная подгруппа: если $\varphi \in \operatorname{Aut} L$, $x \in L$, то $\varphi(\operatorname{ad} x)\varphi^{-1} = \operatorname{ad} \varphi(x)$, откуда следует, что

$$\varphi \exp(\operatorname{ad} x)\varphi^{-1} = \exp(\operatorname{ad} \varphi(x)).$$

Пусть $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ со стандартным базисом (x, y, h). Положим

$$\sigma = \exp \operatorname{ad} x \cdot \exp \operatorname{ad}(-y) \cdot \exp \operatorname{ad} x \text{ (тогда } \sigma \in \operatorname{Int} L).$$

Вычислим действие преобразования σ на базисе $\{x, y, h\}$. Это можно сделать, просто записав наши элементы как матрицы из $\mathfrak{sl}_2$:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\exp \operatorname{ad} x = \exp \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

а

$$\exp \operatorname{ad}(-y) = \exp \left(- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = E - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\sigma = \exp \operatorname{ad} x \cdot \exp \operatorname{ad}(-y) \cdot \exp \operatorname{ad} x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\sigma(x) = -y, \quad \sigma(y) = -x, \sigma(h) = -h.$$

Теперь рассмотрим автоморфизм вида σ для произвольной алгебре Ли с описываемыми нами свойствами. Иначе говоря, пусть $x_i \in L_{\alpha_i}$, где α_i — простой корень, $y_i \in L_{-\alpha_i}$ таков, что $[x_i, y_i] = h_i$,

$$\tau_i = \exp \operatorname{ad} x_i \cdot \exp \operatorname{ad}(-y_i) \cdot \exp \operatorname{ad} x_i.$$

Пусть $\lambda, \mu \in H^*$, при этом $\sigma_{\alpha_i}(\lambda) = \mu$.

Рассмотрим $\tau_i(h)$, $h \in H$:

$$\begin{aligned}
\exp \operatorname{ad} x_i \cdot \exp \operatorname{ad}(-y_i) \exp \operatorname{ad} x_i(h) &= \exp \operatorname{ad} x_i \exp \operatorname{ad}(-y_i)(h + [x_i, h]) = \\
&= \exp \operatorname{ad} x_i \exp \operatorname{ad}(-y_i)(h - \alpha_i(h)x_i) = \\
&= \exp \operatorname{ad} x_i (h - \alpha_i(h)x_i - [y_i, h - \alpha_i(h)x_i] - \frac{1}{2}[y_i, [y_i, h - \alpha_i(h)x_i]]) = \\
&= \exp \operatorname{ad} x_i (h - \alpha_i(h)x_i - \alpha_i(h)y_i - \alpha_i(h)h_i - \frac{1}{2}[y_i, -\alpha_i(h)h_i]) = \\
&= \exp \operatorname{ad} x_i (h - \alpha_i(h)x_i - \alpha_i(h)y_i - \alpha_i(h)h_i + \alpha_i(h)y_i) = \\
&= \exp \operatorname{ad} x_i (h - \alpha_i(h)x_i - \alpha_i(h)h_i) = \\
&= h - \alpha_i(h)x_i - \alpha_i(h)h_i + [x_i, h - \alpha_i(h)x_i - \alpha_i(h)h_i] = \\
&= h - \alpha_i(h)x_i - \alpha_i(h)h_i - \alpha_i(h)x_i + 2\alpha_i(h)x_i = h - \alpha_i(h)h_i = \sigma_{\alpha_i}(h).
\end{aligned}$$

Таким образом, мы знаем действие автоморфизма τ_i на H.

Теперь пусть $x \in L_\lambda$, $\tau_i(x) = y$. Заметим, что

$$[\sigma_{\alpha_i}(h), y] = [\tau_i(h), \tau_i(x)] = \tau_i([h, x]) = \tau_i(\lambda(h)x) = \lambda(h)\tau_i(x) = \lambda(h)y,$$

что означает $y \in L_\mu$. Таким образом, мы видим, что τ_i меняет местами подпространства L_λ и L_μ.

7.2 Окончание доказательства теорема Серра

Теперь напомним снова теорему Серра и те 5 пунктов, которые мы уже доказали.

Теорема 17 (Серр)**.** *Фиксируем систему корней Φ с базисом $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Пусть L — алгебра Ли, порожденная $3l$ элементами $\{x_i, y_i, h_l \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$, которые подчинены соотношениям $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$, (S_{ij}^+), (S_{ij}^-). Тогда L является конечномерной полупростой алгеброй с системой корней Φ, причем картановская подалгебра порождается элементами h_i.*

Доказательство. По определению $L = L_0/K$, где алгебра L_0 такова, как выше, а K — идеал, порожденный элементами x_{ij}, y_{ij}, $i \neq j$. Ради простоты обозначений вначале мы будем работать в L_0. Пусть I (соответственно, J) — идеал в X (соответственно, в Y), порожденный элементами x_{ij} (соответственно, y_{ij}). Таким образом, K включает идеалы I, J.

1. *Множества I и J являются идеалами в L_0.*
2. *Справедливо соотношение $K = I + J$.*
3. *Справедливо соотношение $L = N^- + H + N$ (прямая сумма подпространств), где $N^- = Y/J$, $N = X/I$, а подпространство отождествлено со своим образом при каноническом отображении $L_0 \to L$.*
4. *Подпространство*

$$\sum \mathbb{F}x_i + \sum \mathbb{F}h_i + \sum \mathbb{F}y_i$$

отображается в L изоморфно.

5. *Если $\lambda \in H^*$, то пусть*

$$L_\lambda := \{x \in L \mid [h, x] = \lambda(h)x \text{ при всех } h \in H\}.$$

Тогда $H = L_0$, $N = \sum\limits_{\lambda>0} L_\lambda$, $N^- = \sum\limits_{\lambda<0} L_\lambda$, причем все пространства L_λ конечномерны.

Продолжим теперь доказывать те пункты, которые еще не доказали.

Шаг 6. *При $1 \leqslant i \leqslant l$ эндоморфизмы $\operatorname{ad} x_i$ и $\operatorname{ad} y_i$ локально нильпотентны в L.*

Достаточно рассмотреть $\operatorname{ad} x_i$ при фиксированном i (в силу симметрии). Пусть M — подпространство в L, состоящее из всех элементов, которые аннулируются какой-то степенью отображения $\operatorname{ad} x_i$. Если элемент $x \in M$ (соответственно, $y \in M$) аннулируется отображением $(\operatorname{ad} x_i)^r$ (соответственно, $(\operatorname{ad} x_i)^s$), то $(\operatorname{ad} x_i)^{r+s}$ аннулирует элемент $[x, y]$. Значит, в действительности M — подалгебра в L. Но при всех k мы имеем $x_k \in M$ (ввиду соотношений (S_{ij}^+)) и $y_k \in M$ (виду $(S2)$, $(S3)$). Эти элементы порождают L, поэтому $M = L$, что и требовалось. $\square$

Шаг 7. *Оператор*

$$\tau_i = \exp(\operatorname{ad} x_i) \exp(\operatorname{ad}(-y_i)) \exp(\operatorname{ad} x_i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant l,$$

— корректно определенный автоморфизм алгебры L.

Это вытекает из шага 6 и замечаний перед теоремой. $\square$

Шаг 8. *Если* $\lambda, \mu \in H^*$ *и* $\sigma\lambda = \mu$ *(*$\sigma \in W$*, где* W *— группа Вейля для* Φ*), то* $\dim L_\lambda = \dim L_\mu$.

Достаточно рассмотреть случай, когда $\sigma = \sigma_{\alpha_i}$ — простое отражение, поскольку W порождается простыми отражениями. Автоморфизм τ_i алгебры L, построенный на шаге 7, на конечномерном пространстве $L_\lambda + L_\mu$ совпадает с обычным произведением экспонент, и мы заключаем, что τ_i меняет местами L_λ и L_μ. Как следствие, $\dim L_\lambda = \dim L_\mu$. □

Шаг 9. *Если* $1 \leqslant i \leqslant l$*, то* $\dim L_{\alpha_i}$*, причем* $\dim L_{k\alpha_i} = 0$ *для целых* $k \neq 0, 1, -1$.

Это очевидно для L_0, а тогда ввиду шага 4 и для L. □

Шаг 10. *Если* $\alpha \in \Phi$*, то* $\dim L_\alpha = 1$*, но* $\dim L_{k\alpha} = 0$ *при* $k \neq 0, 1, -1$.

Каждый корень W-сопряжен простому корню, и остается использовать шаги 8 и 9. □

Шаг 11. *Если* $L_\lambda \neq 0$*, то либо* $\lambda \in \Phi$*, либо* $\lambda = 0$.

В противном случае λ является ненулевой целочисленной линейной комбинацией простых корней с коэффициентами ± 1 и 0. Ввиду шага 10 вектор λ не кратен простому корню. Тогда некоторый W-сопряженный к нему вектор $\sigma\lambda$ имеет и строго положительный, и строго отрицательный коэффициент. Это означает, что $L_{\sigma\lambda} = 0$ (см. шаг 5), вопреки результату шага 8. □

Шаг 12. *Справедливо соотношение*

$$\dim L = l + |\Phi| < \infty.$$

Ввиду шага 5 это вытекает из шагов 10 и 11. □

Шаг 13. *Алгебра* L *полупроста.*

Пусть A — абелев идеал в L. Нужно показать, что $A = 0$. Поскольку идеал A инвариантен относительно действия $\operatorname{ad} H$, мы заключаем, что

$$A = (A \cap H) + \sum_{\alpha \in \Phi} (A \cap L_\alpha) \quad \left(\text{так как } L = H + \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha \right).$$

Если $L_\alpha \subset A$, то $[L_{-\alpha}, L_\alpha] \subset A$. Тогда $L_{-\alpha} \subset A$, и A содержит экземпляр простой алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ (см. шаг 4). Это невозможно, поэтому на самом деле $A = A \cap H \subset H$, а значит,

$$[L_\alpha, A] = 0 \quad (\alpha \in \Phi) \text{ и } A \subset \bigcap_{\alpha \in \Phi} \ker \alpha = 0$$

(элементы α_i порождают H^*). *square*

Шаг 14. *Подалгебра* H *является картановской, а* Φ *— системой корней для* L. Алгебра H абелева (значит, и нильпотентна) и при этом самонормализуема (ввиду разложения в прямую сумму $L = H + \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$), т. е. H является картановской подалгеброй. Ясно, что Φ — соответствующая система корней. □

7.3 Применение: теоремы существования и единственности.

Наши усилия, наконец, вознаграждены.

Теорема 18. (a) *Пусть* Φ *— некоторая система корней. Тогда существует полупростая алгебра Ли с системой корней* Φ.

(b) *Пусть* L, L' *— полупростые алгебры Ли с картановскими подалгебрами* H, H' *и системами корней* Φ, Φ' *соответственно. Пусть также дан изоморфизм* $\Phi \to \Phi'$, *переводящий данный базис* Δ *в* Δ', *и ему соответствует изоморфизм* $\pi : H \to H'$. *Каждому* $\alpha \in \Delta$ ($\alpha' \in \Delta'$) *сопоставим произвольный ненулевой элемент* $x_\alpha \in L_\alpha$ ($x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$). *Тогда существует единственный изоморфизм* $\pi : L \to L'$, *продолжающий* $\pi : H \to H'$ *и отображающий* x_α *в* $x'_{\alpha'}$ ($\alpha \in \Delta$).

Доказательство. Утверждение (a) непосредственно вытекает из теоремы Серра.

Докажем утверждение (b). Ясно, что достаточно рассмотреть алгебру L, построенную в теореме Серра, взяв в качестве x_α, y_α и $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ выбранные там образующие ($\alpha \in \Delta$). Положим $h'_{\alpha'} = \pi(h_\alpha)$ и возьмем (единственный) элемент $y'_{\alpha'}$, удовлетворяющий соотношениям $[x'_{\alpha'}, y'_{\alpha'}] = h'_{\alpha'}$ при всех $\alpha' \in \Delta'$. Так как $\Phi \cong \Phi'$, то выбранные элементы из L' удовлетворяют соотношениям Серра. В силу теоремы Серра существует единственный гомоморфизм $\pi : L \to L'$, при котором $x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) переходят в $x'_{\alpha'}, y'_{\alpha'}, h'_{\alpha'}$ соответственно. Он является продолжением заданного гомоморфизма $\pi : H \to H'$. Поскольку

$$\dim L = \dim H + |\Phi| = \dim H' + |\Phi'| = \dim L',$$

то $\pi : L \to L'$ является изоморфизмом. $\square$

В соответствии с теоремой классификации существует (с точностью до изоморфизма) ровно одна простая алгебра Ли с каждой из систем корней $\mathbf{A}_l$, $l \geqslant 1$, $\mathbf{B}_l$, $l \geqslant 2$, $\mathbf{C}_l$, $l \geqslant 3$, $\mathbf{D}_l$, $l \geqslant 4$, $\mathbf{E}_6$, $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{G}_2$. Мы уже дали достаточно полное описание классических типов **A**–**D** и на этом остановимся, чтобы не заниматься слишком долго вычислениями.

7.4 Задачи

1. Докажите, что идеал K алгебры L_0 содержится в каждом ее идеале конечной коразмерности (то есть L — наибольшая конечномерная факторалгебра для L_0).

2. Докажите, что любое отношение включения между схемами Дынкина (например, $E_6 \subset E_7 \subset E_8$ индуцирует естественное отношение включения между соответствующими полупростыми алгебрами Ли.

3. Докажите полупростоту построенных нами в прошлом семестре матричных алгебр одного из типов $\mathbf{B}_l$, $\mathbf{C}_l$, $\mathbf{D}_l$.

8 Лекция 8. Теория представлений, часть 1

8.1 Веса и старшие векторы. Весовые подпространства

В ближайшее время наша цель — изучение конечномерных L-модулей (то есть представлений) для полупростой алгебры Ли L (над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль) с фиксированной картановской подалгеброй H, системой корней Φ. Ввиду теоремы Вейля о полной приводимости ведущую роль в конечномерном случае играют неприводмые модули.

Мы уже показывали, что для линейной алгебры Ли полупростые в абстрактном смысле элементы (те, для которых оператор ad диагонализируем) являются полупростыми и в обычном смысле, то есть диагонализируемы. Так как H является максимальной торической подалгеброй (то есть состоящей из полупростых элементов), то в любом представлении алгебры L подалгебра H представляется в некотором базисе диагональными операторами.

Таким образом,

$$V = \oplus V_\lambda, \text{ где } \lambda \in H^*,$$

при этом

$$V_\lambda = \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda(h)v \text{ для всех } h \in H\}.$$

Подпространство V_λ корректно определено и для произвольного (не конечномерного) пространства V. Если $V_\lambda \neq 0$, то мы называем его *весовым подпространством*, а λ — *весом* пространства V.

Пример 2. **1.** Превратив саму алгебру L в L-модуль посредством присоединенного представления, мы видим, что весами являются корни $\alpha \in \Phi$ (с весовыми пространствами L_α размерности 1), а также 0 (с весовым подпространством H размерности l).

2. Если $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, то линейная функция λ на H полностью определяется своим значением $\lambda(h)$ на базисном векторе h; получается, что мы уже использовали веса, когда в прошлом семестре проходили неприводимые представления этой алгебры.

Если $\dim V = \infty$, то нет никакой уверенности, что V окажется суммой своих весовых пространств. Тем не менее, сумма V' всех весовых пространств V_λ — прямая; по существу это доказывается так же, как линейная независимость собственных векторов линейного преобразования, отвечающих различным собственным значениям. При этом V' является L-подмодулем в V, ввиду того, что L_α, $\alpha \in \Phi$, переставляет весовые подпространства. А именно, если $x \in L_\alpha$, $v \in V_\lambda$, $h \in H$, то

$$h \cdot x \cdot v = x \cdot h \cdot v + [h, x] \cdot v = (\lambda(h) + \alpha(h))x \cdot v,$$

то есть L_α отображает V_λ в $V_{\lambda+\alpha}$.

В итоге установлена

Лемма 6. *Пусть V — произвольный L-модуль. Тогда*

(a) *L_α отображает V_λ в $V_{\lambda+\alpha}$ ($\lambda \in H^*, \alpha \in \Phi$);*

(b) *сумма $V' = \bigoplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda$ является прямой, и V' является L-подмодулем в V;*

(c) *если $\dim V < \infty$, то $V = V'$.*

8.2 Стандартные циклические модули

По определению *старший вектор* (веса λ) в L-модуле V — это ненулевой вектор $v^+ \in V_\lambda$, который аннулируется всеми подпространствами L_α (для $\alpha > 0$ или, что равносильно, для $\alpha \in \Delta$). Разумеется, это понятие зависит от выбора базиса Δ. Например, если алгебра L проста, а β — старший корень в Φ относительно Δ, то любой ненулевой элемент в L_β является старшим вектором присоединенного представления алгебры L; очевидно, что других старших векторов в этом случае нет. Если $\dim V = \infty$, то старший вектор не обязательно существует. Напротив, если $\dim V < \infty$, то борелевская подалгебра $B(\Delta) = H + \bigoplus_{\alpha>0} L_\alpha$ имеет общий собственный вектор (так как она разрешима, благодаря теореме Ли), который аннулируется всеми подпространствами L_α, $\alpha > 0$ (так как все соответствующие операторы нильпотентны и обнуляют любые собственные векторы). Он и является старшим вектором в указанном смысле.

При изучении конечномерных неприводимых L-модулей полезно рассмотреть вначале более широкий класс L-модулей, порожденных старшим вектором. Если $V = \mathcal{U}(L) \cdot v^+$ для старшего вектора v^+ (веса λ), то будем кратко говорить, что модуль V является *стандартным циклическим* (*веса* λ) и называть λ *старшим весом* для V.

Строение такого модуля легко описать. Фиксируем ненулевой элемент $x_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha > 0$, и возьмем (единственный) элемент $y_\alpha \in L_{-\alpha}$, для которого $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$. Нам потребуется такой частичный порядок, что $\lambda > \mu$ если и только если $\lambda - \mu$ является суммой положительных корней ($\lambda, \mu \in H^*$). Утверждение (b) следующей теоремы оправдывает название "старший вес" для λ.

Теорема 19. *Пусть V — стандартный циклический L-модуль со старшим вектором $v^+ \in V_\lambda$. Пусть при этом $\Phi^+ = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$. Тогда*

(a) *V порождается векторами $y_{\beta_1}^{i_1} \dots y_{\beta_m}^{i_m} \cdot v^+$, $i_j \in \mathbb{Z}^+$; как следствие, V является прямой суммой своих весовых подпространств;*

(b) *веса в V имеют вид $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$, $k_i \in \mathbb{Z}^+$, то есть удовлетворяют условию $\mu < \lambda$;*

(c) $\dim V_\lambda = 1$, *и если $\mu \in H^*$, то* $\dim V_\mu < \infty$;

(d) *каждый подмодуль в V является прямой суммой своих весовых подпространств;*

(e) *L-модуль V неразложим, имеет единственный максимальный (собственный) подмодуль и соответственно единственный неприводимый фактормодуль;*

(f) *каждый ненулевой гомоморфный образ модуля V также является стандартным циклическим модулем веса λ.*

Доказательство. Мы имеем $L = N^- + B$, где $N- = \bigoplus_{\alpha<0} L_\alpha$ и $B = B(\Delta)$. Из теоремы ПБВ (два последних следствия) вытекает, что $\mathcal{U}(L) \cdot v^+ = \mathcal{U}(N^-)\mathcal{U}(B) \cdot v^+ = \mathcal{U}(N-) \cdot \mathbb{F}v^+$ (поскольку v^+ — общий собственный вектор для B). Алгебра $\mathcal{U}(N^-)$ имеет базис, состоящий из мономов $y_{\beta_1}^{i_1} \dots y_{\beta_m}^{i_m}$, откуда следует утверждение (a).

Вектор

$$y_{\beta_1}^{i_1} \dots y_{\beta_m}^{i_m} \cdot v^+ \qquad (*)$$

имеет вес $\lambda - \sum_j i_j\beta_i$. Выразив каждый корень β_j как неотрицательную $\mathbb{Z}$-линейную комбинацию простых корней, получаем утверждение (b).

Очевидно, что имеется лишь конечное число векторов вида $(*)$, для которых $\sum i_j\beta_j$ равняется заданному вектору $\sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$. Ввиду утверждения (a) они порождают весовое подпространство V_μ, где $\mu = \lambda - \sum k_i\alpha_i$. при этом единственный вектор вида $(*)$ с весом $\mu = \lambda$ — это сам v^+, откуда следует утверждение (c).

Чтобы доказать утверждение (d), возьмем подмодуль W в V и запишем $w \in W$ как сумму векторов $v_i \in V_{\mu_i}$, принадлежащих различным весам. Нужно показать, что все векторы v_i лежат в W. В противном случае возьмем соответствующий вектор $w = v_1 + \cdots + v_n$ с минимальным значением n, $n > 1$. Тогда векторы v_i не принадлежат подмодулю W. Найдем элемент $h \in H$, для которого $\mu_1(h) \neq \mu_2(h)$. Тогда вектор $h \cdot w = \sum \mu_i(h)v_i$ лежит в W, так же как и

$$(h - \mu_1(h) \cdot 1) \cdot w = (\mu_2(h) - \mu_1(h))v_2 + \cdots + (\mu_n(h) - \mu_1(h))v_n \neq 0.$$

Из выбора элемента w вытекает, что $v_2 \in W$, что невозможно.

Мы заключаем из утверждений (c) и (d), что каждый собственный подмодуль в V лежит в сумме весовых подпространств, отличных от V_λ, так что сумма W всех таких подмодулей по-прежнему не совпадает с V. Как следствие, V имеет единственный максимальный подмодуль и единственный неприводимый фактормодуль. Далее, V не может быть прямой суммой двух собственных подмодулей, так как оба они лежат в W. Этим доказано утверждение (e).

Наконец, утверждение (f) очевидно. $\square$

Следствие 8. *Пусть L-модуль V таков, как в условии теоремы, и при этом неприводим. Тогда v^+ — единственный старший вектор в V с точностью до ненулевого скалярного множителя.*

Доказательство. Если w^+ — другой старший вектор, то $\mathcal{U}(L) \cdot w^+ = V$ (поскольку модуль V неприводим). Следовательно, теорема одинаково применима и к v^+, и к w^+. Если вектор w^+ имеет вес λ', то $\lambda' < \lambda$ и $\lambda < \lambda'$ (ввиду утверждения (b)), а значит $\lambda = \lambda'$. Но тогда (согласно утверждению (c)) вектор w^+ пропорционален v^+. $\square$

8.3 Теоремы существования и единственности

Мы хотим показать, что для каждого $\lambda \in H^*$ существует единственный (с точностью до изоморфизма) неприводимый стандартный циклический L-модуль старшего веса λ, который может быть и бесконечномерным. Доказать единственность нетрудно.

Теорема 20. *Пусть V, W — стандартные циклические модули старшего веса λ. Если V и W неприводимы, то они изоморфны.*

Доказательство. Образуем L-модуль $X = V \oplus W$. Если v^+, w^+ — старшие векторы веса λ в V, W соответственно, то пусть $x^+ = (v^+, w^+) \in X$, так что x^+ — старший вектор

веса λ. Порожденный им (стандартный циклический) L-подмодуль в X обозначим Y , и пусть $p : Y \to V$, $p' : Y \to W$ — отображения, индуцированные проектированием модуля X на первое и второе слагаемое. Очевидно, что p, p' являются гомоморфизмами L- модулей. Поскольку $p(x^+) = v^+$, $p'(x^+) = w^+$, ясно также, что $\Im p = V$, $\Im p' = W$. Согласно пункту (e) предыдущей теоремы V и W изоморфны как неприводимые фактормодули стандартного циклического модуля. $\square$

Теперь рассмотрим проблему существования. Оставляя в стороне все связанное с неприводимостью, приходим к следующему вопросу: как вообще можно построить стандартный циклический модуль $Z(\lambda)$? Усматриваются два пути решения, которые приведут к одинаковым результатам.

Начнем с одномерного векторного пространства D_λ с базисом v^+ и определим действие алгебры B $(= B(\Delta))$ на D_λ по правилу

$$\left(h + \sum_{\alpha>0} x_\alpha\right) \cdot v^+ = h \cdot v^+ = \lambda(h)v^+$$

для фиксированного $\lambda \in H^*$. Можно легко убедиться (упражнение), что эта операция превращает D_λ в B-модуль. Разумеется, D_λ точно так же является и $\mathcal{U}(L)$-модулем, так что можно образовать тензорное произведение

$$Z(\lambda) = \mathcal{U}(L) \otimes_{\mathcal{U}(B)} D_\lambda,$$

которое становится модулем над алгеброй $\mathcal{U}(L)$ при ее естественном (левом) действии.

Мы утверждаем, что модуль $Z(\lambda)$ — стандартный циклический веса λ. С одной стороны, ясно, что $1 \otimes v^+$ порождает $Z(\lambda)$. с другой стороны, этот вектор ненулевой, так как $\mathcal{U}(L)$ является свободным $\mathcal{U}(B)$-модулем с базисом, состоящим из 1 и всевозможных мономов $y_{\beta_1}^{i_1} \dots y_{\beta_m}^{i_m}$. Следовательно, $1 \otimes v^+$ — старший вектор веса λ. Для краткости обозначим его v^+.

Эта конструкция делает также очевидным, что если $N^- = \bigoplus_{\alpha<0} L_\alpha$, то $Z(\lambda)$ как $\mathcal{U}(N^-)$-модуль изоморфен $\mathcal{U}(N^-)$. Точнее,

$$\mathcal{U}(L) \cong \mathcal{U}(N^-) \otimes \mathcal{U}(B) \text{ (теорема ПБВ)},$$

так что

$$Z(\lambda) \cong \mathcal{U}(N^-) \otimes \mathbb{F} \text{ (как левые } \mathcal{U}(N^-)\text{-модули)}.$$

Можно задать $Z(\lambda)$ образующими и соотношениями. Для этого возьмем ненулевые элементы $x_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha > 0$, и пусть $I(\lambda)$ — левый идеал в $\mathcal{U}(L)$, порожденный всеми x_α, $\alpha > 0$, вместе со всеми $h_\alpha - \lambda(h_\alpha) \cdot 1$, $\alpha \in \Phi$. Заметим, что эти образующие идеала $I(\lambda)$ аннулируют старший вектор v^+ модуля $Z(\lambda)$. Значит, это верно и для всего $I(\lambda)$, и существует канонический гомоморфизм левых $\mathcal{U}(L)$-модулей $\mathcal{U}(L)/I(\lambda) \to Z(\lambda)$, который отображает смежный класс единицы в старший вектор v^+. Снова используя ПБВ-базис в $\mathcal{U}(L)$, мы видим, что это отображение переводит смежные классы алгебры $\mathcal{U}(B)$ в одномерный модуль $\mathbb{F}v^+$, откуда следует, что оно взаимно однозначно. Иначе говоря, $\mathcal{U}(L)$-модули $Z(\lambda)$ и $\mathcal{U}(L)/I(\lambda)$ изоморфны.

Теорема 21. *Пусть $\lambda \in H^*$. Тогда существует неприводимый стандартный циклический модуль $V(\lambda)$ веса λ.*

Доказательство. Модуль $Z(\lambda)$ (построенный выше) является стандартным циклическим веса λ и имеет единственный максимальный подмодуль $Y(\lambda)$. Следовательно, модуль $V(\lambda) = Z(\lambda)/Y(\lambda)$ является неприводимым и циклическим веса λ. $\square$

Остаются две проблемы: 1) определить, какие из модулей $V(\lambda)$ конечномерны; 2) для таких $V(\lambda)$ точно определить, какие в них встречаются веса.

8.4 Задачи

1. Пусть неприводимый L-модуль V имеет хотя бы одно (ненулевое) весовое подпространство. Докажите, что V является прямой суммой своих весовых подпространств.

2. Опишите веса и старшие векторы естественных представлений линейных алгебр типов $\mathbf{A}_l$ и $\mathbf{B}_l$.

3. Старший вектор веса w^+ веса μ в $Z(\lambda)$ индуцирует гомоморфизм L-модулей $\varphi : Z(\mu) \to Z(\lambda)$, образ которого им порождается. Докажите, что гомоморфизм φ инъективен.

9 Лекция 9. Теория представлений. Часть 2

9.1 Абстрактная теория весов

Пусть Λ — множество всех таких элементов $\lambda \in \mathbb{R}^l$, что $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in \Phi$. Назовем его элементы (абстрактными) весами. Поскольку

$$\langle \lambda, \alpha \rangle = \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

линейно зависит от λ, множество Λ является подгруппой в $\mathbb{R}^l$, содержащей Φ. Обозначим через Λ_r решетку корней (то есть подгруппу в Λ, которую порождает система Φ). Она является решеткой в $\mathbb{R}^l$ в стандартном смысле: это целочисленная линейная оболочка некоторого $\mathbb{R}$-базиса в $\mathbb{R}^l$ (а именно, любого множества простых корней).

Зафиксируем базис $\Delta \subset \Phi$ и назовем вес $\lambda \in \Lambda$ *доминантным*, если все числа $\langle \lambda, \alpha \rangle$, $\alpha \in \Delta$, неотрицательны, и *строго доминантным*, если они положительны. Пусть Λ^+ — множество всех доминантных весов. Это означает (см. прошлый семестр), что Λ^+ — множество всех весов, лежащих в замыкании камеры Вейля, порожденной простыми корнями.

Пусть $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. Тогда векторы $\frac{2\alpha_j}{(\alpha_j, \alpha_j)}$ также образуют базис в $\mathbb{R}^l$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ — двойственный базис (относительно скалярного произведения в $\mathbb{R}^l$):

$$\frac{2(\lambda_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij}.$$

Поскольку все значения $\langle \lambda_i, \alpha \rangle$, $\alpha \in \Delta$, — неотрицательные целые, то λ_i являются доминантными весами. Назовем из фундаментальными доминантными весами (относительно Δ).

Заметим, что $\sigma_i(\lambda_j) = \lambda_j - \delta_{ij}\alpha_i$.Для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}^l$ положим $m_i = \langle \lambda, \alpha_i \rangle$. Тогда

$$0 = \langle \lambda - \sum m_i \lambda_i, \alpha \rangle$$

для любого простого корня α, а значит

$$(\lambda - \sum m_i \lambda_i, \alpha) = 0 \text{ и } \lambda = \sum m_i \lambda_i.$$

Следовательно, Λ является решеткой с базисом $\{\lambda_i \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}$, причем $\lambda \in \Lambda^+$ если и только если все m_i неотрицательны.

Из элементарных свойств решеток следует, что Λ/Λ_r — конечная группа (она называется фундаментальной группой системы Φ). Это можно непосредственно увидеть следующим образом. Пусть $\alpha_i = \sum_j m_{ij}\lambda_j$, $m_{ij} \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle = \sum_j m_{ij} \langle \lambda_j, \alpha_k \rangle = m_{ik}.$$

Другими словами, матрица Картана описывает преобразование базиса. Чтобы выразить λ_j через α_i, надо лишь обратить матрицу Картана; определитель последней — целое число,

и он измеряет индекс подгруппы Λ_r в Λ. Например, для типа $\mathbf{A}_1$ имеем $\alpha_1 = 2\lambda_1$. Для типа $\mathbf{A}_2$ матрица Картана равна

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\alpha_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2 \text{ и } \alpha_2 = -\lambda_1 + 2\lambda_2.$$

После обращения получаем

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2) \text{ и } \lambda_2 = \frac{1}{3}(\alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Вычисляя определители матриц Картана, получаем следующий набор порядков фундаментальных групп Λ/Λ_r для неприводимых систем:

$$\mathbf{A}_l : l+1; \quad \mathbf{B}_l, \mathbf{C}_l, \mathbf{E}_7 : 2; \quad \mathbf{D}_l : 4; \quad \mathbf{E}_6 : 3; \quad \mathbf{E}_8, \mathbf{F}_4, \mathbf{G}_2 : 1.$$

После некоторой дополнительной работы удается явно выразить λ_i через α_j (например, в книге Хафриса есть на стр. 88 таблица с явным выражением).

9.2 Доминантные веса

Группа Вейля W системы Φ сохраняет скалярное произведение в нашем евклидовом пространстве и поэтому оставляет множество Λ инвариантным. На самом деле мы уже сделали даже более точное наблюдение $\sigma_i(\lambda_j) = \lambda_j - \delta_{ij}\alpha_i$.

Лемма 7. *Если $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_t$ — выражение элемента $\sigma \in W$ через отражения, отвечающие простым корням, причем t — минимально возможное, то $\sigma(\alpha_t) < 0$.*

Доказательство. Положим $\beta_i := \sigma_{i+1} \dots \sigma_{t-1}(\alpha_t)$, $0 \leqslant i \leqslant t-2$, $\beta_{t-1} = \alpha_t$.

Предположим, что $\beta_0 < 0$.

Так как $\beta_0 < 0$, $\beta_{t-1} > 0$, то можно найти наименьший индекс s, для которого $\beta_s > 0$. Тогда $\sigma_{\alpha_s}(\beta_s) = \beta_{s-1} < 0$, а так как простое отражение переставляет местами все положительные корни, кроме "своего", то $\beta_s = \alpha_s$. Так как $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma\sigma_\alpha\sigma^{-1}$, то $\sigma_s = (\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{t-1} \dots \sigma_{s+1})$, откуда

$$\sigma_1 \dots \sigma_{s-1}\sigma_s\sigma_{s+1} \dots \sigma_t = \sigma_1 \dots \sigma_{s-1} \cdot (\sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1})\sigma_t(\sigma_{t-1} \dots \sigma_{s+1}) \cdot \sigma_{s+1} \dots \sigma_t = \\ = \sigma_1 \dots \sigma_{s-1} \cdot \sigma_{s+1} \dots \sigma_{t-1},$$

то есть есть исходная длина элемента σ не была самой короткой. Противоречие.

Таким образом, $\beta_0 > 0$, то есть $\sigma_1 \dots \sigma_{t-1}(\alpha_t) > 0$, откуда $\sigma(\alpha_t) = \sigma_1 \dots \sigma_{t-1} \cdot \sigma_t(\alpha_t) = \sigma_1 \dots \sigma_{t-1}(-\alpha_t) < 0$. $\square$

Определение 7. Если элемент $\sigma \in W$ выражен как $\sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$, $\alpha_i \in \Delta$, с минимальным t, то назовем такое выражение *приведенным* и положим $l(\sigma) = t$: это *длина* элемента σ относительно базиса Δ. По определению $l(1) = 0$. Пусть $n(\sigma)$ — количество положительных корней α, для которых $\sigma(\alpha) \in \Phi^-$.

Лемма 8. *Для всех $\sigma \in W$ справедливо равенство $l(\sigma) = n(\sigma)$.*

Доказательство. Проведем индукцию по $l(\sigma)$. Случай $l(\sigma) = 0$ тривиален.

Пусть лемма верна для всех таких $\tau \in W$, что $l(\tau) < l(\sigma)$. Запишем σ. в приведенной форме как $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$ и положим $\alpha = \alpha_t$. По предыдущей лемме $\sigma(\alpha) < 0$. Так как простое отражение переставляет положительные корни, отличные от "своего", то справедливо равенство $n(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma) - 1$. С другой стороны, $l(\sigma\sigma_\alpha) = l(\sigma) - 1$, и по предположению индукции $l(\sigma\sigma_\alpha) = n(\sigma\sigma_\alpha)$. Соединив эти утверждения, получаем, $l(\sigma) = n(\sigma)$. $\square$

Теперь мы можем утверждать следующее:

Лемма 9. *Каждый вес эквивалентен относительно W ровно одному доминантному весу. Если вес λ доминантен, то $\sigma\lambda < \lambda$ для всех $\sigma \in W$, а если он строго доминантен, то $\sigma\lambda = \lambda$ только при $\sigma = E$.*

Доказательство. Сначала докажем, что каждый вес эквивалентен какому-то доминантному весу.

Если вес не доминантен, то он имеет вид $\mu = \sum_{i=1}^{l} m_i\lambda_i$, где некоторое $m_i < 0$. Тогда $\sigma_i(\mu) = \mu + |m_i|\alpha_i$. Значит, каждый вес, не являющийся доминантным, с помощью действия некоторого элемента группы Вейля, можно (строго) увеличить относительно введенного нами порядка $<$. Так как группа Вейля конечна, мы не можем бесконечно увеличивать наш вес, то есть когда-то придем к доминантному весу.

Теперь покажем, что два доминантных веса не могут быть сопряжены относительно группы Вейля.

Действительно, пусть $\lambda, \mu \in \Lambda^+$, $\sigma(\lambda) = \mu$ для некоторого $\sigma \in W$. Докажем, что тогда σ является произведением простых отражений, оставляющих на месте λ (откуда будет следовать $\lambda = \mu$).

Для этого проведем индукцию по $l(\sigma)$. Случай $l(\sigma) = 0$ очевиден. Пусть $l(\sigma) > 0$. Тогда по предыдущей лемме σ должно переводить некоторый положительный корень в отрицательный; значит, σ не может перевести все простые корни в положительные. Пусть $\sigma(\alpha)$ для некоторого $\alpha \in \Delta$. Тогда

$$0 \geqslant (\mu, \sigma\alpha) = (\sigma^{-1}\mu, \alpha) = (\lambda, \alpha) \geqslant 0,$$

так как $\lambda, \mu \in \Lambda^+$. Значит, $(\lambda, \alpha) = 0$, откуда $\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda$, следовательно, $(\sigma\sigma_\alpha)\lambda = \mu$. Тогда по предыдущей лемме $l(\sigma\sigma_\alpha) = l(\sigma) - 1$, поэтому можно применить предположение индукции.

Таким образом, мы доказали, что каждый вес эквивалентен относительно W ровно одному доминантному весу.

Теперь пусть $\lambda \in \Lambda^+$, нам нужно доказать, что $\sigma\lambda < \lambda$ для всех $\sigma \in W$. Также докажем это по индукции по $l(\sigma)$. Для $l(\sigma) = 0$ это очевидно. Пусть утверждение выполнено для всех τ с $l(\tau) < l(\sigma) = t$, $\sigma = \sigma_{\alpha_1} \dots \sigma_{\alpha_t}$.

Пусть $\sigma' = \sigma \cdot \sigma_{\alpha_t}$. Как мы уже знаем, $\sigma'(\alpha_t) > 0$.

Пусть $\lambda = \sum_{i=1}^{l} m_i\lambda_i$, $m_i \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\sigma(\lambda) = \sigma'\sigma_{\alpha_t}(\lambda) = \sigma'(\lambda - m_t\alpha_t) = \sigma'(\lambda) - m_t\sigma'(\alpha_t)$.

Таким образом,

$$\lambda - \sigma(\lambda) = (\lambda - \sigma'(\lambda) + m_t\sigma'(\alpha_t),$$

где первое слагаемое есть неотрицательная линейная комбинация простых корней по предположению индукции, а второе, так как $m_t \geqslant 0$ и $\sigma'(\alpha_t) \in \Phi^+$.

Наконец, последнее утверждение леммы оставим в качестве упражнения. $\square$

Как подмножество в $\mathbb{R}^l$, Λ частично упорядочивается отношением $\lambda \geqslant \mu$, означающим, что $\lambda - \mu$ является суммой положительных корней. К сожалению, это упорядочение не очень тесно связано с понятием доминантности; легко построить пример, когда корень μ доминантен, $\mu \leqslant \lambda$, но корень λ не доминантен (упражнение). Однако небольшая связь есть.

Лемма 10. *Пусть $\lambda \in \Lambda^+$. Тогда количество доминантных весов $\mu \leqslant \lambda$ конечно.*

Доказательство. Поскольку $\lambda + \mu \in \Lambda^+$, а $\lambda - \mu$ является сумой положительных корней, то

$$0 \leqslant (\lambda + \mu, \lambda - \mu) = (\lambda, \lambda) - (\mu, \mu).$$

Как следствие, μ лежит в компактном множестве

$$\{x \in \mathbb{R}^l \mid (x, x) \leqslant (\lambda, \lambda)\},$$

пересечение которого с дискретным множеством Λ^+ конечно. $\square$

9.3 Вес δ

Введем вес

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha,$$

Докажем, что δ и правда является абстрактным весом. Если рассмотреть $\sigma_i(\delta)$, то так как простое отражение переставляет все положительные корни, кроме α_i, то

$$\delta - \langle\delta, \alpha_i\rangle\alpha_i = \sigma_i(\delta) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0,\alpha\neq\alpha_i} \alpha + \frac{1}{2}\sigma_i(\alpha_i) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0,\alpha\neq\alpha_i} \alpha - \frac{1}{2}\alpha_i = \delta - \alpha_i,$$

откуда $\langle\delta, \alpha_i\rangle = 1$ для всех $\alpha_i \in \Delta$.

Понятно, что δ может не принадлежать решетке корней (например, тип $\mathbf{A}_1$), но всегда лежит в Λ.

Лемма 11. *Выполняется равенство $\delta = \sum_{j=1}^{l} \lambda_j$, то есть δ является стого доминантным весом.*

Доказательство. Равенство следует из того, что

$$\delta = \sum_i \langle \delta, \alpha_i \rangle \lambda_i \text{ и } \langle \delta, \alpha_i \rangle = 1.$$

□

Лемма 12. *Пусть* $\mu \in \Lambda^+$, $\nu = \sigma^{-1}\mu$, $\sigma \in W$. *Тогда*

$$(\nu + \delta, \nu + \delta) \leqslant (\mu + \delta, \mu + \delta),$$

причем равенство достигается только при $\nu = \mu$.

Доказательство. Мы имеем:

$$(\nu + \delta, \nu + \delta) = (\sigma(\nu + \delta), \sigma(\nu + \delta)) = (\mu + \sigma\delta, \mu + \sigma\delta) = (\mu + \delta, \mu + \delta) - 2(\mu, \delta - \sigma\delta).$$

Поскольку $\mu \in \Lambda^+$, а $\delta - \sigma\delta$ является суммой положительных корней, правая часть не преводсходит $(\mu + \delta, \mu + \delta)$, причем равенство достигается только при $(\mu, \delta - \sigma\delta) = 0$. Тогда $(\mu, \delta) = (\mu, \sigma\delta) = (\nu, \delta)$ и $(\mu - \nu, \delta) = 0$. Но $\mu - \nu$ является суммой положительных корней, а вес δ строго доминантен, поэтому $\mu = \nu$. □

9.4 Насыщенные множества весов

Особую роль в теории представлений имеют некоторые конечные множества весов, инвариантные относительно W. Назовем подмножество Π в Λ *насыщенным*, если для всех $\lambda \in \Pi$, $\alpha \in \Phi$ и для всех i между нулем и $\langle \lambda, \alpha \rangle$ вес $\lambda - i\alpha$ также лежит в Π.

Прежде всего заметим, что каждое насыщенное множество автоматически инвариантно относительно W, поскольку $\sigma_\alpha \lambda = \lambda - \langle \lambda, \alpha \rangle \alpha$, а W порождается отражениями. Мы говорим, что насыщенное множество Π имеет *старший вес* λ ($\lambda \in \Lambda^+$), если $\lambda \in \Pi$ и $\mu < \lambda$ при всех $\mu \in \Pi$.

Пример 3. (1) Множество, состоящее только из нуля, является насыщенным и имеет старший вес ноль; (2) множество Φ всех корней полупростой алгебры Ли с добавлением нуля тоже является насыщенным.

В случае неприводимой системы корней, как мы знаем из прошлого семестра, имеется единственный максимальный корень, так что этот корень является старшим весом для Π.

Лемма 13. *Насыщенное множество весов, имеющее старший вес* λ, *обязательно конечно.*

Доказательство. Следует из леммы 10. □

Лемма 14. *Пусть множество* Π *насыщенно и имеет старший вес* λ. *Если* $\mu \in \Lambda^+$ *и* $\mu < \lambda$, *то* $\mu \in \Pi$.

Доказательство. Пусть

$$\mu' = \mu + \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha \in \Pi \quad (k_\alpha \in \mathbb{Z}^+)$$

(мы не предполагаем, что вес μ' доминантен).

Покажем, что можно уменьшить одно из значений k_α на единицу, оставаясь в множестве Π (отсюда в конечном счете вытекает, что $\mu \in \Pi$). Разумеется, мы начнем с того, что вес λ сам имеет вид такого μ'. Пусть теперь $\mu \neq \mu'$, так что некоторое значение k_α положительно. Из неравенства

$$\left(\sum_\alpha k_\alpha \alpha, \sum_\alpha k_\alpha \alpha\right) > 0$$

получаем, что

$$\left(\sum_\alpha k_\alpha \alpha, \beta\right) > 0$$

для некоторого β, удовлетворяющего условию $\beta \in \Delta$ с $k_\beta > 0$. Как следствие, величина $\left\langle \sum_\alpha k_\alpha \alpha, \beta \right\rangle$ положительна. Так как вес μ доминантен, значение $\langle \mu, \beta \rangle$ неотрицательно, и потому $\langle \mu', \beta \rangle > 0$. В силу определения насыщенного множества теперь можно вычесть β из μ', оставаясь в множестве Π. Тем самым k_β уменьшается на единицу. $\square$

Из этой леммы очень четко вырисовывается строение насыщенного множества Π со старшим весом λ: Π состоит из всех доминантных весов, меньших либо равных λ в смысле частичного упорядочения, а также эквивалентных им относительно W. В частности, для данного $\lambda \in \Lambda^+$ существует не более одного такого Π. Обратно, для данного $\lambda \in \Lambda^+$ можно определить Π просто как множество доминантных весов, меньших либо равных λ, вместе с эквивалентными им относительно W. Из инвариантности множества Π при действии группы W можно вывести, что оно насыщенно и его старший вес равен λ.

9.5 Необходимое условие конечномерности

Пусть V — конечномерный неприводимый L-модуль. Тогда V имеет хотя бы один старший вектор (однозначно определенного веса λ), который порождает весь модуль V (ввиду неприводимости). Следовательно, модуль V изоморфен $V(\lambda)$.

Если α_i — простой корень, то пусть S_i — соответствующий экземпляр алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ в L. Тогда V является также (конечномерным) модулем над S_i, а старший вектор относительно L будет старшим и относительно S_i. В частности, имеется старший вектор веса λ; его вес относительно картановской подалгебры $H_i \subset S_i$ полностью определется скаляром $\lambda(h_i)$. Но тогда из описания представлений алгебры S_i (прошлый семестр) следует, что $\lambda(h_i)$ — неотрицательное целое число. Доказана

Теорема 22. *Если V — конечномерный неприводимый L-модуль со старшим весом Λ, то $\lambda(h_i)$ — неотрицательное целое число $(1 \leqslant i \leqslant l)$.*

Если V — любой конечномерный L-модуль, μ — его вес, то $\mu(h_i) = \langle \mu, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ при $1 \leqslant i \leqslant l$. Поэтому веса конечномерного модуля обязательно являются весами в смысле только что развитой абстрактной теории, а старший вес λ оказывается доминантным,

Чтобы избежать недоразумений, мы будем и далее называть весами все элементы из H^*, а линейную функцию λ, для которой все $\lambda(h_i)$ целые, будем называть *целочисленной*.

Если все $\lambda(h_i)$ — неотрицательные целые числа, то назовем функцию λ *доминантной целочисленной*. Как следствие, множество Λ всех целочисленных линейных функций является решеткой в H^* и содержит решетку корней.

Если V — некоторый L-модуль, то $\Pi(V)$ будет обозначать множество всех его весов. В случае $V = V(\lambda)$ будем писать $\Pi(\lambda)$.

9.6 Задачи

1. Докажите последнее утверждение леммы 9.

2. Пусть $\Phi = \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_m$ — разложение системы корней Φ на неприводимые компоненты, причем $\Delta = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_m$. Докажите, что Λ распадается в прямую сумму $\Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_m$; что можно сказать о Λ^+?

3. Покажите не примере (скажем, для $\mathbf{A}_2$), что возможен случай $\lambda \notin \Lambda^+$, $\alpha \in \Delta$, $\lambda - \alpha \in \Lambda^+$.

4. Докажите, что каждое подмножество из Λ содержится в единственном минимальном насыщенном множестве, конечном, если данное подмножество конечно.

10 Лекция 10. Элементарные присоединенные группы Шевалле

10.1 Достаточное условие конечномерности модуля

Теорема 23. *Если $\lambda \in H^*$ — доминантный целочисленный вес, то неприводимый L-модуль $V = V(\lambda)$ конечномерен и группа W действует на множестве его весов $\Pi(\lambda)$, причем $\dim V_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$ при $\sigma \in W$.*

Следствие 9. *Отображение $\lambda \mapsto V(\lambda)$ индуцирует взаимно однозначное соответствие между Λ^+ и классами изоморфных конечномерных неприводимых L-модулей.*

Доказательство. Вытекает из предыдущих теорем. □

Доказательство теоремы. Будет удобно начать с некоторых сведений о коммутаторах в $\mathcal{U}(L)$. Фиксируем в L стандартные образующие $\{x_i, y_i\}$.

Лемма 15. *В $\mathcal{U}(L)$ выполняются следующие тождества при $k \geqslant 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$:*
(a) $[x_j, y_i^{k+1}] = 0$ *при* $i \neq j$;
(b) $[h_j, y_i^{k+1}] = -(k+1)\alpha_i(h_j)y_i^{k+1}$;
(c) $[x_i, y_i^{k+1}] = -(k+1)y_i^k(k \cdot 1 - h_i)$.

Доказательство. Тождество (a) вытекает из того, что $\alpha_j - \alpha_i$ при $i \neq j$ не является корнем.

Тождество (b) докажем индукцией по k. В случае $k = 0$ имеем $[h_j, y_i] = -\alpha_i(h_j)y_i$.

В общем случае левая часть равна

$$h_j y_i^{k+1} - y_i^{k+1}h_j = (h_j y_i^k - y_i^k h_j)y_i + y_i^k(h_j y_i - y_i h_j) = \\ = -k\alpha_i(h_j)y_i^k y_i + y_i^k(-\alpha_i(h_j)y_i) = -(k+1)\alpha_i(h_j)y_i^{k+1}$$

с учетом индуктивного предположения.

Докажем тождество (c). Мы имеем

$$[x_i, y_i^{k+1}] = x_i y_i^{k+1} - y_i^{k+1}x_i = [x_i, y_i]y_i^k + y_i[x_i, y_i^k] = h_i y_i^k + y_i[x_i, y_i^k].$$

Теперь применим индукцию по k и формулу (b). □

Доказательство теоремы разобьем на шаги. Его идея состоит в том, чтобы показать, что группа W действует транзитивно на множестве весов модуля V, и потому это множество конечно. Для удобства обозначим представление алгебры L, соответствующее модулю V, через $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$. Фиксируем старший вектор v^+ в V (веса λ) и множество $m_i = \lambda(h_i)$, $1 \leqslant i \leqslant l$. По предположению m_i — неотрицательные целые числа.

Шаг 1. *Справедливо равенство $y_i^{m_i+1} \cdot v^+ = 0$.*

Пусть $w = y_i^{m_i+1} \cdot v^+$. Согласно утверждению (a) из леммы, $x_j \cdot w = 0$ при $i \neq j$. С другой стороны, ввиду утверждений (b) и (c) мы имеем

$$x_i y_i^{m_1+1} \cdot v^+ = y_i^{m_i+1}x_i \cdot v^+ - (m_i+1)y_i^{m_i} \cdot (m_i v^+ - m_i v^+) = 0,$$

то есть $x_i \cdot w = 0$. При $w \neq 0$ в V нашелся бы старший вектор веса $\lambda - (m_i + 1)\alpha_i \neq \lambda$, вопреки следствию с прошлой лекции о том, что для неприводимого циклического модуля старший вектор определяется с точностью до ненулевого скалярного множителя. $\square$

Шаг 2.. *При $1 \leqslant i \leqslant l$ модуль V содержит ненулевой конечномерный S_i-модуль.*

Подпространство, натянутое на v^+, $y_i \cdot v^+$, $y_i^2 \cdot v^+$, $\ldots$, $y_i^{m_i} \cdot v^+$, инвариантно относительно y_i согласно шагу 1. Оно также инвариантно относительно h_i, поскольку каждый из этих векторов принадлежит некоторому весовому подпространству; поэтому оно инвариантно и относительно x_i (что вытекает из утверждения (c) леммы и индукции по индексу k). $\square$

Шаг 3. *Модуль V является суммой конечномерных S_i-подмодулей.*

Пусть V' обозначает сумму всех таких подмодулей в V. Тогда $V' \neq 0$ согласно шагу 2. С другой стороны, пусть W — любой конечномерный S_i-подмодуль в V. Линейная оболочка всех подпространств $x_\alpha W$, $\alpha \in \Phi$, заведомо конечномерна и при этом S_i-инвариантна. Поэтому подпространство V' инвариантно относительно L, и $V' = V$ ввиду неприводимости V. $\square$

Шаг 4. *При $1 \leqslant i \leqslant l$ отображения $\varphi(x_i)$ и $\varphi(y_i)$ — локально нильпотентные эндоморфизмы модуля V.*

Действительно, если $v \in V$, то ввиду шага 3 v лежит конечной сумме конечномерных S_i-подмодулей (следовательно, в конечномерном S_i-подмодуле). На таком модуле $\varphi(x_i)$ и $\varphi(y_i)$ нильпотентны. $\square$

Шаг 5. *Отображение $s_i = \exp\varphi(x_i)\exp\varphi(-y_i)\exp\varphi(x_i)$ корректно определено и является автоморфизмом модуля V.*

Это следует из шага 4. $\square$

Шаг 6. *Если μ — некоторый вес в V, то $s_i(V_\mu) = V_{\sigma_i\mu}$ (σ_i — отражение относительно α_i).*

Подпространство V_μ лежит в конечномерном S_i-подмодуле V' (см. шаг 3), а $s_i|_{V'}$ совпадает с автоморфизмом, который мы уже разбирали. $\square$

Шаг 7. *Множество весов $\Pi(\lambda)$ инвариантно относительно W, и $\dim_\mu = \dim V_{\sigma\mu}$ ($\mu \in \Pi(\lambda)$, $\sigma \in W$).*

Так как элементы $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ порождают W, это утверждение вытекает из шага 6. $\square$

Шаг 8. *Множество $\Pi(\lambda)$ конечно.*

Мы уже знаем конечность множества функций, W-эквивалентных всем доминантным линейным функциям $\mu < \lambda$. Но это множество включает $\Pi(\lambda)$, что видно из шага 7. $\square$

Шаг 9. *Размерность модуля V конечна.*

Мы знаем, что $\dim V_\mu$ конечно для всех $\mu \in \Pi(\lambda)$. Вместе с шагом 8 это доказывает наше утверждение. $\square$

Теорема доказана. $\square$

10.2 Пары корней

Мы скоро докажем, что алгебра L имеет базис, которому отвечают целочисленные структурные константы. Но сначала, имея в виду равенство $[x_\alpha, x_\beta] = c_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$, мы должны установить ряд фактов о парах корней α, β, для которых $\alpha + \beta$ также является корнем. В следующем предложении фигурирует только система корней Φ (но не алгебра L).

Предложение 10. *Пусть α, β — линейно независимые корни, причем α-серия, порожденная корнем β, имеет вид*

$$\beta - r\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \beta + q\alpha.$$

Тогда

(a) $\langle \beta, \alpha \rangle = r - q$;

(b) *в строке встречаются корни не более двух различных длин;*

(c) *если $\alpha + \beta \in \Phi$, то $r + 1 = \frac{q(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}{(\beta,\beta)}$.*

Доказательство. Соотношение (a) мы доказывали в прошлом семестре (поэтому оставим его в качестве упражнения).

Докажем утверждение (b): $\Phi' = (\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta) \cap \Phi$ — система корней ранга 2. Если система приводима, то она принадлежит типу $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1$, то есть $\Phi' = \{\pm\alpha, \pm\beta\}$, и доказывать нечего. Если же она неприводима, то $\Phi' = \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2$ или $\mathbf{G}_2$, откуда следует наше утверждение.

Очевидно, что и утверждение (c) можно доказать, рассмотрев системы корней ранга 2. Однако имеется геометрическое рассуждение, применимое в общей ситуации.

Во-первых, из утверждения (a) вытекает, что

$$(r+1) - \frac{q(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}{(\beta,\beta)} = q + \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} + 1 - \frac{q(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}{(\beta,\beta)} =$$
$$= \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} + 1 - \frac{q(\alpha,\alpha)}{\beta,\beta)} - \frac{2q(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)} = (\langle \beta, \alpha \rangle + 1)\left(1 - \frac{1(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}\right).$$

Множители последнего произведения обозначим через A, B. Нужно показать, что какой-то из них равен нулю. Ситуация не симметрична по α, β, поэтому нужно выделить два случая.

Случай 1: $(\alpha, \alpha) \geqslant (\beta, \beta)$. Тогда $|\langle \beta, \alpha \rangle| \leqslant |\langle \alpha, \beta \rangle|$. Поскольку α и β линейно независимы, то $\langle \beta, \alpha \rangle \cdot \langle \alpha, \beta \rangle = 0, 1, 2$ или 3. Значит, по предыдущему неравенству $\langle \beta, \alpha \rangle = -1, 0$ или 1. В первом случае $A = 0$, что и требовалось. В противном случае $(\beta, \alpha) \geqslant 0$, поэтому $(\beta + \alpha, \beta + \alpha)$ строго больше, чем β и α. Поскольку $\alpha + \beta \in \Phi$, из утверждения (b) следует, что $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta)$. Аналогично $(\beta + 2\alpha, \beta + 2\alpha) > (\beta + \alpha, \beta + \alpha)$, и утверждение (b) влечет условие $\beta + 2\alpha \notin \Phi$, откуда $q = 1$, то есть $B = 0$.

Случай 2: $(\alpha, \alpha) < (\beta, \beta)$. Тогда $(\alpha+\beta, \alpha+\beta) = (\alpha, \alpha)$ или (β, β), откуда в обоих случаях мы получаем $(\alpha, \beta) < 0$ (и потому $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$). Далее, $(\beta - \alpha, \beta - \alpha) > (\beta, \beta) > (\alpha, \alpha)$, поэтому $\beta - \alpha \notin \Phi$, то есть $r = 0$. Как и выше, $\langle \beta, \alpha \rangle \cdot \langle \alpha, \beta \rangle = 0, 1, 2$ или 3, однако здесь $|\langle \alpha, \beta \rangle| < |\langle \beta, \alpha \rangle|$ откуда следует, что $\rangle \alpha, \beta \rangle = -1, 0$ или 1. Но мы знаем, что $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$, поэтому $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$. Ввиду утверждения (a) мы имеем

$$q = -\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \beta \rangle} = \frac{(\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)}.$$

Значит, $B = 0$. $\square$

10.3 Существование базиса Шевалле

Лемма 16. *Пусть α, β — независимые корни. Возьмем элементы $x_\alpha \in L_\alpha$, $x_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$, для которых $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$, и произвольный элемент $x_\beta \in L_\beta$. Тогда если α-серия, порожденная корнем β, имеет вид $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$, то $[x_{-\alpha}, [x_\alpha, x_\beta]] = q(r+1)x_\beta$.*

Доказательство. Если $\alpha+\beta \notin \Phi$, то $q = 0$ и $[x_\alpha, x_\beta] = 0$, поэтому обе части рассматриваемого равенства равны нулю.

В общем случае можно использовать присоединенное представление алгебры S_α ($\cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$) на L. А именно, S_α-подмодуль в L, порожденный элементом x_β, имеет размерность $r+q+1$ (число корней в α-серии, порожденной весом β) и старший вес $r+q$. Тогда элемент x_β является ненулевым кратным вектора v_q, и последовательное применение отображений $\operatorname{ad} x_\alpha$ и $\operatorname{ad} x_{-\alpha}$ умножает v_q (значит, и x_β) на скаляр $q(r+1)$. $\square$

Предложение 11. *Корневые векторы $x_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha \in \Phi$, можно выбрать так, чтобы выполнялись следующие условия:*

(a) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$;

(b) *если $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$, $[x_\alpha, x_\beta] = c_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$, то $c_{\alpha\beta} = -c_{-\alpha,-\beta}$.*

При любом таком выборе корневых векторов скаляры $c_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$) автоматически удовлетворяют условию

(c) $c_{\alpha\beta}^2 = q(r+1)\frac{(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\beta,\beta)}$, *где $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ составляют α-серию, порожденную корнем β.*

Доказательство. Напомним, что алгебра L обладает автоморфизмом σ порядка два, отображающим L_α в $L_{-\alpha}$, $\alpha \in \Phi$, и действующим на H как умножение на -1. Для произвольного ненулевого $x_\alpha \in L_\alpha$ элемент $x_{-\alpha} = -\sigma(x_\alpha) \in L_{-\alpha}$ не равен нулю, при этом $\varkappa(x_\alpha, x_{-\alpha}) \neq 0$ ($\varkappa$ — форма Киллинга). При замене x_α на cx_α, $c \in \mathbb{F}$, это значение умножается на c^2. Поскольку поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, при подходящем выборе x_α можно получить любое заданное ненулевое значение. Возьмем $\varkappa(x_\alpha, x_{-\alpha}) = 2/(\alpha,\alpha)$. В этом случае (прошлый семестр) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ ($= 2t_\alpha/(\alpha,\alpha)$). Если для каждой пары корней $\{\alpha, -\alpha\}$ выбрать $\{x_\alpha, x_{-\alpha}\}$ таким образом, то условие (a) будет выполнено.

Пусть теперь $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$, так что $[x_\alpha, x_\beta] = c_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$ для некоторого $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{F}$. Применив к этому уравнению автоморфизм σ, получаем

$$[-x_{-\alpha}, -x_{-\beta}] = -c_{\alpha\beta} x_{-\alpha-\beta}.$$

С другой стороны,

$$[x_{-\alpha}, x_{-\beta}] = c_{-\alpha,-\beta} x_{-\alpha-\beta},$$

откуда вытекает условие (b).

Выбрав корневые векторы $\{x_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$, для которых выполняются условия (a) и (b), рассмотрим ситуацию, когда $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$ (как следствия, α и β, а тогда и t_α, t_β линейно независимы). Поскольку $t_{\alpha+\beta} = t_\alpha + t_\beta$, из условия (a) вытекает, что

$$[c_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}, c_{\alpha\beta} x_{-\alpha-\beta}] = c_{\alpha\beta}^2 h_{\alpha+\beta} = \frac{2c_{\alpha\beta}^2}{(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}(t_\alpha + t_\beta).$$

С другой стороны, ввиду условия (b) левая часть также равняется

$$-[[x_\alpha, x_\beta], [x_{-\alpha}, x_{-\beta}]] = -[x_\alpha, [x_\beta, [x_{-\alpha}, x_{-\beta}]]] + [x_\beta, [x_\alpha, [x_{-\alpha}, x_{-\beta}]]] = \\ = [x_\alpha, [x_\beta, [x_{-\beta}, x_{-\alpha}]]] + [x_\beta, [x_\alpha, [x_{-\alpha}, x_{-\beta}]]].$$

Пусть β-серия, порожденная корнем α, имеет вид $\alpha - r'\beta, \ldots, \alpha + q'\beta$. Тогда к каждому слагаемому можно применить предыдущую лемму (умножив α, β на -1, что не влияет на r, q, r', q'), и мы получим

$$q'(r'+1)[x_\alpha, x_{-\alpha}] + q(r+1)[x_\beta, x_{-\beta}] = \frac{2q'(r'+1)}{(\alpha,\alpha)}t_\alpha + \frac{2q(r+1)}{(\beta,\beta)}t_\beta.$$

Сопоставив эти коэффициенты с полученными выше, с учетом линейной независимости элементов t_α и t_β, получаем условие (c). $\square$

Теперь мы готовы к тому, чтобы построить *базис Шевалле* для L. По определению это любой базис $\{x_\alpha; h_i \mid \alpha \in \Phi, 1 \leqslant i \leqslant l\}$, в котором элементы x_α удовлетворяют условиям (a) и (b) предыдущего предложения и $h_i = h_{\alpha_i}$ для некоторого базиса $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ системы Φ.

Теорема 24 (Шевалле)**.** *Пусть $\{x_\alpha; h_i \mid \alpha \in \Phi, 1 \leqslant i \leqslant l\}$ — базис Шевалле в алгебре L. Тогда соответствующие структурные константы лежат в $\mathbb{Z}$. Более точно,*

(a) $[h_i, h_j] = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$;

(b) $[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha$, $1 \leqslant i \leqslant l$, $\alpha \in \Phi$;

(c) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ *является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией векторов $h_1, \ldots, h_l$;*

(d) *если α, β — независимые корни, $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ составляют α-серию, порожденную корнем β, то $x_\alpha, x_\beta] = 0$ при $q = 0$ и $[x_\alpha, x_\beta] = \pm(r+1)x_{\alpha+\beta}$ при $\alpha + \beta \in \Phi$.*

Доказательство. Утверждение (a) нам известно, утверждение (b) вытекает из $\alpha(h_i) = \langle \alpha, \alpha_i \rangle$. Что касается (c), то вспомним, что двойственные корни $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$ тоже образуют систему корней с базисом $\Delta^\vee = \{\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_l^\vee\}$ (упражнение). При отождествлении H и H^* с помощью формы Киллинга элемент t_α соответствует α, а h_α соответствует $\alpha^\vee$. Поскольку каждый корень $\alpha^\vee$ является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией элементов из $\Delta^\vee$, каждый элемент h_α является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией элементов $h_1, \ldots, h_l$. Наконец, утверждение (d) вытекает из утверждения (c) предыдущего предложения в сочетании с утверждением (c) предложения 10. $\square$

Может показаться странным, что в определении базиса Шевалле требуется выполнение равенства $c_{\alpha\beta} = -c_{-\alpha,-\beta}$, а не $c_{\alpha\beta} = c_{-\alpha,-\beta}$. Однако эта ассиметрия неизбежна.

В самом деле, пусть выполнено условие (a) последнего предложения. Можно показать, применяя подходящим образом тождество Якоби, что $c_{\alpha\beta}c_{-\alpha,-\beta} = -(r+1)^2$. Но это означает, что условие (d) теоремы не могло бы выполняться без условия (b) предложения.

В упражнении мы предложим проверить, что из базисов классических алгебр (которые приводились и весной, и в начале этого семестра) можно получить базисы Шевалле.

10.4 Вопросы единственности

Единственен ли базис Шевалле? Если базис Δ фиксирован, то элементы h_i полностью определены. С другой стороны, можно варьировать выбор элементов x_α. Например, можно заменить x_α на $\eta(\alpha)x_\alpha$, $\alpha \in \Phi$. Тогда

$$[\eta(\alpha)x_\alpha, \eta(-\alpha)x_{-\alpha}] = \eta(\alpha)\eta(-\alpha)h_\alpha.$$

Чтобы выполнялось условие (a) предыдущего предложения, необходимо равенство

$$\eta(\alpha)\eta(-\alpha) = 1. \qquad (*)$$

Если $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$, то

$$[\eta(\alpha)x_\alpha, \eta(\beta)x_\beta] = \eta(\alpha)\eta(\beta)[x_\alpha, x_\beta] = c_{\alpha\beta}\eta(\alpha)\eta(\beta)x_{\alpha+\beta} = c'_{\alpha\beta}\eta(\alpha+\beta)x_{\alpha+\beta},$$

где

$$c'_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}\eta(\alpha)\eta(\beta)}{\eta(\alpha+\beta)}.$$

Аналогичная выкладка с использованием $(*)$ показывает, что для выполнения условия (b) предыдущего предложения мы должны иметь также

$$c'_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}\eta(\alpha+\beta)}{\eta(\alpha)\eta(\beta)},$$

то есть

$$\eta(\alpha)\eta(\beta) = \pm\eta(\alpha+\beta). \qquad (**)$$

Очевидно и обратное: для изменения элемента x_α можно использовать любую функцию $\eta : \Phi \to \mathbb{F}$, удовлетворяющую условиям $(*)$ и $(**)$.

Более тонок вопрос о знаках. Мы имеем $[x_\alpha, x_\beta] = \pm(r+1)x_{\alpha+\beta}$, но при выводе этого равенства не был выбран плюс или минус. Это не случайно, в чем можно убедиться, заменив в базисе Шевалле для $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ на $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: нет причин предпочесть один выбор другому.

Существует алгоритм согласованного выбора знаков, основанный лишь на знании системы Φ, мы в нашем курсе не будем этим заниматься.

10.5 Построение присоединенных групп Шевалле

Предложение 12. *Пусть $\alpha \in \Phi$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда эндоморфизм $(\operatorname{ad} x_\alpha)^m/m!$ представляется целочисленной матрицей в базисе Шевалле.*

Доказательство. Мы имеем

$$(\operatorname{ad} x_\alpha)(h_i) = [x_\alpha, h_i] = -\langle\alpha, \alpha_i\rangle x_\alpha$$

и

$$\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^m}{m!}(h_i) = 0 \text{ при всех } m \geqslant 2$$

— целочисленно выражаются через базис Шевалле.

Кроме того,

$$\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^2}{2}(x_{-\alpha}) = \frac{1}{2}[x_\alpha, h_\alpha] = -x_\alpha$$

и

$$\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^m}{m!}(x_{-\alpha}) = 0 \text{ при всех } m \geqslant 3$$

— также целочисленно выражаются через базис Шевалле.

Разумеется,

$$\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^m}{m!}(x_\alpha) = 0 \text{ при } m \geqslant 1.$$

Остается рассмотреть базисные элементы x_β, $\beta \neq \pm\alpha$.

Если $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ составляют α-серию, порожденную корнем β, то роль числа r для корней $\beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ играют (соответственно) $r + 1, r + 2, \ldots, r + q$.

Следовательно,

$$\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^m}{m!}(x_\beta) = \pm\frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+m)}{m!}x_{\beta+m\alpha} \text{ (или 0, если } \beta + m\alpha \notin \Phi).$$

Значит, правая часть является целочисленным кратным вектора $x_{\beta+m\alpha}$, что нам и требовалось. □

Таким образом, каждый эндоморфизм $\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^m}{m!}$ при $\alpha \in \Phi$, $m \in \mathbb{N}$, представляется в базисе Шевалле целочисленной матрицей.

Теперь представим себе, что у нас имеется некоторое коммутативное кольцо R с единицей. В этом случае мы можем представить в R аналог целых чисел — подкольцо в R, являющееся образом целых чисел при их гомоморфизме в R, продолжающем естественное отображение $1 \mapsto 1$. Так как мы отобразили в R целые числа, то целочисленные матрицы также можно рассматривать как матрицы над кольцом $M_N(R)$.

Учитывая это, рассмотрим для каждого $\alpha \in \Phi$, $t \in R$ отображение

$$x_\alpha(t) := \exp(t(\operatorname{ad} x_\alpha)) = E + t \cdot (\operatorname{ad} x_\alpha) + t^2\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^2}{2!} + \cdots + t^m\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^m}{m!}.$$

Заметим, что все отображения $x_\alpha(t)$ являются автоморфизмами в N-мерного свободного R-модуля, то есть лежат в $\mathrm{GL}_N(R)$.

Таким образом мы можем породить подгруппу в $\mathrm{GL}_N(R)$:

$$E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) := \langle x_\alpha(t) \mid \alpha \in \Phi, t \in R\rangle \subset \mathrm{GL}_N(R).$$

Она и называется *элементарной присоединенной группой Шевалле типа* Φ *над кольцом* R.

10.6 Задачи

1. Докажите утверждение (а) предложения 10.

2. Докажите, что двойственный корни $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$ образуют систему корней.

3. Получите базисы Шевалле из базисов классических алгебр типов $\mathbf{C}_l$ и $\mathbf{D}_l$.

4. Докажите, что если в каждой компоненте системы Φ встречаются только корни одной длины, то все элементы $c_{\alpha\beta}$ равны ± 1 (когда $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$).

11 Лекция 11. Теорема Костанта

Пусть, как всегда, L — полупростая (комплексная) алгебра Ли, H — ее картановская подалгебра, Φ — соответствующая система корней, Δ — система простых корней в Φ. Фиксируем в L базис Шевалле

$$\{x_\alpha \mid \alpha \in \Phi;\ h_i \mid 1 \leqslant i \leqslant l\}.$$

Чтобы построить группы Шевалле, отвечающие произвольным представлениям π алгебры L (а не только присоединенному, как мы сделали на прошлой лекции), мы должны работать в универсальной обертывающей алгебре $\mathcal{U}(L)$.

Идея состоит в том, чтобы в произвольном (конечномерном) L-модуле построить решетку, аналогичную $L(\mathbb{Z})$ и инвариантную относительно всех $\pi(x_\alpha^m)/m!$.

11.1 Одна комбинаторная лемма

Вспомним формулу для биномиального коэффициента $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$. Если здесь заменить n на элемент x коммутативной ассоциативной $\mathbb{F}$-алгебры (с единицей), то полученное выражение снова корректно определено. Его можно обозначить C_x^k, $k \in \mathbb{Z}_+$. Выполняется и известное тождество для биномиальных коэффициентов:

$$C_{x+1}^k - C_x^k = C_x^{k-1}.$$

Как обычно, мы полагаем $C_x^0 = 1$ и $C_x^k = 0$ при отрицательных k.

Лемма 17. *Пусть $t_1, \ldots, t_l$ — переменные, $f = f(t_1, \ldots, t_l)$ — такой многочлен над $\mathbb{F}$, что $f(n_1, \ldots, n_l) \in \mathbb{Z}$ при всех $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{Z}$. Тогда f является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией многочленов $C_{t_1}^{b_1} C_{t_2}^{b_2} \ldots C_{t_l}^{b_l}$, где $b_1, \ldots, b_l \in \mathbb{Z}_+$ и b_i не превосходит степени f как многочлена от t_i.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что предположение выглядит обоснованным, потому что

$$C_{t_i}^{b_i} = \frac{t_i(t_i-1)\ldots(t_i-b_i+1)}{b_i!}$$

принимает целочисленное значение, если подставить вместо t_i целое число. Заметим также, что указанные многочлены составляют $\mathbb{F}$-базис для $\mathbb{F}[t_1, \ldots, t_l]$.

Доказательство проводится индукцией по l и по степени многочлена f относительно t_l.

Если f — константа, то она должна быть целочисленным кратным константы $1 = C_{t_l}^0$, и доказывать нечего.

В общем случае положим

$$f = \sum_{k=0}^{r} f_k(t_1, \ldots, t_{l-1}) C_{t_l}^k, \qquad (*)$$

где r равно степени многочлена f относительно t_l и

$$f_k(t_1, \ldots, t_{l-1}) \in \mathbb{F}[t_1, \ldots, t_{l-1}].$$

В обеих частях равенства $(*)$ формально заменим t_l на t_{l+1} и вычтем одно из другого. Ввиду тождества, упомянутого выше, правая часть полученного равенства равна

$$\sum_{k=0}^{r} f_k(t_1, \ldots, t_{l-1}) C_{t_l}^{k-1},$$

а в левой части стоит многочлен, удовлетворяющий первоначальному предположению относительно f. Повторим этот процесс r раз; тогда все коэффициенты справа обратятся в нуль, кроме коэффициента при $f_r(t_1, \ldots, t_{l-1})$, равного $C_{t_l}^{r-r} = 1$. Многочлен f_r удовлетворяет предположению относительно f (он принимает целочисленные значения на $\mathbb{Z}^{l-1}$), но имеет на одно переменное меньше. По индукции получаем, что f_r можно выразить требуемым образом. При этом $f - f_r(t_1, \ldots, t_{l-1}) C_{t_l}^r$ удовлетворяет первоначальному предположению относительно f, но имеет степень меньше r относительно t_l, и можно снова применить индукцию, что завершает доказательство. $\square$

11.2 Частный случай: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$.

В этом пункте мы рассмотрим частный случай $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, используя стандартный базис Шевалле x, y, h. Следующая лемма и следствие дают в этом случае доказательство теоремы Костанта; позже мы на этой основе рассмотрим общий случай.

Лемма 18. *Если $a, c \in \mathbb{Z}^+$, то в $\mathcal{U}(L)$ выполняется следующее равенство:*

$$\frac{x^c}{c!} \cdot \frac{y^a}{a!} = \sum_{k=0}^{\min(a,c)} \frac{y^{a-k}}{(a-k)!} C_{h-a-c+2k}^{k} \frac{x^{c-k}}{(c-k)!}.$$

Доказательство. Если $a = 0$ (соответственно $c = 0$), то правая часть равна $x^c/c!$ (соотвественно $y^a/a!$). Если $a = c = 1$, то уравнение принимает вид $xy = yx + h$ (равенство верно). Для общего случая проведем индукцию по a и по c. Пусть сначала $c = 1$; индукцией по a получим

$$\begin{aligned}
\frac{xy^a}{a!} = \frac{xy^{a-1}}{(a-1)!} \cdot \frac{y}{a} = \frac{y^{a-1}}{(a-1)!} \cdot \frac{xy}{a} + \frac{y^{a-2}}{(a-2)!}(h-a+2)\frac{y}{a} = \\
= \frac{y^a x}{a!} + \frac{y^{a-1}h}{a!} + \frac{y^{a-1}h}{a(a-2)!} - \frac{2y^{a-1}}{a(a-2)!} - \frac{y^{a-1}}{a(a-3)!} = \\
= \frac{y^a x}{a!} + \frac{y^{a-1}h}{(a-1)!} - \frac{y^{a-1}}{(a-2)!} = \frac{y^a x}{a!} + \frac{y^{a-1}}{(a-1)!}(h-a+1).
\end{aligned}$$

Теперь применим индукцию по c, используя тождество суммирования биномиальных коэффициентов и тот факт, что $xf(h) = f(h-2)x$ для любого многочлена $f(t)$ (упражнение). $\square$

Следствие 10. *Если $b \in \mathbb{Z}^+$, то C_h^b принадлежит подкольцу в $\mathcal{U}(L)$, порожденному всеми элементами $x^c/c!$ и $y^a/a!$ ($a, c \in \mathbb{Z}^+$).*

Доказательство. Это очевидно при $b = 0$, поэтому можно проводить индукцию по b. Возьмем в лемме 18 $a = c = b$, тогда правая часть равна

$$C_h^b + \sum_{k=0}^{b-1} \frac{y^{b-k}}{(b-k)!} C_{h-2b+2k}^k \frac{x^{b-k}}{(b-k)!}$$

(и принадлежит указанному подкольцу в $\mathcal{U}(L)$). Пусть $k < b$. Ясно, что многочлен $C_{t-2b+2k}^k$ от переменного t принимает в целых точках целые значения, и по лемме 17 его можно записать как $\mathbb{Z}$-линейную комбинацию многочленов C_T^j, где $j \leqslant k$ $(< b)$. В свою очередь, индукция по b показывает, что C_h^j принадлежат указанному подкольцу в $\mathcal{U}(L)$, и как следствие ему принадлежит и C_h^b. $\square$

11.3 Леммы о коммутировании

Вернемся к общему случаю. При любом $\alpha \in \Phi$ в качестве стандартного базиса трехмерной простой подалгебры S_α можно взять часть заданного базиса Шевалле в L. Поэтому результаты предыдущего пункта можно свободно применять в ситуациях, где фигурируют лишь $\pm\alpha$. Главную проблему теперь составляют пары независиых корней.

Лемма 19. *Пусть V, W — два L-модуля, A, B — подгруппы в них. Если A, B инвариантны относительно всех эндоморфизмов $x_\alpha^t/t!$ $(\alpha \in \Phi, t \in \mathbb{Z}^+)$, то это верно и для $A \otimes B \subset V \otimes W$.*

Доказательство. Напомним, что $x_\alpha \cdot (v \otimes w) = x_\alpha \cdot v \otimes w + v \otimes x_\alpha \cdot w$. С помощью биномиального разложения получаем, что

$$\frac{x_\alpha^t}{t!}(v \otimes w) = \sum_{k=0}^{t} \left(\frac{x_\alpha^k}{k!} \cdot v \otimes \frac{x_\alpha^{t-k}}{(t-k)!} \cdot w \right).$$

Если $v \in A$, $w \in B$, то каждое слагаемое правой части лежит в $A \otimes B$. $\square$

Следствие 11. *Пусть $L(\mathbb{Z})$ обозначает $\mathbb{Z}$-линейную оболочку базиса Шевалле, выбранного в L. Тогда при $\alpha \in \Phi$, $t \in \mathbb{Z}_+$ эндоморфизм $\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^t}{t!}$ оставляет инвариантным произведение $L(\mathbb{Z}) \otimes \cdots \otimes L(\mathbb{Z})$.*

Доказательство. Применим предложение (последнее из предыдущей лекции) о том, что так устроен базис Шевалле, и предыдущую лемму. $\square$

Подмножество Ψ в Φ называется *замкнутым*, если из того, что $\alpha, \beta \in \Psi$, $\alpha + \beta \in \Phi$, следует, что $\alpha + \beta \in \Psi$.

Примеры: Φ, Φ^+, множество всех элементов $i\alpha + j\beta \in \Phi$, где $i, j \geqslant 0$, α, β — линейно независимые корни.

Лемма 20. *Пусть Ψ — замкнутое множество корней, причем $\Psi \cap (-\Psi) = \emptyset$. Далее, пусть $\mathcal{X}$ — подкольцо с единицей в $\mathcal{U}(L)$, порожденное всеми элементами $x_\alpha^t/t!$ ($\alpha \in \Psi, t \in \mathbb{Z}_+$). При любом упорядочении множества Ψ множество произведений*

$$\prod_{\alpha\in\Psi} \frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}$$

(взятых в данном порядке) составляет базис $\mathbb{Z}$-модуля $\mathcal{X}$.

Доказательство. Ясно, что $\mathbb{F}$-линейная оболочка всех подпространств L_α ($\alpha \in \Psi$) является подалгеброй X в L; применив теорему ПБВ к $\mathcal{U}(X)$, мы видим, что указанные произведения составляют базис для $\mathcal{X}$ над $\mathbb{F}$. Поэтому достаточно показать, что при разложении по базису все коэффициенты лежат в $\mathbb{Z}$.

Назовем $\sum\limits_{\alpha\in\Psi} t_\alpha$ *степенью* произведения

$$\prod_{\alpha\in\Psi} \frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}$$

Если $x \in \mathcal{X}$ не является скаляром, то

$$x = c \prod_{\alpha\in\Psi} \frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!} + (\text{слагаемые степени не выше, чем } \sum t_\alpha),$$

где $0 \neq c \in \mathbb{F}$, причем остальные слагаемые степени $t = \sum t_\alpha$ включают последовательности, отличные от $(\dots t_\alpha \dots)$.

Посредством присоединенного представления $\mathcal{X}$ действует на $L\otimes\cdots\otimes L$ (t экземпляров).

В частности, рассмотрим

$$x \cdot ((x_{-\alpha} \otimes \cdots \otimes x_{-\alpha}) \otimes (x_{-\beta} \otimes \cdots \otimes x_{-\beta}) \otimes \dots),$$

где $\Psi = (\alpha, \beta, \dots)$, в первой скобке t_α сомножителей, во второй — t_β.

Какова компонента этого элемента в $H \otimes \cdots \otimes H$ (относительно стандартного ПБВ-базиса)? Непосредственно проверяется, что первое слагаемое в x, а именно $\prod\limits_\alpha \frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!}$, дает

$$c \cdot ((h_\alpha \otimes \cdots \otimes h_\alpha) \otimes (h_\beta \otimes \cdots \otimes h_\beta) \otimes \dots).$$

Однако остальные слагаемые $\prod \frac{x_\alpha^{u_\alpha}}{u_\alpha!}$ в x, примененные к тому же элементу, не дают ненулевой компоненты в $H \otimes \cdots \otimes H$; либо множителей слишком мало ($\sum u_\alpha < \sum t_\alpha$), либо $\sum u_\alpha = \sum t_\alpha$, но множители "неправильно распределены".

Согласно следствию из предыдущей леммы, элемент x сохраняет $L(\mathbb{Z}) \otimes \cdots \otimes L(\mathbb{Z})$ (t экземпляров). При этом $L(\mathbb{Z})$ не зависит от выбора базиса Δ, поэтому можно считать, что α (первый элемент в Ψ) — простой корень. Элементы h_β с простыми корнями β составляют базис свободного $\mathbb{Z}$-модуля $H(\mathbb{Z}) = L(\mathbb{Z}) \cap H$, поэтому их всевозможные

тензорные произведения составляют базис свободного $\mathbb{Z}$-модуля $H(\mathbb{Z}) \otimes \cdots \otimes H(\mathbb{Z})$. С другой стороны, мы только что показали, что

$$c((h_\alpha \otimes \cdots \otimes h_\alpha) \otimes (h_\beta \otimes \cdots \otimes h_\beta) \otimes \dots) \in H(\mathbb{Z}) \otimes \cdots \otimes H(\mathbb{Z}).$$

Отсюда ясно, что $c \in \mathbb{Z}$. Теперь можно повторить рассуждения для элемента

$$x - c \prod_\alpha \frac{x_\alpha^{t_\alpha}}{t_\alpha!} \in \mathcal{X}.$$

Индукция по числу слагаемых завершает доказательство. $\square$

Для удобства любое произведение элементов вида $\frac{x_\alpha^t}{t!}$, $C_{h_i - j}^k$ $(j, k \in \mathbb{Z},\ t \in \mathbb{Z}_+)$ в $\mathcal{U}(L)$ будем называть *мономом*, а сумму встречающихся в нем чисел t — его *высотой*.

Лемма 21. *Пусть $\alpha, \beta \in \Phi$, $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\frac{x_\beta^m}{m!} \cdot \frac{x_\alpha^k}{k!}$ является $\mathbb{Z}$-линейной комбинацией элементов $\frac{x_\alpha^k}{k!} \cdot \frac{x_\beta^m}{m!}$ и мономов высоты меньше чем $k + m$.*

Доказательство. При $\alpha = \beta$ доказывать нечего. При $\alpha = -\beta$ наше утверждение вытекает из леммы для $\mathfrak{sl}_2$. В остальных случаях α и β независимы и можно применить предыдущую лемму к множеству корней вида $i\alpha + j\beta$ $(i, j \geqslant 0)$, представив данный моном как $\mathbb{Z}$-линейную комбинацию монома $\frac{x_\alpha^k}{k!} \cdot \frac{x_\beta^m}{m!}$ и других мономов. Остается показать, что последние имеют высоту меньше чем $k + m$. Но из теоремы ПБВ уже вытекает, что

$$\frac{x_\beta^m}{m!} \cdot \frac{x_\alpha^k}{k!} = \frac{x_\alpha^k}{k!} \cdot \frac{x_\beta^m}{m!} + (\mathbb{F}\text{-линейная комбинация элементов ПБВ-базиса степени меньше чем } k+m).$$

Так как мы используем мономы, кратные элементам ПБВ-базиса, доказательство завершено. $\square$

Лемма 22. *Пусть $\alpha, \beta \in \Phi$, $f(t) \in \mathbb{F}[t]$ (t — переменное). Тогда при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ выполняется равенство*

$$x_\alpha^k f(h_\beta) = f(h_\beta - k\alpha(h_\beta)) x_\alpha^k.$$

Доказательство. Достаточно (ввиду линейности) разобрать случай, когда f имеет вид t^m; тогда наше утверждение принимает вид

$$x_\alpha^k h_\beta^m = (h_\beta - k\alpha(h_\beta))^m x_\alpha^k.$$

Если k или m равно нулю, то это очевидно. Если $k = m = 1$, то $x_\alpha h_\beta = h_\beta x_\alpha - \alpha(h_\beta) x_\alpha = (h_\beta - \alpha(h_\beta)) x_\alpha$, что и требовалось. Проведем индукцию по k и m. При фиксированном k из равенства выше для всех показателей меньших, чем m, сразу следует это равенство для m:

$$x_\alpha^k h_\beta^{m-1} h_\beta = (h_\beta - k\alpha(h_\beta))^{m-1} x_\alpha^k h_\beta = (h_\beta - k\alpha(h_\beta))^{m-1} (h_\beta - k\alpha(h_\beta)) x_\alpha^k = \\ = (h_\beta - k\alpha(h_\beta))^m x_\alpha^k.$$

Поэтому равенство верно при $k = 1$ и произвольном m. В свою очередь, выполнение этого равенства для показателей меньших, чем k и произвольного m (или f) влечет его справедливость для данного k и произвольного m. $\square$

11.4 Доказательство теоремы Костанта

Фиксируем упорядочение $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ в Φ^+. Будем обозначать наборы из m или l неотрицательных целых чисел через

$$A = (a_1, \ldots, a_m),\ B = (b_1, \ldots, b_l),\ C = (c_1, \ldots, c_m).$$

Определим в $\mathcal{U}(L)$ следующие элементы:

$$f_A = \frac{x_{-\alpha_1}^{a_1}}{a_1!} \ldots \frac{x_{-\alpha_m}^{a_m}}{a_m!}, \quad h_B = C_{h_1}^{b_1} \ldots C_{h_l}^{b_l}, \quad e_C = \frac{x_{\alpha_1}^{c_1}}{c_1!} \ldots \frac{x_{\alpha_m}^{c_m}}{c_m!}.$$

Отметим, что всевозможные h_B составляют базис над $\mathbb{F}$ в $\mathcal{U}(H)$: по существу этот факт содержится в замечании из начала лекции о многочленах. В сочетании ПБВ это показывает, что всевозможные элементы $f_A h_B e_C$ составляют $\mathbb{F}$-базис в $\mathcal{U}(L)$.

Теорема 25 (Костант)**.** *Пусть $\mathcal{U}(L)_\mathbb{Z}$ — подкольцо с единицей в $\mathcal{U}(L)$, порожденное всеми элементами вида $x_\alpha^t/t!$ ($\alpha \in \Phi, t \in \mathbb{Z}_+$). Далее, пусть $\mathcal{B}$ — решетка в $\mathcal{U}(L)$ с $\mathbb{Z}$-базисом, состоящим из всех элементов вида $f_A h_B e_C$. Тогда $\mathcal{B} = \mathcal{U}(L)_\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Доказательство заключается в соединении предшествующих результатов. Прежде всего, $C_{h_i}^{b_i} \in \mathcal{U}(L)_\mathbb{Z}$ по следствию из леммы 18. Поэтому $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}(L)_\mathbb{Z}$.

Труднее доказать обратное включение. Достаточно показать, что все "мономы" (в смысле предыдущего пункта) лежат в $\mathcal{B}$, так как они порождают $\mathbb{Z}$-модуль $\mathcal{U}(L)_\mathbb{Z}$. Применим для этого индукцию по высоте. Мономы высоты 0 включают только множители вида $C_{h_i - j}^k$ и по лемме 17 лежат в $\mathcal{B}$. В общем случае леммы 21 и 22 (вместе с индуктивным предположением) позволяют нам записать любой моном как $\mathbb{Z}$-линейную комбинацию других мономов, в которых множители, включающие $x'_{-\alpha}s$, $h's$ и $x'_\alpha s$, идут в предписанном порядке. Далее, из тождества

$$\frac{t^k}{k!} \cdot \frac{t^m}{m!} = C_{m+k}^m \frac{t^{k+m}}{(k+m)!}$$

вытекает, что каждый элемент $\pm x_\alpha$ появится хотя бы в одном слагаемом каждой такой суммы. Доказательство завершается применением лемм 18 и 22. $\square$

Задачи

1. Докажите последнюю часть леммы 18.

2. Аккуратно завершите доказательство леммы 22.

3. Пусть $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$, а $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ — базис неприводимого L-модуля $V(m)$ старшего веса m. Докажите, что $\mathbb{Z}$-оболочка этого базиса инвариантна относительно $\mathcal{U}(L)_\mathbb{Z}$.

12 Лекция 12. Допустимые решетки и элементарные группы Шевалле

С помощью теоремы Костанта мы построим допустимую решетку в произвольном конечномерном L-модуле и опишем ее стабилизатор в L. После этого мы сможем ввести элементарные группы Шевалле уже не только присоединенного, но всех типов.

12.1 Существование допустимых решеток

Из теоремы Костанта (или предшествующих лемм) вытекает, что если

$$N^+ = \bigcup_{\alpha>0} L_\alpha, \quad N^- = \bigcup_{\alpha<0} L_\alpha,$$

то каждая из алгебр $\mathcal{U}(N^-)$,$\mathcal{U}(H)$,$\mathcal{U}(N^+)$ имеет "$\mathbb{Z}$-форму", $\mathbb{Z}$-базис которой состоит из всех f_A, h_B, e_C соответственно. Обозначим эти подкольца через $\mathcal{U}_\mathbb{Z}^-$, $\mathcal{U}_\mathbb{Z}^0$, $\mathcal{U}_\mathbb{Z}^+$. Тогда $\mathcal{U}_\mathbb{Z}$ $(= \mathcal{U}(L)_\mathbb{Z})$ равняется $\mathcal{U}_\mathbb{Z}^-\mathcal{U}_\mathbb{Z}^0\mathcal{U}_\mathbb{Z}^+$.

Отметим для дальнейшего, что мы определили решетку M в конечномерном векторном пространстве V над $\mathbb{F}$ как $\mathbb{Z}$-оболочку базиса в V (над $\mathbb{F}$). Поскольку $\operatorname{char}\mathbb{F} = 0$, то конечно порожденный $\mathbb{Z}$-подмодуль в V автоматически является свободным $\mathbb{Z}$-модулем конечного ранга. Следовательно, решетку в V можно охарактеризовать как конечно порожденную подгруппу, которая порождает V над $\mathbb{F}$ и имеет $\mathbb{Z}$-ранг, не превосходящий $\dim_\mathbb{F} V$.

Лемма 23. *Пусть $d \in \mathbb{Z}^l$ и $S \subset \mathbb{Z}^l$ — конечное множество, не содержащее d. Тогда существует такой многочлен $f(t_1, \dots, t_l)$ над $\mathbb{F}$, что $f(\mathbb{Z}^l) \subset \mathbb{Z}$, $f(d) = 1$, $f(S) = 0$.*

Доказательство. Пусть $d = (d_1, \dots, d_l)$. Для $k \in \mathbb{Z}^+$ положим

$$f_k(t_1, \dots, t_l) = \prod_1^l C_{t_i-d_i+k}^k \cdot C_{-t_i+d_i+k}^k,$$

так что $f_k(\mathbb{Z}^l) \subset \mathbb{Z}$ (см. лемму 18), $f_k(d) = 1$.

В "ящике" в $\mathbb{Z}^l$ с центром в d и стороной $2k$ функция f_k заведомо равна нулю вне d. Поэтому достаточно выбрать k настолько большим, чтобы этот ящик охватил конечное множество S, и взять $f = f_k$. $\square$

Теорема 26. *Пусть V — конечномерный L-модуль. Тогда*

(a) *любая подгруппа в V, инвариантная относительно $\mathcal{U}_\mathbb{Z}$, является прямой суммой своих пересечений с весовыми подпространствами;*

(b) *модуль V содержит решетку, инвариантную относительно $\mathcal{U}_\mathbb{Z}$.*

Доказательство. (a) Пусть M — подгруппа в V, инвариантная относительно $\mathcal{U}_\mathbb{Z}$. Для каждого веса μ в V положим

$$d(\mu) = (\mu(h_1), \dots, \mu(h_l)) \in \mathbb{Z}^l.$$

Фиксируем в V произвольный вес λ. Согласно предыдущей лемме существует такой многочлен f от l переменных над $\mathbb{F}$, что $f(\mathbb{Z}^l) \subset \mathbb{Z}$, $f(d(\lambda)) = 1$, $f(d(\mu)) = 0$ для $\mu \neq \lambda$ в $\Pi(V)$.Положим $u = f(h_1, \ldots, h_l)$. Ввиду леммы 18 мы имеем $u \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}^0$. Ясно, что u действует на V как проекция на V_λ. В частности, если вектор v лежит в M, то его V_λ-компонента $u \cdot v$ также лежит в M.

(b) Ввиду теоремы Вейля о полной приводимости можно считать, что $V = V(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda^+$), то есть что модуль V неприводим. Пусть $v^+ \in V$ — старший вектор (веса λ). Положим $M = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}^- \cdot v^+$. Поскольку v^+ аннулируется всеми векторами $\mathbb{Z}$-базиса $\{e_C\}$ в $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}^+$, кроме единицы, то $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}^+ \cdot v^+ = \mathbb{Z}v^+$. Кроме того, $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}^0 \cdot v^+ = \mathbb{Z}v^+$, так как $C_{h_i}^{b_i}$ действует на v^+ как умножение на целое число

$$\frac{\lambda(h_i)(\lambda(h_i) - 1) \ldots (\lambda(h_i) - b_i + 1)}{b_i!}.$$

Иначе говоря,

$$\mathcal{U}_{\mathbb{Z}} \cdot v^+ = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}^- \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}^0 \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}^+ \cdot v^+ = \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}^- \cdot (\mathbb{Z}v^+) = M,$$

так что подгруппа M инвариантна относительно $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$. Из этого рассуждения видно также, что $M \cap V_\lambda = \mathbb{Z}v^+$. Мы знаем, что все функции f_A, кроме конечного их числа, аннулируют вектор v^+, поэтому подгруппа M конечно порождена. При этом M порождает V над $\mathbb{F}$, так как $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}^-$ содержит $\mathbb{F}$-базис для $\mathcal{U}(N^-)$ и $\mathcal{U}(N^-) \cdot v^+ = V$.

Осталось убедиться, что $\mathbb{Z}$-ранг решетки M не превосходит $\dim_{\mathbb{F}} V$. Предположим противное, и пусть r — наименьшее число, для которого найдутся r векторов в M, линейно независимых над $\mathbb{Z}$ и зависимых над $\mathbb{F}$. Пусть

$$\sum_{i=1}^{r} a_i v_i = 0, \qquad a_i \in \mathbb{F},\ 0 \neq v_i \in M.$$

Найдется такое $u \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$, что вектор $u \cdot v_1$ имеет ненулевую V_λ-компоненту: иначе вектор v_1 порождал бы ненулевой собственный $\mathcal{U}(L)$-подмодуль неприводимого модуля V. С другой стороны, V_λ-компонента каждого вектора $u \cdot v_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, лежит в M (ввиду утверждения (a)) и потому является целочисленным кратным вектора v^+, скажем $m_i v^+$ (поскольку $M \cap V_\lambda = \mathbb{Z}v^+$). Таким образом, если $\sum a_i v_i = 0$, то $\sum a_i (u \cdot v_i) = 0$, а значит $\sum a_i m_i = 0$ (но $m_1 \neq 0$). Следовательно,

$$0 = m_1 \left(\sum_{i=1}^{r} a_i v_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{r} a_i m_i \right) v_i = \sum_{i=2}^{r} a_i (m_1 v_i - m_i v_1).$$

Векторы $m_1 v_i - m_i v_1$, $2 \leqslant i \leqslant r$, лежат в M и, очевидно, независимы над $\mathbb{Z}$, но зависимы над $\mathbb{F}$. Это противоречит минимальности числа r и доказывает, что решетка M инвариантна относительно $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$. $\square$

Решетка M в конечномерном L-модуле V, инвариантная относительно $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$, называется *допустимой*. Она существует согласно утверждению (b) последней теоремы; на самом деле из доказательства видно, как построить такую решетку (наименьшую возможную

среди содержащих данный старший вектор, если модуль V неприводим). Из утверждения (a) вытекает, что

$$M = \bigoplus_{\mu \in \Pi(V)} (M \cap V_\mu).$$

Разумеется, если V совпадает с L (в случае представления ad), то, как мы уже видели в прошлом семестре, допустимой решеткой будет $\mathbb{Z}$-оболочка базиса Шевалле.

12.2 Стабилизатор допустимой решетки

Пусть V — конечномерный L-модуль. Чтобы избежать тривиальностей, будем считать его точным. Тогда легко видеть, что $\mathbb{Z}$-оболочка множества $\Pi(V)$, которую мы обозначим $\Lambda(V)$, лежит между Λ и решеткой корней Λ_r.

Используя теорему 26, выберем в V допустимую решетку M. Пусть L_V — ее стабилизатор в L, $H_V = H \cap L_V$ (ниже мы покажем, что L_V зависит только от V, но не от выбора решетки M, так что наше обозначение корректно). Очевидно, что $L(\mathbb{Z}) \subset L_V$ и множество L_V замкнуто относительно операции коммутирования. Элемент $h \in H$ оставляет решетку M инвариантной, если и только если $\lambda(h) \in \mathbb{Z}$ при всех $\lambda \in \Pi(V)$ (или $\Lambda(V)$): это вытекает из утверждения (a) теоремы 26. Как следствие, включения $\Lambda \supset \Lambda(V) \supset \Lambda_r$ индуцирует обратные включения $H(\mathbb{Z}) \subset H_V \subset H_0$, где

$$H_0 = \{h \in H \mid \lambda(h) \in \mathbb{Z} \text{ при всех } \lambda \in \Lambda_r\},$$

а

$$H(\mathbb{Z}) = H \cap L(\mathbb{Z}) \qquad (= \mathbb{Z}\text{-оболочке всех } h_\alpha,\ \alpha \in \Phi).$$

Как следствие, H_V является решеткой в H. Наша цель — показать, что L_V — допустимая решетка в L.

Первым шагом станет следующая общая лемма (ее можно сформулировать как утверждение об ассоциативных алгебрах, но нам требуется лишь частный случай):

Лемма 24. *Если $u \in \mathcal{U}(L)$, $x \in L$, то*

$$\frac{(\operatorname{ad} x)^n}{n!}(u) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} u \frac{x^i}{i!}$$

в $\mathcal{U}(L)$.

Доказательство. При $n = 1$ равенство принимает вид $\operatorname{ad} x(u) = xu - ux$, что верно по определению. Применим индукцию по n:

$$\frac{(\operatorname{ad} x)^n}{n!}(u) = \frac{\operatorname{ad} x}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{x^{n-1-i}}{(n-1-i)!} u \frac{x^i}{i!} \right) =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{x^{n-1}}{n(n-1-i)!} u \frac{x^i}{i!} \right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \frac{x^{n-1-i}}{(n-1-i)!} u \frac{x^{i+1}}{i!n} \right).$$

После замены индекса $i \mapsto i-1$ вторая сумма принимает вид

$$-\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{x^{n-i}}{(n-i)!}u\frac{x^i}{(i-1)!n}.$$

При $0 < i < n$, объединяя i-е слагаемые первой и второй сумм, получаем

$$(-1)^i x^{n-i}ux^i\left(\frac{1}{n(n-1-i)!i!}+\frac{1}{n(n-i)!(i-1)!}\right).$$

Но величина в скобках равна $\frac{1}{(n-1)!i!}$. Нулевое и n-е слагаемые равны

$$\frac{x^n}{n!}i \text{ и } (-1)^n u\frac{x^n}{n!},$$

как и требовалось. $\square$

Предложение 13. *Множество L_V является допустимой решеткой в L-модуле L. При этом*

$$L_V = H_V + \bigoplus_{\alpha\in\Phi}\mathbb{Z}x_\alpha;$$

как следствие, L_V зависит только от V (фактически от $\Lambda(V)$), но не от выбора решетки M.

Доказательство. Мы знаем, что

$$L(\mathbb{Z}) = H(\mathbb{Z}) + \bigoplus \mathbb{Z}x_\alpha \subset L_V,$$

и заведомо $H_V \subset L_V$. С другой стороны, предыдущая лемма гарантирует инвариантность множества L_V относительно всех $\frac{(\operatorname{ad} x_\alpha)^m}{m!}$ (следовательно, относительно $\mathcal{U}_\mathbb{Z}$). Это позволяет записать множество L_V как сумму его пересечений с H и L_α (утверждение (a) теоремы 26), поэтому

$$L_V = H_V + \bigoplus(L_V \cap L_\alpha),$$

причем $\mathbb{Z}x_\alpha \subset L_V \cap L_\alpha$. Предложение будет доказано, если мы убедимся, что последнее включение является равенством при всех $\alpha \in \Phi$.

Пусть линейное отображение $\varphi : L_\alpha \to H$ задано правилом $x \mapsto [x_{-\alpha}, x]$ (образ кратен h_α). Оно инъективно, поскольку $\dim L_\alpha = 1$ и $[x_{-\alpha}, L_\alpha] \neq 0$. Рассмотри ограничение отображения φ на $L_V \cap L_\alpha$. Его образ лежит в H_V (так как множество L_V замкнуто относительно коммутирования и $H_V = L_V \cap H$), а тогда и в $\mathbb{F}h_\alpha \cap H_V$. Последняя группа (бесконечная) циклическая как пересечение решетки в H с прямой. Как следствие, группа $L_V \cap L_\alpha$ также циклическая. Поскольку в ней содержится x_α, найдется образующий вида $\frac{1}{n}x_\alpha$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Тогда

$$\frac{(\operatorname{ad} x_{-\alpha})^2}{2!}\left(\frac{x_\alpha}{n}\right) = \frac{x_{-\alpha}}{n} \in L_V$$

(поскольку множество L_V стабильно относительно $\mathcal{U}_\mathbb{Z}$), и в свою очередь

$$-\left(\operatorname{ad}\frac{x_\alpha}{n}\right)^2\left(\frac{x_{-\alpha}}{n}\right) = \frac{2x_\alpha}{n^3} \in L_V$$

(так как L_V замкнуто относительно коммутирования). Но тогда $\frac{2}{n^3} \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$, откуда следует, что $n = 1$. Это показывает, что $L_V \cap L_\alpha = \mathbb{Z}x_\alpha$, как и требовалось. $\square$

В качестве примера рассмотрим алгебру $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ со стандартным базисом (x, y, h) и ее обычное двумерное представление $V = \mathbb{F}^2$. Очевидно, что базис $\{(1, 0), (0, 1)\}$ порождает допустимую решетку, причем

$$L_V = \mathbb{Z}h + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y \qquad (= L(\mathbb{Z})).$$

С другой стороны, взяв $L(\mathbb{Z})$ в качестве допустимой решетки в L (для трехмерного представления ad), мы получим

$$L_V = \mathbb{Z}\left(\frac{h}{2}\right) + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y.$$

Эти крайние случаи соответствуют двум возможным решеткам весов Λ, Λ_r для системы корней $\mathbf{A}_l$.

12.3 Введение произвольных элементарных групп Шевалле

Теперь рассмотрим произвольный точный конечномерный L-модуль V (другими словами, произвольное точное конечномерное представление $\pi : L \to \mathfrak{gl}(V)$) и некоторое коммутативное кольцо с единицей R и построим по ним элементарную группу Шевалле (уже не обязательно присоединенную).

Для этого рассмотрим допустимую решетку M в модуле V. Перейдем в базис пространства V, соответствующему базису этой решетки. Благодаря тому, что M инвариантна относительно всех преобразований $(x_\alpha)^k/k!$, где $\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{Z}_+$, в данном базисе все $\pi(x_\alpha)^k/k!$ записываются целочисленными матрицами.

Продолжим отображение $1 \mapsto 1$ до гомоморфизма $\mathbb{Z} \to R$ и будем считать образы целых чисел в кольце R также целыми числами в R.

Тогда свободный модуль V над $\mathbb{F}$ можно превратить в свободный модуль $V_R := V \otimes_{\mathbb{Z}} R$ над R, а матрицы $\pi(x_\alpha)^k/k!$ считать матрицами над R.

Теперь рассмотрим элементы

$$x_\alpha(t) := \exp(t\pi(x_\alpha)) = E + t\pi(x_\alpha) + t^2\frac{\pi(x_\alpha)^2}{2!} + \cdots + t^k\frac{\pi(x_\alpha)^k}{k!} + \ldots$$

Такие элементы корректно определены, так как все $\pi(x_\alpha)$ нильпотентны, то есть суммирование конечно. Все они являются обратимыми матрицами в $\mathrm{GL}(V_R)$, где V — свободный модуль уже над кольцом R.

Группу $\{x_\alpha(t) \mid t \in R\}$ (очевидно, что функция $x_\alpha(t)$ аддитивна по t) будем обозначать через X_α.

Основным объектом нашего изучения будет группа $G = E_\pi(R, \Phi)$, порожденная всеми группами X_α, $\alpha \in \Phi$. Она называется *элементарной группой Шевалле*, соответствующей представлению π.

Пример 4. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{sl}_n$ (типа $\mathbf{A}_{n-1}$) и построим по ней элементарную группу Шевалле.

Элементам x_α там соответствуют матрицы E_{ij}, $i \neq j$, то есть элементы $x_\alpha(t)$ имеют вид $E + tE_{ij}$, $t \in R$, $i \neq j$.

Таким образом, наша группа Шевалле порождается элементарными матрицами и для произвольного поля (и даже локального кольца) совпадает с группой $\mathrm{SL}_n(R)$, а для произвольного коммутативного кольца R является элементарной подгруппой в $\mathrm{SL}_n(R)$.

Далее при изучении элементарных групп Шевалле мы будем иногда считать кольцо R произвольным коммутативным кольцом с единицей, а иногда — полем (будем всегда оговаривать, что имеем в виду).

Задачи

1. Докажите, что если M — допустимая решетка в модуле V, то $M \cap V_\mu$ является решеткой в V_μ для каждого веса μ в V.

2. Докажите, что любая допустимая решетка в L, включающая $L(\mathbb{Z})$ и замкнутая относительно коммутирования, имеет вид L_V.

3. Пусть $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{F})$ (веса в этом случае отождествляются с целыми числами), $V = V(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$. Докажите, что $L_V = L(\mathbb{Z})$ при нечетном λ и $L_V = \mathbb{Z}(h/2) + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$ при четном λ.

13 Лекция 13. Соотношения в группах Шевалле

Лемма 25. *Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра, $A \in \mathcal{A}$, d_A — дифференцирование алгебры $\mathcal{A}$, задаваемое формулой $d_A = l_A - r_A$, где $l_A B = AB$, $r_A B = BA$ для всех $B \in \mathcal{A}$. Предположим, что $\exp d_A$, $\exp l_A$, $\exp r_A$ и $\exp A$ имеют смысл и к ним применимы обычные правила. Тогда*

$$\exp d_A = l_{\exp A} \cdot r_{\exp(-A)}$$

(сопряжение с помощью элемента $\exp A$).

Доказательство.

$$\exp d_A = \exp(l_A + (-r_A)) = \exp l_A \cdot \exp(-r_A) = l_{\exp A} \cdot r_{\exp(-A)}.$$

□

Лемма 26. *Пусть α, β — корни и $\alpha + \beta \neq 0$. Тогда в кольце $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}[[t, u]]$ формальных степенных рядов от двух переменных t, u над кольцом $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$ мы имеем тождество*

$$x_\alpha(t) x_\beta(u) x_\alpha(t)^{-1} x_\beta(u)^{-1} = \prod x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij} t^i u^j),$$

где умножение в правой части берется по всем корням $i\alpha + j\beta$, $i, j \in \mathbb{N}$, расположенным в некотором фиксированном порядке, а c_{ij} — целые числа, зависящие от α, β и от выбранного порядка, но не зависящие от t, u. При этом $c_{11} = N_{\alpha,\beta}$, где $[x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha,\beta} x_{\alpha+\beta}$ в алгебре Ли L.

Доказательство. Пусть $(A, B) := ABA^{-1}B^{-1}$ (групповой коммутатор обозначаем так, чтобы отличать его от скобки Ли или кольцевого комутатора).

В $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}}[[t, u]]$ положим

$$f(t, u) = (x_\alpha(t), x_\beta(u)) \cdot \prod x_{i\alpha+j\beta}(-c_{ij} t^i u^j), \text{ где } c_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Покажем, что можно так подобрать целые числа c_{ij}, чтобы $f(t, u) \equiv 1$.

Заметим, что

$$t\frac{d}{dt} x_\alpha(t) = t\frac{d}{dt}\left(E + t\frac{x_\alpha}{1!} + t^2\frac{x_\alpha^2}{2!} + \cdots + t^n\frac{x_\alpha^n}{n!}\right) = t\left(\frac{x_\alpha}{1!} + t\frac{2x_\alpha^2}{2!} + \cdots + t^{n-1}\frac{n x_\alpha^n}{n!}\right) = \\ = t x_\alpha \cdot x_\alpha(t).$$

Поэтому, используя правило умножения производной, получаем:

$$t\frac{d}{dt} f(t, u) = t x_\alpha \cdot f(t, u) + \\ + x_\alpha(t) x_\beta(u)(-t x_\alpha) x_\alpha(-t) x_\beta(-u) \cdot \prod x_{i\alpha+j\beta}(-c_{ij} t^i u^j) + \\ + \sum (x_\alpha(t), x_\beta(u)) \cdot \prod_{i\alpha+j\beta > m\alpha+l\beta} x_{i\alpha+j\beta}(-c_{ij} t^i u^j) \cdot (-c_{ml} m t^m u^l x_{m\alpha+l\beta}) \times \\ \times \prod_{i\alpha+j\beta \leqslant m\alpha+l\beta} x_{i\alpha+j\beta}(-c_{ij} t^i u^j).$$

Перенесем члены $-tx_\alpha$ и

$$-c_{ml}mt^m u^l x_{m\alpha+l\beta} \qquad (*)$$

в начало, используя, например, соотношения

$$x_\beta(u)(-tx_\alpha) = ((\exp \operatorname{ad} ux_\beta)(-tx_\alpha)x_\beta(u)$$

(см. предыдущую лемму) и

$$(\exp \operatorname{ad} ux_\beta)\cdot(-tx_\alpha) = -tx_\alpha - N_{\beta,\alpha}tux_{\alpha+\beta} - \dots.$$

Мы получили выражение виды $Af(t,u)$, где $A \in L[[t,u]]$.

Поскольку ряд $f(t,u)$ однороден степени 0 относительно градуировки (со значениями в H^*), в которой

$$\deg t = -\alpha, \quad \deg u = -\beta, \quad \deg x_\gamma = \gamma,$$

ряд A также имеет степень однородности ноль.

Из выписанных выше формул мы видим, что коэффициент c_{ml} входит, кроме члена $(*)$, только в такие члены, которые имеют по t и u в совокупности степень, большую $m+l$. Поэтому

$$A = \sum_{m,l\geqslant 1}(-c_{ml} + p_{ml})t^m u^l x_{m\alpha+l\beta},$$

где p_{ml} — полином от коэффициентов c_{ij} с $i+j < m+l$.

Теперь мы можем по индукции определить значения коэффициентов $c_{ml} \in \mathbb{C}$ так, чтобы $A = 0$. Для этого достаточно упорядочить коэффициенты c_{ij} по сумме $i+j$, а при фиксированной сумме — по i.

Тогда $t\frac{d}{dt}f(t,u) = 0$, откуда $f(t,u) = f(0,u) = 1$.

Чтобы показать, что числа c_{ml} целые, рассмотрим в $f(t,u)$ коэффициент при $t^m u^l$. Этот коэффициент равен

$$-c_{ml}x_{m\alpha+l\beta} + (\text{члены, получающиеся из экспонент элементов вида } nx_{i\alpha+j\beta}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}, i+j < m+l).$$

Используя индукцию, мы получим, что $c_{ml}x_{m\alpha+l\beta} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$.

По теореме Костанта $c_{ml} \in \mathbb{Z}$. Если $i = j = 1$, то коэффициент равент $-c_{11}x_{\alpha+\beta} + N_{\alpha,\beta}x_{\alpha+\beta}$, так что $c_{11} = N_{\alpha,\beta}$. $\square$

Пример 5. (a) Если $\alpha+\beta$ не является корнем, то правая часть формулы в лемме равна единице.

(b) Если $\alpha+\beta$ — единственный корень вида $i\alpha+j\beta$, то правая часть равна $x_{\alpha+\beta}(N_{\alpha,\beta}tu)$.

(c) Если все корни имеют одинаковую длину, то правая часть равна единице в случае (a) и $x_{\alpha+\beta}(\pm tu)$ в случае (b).

Напомним, что множество корней S мы называем замкнутым, если из $\alpha, \beta \in S$, $\alpha+\beta \in \Phi$ вытекает $\alpha+\beta \in S$.

Набор замкнутых множеств корней, которые мы уже перечисляли, можно дополнить еще такими:

— $\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$, где α — простой корень;

— все положительные корни высоты, не меньшей r, где $r \geqslant 1$ (напомним, что высота корня — это количество простых корней в сумме, из которой он состоит).

Мы будем называть подмножество I замкнутого множества S *идеалом*, если из $\alpha \in I$, $\beta \in S$, $\alpha + \beta \in S$ следует $\alpha + \beta \in I$. Множества из примеров выше являются идеалами в Φ^+.

Лемма 27. *Пусть I — идеал в замкнутом множестве S, а $\mathcal{X}_S$ и $\mathcal{X}_I$ — группы, порожденные группами X_α для всех $\alpha \in S$ и $\alpha \in I$ соответственно. Если из $\alpha \in S$ следует, что $-\alpha \notin S$, то $\mathcal{X}_I$ — нормальная подгруппа в $\mathcal{X}_S$.*

Доказательство. Очевидно следует из предыдущей леммы. □

Лемма 28. *Пусть S — такое замкнутое множество, что из $\alpha \in S$ вытекает $-\alpha \notin S$. Тогда каждый элемент из $\mathcal{X}_S$ можно единственным образом записать в виде*

$$\prod_{\alpha \in S} x_\alpha(t_\alpha), \text{ где } t_\alpha \in R$$

и умножение производится в любом заранее заданном порядке.

Доказательство. Сначала мы докажем лемму для случая, когда упорядочение согласовано с высотами корней, то есть $\alpha < \beta$, если $ht(\alpha) > ht(\beta)$.

Если α_1 — первый элемент множества S, то $S \setminus \{\alpha_1\}$ — идеал в S. Поэтому $\mathcal{X}_S = X_{\alpha_1}\mathcal{X}_{S\setminus\{\alpha_1\}}$. Используя индукцию по числу элементов в S, получаем, что

$$\mathcal{X}_S = \prod X_\alpha.$$

Теперь предположим, что $y \in \mathcal{X}_S$, $y = \prod x_\alpha(t_\alpha)$. Существует весовой вектор $v \in M$, соответствующий некоторому весу λ, что $x_{\alpha_1}(v) \neq 0$. Тогда

$$y(v) = v + t_{\alpha_1} x_{\alpha_1}(v) + z, \text{ где } v \in V_\lambda, \quad t_{\alpha_1} x_{\alpha_1}(v) \in V_{\lambda+\alpha_1},$$

а z — сумма членов из других весовых пространств. Поэтому число $t_{\alpha_1} \in R$ однозначно определяется по элементу y. Так как

$$x_{\alpha_1}(t_{\alpha_1})^{-1} y \in \mathcal{X}_{S\setminus\{\alpha_1\}},$$

то можно завершить доказательство этого случая по индукции.

Доказательство нашей леммы для произвольного упорядочения немедленно вытекает из следующей леммы:

Лемма 29. *Пусть $\mathcal{X}$ — группа с подгруппами $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_r$, такая, что*

(a) *$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 \ldots \mathcal{X}_r$, причем представление $x \in \mathcal{X}$ в виде $x_1 \ldots x_r$, $x_i \in \mathcal{X}_i$, единственно.*

(b) *$\mathcal{X}_i\mathcal{X}_{i+1} \ldots \mathcal{X}_r$ — нормальная подгруппа в $\mathcal{X}$ для $i = 1, \ldots, r$.*

Если p — любая перестановка чисел $1, 2, \ldots, r$, то $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{p_1}\mathcal{X}_{p_2} \ldots \mathcal{X}_{p_r}$ и разложение справа единственно.

Доказательство. Доказательство оставим в качестве упражнения (подсказка — надо рассмотреть $\mathcal{X}/\mathcal{X}_r$ и применить индукцию). □

Следствие 12. *Отображение $t \mapsto x_\alpha(t)$ является изоморфизмом аддитивной группы кольца R на X_α.*

Следствие 13. *Пусть Φ^+ — множество всех положительных корней и $U = \mathcal{X}_{\Phi^+}$. Тогда $U = \prod X_\alpha$, где произведение берется по всем положительны корням, расположенным в любом фиксированном порядке. При этом представление элементов $x \in U$ в виде такого произведения единственно.*

Следствие 14. *Группы $U = \mathcal{X}_{\Phi^+}$ и $U^- = \mathcal{X}_{-\Phi^+}$ — унипотентные подгруппы (то есть подгруппы в матричной группе, состоящие из унипотентных матриц), и при подходящем выборе базиса в V одновременно все элементы из U записываются верхними треугольными матрицами, а все элементы из U^- — нижними треугольными матрицами.*

Доказательство. Выберем базис из весовых векторов и расположим их в соответствии со следующей частичной упорядоченностью весов: μ предшествует ν, если $\mu - \nu$ равно сумме положительных корней. □

Следствие 15. *Для каждого $i \geqslant 1$ обозначим через U_i группу, порожденную всеми группами X_α с высотой корней, не меньшей i.*

Тогда имеем

(a) *U_i — нормальная подгруппа в U.*

(b) *$[U, U_i] \subseteq U_{i+1}$, в частности, $[U, U] \subseteq U_2$.*

(c) *U — нильпотентная подгруппа.*

Следствие 16. *Если $\Phi^+ = Q \cup R$, где Q и R — замкнутые множества и $Q \cap R = \emptyset$, то $U = \mathcal{X}_Q \mathcal{X}_R$ и $\mathcal{X}_Q \cap \mathcal{X}_R = 1$ (например, если α — простой корень, то можно взять $Q = \{\alpha\}$ и $R = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$).*

Задачи

1. Докажите, что множество $\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$, где α — простой корень, является замкнутым множеством корней и даже идеалом в Φ^+.

2. Докажите лемму 29.

3. Что такое группы $U = U_1, U_2, \ldots, U_n$ для группа Шевалле $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, где $\mathbb{K}$ — поле?

14 Лекция 14. Элементы $w_\alpha(t)$ и $h_\alpha(t)$ и разложение Брюа

Лемма 30. *Для любого корня $\alpha \in \Phi$ и любого $t \in R^*$ пусть*

$$w_\alpha(t) := x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t) \text{ и } h_\alpha(t) := w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}.$$

Тогда

(a) $w_\alpha(t)x_\beta w_\alpha(t)^{-1} = ct^{-\langle\beta,\alpha\rangle}x_{w_\alpha(\beta)}$, *где $c = c(\alpha,\beta) = \pm 1$ и c не зависит от t и R и выбранного представления V; при этом $c(\alpha,\beta) = c(\alpha,-\beta)$;*

(b) *если вектор $v \in V_\mu$, то существует такой вектор $v' \in V_{w_\alpha(\mu)}$, что*

$$w_\alpha(t)(v) = t^{-\langle\mu,\alpha\rangle}v'$$

при всех $t \in R^*$;

(c) *$h_\alpha(t)$ действует диагонально на V_μ как умножение на $t^{\langle\mu,\alpha\rangle}$.*

Заметим, что w_α употребляется как для обозначения определенного выше автоморфизма, так и для обозначения отражения относительно гиперплоскости, ортогональной к α.

Доказательство. Сначала покажем, что $w_\alpha(t)hw_\alpha(t)^{-1} = w_\alpha(h)$ для произвольного $h \in H$. Из-за линейности достаточно доказать это только для h_α, ибо если $\alpha(h) = 0$, то x_α коммутирует с h и, значит, обе части равны h. Если $h = h_\alpha$, то левая часть является элементом трехмерной алгебры $S_\alpha = \langle x_\alpha, y_\alpha, h_\alpha\rangle$, значение которого вычисляется в пределах этой алгебры и не зависит от выбранного представления. Выбирая обычное представление этой алгебры в $\mathfrak{sl}_2$, получаем

$$h_\alpha = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \text{ и } w_\alpha(t) = \begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -t^{-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & t\\ -t^{-1} & 0\end{pmatrix},$$

откуда следует требуемое равенство.

Далее докажем (b). Из определений $x_\alpha(t)$ и $w_\alpha(t)$ следует, что если $v'' = w_\alpha(t)(v)$, то

$$v'' = \sum_{t=-\infty}^{\infty} t^i v_i,$$

где $v_i \in V_{\mu+i\alpha}$ (в действительности эта сумма конечна, потому что существует только конечное число различных весов). Если $h \in H$, то имеем $h(v'') = hw_\alpha(t)v = w_\alpha(t)w_\alpha(t)^{-1}hw_\alpha(t)(v) = w_\alpha(t)(w_\alpha h)(v) = \mu(w_\alpha h)v'' = (w_\alpha\mu)(h)v''$. Поэтому вектор v'' соответствует весу

$$w_\alpha\mu = \mu - \langle\mu,\alpha\rangle\alpha.$$

Значит, единственный ненулевой член в сумме встретится при $i = -\langle\mu,\alpha\rangle$.

Применяя (b) к присоединенному представлению, получаем

$$w_\alpha(t)x_\beta w_\alpha(t)^{-1} = ct^{-\langle\beta,\alpha\rangle}x_{w_\alpha(\beta)},$$

где c — какое-то число, не зависящее от t и выбора представления.

Далее, $w_\alpha(1)$ является автоморфизмом алгебры $L(\mathbb{Z})$, а x_γ — примитивный элемент в $L(\mathbb{Z})$ (то есть не кратен никакому элементу из $L(\mathbb{Z})$, кроме $\pm x_\gamma$) при всех $\gamma \in \Phi$, поэтому $c = \pm 1$

Наконец, имеем

$$h_{w_\alpha(\beta)} = w_\alpha(1) h_\beta w_\alpha(1)^{-1} = [w_\alpha(1) x_\beta w_\alpha(1)^{-1}, w_\alpha(1) x_{-\beta} w_\alpha(1)^{-1}] = c(\alpha,\beta)c(\alpha,-\beta) h_{w_\alpha(\beta)},$$

откуда

$$c(\alpha,\beta) = c(\alpha,-\beta),$$

что доказывает (a).

Заметим, что

$$w_\alpha(t)^{-1} = w_\alpha(-t),$$

поэтому

$$h_\alpha(t) = w_\alpha(-t)^{-1} w_\alpha(-1).$$

Ввиду (b)

$$w_\alpha(-t)v = (-t)^{-\langle \mu,\alpha\rangle} v' \text{ и } w_\alpha(-1)v = (-1)^{-\langle \mu,\alpha\rangle} v'.$$

Таким образом, имеем

$$w_\alpha(-t)^{-1} w_\alpha(-1) v = t^{\langle \mu,\alpha\rangle} v,$$

что и доказывает (c). □

Лемма 31. *Обозначим $w_\alpha(1)$ через ω_α. Тогда*
(a) $\omega_\alpha h_\beta(t) \omega_\alpha^{-1} = h_{w_\alpha(\beta)}(t)$;
(b) $\omega_\alpha x_\beta(t) \omega_\alpha^{-1} = x_{w_\alpha(\beta)}(ct)$, *где c такое же, как в предыдущей лемме;*
(c) $h_\alpha(t) x_\beta(u) h_\alpha(t)^{-1} = x_\beta(t^{\langle \beta,\alpha\rangle} u)$.

Доказательство. Для доказательства (a) применим обе части равенства к вектору $v \in V_\mu$. Имеем

$$\omega_\alpha h_\beta(t) \omega_\alpha^{-1}(v) = \omega_\alpha t^{\langle w_\alpha(\mu),\beta\rangle} \omega_\alpha^{-1}(v) \text{ (по пункту (c) предыдущей леммы,}$$
$$\text{примененному к } \omega_\alpha^{-1}(v) \in V_{w_\alpha(\mu)}) =$$
$$= t^{\langle w_\alpha(\mu),\beta\rangle}(v) = t^{\langle \mu, w_\alpha(\beta)\rangle}(v) = h_{w_\alpha(\beta)}(t)(v).$$

По пункту (a) предыдущей леммы

$$\omega_\alpha x_\beta \omega_\alpha^{-1} = c x_{w_\alpha(\beta)}.$$

Перейдя к экспонентам, получаем (b).

По пункту (c) предыдущей леммы, примененному к присоединенному представлению,

$$h_\alpha(t) x_\beta h_\alpha(t)^{-1} = t^{\langle \beta,\alpha\rangle} x_\beta.$$

Опять переходя к экспонентам, получаем (c). □

Обозначим через (R) следующее множество соотношений:

(R_1) $x_\alpha(t)x_\alpha(u) = x_\alpha(t+u)$;

(R_2) $[x_\alpha(t), x_\beta(u)] = \prod x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij}t^iu^j)$ $(\alpha+\beta \neq 0)$, где c_{ij} — как в лемме 26;

(R_3) $w_\alpha(t) := x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$ для $t \in R^*$;

(R_4) $h_\alpha(t) := w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$;

(R_5) $\omega_\alpha := w_\alpha(1)$;

(R_6) $\omega_\alpha h_\beta(t)\omega_\alpha^{-1} =$(некоторое фиксированное произведение элементов $h_\gamma(u)$, $\gamma \in \Phi$, $u \in R^*$, и обратных к ним элементов, не зависящее от выбранного пространства представления;

(R_7) $\omega_\alpha x_\beta(t)\omega_\alpha^{-1} = x_{w_\alpha(\beta)}(ct)$, где c такое же, как в лемме 30 (a);

(R_8) $h_\alpha(t)x_\beta(u)h_\alpha(t)^{-1} = x_\beta(t^{\langle\beta,\alpha\rangle}u)$.

Так как все соотношения из (R) не зависят от выбранного пространства представления, то результаты, доказанные только с помощью соотношений (R), также не будут зависеть от выбора пространства представления.

Лемма 32. *Пусть U — группа, порожденная группами X_α, $\alpha \in \Phi^+$, H — группа, порожденная всеми элементами $h_\alpha(t)$, $t \in R^*$, и B — группа, порожденная U и H.*

Тогда

(a) *U — нормальная подгруппа в B и $B = UH$;*

(b) $U \cap H = 1$.

Доказательство. Так как сопряжение с помощью элементов $h_\alpha(t)$ сохраняет X_β (по свойству (R_8)), то U — нормальная подгруппа в B, откуда следует (a). Относительно подходящего базиса в V любой элемент из $U \cap H$ является одновременно диагональным и унипотентным и, значит, равен 1. □

Пример 6. В случае SL_n (и поля) H — группа диагональных матриц, U — группа унипотентных верхних треугольных матриц, B — группа верхних треугольных матриц.

Лемма 33. *Пусть N — группа, порожденная всеми элементами $w_\alpha(t)$, H — подгруппа, порожденная всеми элементами $h_\alpha(t)$, W — группа Вейля системы корней Φ. Тогда*

(a) *H — нормальная подгруппа в N;*

(b) *существует такой гомоморфизм φ группы W на N/H, что $\varphi(w_\alpha) = Hw_\alpha(t)$ для всех корней α;*

(c) *φ является изоморфизмом.*

Доказательство. Согласно (R_4), (R_5) и (R_6) сопряжение с помощью $w_\alpha(t) = h_\alpha(t)\omega_\alpha$ сохраняет H, что и доказывает (a).

Так как $Hw_\alpha(t) = Hw_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}w_\alpha(1) = Hw_\alpha(1)$, то $Hw_\alpha(t)$ не зависит от t. Введем новое обозначение: $\hat{w}_\alpha := Hw_\alpha(t)$. Ввиду того, что $w_\alpha(1) \in \hat{w}_\alpha$ и $w_\alpha(-1) \in \hat{w}_\alpha$, получим, что $1 = w_\alpha(1)w_\alpha(-1) \in \hat{w}_\alpha^2$. Поэтому

$$\hat{w}_\alpha^2 = 1. \qquad (*)$$

Далее, $\omega_\beta = w_\beta(1) \in \hat{w}_\beta$, откуда

$$\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha^{-1} \in \hat{w}_\alpha\hat{w}_\beta\hat{w}_\alpha^{-1}.$$

Но

$$\omega_\alpha\omega_\beta\omega_\alpha^{-1} = \omega_\alpha x_\beta(1)x_{-\beta}(-1)\omega_\alpha^{-1} \quad (\text{см. } (R_3)) = \\ = x_{w_\alpha(\beta)}(c)x_{-w_\alpha(\beta)}(-c)x_{w_\alpha(\beta)}(c) \quad (\text{см. } (R_7)) = \omega^c_{w_\alpha(\beta)} \in \hat{w}_{w_\alpha(\beta)}.$$

Таким образом,

$$\hat{w}_\alpha\hat{w}_\beta\hat{w}_\alpha^{-1} = \hat{w}_{w_\alpha(\beta)}. \qquad (**)$$

Мы знаем еще из спецкурса по системам корней, что соотношения $(*)$ и $(**)$ образуют определяющее множество соотношений для группы W. Значит, существует такой гомоморфизм $\varphi : W \to N/H$, что $\varphi(w_\alpha) = \hat{w}_\alpha = Hw_\alpha(t)$. Ясно, что φ — эпиморфизм.

Предположим, что $w \in \ker\varphi$. Если $w = w_{\alpha_1}w_{\alpha_2}\dots$ — произведение отражений, то $w_{\alpha_1}(1)w_{\alpha_2}(1)\cdots = h \in H$. Сопрягаю группу $\mathcal{X}_\alpha$ с помощью $w_{\alpha_1}(1)w_{\alpha_2}(1)\dots$, мы получаем $\mathcal{X}_{w(\alpha)}$, а сопрягая ее с помощью h, мы получаем $\mathcal{X}_\alpha$. Поэтому $\mathcal{X}_{w(\alpha)} = \mathcal{X}_\alpha$ для всех корней α. Если для всех корней α имеет место $w(\alpha) = \alpha$, то $w = 1$. Поэтому доказательство вытекает из следующей леммы:

Лемма 34. *Если α и β — различные корни, то $\mathcal{X}_\alpha \neq \mathcal{X}_\beta$.*

Доказательство. Мы знаем, что группа $\mathcal{X}_\alpha$ нетривиальна. Если α и β имеют одинаковые знаки, то результат следует из леммы 28. Если они имеют противоположные знаки, то при подходящем выборе базиса одна из групп записывается унипотентными верхними треугольными матрицами, а другая — унипотентными нижними треугольными матрицами, а значит, они не совпадают. □

Договоримся, что если элемент $n \in N$ представляет элемент $w \in W$ (при гомоморфизме $\varphi : W \to N/H$), то мы будем писать wB (Bw) вместо nB (Bn).

Лемма 35. *Если α — простой корень, то множество $B \cup Bw_\alpha B$ является группой.*

Доказательство. Пусть $S = B \cup Bw_\alpha B$. Так как B — группа и $\varphi(w_\alpha) = \varphi(w_\alpha)^{-1}$, то множество S замкнуто относительно взятия обратного элемента. Поскольку

$$S^2 \subseteq BB \cup BBw_\alpha B \cup Bw_\alpha BB \cup Bw_\alpha Bw_\alpha B \subseteq S \cup Bw_\alpha Bw_\alpha B,$$

то достаточно показать, что $w_\alpha Bw_\alpha \in S$.

Сначала покажем, что $X_{-\alpha} \subseteq S$. Если $1 \neq y \in X_{-\alpha}$, то существует такой элемент $t \in \mathbb{K}^*$, что

$$y = x_{-\alpha}(t) = x_\alpha(t^{-1})w_\alpha(-t^{-1}) \in Bw_\alpha B.$$

Поэтому $X_{-\alpha} \subseteq S$.

Пусть теперь Φ^+ — множество положительных корней, тогда

$$w_\alpha Bw_\alpha = w_\alpha Bw_\alpha^{-1} = w_\alpha X_\alpha X_{\Phi^+\setminus\{\alpha\}}Hw_\alpha^{-1} = \\ = w_\alpha X_\alpha w_\alpha^{-1}w_\alpha X_{\Phi^+\setminus\{\alpha\}}w_\alpha^{-1}w_\alpha Hw_\alpha^{-1} = X_{-\alpha}X_{\Phi^+\setminus\{\alpha\}}.$$

Так как w_α сохраняет $\Phi^+ \setminus \{\alpha\}$, то это подмножество множества $SB = S$. □

Напомним, что для элемента $w \in W$ группы Вейля $l(w)$ — это количество простых отражений в разложении w в произведение простых отражений минимальной длины. Это число совпадает с количеством $n(w)$ положительных корней, которые меняют знак под действием w.

Лемма 36. *Пусть $w \in W$ и α — простой корень. Тогда*

(a) *если $w\alpha > 0$, (то есть если $n(ww_\alpha) = n(w) + 1$), то $BwB \cdot Bw_\alpha B \subseteq Bww_\alpha B$;*

(b) *в любом случае $BwB \cdot Bw_\alpha B \subseteq Bww_\alpha B \cup BwB$.*

Доказательство. (a)

$$BwB \cdot Bw_\alpha B = BwX_\alpha \mathcal{X}_{\Phi^+\setminus\{\alpha\}} Hw_\alpha B = \\ = BwX_\alpha w^{-1} ww_\alpha w_\alpha^{-1} \mathcal{X}_{\Phi^+\setminus\{\alpha\}} w_\alpha w_\alpha^{-1} Hw_\alpha B = Bww_\alpha B$$

(так как $wX_\alpha w^{-1} \subseteq B$, $w_\alpha^{-1}\mathcal{X}_{\Phi^+\setminus\{\alpha\}} w_\alpha \subseteq B$ и $w_\alpha^{-1} Hw_\alpha \subseteq B$).

(b) Если $w_\alpha > 0$, то (a) дает необходимый результат.

Если $w\alpha < 0$, то положим $w' = ww_\alpha$. Тогда $w'\alpha > 0$ и $w = w'w_\alpha$. Поэтому из (a) следует, что

$$BwB \cdot Bw_\alpha B = Bw'w_\alpha B \cdot Bw_\alpha B = Bw'B \cdot Bw_\alpha B \cdot Bw_\alpha B = \\ = Bw'B(B \cup Bw_\alpha B) \text{ (по лемме 35) } = Bw'B \cup Bw'w_\alpha B = BwB \cup Bww_\alpha B.$$

□

Следствие 17. *Если $w \in W$ и $w = w_\alpha w_\beta \ldots$ — приведенное разложение, то*

$$BwB = Bw_\alpha B \cdot Bw_\beta B \cdot \ldots$$

Лемма 37. *Пусть G — группа Шевалле. Тогда G порождается группами $\mathcal{X}_\alpha$ и элементами ω_α, где α пробегает простые корни.*

Доказательство. Мы знаем, что

$$\omega_\alpha X_\beta \omega_\alpha^{-1} = X_{w_\alpha \beta}.$$

Так как простые отражения порождают группу W и каждый корень сопряжен с помощью W с простым корнем, то отсюда вытекает требуемый результат. □

Теорема 27 (Брюа, Шевалле)**.** (a) $\bigcup\limits_{w\in W} BwB = G$.

(b) $BwB = Bw'B \Longrightarrow w = w'$.

Доказательство. (a) По лемме 37 множество

$$\bigcup_{w\in W} BwB$$

содержит все образующие группы G. Так как оно замкнуто относительно умножения на эти образующие и на обратные к ним элементы (лемма 36), то оно совпадает с G.

(b) Предположим, что $BwB = Bw'B$, где $w, w' \in W$. Мы покажем индукцией по $n(w)$, что $w = w$. Если $n(w) = 0$, то $w = 1$, потому $w' \in B$. Тогда $w'Bw^{-1} = B$, откуда $w'\Phi^+ = \Phi^+$ и $w' = 1$.

Предположим, что $n(w) > 0$, и выберем такой простой корень α, что $n(ww_\alpha) < N(w)$. Тогда

$$ww_\alpha \in Bw'BBw_\alpha B \subseteq Bw'B \cup Bw'w_\alpha B = BwB \cup Bw'w_\alpha B.$$

Поэтому по индукции либо $ww_\alpha = w$, либо $ww_\alpha = w'w_\alpha$. Поскольку первое равенство невозможно, то $w = w'$. □

Задачи

1. Докажите, что группа B является нормализатором в G подгруппы U, а также подгруппы B.

2. Докажите, что N является нормализатором в G подгруппы H, если поле $\mathbb{K}$ содержит больше 3 элементов.

3. Покажите на какие классы распадаются матрицы группы SL_3 при разложении Брюа.

15 Лекция 15. Структура группы Шевалле

15.1 Вариант разложения Брюа

Теорема 28 (разложение Брюа)**.** *Для фиксированного $w \in W$ выберем элемент ω_w, представляющий w в N. Положим*

$$Q = \Phi^+ \cap w^{-1}(\Phi^-), \quad R = \Phi^+ \cap w^{-1}\Phi^+.$$

Обозначим $\mathcal{X}_Q$ через U_w.

Тогда

(a) $BwB = B\omega_w U_w$*;*

(b) *каждый элемент X из BwB имеет единственное представление в виде $X = b\omega_w x$, где $b \in B$, $x \in U_w$.*

Доказательство. (a) $BwB = Bw\mathcal{X}_R\mathcal{X}_Q H = Bw\mathcal{X}_R w^{-1}w\mathcal{X}_Q H = Bw\mathcal{X}_q H = B\omega_w\mathcal{X}_Q$.

(b) Если $b\omega_w x = b\omega_w x'$, то $b^{-1}b' = \omega_w x x'^{-1}\omega_w^{-1}$. При подходящем выборе базиса этот элемент записывается одновременно верхней треугольной и унипотентной нижнетреугольной матрицей. Значит, он равен единице, то есть $b = b'$, $x = x'$. □

Предложение 14. *Пусть G — группа, порожденная некоторыми элементами, обозначенными через $x'_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in \mathbb{K}$, и пусть эти элементы удовлетворяют соотношениям (R). Рассмотрим в G' подгруппы $U, H', \ldots$, определенные так же, как и в G. Тогда*

(1) *каждый элемент из U' может быть записан в виде*

$$\prod_{\alpha\in\Phi^+} x'_\alpha(t_\alpha);$$

(2) *запишем каждый элемент $w \in W$ в виде произведения отражений $w = w_\alpha w_\beta \ldots$ и положим $\omega_w = \omega'_\alpha\omega'_\beta \ldots$ (где $\omega'_\alpha = w_\alpha(1)$); тогда каждый элемент из G может быть представлен в виде*

$$u'h'\omega'_w v' \qquad (\text{где } w' \in W, u' \in U', h' \in H', v' \in U'_w).$$

Доказательство. Так как все утверждения выше, касающиеся перечисленных двух разложениий, были доказаны только с использованием соотношений (R), то предложение доказано автоматически. □

Следствие 18. *Предположим, что G' — та же группа, что и выше, а φ — такой гомоморфизм G' на G, что $\varphi(x'_\alpha(t)) = x_\alpha(t)$ для всех α и t. Тогда*

(a) *представление элемента из U' в виде $\prod\limits_{\alpha\in\Phi^+} x'_\alpha(t_\alpha)$ в (1) и элемента из G' в виде $u'h'\omega'_w v'$ в (2) единственно;*

(b) $\ker\varphi \subseteq$ *центр* $G' \subseteq H'$.

Доказательство. (a) Допустим, что

$$\prod x'_\alpha(t_\alpha) = \prod x'_\alpha(\tilde{t}_\alpha).$$

Применяя φ, получаем, что

$$\prod x_\alpha(t_\alpha) = \prod x_\alpha(\tilde{t}_\alpha),$$

откуда имеем $t_\alpha = t'_\alpha$ для всех α. Таким образом, $\varphi|_{U'}$ является изоморфизмом.

Далее, если

$$u'h'\omega'_w v' = \tilde{u}'\tilde{h}'\omega'_{\tilde{w}}\tilde{v}',$$

то, применяя φ, мы получаем, что

$$\varphi(u')\varphi(h')\omega_w\varphi(v') = \varphi(\tilde{u}')\varphi(\tilde{h}')\omega_{\tilde{w}}\varphi(\tilde{v}').$$

Значит, $\varphi(u') = \varphi(\tilde{u}')$, $\varphi(v') = \varphi(\tilde{v}')$ и $w = \tilde{w}$. Значит, $u' = \tilde{u}'$ и $v' = \tilde{v}'$, поэтому $h'\omega'_w = \tilde{h}'\omega'_w$, откуда $h' = \tilde{h}'$.

(b) Пусть

$$x' = u'h'\omega'_w v' \in \ker\varphi.$$

Тогда имеем

$$1 = \varphi(u')\varphi(h')\omega_w\varphi(v') \in UH\omega_w U_w,$$

так что

$$w = 1,\ \omega'_w = 1,\ \varphi(u') = 1,\ \varphi(v') = 1.$$

Поэтому

$$u' = v' = 1 \text{ и } x' = h' = \prod h'_\alpha(t_\alpha).$$

Согласно (R_8),

$$x'x'_\beta(u)x'^{-1} = x'_\beta\left(\prod_\alpha t_\alpha^{\langle\beta,\alpha\rangle}u\right).$$

Применяя φ, мы видим, что

$$\prod_\alpha t_\alpha^{\langle\beta,\alpha\rangle} = 1.$$

Значит, элемент x' коммутирует с $x'_\beta(u)$ при всех β и u, так что он лежит в центре группы G'.

Для завершения доказательства достаточно показать, что центр группы G содержится в H (так как было показано, что $\ker\varphi \subset H'$).

Если $x = uh\omega_w v$ лежит в центре группы G и $w \neq 1$, то существует такой корень $\alpha > 0$, что $w\alpha < 0$. Тогда $xx_\alpha(1) = x_\alpha(1)x$, противоречие с теоремой 28. Поэтому $w = 1$ и $x = uh$. Пусть w_0 — элемент группы W, переводящий все положительные корни в отрицательные. Тогда $x = \omega_{w_0}x\omega_{w_0}^{-1}$ записывается в подходящем базисе одновременно и верхней треугольной, и нижней треугольной матрицами, то есть он диагонален. Так как h записывается диагональной матрицей, то u записывается одновременно диагональной и унипотентной матрицей. Значит, $u = 1$, $x = h \in H$. $\square$

Следствие 19. *Центр группы G содержится в подгруппе H.*

Следствие 20. *Соотношения (R) и соотношения в группе H между элементами $h_\alpha(t)$ образуют определяющее множество соотношений для G.*

Доказательство. Если все соотношения в группе H выполняются в H', то гомоморфизм φ в следствии 18 становится изоморфизмом согласно (b). $\square$

Следствие 21. *Если группа G' построена так же, как и G, с помощью $L, \mathbb{K}, \ldots$, но с использованием пространства представления V' вместо V, то гомоморфизм φ группы G' на G, для которого*

$$\varphi(x'_\alpha(t)) = x_\alpha(t),$$

существует тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $\theta : H' \to H$, для которого

$$\theta(h'_\alpha(t)) = h_\alpha(t) \text{ при всех } \alpha \text{ и } t.$$

Доказательство. Ясно, что если φ существует, то существует и θ.

Обратно, предположим, что существует θ. Отождествляя образующие в H' и H, мы видим, что соотношения в H' образуют подмножество соотношений в H. Так как соотношения (R) одинаковы для G' и G, из предыдущего следствия мы заключаем, что соотношения между элементами $x'_\alpha(t), \ldots$ в G' образуют подмножество в множестве соотношений между элементами $x_\alpha(t), \ldots$ в G.

Следовательно, G существует. $\square$

15.2 Структура группы H.

До сих пор структура группы H играла для нас второстепенную роль. Будем определять эту структуру.

Напомним, что группа H порождается всеми операторами $h_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in \mathbb{K}$, и

$$h_\alpha(t) \text{ действует на весовом пространстве } V_\mu \text{ как умножение на } t^{\langle \mu, \alpha \rangle}. \qquad (*)$$

Напомним также, что линейная функция μ на H является старшим весом некоторого неприводимого представления при условии, что

$$\langle \mu, \alpha \rangle = \mu(h_\alpha) \in \mathbb{Z}_+ \text{ для всех } \alpha \in \Phi^+.$$

Ясно, что для этого достаточно, чтобы $\langle \mu, \alpha_i \rangle \in \mathbb{Z}_+$ для всех простых корней α_i.

Напомним также, что мы раньше вводили так называемые *фундаментальные веса*: линейные функции λ_i, $i = 1, \ldots, l$, удовлетворяющие формулам $\langle \lambda_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$.

Мы видим, что λ_i является старшим весом некоторого неприводимого представления.

Лемма 38. (a) *Аддитивная группа, порожденная всеми весами всех представлений, образует решетку Λ_1, фундаментальные веса λ_i задают базис в этой решетке.*

(b) *Аддитивная группа, порожденная всеми корнями, является подрешеткой Λ_0 решетки Λ_1. Матрица перехода от Λ_1 к Λ_0 (от базиса $\{\lambda_i\}$ к базису $\{\alpha_i\}$) имеет вид*

$$(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle), \quad i, j = 1, 2, \ldots, l.$$

В частности, Λ_0 имеет конечный индекс в Λ_1.

(c) *Аддитивная группа, порожденная всеми весами точного представления алгебры L в пространстве V, образует решетку Λ_V, заключенную между Λ_0 и Λ_1.*

Доказательство. (a) Этот пункт немедленно следует из определения фундаментальных весов.

(b) Если α_i — простой корень и

$$\alpha_i = \sum c_{ij}\lambda_j, \quad c_{ij} \in \mathbb{C},$$

то

$$\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle = c_{ik} \text{ и } \alpha_i = \sum \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \lambda_j.$$

(c) Пусть α — корень. Так как $x_\alpha \neq 0$, то существует такой ненулевой вектор $v \in V_\mu$ для некоторого веса μ, что $0 \neq x_\alpha(v) \in V_{\mu+\alpha}$. Значит, $\alpha = (\mu + \alpha) - \mu \in \Lambda_V$, то есть $\Lambda_0 \subseteq \Lambda_V \subseteq \Lambda_1$. □

Замечание 1. *Любая решетка, лежащая между Λ_0 и Λ_1, имеет вид Λ_V при подходящем выборе пространства V. В частности, $\Lambda_V = \Lambda_0$, если V соответствует присоединенному представлению, и $\Lambda_V = \Lambda_1$, если V соответствует сумме представлений, имеющих фундаментальные веса в качестве старших весов.*

Лемма 39 (структура группы H)**.** (a) *при каждом $\alpha \in \Phi$ $h_\alpha(t)$ является мультипликативной функцией от t.*

(b) *H является абелевой группой, порожденной элементами $h_i(t)$, где $h_i(t) = h_{\alpha_i}(t)$.*

(c) $\prod_{i=1}^{l} h_i(t_i) = 1$ *тогда и только тогда, когда*

$$\prod_{i=1}^{l} t_i^{\langle \mu, \alpha_i \rangle} = 1 \text{ для всех } \mu \in \Lambda_V.$$

(d) *Центр C группы G имеет вид*

$$C = \left\{ \prod_{i=1}^{l} h_i(t_i) \middle| \prod_{i=1}^{l} t_i^{\langle \beta, \alpha_i \rangle} = 1 \text{ для всех } \beta \in \Lambda_0 \right\}.$$

В частности, он всегда конечен.

Доказательство. Утверждения (a), (b), (c) следуют из свойства $(*)$, отмеченного выше. Пункты (a) и (c) получаются сразу, а (b) следует из того, что

$$t^{\langle \mu, \alpha \rangle} = t^{\mu(h_\alpha)} = t^{\mu(\sum n_i h_i)} = t^{\sum n_i \langle \mu, \alpha_i \rangle},$$

если $h_\alpha = \sum n_i h_i$.

Для доказательства (d) заметим, что $\prod_{i=1}^{l} h_i(t_i)$ коммутирует с $x_\beta(u)$ тогда и только тогда, когда $\prod_{i=1}^{l} t_i^{\langle \beta, \alpha_i \rangle} = 1$, согласно лемме 18(c). □

Следствие 22. (a) *Если* $\Lambda_V = \Lambda_1$, *то любой элемент* $h \in H$ *однозначно представляется в виде* $h = \prod_{i=1}^{l} h_i(t_i)$, $t_i \in \mathbb{K}^*$.

(b) *Если* $\Lambda_V = \Lambda_0$, *то центр группы* G *тривиален.*

Следствие 23. *Пусть* G — *группа Шевалле, построенная по алгебре* L, *полю* $\mathbb{K}$ *и пространству* V, *а* G' — *другая группа Шевалле, построенная по той же алгебре* L *и полю* $\mathbb{K}$, *но по пространству представления* V'. *Если* $\Lambda_{V'} \supseteq \Lambda_V$, *то существует такой гомоморфизм* $\varphi : G' \to G$, *что* $\varphi(x'_\alpha(t)) = x_\alpha(t)$ *для всех* α, t, *а* $\ker\varphi$ *принадлежит центру группы* G'. *Если* $\Lambda_V = \Lambda_{V'}$, *то* φ *является изоморфизмом.*

Доказательство. По лемме 39(c) существует такой изоморфизм $\theta : H' \to H$, что $\theta(h'_i(t) = h_i(t)$. Если α — произвольный корень и $h_\alpha = \sum n_i h_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, то

$$h_\alpha(t) = \prod h_i(t)^{n_i}$$

и такое же соотношение выполняется для $h'_\alpha(t)$. Поэтому $\theta(h'_\alpha(t)) = h_\alpha(t)$. По следствию 21 гомоморфизм φ существует. По следствию 18 $\ker\varphi$ принадлежит центру группы G'. Если $\Lambda_V = \Lambda_{V'}$, то существует такой гомоморфизм $\psi : G \to G'$, для которого $\psi(x_\alpha(t)) = x'_\alpha(t)$. Следовательно, φ и ψ взаимно обратны, то есть φ — изоморфизм. □

15.3 Группы Шевалле для разных систем корней.

Назовем группы Шевалле G_0 и G_1, соответствующие решеткам Λ_0 и Λ_1, *присоединенной группой* и *универсальной группой* соответственно.

Если $G = G_V$ — группа Шевалле, соответствующая решетке Λ_V, то можно построить центральные гомоморфизмы $\alpha : G_1 \to G_V$ и $\beta : G_V \to G_0$. Группа $\ker\alpha$ называется *фундаментальной группой* группы G. Ясно, что центр группы G равен $\ker\beta$.

В следующей таблице помещена известная информация о решетках и группах Шевалле для различных алгебр Ли L и для хороших полей $\mathbb{K}$ (универсальная группа Шевалле над любым полем совпадает с линейной группой, отмеченной в таблице, а вот присоединенные и промежуточные группы Шевалле могут отличаться даже для некоторых полей — являться *элементарными подгруппами* в соответствующих линейных группах):

Тип алгебры	Λ_1/Λ_0	G_0	G_V	G_1
A_l	$\mathbb{Z}_{l+1}$	PSL_{l+1}	разные	SL_{l+1}
B_l	$\mathbb{Z}_2$	$\mathrm{PSO}_{2l+1} = \mathrm{SO}_{2l+1}$	нет	Spin_{2l+1}
C_l	$\mathbb{Z}_2$	PSp_{2l}	нет	Sp_{2l}
D_{2n+1}	$\mathbb{Z}_4$	PSO_{4n+2}	SO_{4n+2}	Spin_{4n+2}
D_{2n}	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	PSO_{4n}	SO_{4n} или полуспинорная группа	Spin_{4n}
E_6	$\mathbb{Z}_3$			
E_7	$\mathbb{Z}_2$			
E_8	e			
F_4	e			
G_2	e			

Для получения колонки, над которой стоит Λ_1/Λ_0, необходимо привести матрицу $(\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle)$ к диагональной форме.

Например, чтобы показать, что SL_n является универсальной группы для алгебры $L = \mathfrak{sl}_n$ типа A_{n-1}, обозначим через μ_i вес $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_i$. Тогда, если положить

$$\lambda_i = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

то

$$\lambda_i(h_j) = \lambda_i(E_{jj} - E_{j+1,j+1}) = \delta_{ij}.$$

Поэтому фундаментальные веса принадлежат решетке, соответствующей стандартному представлению алгебры $\mathfrak{sl}_n$, то есть группа SL_n универсальна. Так как центр группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ является циклической группой порядка n, то Λ_1/Λ_0 изоморфна $\mathbb{Z}_n$.

Следствие 24. *Если α — корень, то существует такой гомоморфизм $\varphi : \mathrm{SL}_2 \to \langle\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{-\alpha}\rangle$, что*

$$\varphi_\alpha \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_\alpha(t), \quad \varphi_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = x_{-\alpha}(t),$$

$$\varphi_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \omega_\alpha \text{ и } \varphi_\alpha \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = h_\alpha(t).$$

Кроме того, $\ker\varphi_\alpha = \{1\}$ *или* $\{\pm 1\}$*, поэтому группа $\langle\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{-\alpha}\rangle$ изоморфна или* SL_2*, или* PSL_2.

Доказательство. Пусть L_1 — алгебра ранга 1 с базисом x, y, h и операцией $[x, y] = h$, $[h, x] = 2x$, $[h, y] = -2y$. Тогда L_1 имеет представление

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

как алгебра $\mathfrak{sl}_2$ в двумерном векторном пространстве V' и представление $x \mapsto x_\alpha$, $y \mapsto x_{-\alpha}$, $h \mapsto h_\alpha$ в том же пространстве V, в котором задано исходное представление алгебры L. Так как SL_2 — универсальная группа, то требуемый гомоморфизм φ существует и $\ker\varphi \subseteq \{\pm 1\}$ по следствию 23. □

Задачи.

1. Приведите пример элементарной группы Шевалле над некоторым полем, которая отличается от линейной группы, отмеченной в таблице (совет: сделайте это для присоединенной группы Шевалле, отличающейся от универсальной).

2. Если G — группа Шевалле, $G_1, G_2, \ldots, G_r$ — подгруппы группы G, соответствующие неразложимым компонентам системы корней Φ, то

(a) каждая подгруппа G_i нормальна в G и $G = G_1 G_2 \ldots G_r$;

(b) G — универсальная (присоединенная) группа тогда и только тогда, когда таковой является каждая подгруппа G_i;

(c) в обоих случаях в (b) произведение $G_1 G_2 \ldots G_r$ — прямое.

3. Если G — универсальная группа, то каждый гомоморфизм φ_α из следствия 24 является изоморфизмом.

16 Лекция 16. Простота группы G

Теорема 29 (Шевалле, Диксон)**.** *Пусть G — присоединенная группа Шевалле, построенная по простой алгебре Ли L (соответствующая система корней Φ неразложима) и полю $\mathbb{K}$. Если $|\mathbb{K}| = 2$, то предположим, что L не является алгеброй типа A_1, B_2, G_2. Если $|\mathbb{K}| = 3$, то предположим, что L не является алгеброй типа A_1. Тогда G — простая группа.*

Замечание 2. *Случаи, исключенные в теореме, действительно должны быть исключены. Если $|\mathbb{K}| = 2$ и L — алгебра типа A_1, B_2 или G_2, то G содержит нормальную подгруппу индекса два, изоморфную соответственно $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_6$ и $\mathrm{SU}_3(\mathbb{F}_3)$. Если $|\mathbb{K}| = 3$ и L — алгебра типа A_1, то G содержит нормальную подгруппу индекса два, изоморфную $\mathbf{A}_4$.*

Мы изложим доказательство теоремы 29, принадлежащее по сути Ивасаве и Титсу, в виде последовательности лемм.

Лемма 40. *Пусть G — группа Шевалле. Если $w \in W$, $w = w_\alpha w_\beta \dots$ — приведенное разложение, то $w_\alpha, w_\beta, \dots \in G_1$, где G_1 — группа, порожденная B и wBw^{-1}.*

Доказательство. Так как $w = w_\alpha w_\beta \dots$ — приведенное разложение, то $w^{-1}\alpha < 0$, Поэтому если $\beta = -w^{-1}\alpha > 0$, то $G_1 \supseteq w\mathcal{X}_\beta w^{-1} = \mathcal{X}_{w\beta} = \mathcal{X}_{-\alpha}$. Отсюда следует, что $w_\alpha \in G_1$. Так как $w_\alpha w B w^{-1} w_\alpha^{-1} \subseteq G_1$ и так как длина $w_\alpha w$ меньше длины w, то можно завершить доказательство по индукции. $\square$

Лемма 41. *Пусть G — группа Шевалле, π — подмножество множества простых корней, W_π — группа, порожденная элементами w_α, $\alpha \in \pi$, и $G_\pi = \bigcup\limits_{w \in W_\pi} BwB$. Тогда*

(a) *G_π — подгруппа группы G;*

(b) *полученные таким способом 2^l подгрупп все различны;*

(c) *каждая подгруппа группы G, содержащая B, равна одной из описанных выше групп.*

Доказательство. (a) следует из включения

$$BwB \cdot Bw_\alpha B \subseteq Bww_\alpha B \cup BwB.$$

(b) Пусть π и π' — различные подмножества множества простых корней, и пусть $\alpha \in \pi'$, $\alpha \notin \pi$. Тогда если $w \in W_\pi$, то $w_\alpha(\alpha) = -\alpha$ и

$$w(\alpha) = \alpha + \sum_{\beta \in \pi} c_\beta \beta.$$

Таким образом, $w_\alpha(\alpha) \neq w(\alpha)$, так как простые корни линейно независимы. Следовательно, $w_\alpha \notin W_\pi$, $W_\pi \neq W_{\pi'}$ и $G_\pi \neq G_{\pi'}$, так как различным элементам группы Вейля соответствуют различные двойные классы смежности.

(c) Пусть A — любая подгруппа, содержащая B. Положим

$$\pi = \{\alpha \mid \alpha \text{ — простой корень и } w_\alpha \in A\}.$$

Покажем, что $A = G_\pi$. Очевидно, что $A \supseteq G_\pi$. Так как

$$G = \bigcup_{w \in W} BwB \text{ и } A \supseteq B,$$

то для доказательства обратного включения $A \subseteq G_\pi$ достаточно показать, что если $w \in A$, то $w \in G_\pi$.

Пусть $w \in A$ и $w = w_\alpha w_\beta \dots$ — приведенное разложение. По предыдущей лемме $w_\alpha, w_\beta, \dots \in A$. Поэтому $\alpha, \beta, \dots \in \pi$, $w \in W_\pi$ и $w \in G_\pi$. $\square$

Подгруппа в G, сопряженная некоторой группе G_π, называется *параболической подгруппой* группы G. Мы сформулируем без доказательства (см. упражнения) некоторые дополнительные свойства параболических подгрупп, которые следуют из леммы 40:

(1) Никакие две подгруппы G_π не сопряжены.

(2) Каждая параболическая подгруппа совпадает со своим нормализатором.

(3) $G_\pi \cap G_{\pi'} = G_{\pi \cap \pi'}$.

(4) Множество $B \cup BwB$, $w \in W$, является группой тогда и только тогда, когда $w = 1$ или w — простое отражение.

Пример 7. Если $G = \mathrm{SL}_n$, то каждому подмножеству π соответствует разбиение $n \times n$-матриц на блоки, при котором диагональные блоки являются квадратными матрицами. Ясно, что число таких разбиений равно 2^{n-1}. Группа G_π состоит из матриц, у которых все блоки под диагональю равны нулю.

Лемма 42. *Пусть L — простая алгебра Ли и G — присоединенная группа Шевалле. Тогда, если $N \neq \{e\}$ — нормальная подгруппа группы G, то $NB = G$.*

Доказательство. Сначала покажем, что $N \not\subseteq B$. Предположим, что $N \subseteq B$ и $1 \neq x \in N$. Представим x в виде $x = uh$, $u \in U$, $h \in H$. Если $u \neq 1$, то для некоторого $w \in W$ элемент wxw^{-1} не принадлежит B, а этом противоречит тому, что N — нормальная подгруппа.

Если $u = 1$, то $h \neq 1$, Так как G — присоединенная группа, то у нее единичный центр и, значит, для некоторых $\alpha \in \Phi$, $t, t' \in \mathbb{K}$, $t \neq t'$, имеем

$$hx_\alpha(t)h^{-1} = x_\alpha(t').$$

Поэтому

$$[h, x_\alpha(t)] = x_\alpha(t' - t) \in N, \quad x_\alpha(t' - t) \neq 1,$$

и мы вернулись к первому случаю.

Теперь докажем лемму. По лемме 41 (c) $NB = G_\pi$ для некоторого множества π. Мы должны показать, что π содержит все простые корни. Предположим, что это не так. Так как $N \not\subseteq B$, то $\pi \neq \emptyset$. Поскольку система Φ неразложима, мы можем найти такие простые корни α и β, что $\alpha \in \pi$, $\beta \notin \pi$ и α и β не ортогональны.

Так как $\alpha \in \pi$, то для некоторых $b_1, b_2 \in B$ имеет место включение $b_1 w_\alpha b_2 \in N$ и, значит, $w_\alpha b \in N$, где $b = b_1 b_2 \in B$. По лемме 36(b)

$$w_\beta w_\alpha b w_\beta^{-1} \in N \cap (Bw_\beta w_\alpha B \cdot Bw_\beta B) \subseteq N \cap (Bw_\beta w_\alpha B \cup Bw_\beta w_\alpha w_\beta B).$$

Потому либо $w_\beta w_\alpha \in W_\pi$, либо $w_\beta w_\alpha w_\beta \in W_\pi$.

Так как $\langle\alpha,\beta\rangle \neq 0$, то корень $\gamma = w_\beta(\alpha) = \alpha - \langle\alpha,\beta\rangle\beta$ не простой, значит,

$$n(w_\gamma) = n(w_\beta w_\alpha w_\beta) \neq 1$$

и, следовательно, $n(w_\beta w_\alpha w_\beta) \geqslant 3$. Поэтому $w_\beta w_\alpha$ и $w_\beta w_\alpha w_\beta$ — приведенные разложения. По лемме 40 $w_\beta \in W_\pi$, что противоречит выбору β. Таким образом, π является множеством всех простых корней и $NB = G_\pi = G$. $\square$

Лемма 43. *Если L и G — такие же, как в теореме, то $G = [G, G]$.*

Прежде чем доказывать лемму 43, сначала покажем, что теорема Диксона вытекает из лемм 42 и 43.

Пусть $N \neq \{e\}$ — нормальная подгруппа группы G. По лемме 42 $NB = G$ и, значит,

$$G/N \cong B/B \cap N.$$

Так как группа G/N совпадает со своим коммутантом, а группа $B/B \cap N$ разрешима, то $G/N = \{e\}$ и $N = G$.

Вместо прямого доказательства леммы 43 мы докажем более сильное утверждение:

Лемма 44. *Если алгебра L такая же, как в теореме Диксона, то равенство $G = [G, G]$ выполняется в любой группе G, в которой справедливы соотношения (R); на самом деле, достаточно выполнения следующих соотношений:*

$$(A) \qquad [x_\beta(t), x_\gamma(u)] = \prod x_{i\beta+j\gamma}(c_{ij}t^i u^j);$$

$$(B) \qquad h_\alpha(t)x_\alpha(u)h_\alpha(t)^{-1} = x_\alpha(t^2u).$$

Доказательство. Так как группа G порождается подгруппами $\mathcal{X}_\alpha$, необходимо показать, что каждая группа $\mathcal{X}_\alpha$ лежит в $[G, G]$. Мы проделаем это в несколько шагов, каждый раз исключая из рассмотрения уже разобранные случаи.

Первый шаг нам дает уже почти все.

(а) Предположим, что $|\mathbb{K}| \geqslant 4$. Выберем $t \in \mathbb{K}^*$ так, чтобы $t^2 \neq 1$. Тогда

$$[h_\alpha(t), x_\alpha(u)] = x_\alpha((t^2 - 1)u).$$

Так как α и u взяты произвольно, то каждая группа $\mathcal{X}_\alpha$ лежит в $[G, G]$.

Согласно (а), мы можем далее считать, что ранг l не меньше двух и $|\mathbb{K}| = 2$ или 3. Представим правую часть соотношения (A) в виде

$$x_{\beta+\gamma}(N_{\beta,\gamma}tu) \cdot \prod{}',$$

выделив сомножитель с $i = j = 1$.

Мы будем использовать следующий факт:

$$N_{\beta,\gamma} = \pm(r+1), \text{ где } r = r(\beta,\gamma) \text{ — максимальное число, для которого } \beta - r\gamma \text{ — еще корень.} \quad (*)$$

(b) Предположим, что α является корнем, который может быть представлен в виде $\beta+\gamma$, причем никакая другая комбинация β и γ с целыми положительными коэффициентами не является корнем, и $N_{\beta,\gamma}\neq 0$. Тогда $\mathcal{X}_\alpha\subseteq[G,G]$, что сразу следует из соотношения (A) с $\prod'=1$. Это предположение охватывает следующие случаи:

(1) если все корни имеют одинаковую длину — типы $\mathbf{A}_l,\mathbf{D}_l,\mathbf{E}_l$;

(2) $\mathbf{B}_l$, $l\geqslant 3$, α — длинный корень; $\mathbf{B}_2$, α — короткий корень, $|\mathbb{K}|=3$;

(3) $\mathbf{C}_l$, $l\geqslant 3$, α — короткий корень или α — длинный корень и $|\mathbb{K}|=3$;

(4) $\mathbf{F}_4$;

(5) $\mathbf{G}_2$, α — длинный корень.

Чтобы показать это, используем тот факт, что все корни одинаковой длины сопряжены с помощью группы Вейля, вложим α в подходящую двумерную систему корней и используем $(*)$. Во всех случаях, кроме вторых возможностей в (2) и (3), эта двумерная система может быть выбрана как система типа $\mathbf{A}_2$ (и тогда β и γ будут корнями той же длины, что и α), и в оставшихся случаях можно взять систему $\mathbf{B}_2$ и короткие корни β и γ.

Учитывая исключения, сделанные в теореме, осталось рассмотреть следующие случаи:

(6) $\mathbf{B}_l$, $l\geqslant 2$, α — короткий корень;

(7) $\mathbf{G}_2$, α — короткий корень, $|\mathbb{K}|=3$;

(8) $\mathbf{C}_l$, $l\geqslant 3$, α — длинный корень, $|\mathbb{K}|=2$.

(c) В случаях (6) и (7) $\mathcal{X}_\alpha\subseteq[G,G]$. В обоих этих случаях можно найти такие корни β и γ, что $\alpha=\beta+\gamma$, все другие корни вида $i\beta+j\gamma$ (где i,j — целые положительные числа) — длинные и $N_{\beta,\gamma}\neq 0$; в (6) можно взять β длинным корнем, а γ —- коротким, в (7) оба корня короткие. Тогда $\prod'$ принадлежит группе $[G,G]$, согласно рассмотренным выше случаям, а из (A) следует, что $X_\alpha\subseteq[G,G]$.

(d) В случае (8) $\mathcal{X}_\alpha\subseteq[G,G]$. Представим α в виде $\alpha=\beta+2\gamma$, где β — длинный, а γ — короткий корень. Так как $\mathcal{X}_{\beta+\gamma}\subseteq[G,G]$, поскольку $\beta+\gamma$ — короткий корень, то наше утверждение будет доказано, если показать, что коэффициент c_{12} в соотношении (A) не равен нулю, а то вытекает из следующей леммы:

Лемма 45. *Если β и γ — простые корни системы типа $\mathbf{B}_2$, причем β — длинный, а γ — короткий корень, то*

$$[x_\beta(t),x_\gamma(u)]=x_{\beta+\gamma}(\pm tu)x_{\beta+2\gamma}(\pm tu^2).$$

Доказательство. Имеем

$$x_\gamma(u)x_\beta x_\gamma(u)^{-1}=\exp(\operatorname{ad}ux_\gamma)x_\beta=x_\beta+uN_{\gamma,\beta}x_{\beta+\gamma}+u^2(N_{\gamma,\beta}N_{\gamma,\beta+\gamma}/2)\cdot x_{\beta+2\gamma}.$$

Здесь $N_{\gamma,\beta}=\pm1$ и $N_{\gamma,\beta+\gamma}=\pm2$, так как $\beta-\gamma$ не является корнем. Если умножить это выражение на $-t$, перейти к экспонентам и, используя то, что три члена в правой части коммутируют, перенести первый из них налево, то мы получим доказательство леммы. □

Таким образом, доказательство теоремы Диксона закончено. □

В ходе доказательства мы получили такой результат:

Следствие 25. *Если Φ — неразложимая система корней ранга больше одного и α — произвольный корень, то существуют корни β и γ и целое положительное число n такие, что $\alpha=\beta+n\gamma$ и коэффициент c_{1n} в соотношении (A) не равен нулю.*

Следствие 26 (к теореме Диксона)**.** *Если* $|\mathbb{K}| \geqslant 4$ *и* G *— группа Шевалле, построенная по полю* $\mathbb{K}$*, то каждая нормальная разрешимая подгруппа группы* G *является центральной и потому конечна.*

Доказательство. Так как центр группы Шевалле всегда конечен, то нам нужно доказать только первое утверждение. При этом можно предполагать, что $G = G_0$ (присоединенная группа), так как существует такой гомоморфизм φ группы G на G_0, что $\ker\varphi$ принадлежит центру группы G и G_0 имеет единичный центр.

Мы можем записать G в виде $G = G_1G_2\dots G_r$, где G_i, $i = 1,\dots,r$, являются присоединенными группами, являющимися неразложимыми подсистемами системы Φ. Таким образом, любая нормальная подгруппа группы G равна произведение некоторых из групп G_i. Если она к тому же разрешима, то произведение пустое и подгруппа является единичной. □

Задачи

1. Покажите, что присоединенные группы Шевалле типа $\mathbf{A}_1$ над полями из двух и трех элементов не просты.

2. Докажите, что никакие две подгруппы G_π не сопряжены.

3. Докажите, что каждая параболическая подгруппа совпадает со своим нормализатором.

4. Докажите, что $G_\pi \cap G_{\pi'} = G_{\pi\cap\pi'}$.

5. Докажите, что множество $B \cup BwB$ является группой тогда и только тогда, когда $w = 1$ или w — простое отражение.

17 Лекция 17. Группы Шевалле и алгебраические группы.

В этой лекции мы обсудим значение полученных результатов для теории полупростых алгебраических групп.

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле. Подмножество $V \subseteq \mathbb{K}^n$ называется *алгебраическим*, если существует такое подмножество $P \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, что

$$V = \{v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n \mid p(v_1, \ldots, v_n) = 0 \text{ для всех } p \in P\}.$$

Алгебраические подмножества в $\mathbb{K}^n$ образуют систему всех замкнутых подмножеств некоторой топологии в $\mathbb{K}^n$, которая называется *топологией Зарисского*. Для каждого подмножества $V \subseteq \mathbb{K}^n$ положим

$$I_{\mathbb{K}}(V) = \{p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \mid p(v_1, \ldots, v_n) = 0 \text{ для всех } (v_1, \ldots, v_n) \in V\}.$$

Отображение φ алгебраического множества $V_1 \subseteq \mathbb{K}^{n_1}$ в алгебраическое множество $V_2 \subseteq \mathbb{K}^{n_2}$ называется *рациональным*, если каждая координата $\varphi(x)_j$, $j = 1, \ldots, n_2$, является рациональной функцией координат x_i ($(x_1, \ldots, x_{n_1}) \in V_1 \subseteq \mathbb{K}^{n_1}$), причем знаменатель этой функции отличен от нуля во всех точках множества V_1.

Если $\mathbb{K}_0$ — подполе поля $\mathbb{K}$, то говорят, что алгебраическое множество V *определено над* $\mathbb{K}_0$, если идеал $I_{\mathbb{K}}(V)$ имеет базис, состоящий из полиномов с коэффициентами из $\mathbb{K}_0$. Рациональное отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ *определено над* $\mathbb{K}_0$, если V_1 и V_2 определены над $\mathbb{K}_0$ и коэффициенты рациональных функций $\varphi(x)_j$ лежат в $\mathbb{K}_0$.

Пусть $r = n^2 + 1$. Рассмотрим в кольце $\mathbb{K}[x_0; x_{ij}]$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, полином

$$D(x) = 1 - x_0 \det(x_{ij})$$

и отождествим группу $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ с алгебраическим подмножеством

$$\{v \in \mathbb{K}^r \mid D(v) = 0\} \text{ в } \mathbb{K}^r$$

с помощью отображения

$$(x_{ij}) \mapsto (\det(x_{ij})^{-1}, x_{ij}).$$

Матричной алгебраической группой называется подгруппа G группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (для некоторого числа n и алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$), которая одновременно является алгебраическим подмножеством в $\mathbb{K}^{n^2+1}$. Говорят, что группа G *определена над* $\mathbb{K}_0$, если она определена над $\mathbb{K}_0$ как алгебраическое множество.

Пример 8. Приведем примеры матричных алгебраических групп.

(a) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$;

(b) подгруппа верхних треугольных матриц;

(c) диагональная подгруппа;

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{K} \right\} = G_a$ — аддитивная группа;

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{K}^* \right\} = G_m$ — мультипликативная группа;

(f) $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{K})$;

(g) $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$.

Группы в примерах (a)–(e) определены над простым полем. Поле определения групп Sp_{2n}, SO_n зависит от коэффициентов определяющих форм.

Отображение алгебраических групп $\varphi : G \to H$ называется (*рациональным*) *гомоморфизмом*, если это одновременно групповой гомоморфизм и рациональное отображение. Гомоморфизм $\varphi : G \to H$ называется изоморфизмом, если он к тому же обратим (и обратное отображение тоже рационально).

Следующие результаты мы приведем без доказательства (потому что подробное изучение алгебраических групп со всеми доказательствами заняло бы у нас слишком много времени), доказательства можно найти в книгах *Борель А. Линейные алгебраические группы. Москва, Издательство "Мир", 1972* и *Семинар Шевалле (Seminaire C. Chevalley), Classification des groupes de Lie algebriques, 1, 2, Ecole Normal Super. Paris, 1958*:

(1) Пусть G — матричная алгебраическая группа. Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) G связна в топологии Зарисского (группу G невозможно разбить в объединении двух непересекающихся открытых множеств);

(b) G неприводима как алгебраическое многообразие, то есть не представляется в виде объединения двух меньших алгебраических многообразий;

(c) $I_{\mathbb{K}}(G)$ — простой идеал (то есть из $xy \in I_{\mathbb{K}}(G)$ следует, что или $x \in I_{\mathbb{K}}(G)$, или $y \in I_{\mathbb{K}}(G)$).

(2) Образ алгебраической группы при рациональном гомоморфизме является алгебраической группой.

(3) Группа $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, порожденная связными алгебраическими подгруппами, алгебраична и связна. Если все эти подгруппы определены над совершенным полем $\mathbb{K}_0$, то и группа G определена над $\mathbb{K}_0$.

Если G — алгебраическая группа, то *радикалом* группы G ($\mathrm{Rad}\, G$) называется ее максимальная нормальная связная разрешимая подгруппа. Группа G называется *полупростой*, если

(1) $\mathrm{Rad}\, G = \{e\}$;

(2) G связна.

Пример 9. Группа

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \middle| A \in \mathrm{SL}_{n-1} \right\}$$

имеет радикал

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

В оставшейся части параграфа мы предположим, что $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле, $\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}$ — простое подполе, G — группа Шевалле, построенная с помощью $\mathbb{K}$, и M

— решетка, использованная при построении G. Мы фиксируем базис в M; так как замена базиса в M задается целочисленными обратимыми матрицами, то наши результаты не будут зависеть от выбора базиса.

Теорема 30. *Сохраним обозначения предыдущих лекций.*

(a) G *— полупростая алгебраическая группа относительно выбранного базиса.*

(b) B *— максимальная связная разрешимая группа (подгруппа Бореля).*

(c) H *— максимальная связная диагонализируемая подгруппа (максимальный тор).*

(d) N *— нормализатор группы* H *и* $N/H \cong W$.

(e) *Группы* G, B, H *и* N *определены над* $\mathbb{K}_0$ *(относительно выбранного базиса).*

Замечание 3. *Подгруппы* B *и* H *определяются по абстрактной группе* G*:*

(a) B *— максимальная разрешимая подгруппа, не имеющая подгрупп конечного индекса;*

(b) H *— максимальная нильпотентная подгруппа, в которой каждая подгруппа конечного индекса имеет конечный индекс в своем нормализаторе.*

Доказательство теоремы 30. (a) Зададим отображение $G_a \to \mathcal{X}_\alpha$ формулой $x_\alpha : t \mapsto x_\alpha(t)$. Это рациональная гомоморфизм. Так как G_a — связная алгебраическая группа, то такой же является и группа $\mathcal{X}_\alpha$. Следовательно, группа G алгебраична и связна. Пусть $R = \operatorname{Rad} G$. Так как R — разрешимая нормальная подгруппа, то она конечна (доказывали раньше). Поскольку R также и связна, то $R = \{e\}$, то есть G — полупростая группа.

(b) и (c) Группа H является связной алгебраической группой как образ группы G_m^l при гомоморфизме

$$(t_1, \ldots, t_l) \mapsto \prod_{i=1}^{l} h_i(t_i).$$

Поэтому $B = UH$ — связная алгебраическая разрешимая группа. Предположим, что задана подгруппа G_1, строго содержащая B. Тогда $G_1 \supseteq Bw_\alpha B$ (где α — некоторый простой корень), так что $G_1 \supseteq \langle \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{-\alpha} \rangle$, откуда следует, что группа G_1 не разрешима. Этим доказано (b).

H — максимальная связная диагонализируемая подгруппа группы B (так как любая большая подгруппа имеет нетривиальное пересечение с U). Значит, H — максимальная связная диагонализируемая подгруппа группы G (по теоремам из теории алгебраических групп), что и утверждается в (c).

(d) Очевидно.

Для того, чтобы доказать (e), надо воспользоваться утверждением (3) и следующей леммой:

Лемма 46. *Пусть* $\mathcal{X}_\alpha = \{x_\alpha(t) \mid t \in \mathbb{K}\}$ *и* $\mathcal{H}_\alpha = \{h_\alpha(t) \mid t \in \mathbb{K}^*\}$. *Тогда*

(a) *группа* $\mathcal{X}_\alpha$ *определена над* $\mathbb{K}_0$ *и гомоморфизм* $x_\alpha : G_\alpha \to \mathcal{X}_\alpha$ *является изоморфизмом, определенным над* $\mathbb{K}_0$*;*

(b) *группа* $\mathcal{H}_\alpha$ *определена над* $\mathbb{K}_0$ *и* $h_\alpha : G_m \to \mathcal{H}_\alpha$ *— гомоморфизм, определенный над* $\mathbb{K}_0$.

Доказательство. Пусть $\{v_i\}$ — базис в M, образованный весовыми векторами. Выберем v_i так, чтобы $x_\alpha(v_i) \neq 0$, запишем $x_\alpha()i) = \sum c_{ij}v_j$ и рассмотрим вектор v_j, для которого $c_{ij} \neq 0$, Если v_i имеет вес μ, то v_j имеет вес $\mu + \alpha$. Поскольку

$$x_\alpha(t) = 1 + tx_\alpha + t^2x_\alpha^2/2 + \dots,$$

то, обозначив через a_{ij} матричную координатную функцию (i, j), имеем $a_{ij}(x_\alpha(t)) = c_{ij}t$. Все остальные коэффициенты в разложении $x_\alpha(t)$ являются полиномами над $\mathbb{K}_0$ от T, а значит, также и от $a_{ij} = c_{ij}t$. Это множество полиномиальных соотношений задает $\mathcal{X}_\alpha$ как матричную алгебраическую группу над полем $\mathbb{K}_0$.

Отображение

$$\frac{1}{c_{ij}}a_{ij} : x_\alpha(t) \mapsto t$$

является обратным к отображению x_α, так что x_α — изоморфизм над $\mathbb{K}_0$.

Доказательство пункта (b) оставим в качестве упражнения. □

Исходя из группы G, мы можем восстановить решетки Λ и Λ_0. Это делается следующим образом.

Пусть $\mu \in \Lambda$. Определим отображение $\hat{\mu} : H \to G_m$ формулой

$$\mu\left(\prod h_i(t_i)\right) = \prod t_i^{\mu(h_i)}.$$

Это характер (то есть гомоморфизм группы H в G_m), определенный на $\mathbb{K}_0$. Легко видеть, что решетка $\hat{\Lambda}$, равная группе характеров группы H, состоит в точности из характеров $\hat{\mu}$. Подгруппы $\mathcal{X}_\alpha$ однозначно восстанавливаются по группе H как минимальные унипотентные подгруппы, нормализуемые группой H.

Если

$$h = \prod h_i(t_i),$$

то

$$hx_\alpha(t)h^{-1} = x_\alpha(\hat{\alpha}(h)t),$$

где

$$\hat{\alpha}(h) = \prod t_i^{\alpha(h_i)}.$$

Характер $\hat{\alpha}$ называется *глобальным корнем*. Через $\hat{\Lambda}_0$ мы обозначим подрешетку в $\hat{\Lambda}$, порожденную глобальными корнями.

Лемма 47. *Отображение $\mu \mapsto \hat{\mu}$ задает W-изоморфизм Λ с $\hat{\Lambda}$. При этом $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ и Λ_0 изоморфно отображается на $\hat{\Lambda}_0$. (Действие W на $\hat{\Lambda}$ задается как действие N/H на группе характеров H).*

Доказательство оставим в качестве упражнения.

Мы суммируем наши результаты в следующей теореме:

Теорема 31 (теорема существования)**.** *Пусть задана система корней Φ, решетка Λ, причем $\Lambda_0 \subset \Lambda \subset \Lambda_1$, и алгебраически замкнутое поле $\mathbb{K}$. Тогда существует такая полупростая алгебраическая группа G, определенная над $\mathbb{K}$, что Λ_0 и Λ реализуются соответственно как решетка глобальных корней и решетка характеров по отношению к максимальному тору H группы G. При этом можно считать, что группы G, H, $\mathcal{X}_\alpha, \ldots$ определены над простым полем.*

Классификационная теорема, которая утверждает, что каждая полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ изоморфна над $\mathbb{K}$ некоторой группе Шевалле, доказывается значительно сложнее (но это правда!)

Напомним, что

$$H_{\mathbb{Z}} = H \cap L_{\mathbb{Z}} = \{A \in H \mid \mu(A) \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \mu \in \Lambda\}.$$

Лемма 48. *Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле, G — группа Шевалле над $\mathbb{K}$, $h'_1, \ldots, h'_l$ — базис группы $H_{\mathbb{Z}}$. Определим операторы $h'_i(t)$ в пространстве $V^{\mathbb{K}}$, полагая*

$$h'_i(t)(v) = t^{\mu(h'_i)v} \text{ для всех } v \in V_\mu.$$

Тогда отображение $\varphi : G_m^l \to \mathrm{GL}\,(V^{\mathbb{K}})$, задаваемое формулой

$$(t'_1, \ldots, t'_l) \mapsto \prod_{j=1}^{l} h'_j(t'_j),$$

является изоморфизмом алгебраических групп G_m^l и H. Этот изоморфизм определен над $\mathbb{K}_0$.

Доказательство. Запишем

$$h_i = \sum n_{ij} h'_j, \quad n_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

По заданному набору чисел $\{t'_j\}$ мы можем подобрать такой набор $\{t_i\}$, что $t'_j = \prod\limits_i t_i^{n_{ij}}$ (поскольку $\det(n_{ij}) \neq 0$ и группа $\mathbb{K}^*$ делима). Тогда оператор $\prod\limits_j h'_j(t'_j)$ действует на подпространстве V_μ как умножение на число

$$\prod_j {t'_j}^{\mu(h_j)} = \prod_i t_i^{\mu(h_i)},$$

то есть он совпадает с $\prod h_i(t_i)$. Это показывает, что $\varphi(G_m^l) = H$.

Ясно, что φ — гомоморфизм, определенный над полем $\mathbb{K}_0$. Пусть $\{\mu_i\}$ — базис решетки Λ, дуальный к базису $\{h'_j\}$ (то есть $\mu_i(h'_j) = \delta_{ij}$). Запишем μ_i в виде $\mu_i = \sum n_\mu \mu$, где сумма берется по всем весам μ алгебры H в пространстве V. Тогда

$$t'_i = \prod_\mu \left(\prod_j {t'_j}^{\mu(h'_j)} \right)^{n_\mu} = \prod a_\mu^{n_\mu},$$

так что существует обратное отображение φ^{-1}, являющееся гомоморфизмом и определенное над $\mathbb{K}_0$. $\square$

Теорема 32. *Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле и $\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}$ — его простое подполе. Пусть G — группа Шевалле, построенная по полю $\mathbb{K}$, рассматриваемая, как и выше, как алгебраическая группа, определенная над $\mathbb{K}_0$. Тогда*

(a) *U^-HU — открытое подмногообразие в G, определенное над $\mathbb{K}_0$;*

(b) *если n — число положительных корней, то отображение*

$$\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{*l} \times \mathbb{K}^n \to U^-HU,$$

заданное формулой

$$\varphi((t_\alpha)_{\alpha<0}, (t_i)_{1\leqslant i\leqslant l}, (t_\beta)_{\beta>0}) = \prod_{\alpha<0} x_\alpha(t_\alpha) \cdot \prod h_i'(t_i) \cdot \prod_{\beta>0} x_\beta(t_\beta),$$

является изоморфизмом алгебраических многообразий. Этот изоморфизм определен над $\mathbb{K}_0$.

Доказательство. (a) Рассмотрим естественное действие группы G на $L^{\mathbb{K}}$ и индуцированное действие на $\Lambda^n L^{\mathbb{K}}$. Первое из действий можно определить следующим образом. Алгебра $L^{\mathbb{K}}$ вкладывается в $\operatorname{End} V^{\mathbb{K}}$. Группа G действует на пространстве $\operatorname{End} V^{\mathbb{K}}$ по формуле $A \mapsto xAx^{-1}$ ($A \in \operatorname{End} V^{\mathbb{K}}$, $x \in G$). При этом действие элемента $x_\alpha(t)$ на $L^{\mathbb{K}}$ задается формулой

$$x_\alpha(t) \mapsto \exp t \operatorname{ad} x_\alpha.$$

Выберем в $L_{\mathbb{Z}}$ базис $\{x_\alpha, h_i'\}$; теми же символами мы будем обозначать соответствующий ему базис в $L^{\mathbb{K}} = L_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{K}$.

В $\Lambda^n L^{\mathbb{K}}$ мы выберем базис $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$, составленный из внешних произведений элементов x_α, h_i', причем $y_1 = \lambda x_\alpha$, $\alpha \in \Phi^+$. Для каждого $x \in G$ положим $x(y_i) = \sum a_{ij}(x) y_j$; функция $d = a_{11}$ определена над $\mathbb{K}_0$. Мы утверждаем, что $x \in U^-HU = U^-B$ тогда и только тогда, когда $d(x) \neq 0$.

Предположим, что $x \in U^-B$. Поскольку элементы из B умножают вектор y_1 на ненулевую константу и для каждого $u \in U^-$ имеем

$$u(x_\alpha) \in x_\alpha + H + \sum_{ht(\beta)<ht(\alpha)} \mathbb{K} x_\beta,$$

то $d(x) \neq 0$. Если же $x \in U^- wB$, где $1 \neq w \in W$, то то же рассуждение показывает, что $d(x) = 0$. Из равенства

$$w_0 U^- wB = B w_0 w B$$

(где $w_0 \in W$ — элемент, переводящий положительные корни в отрицательные) мы получаем, что описанные два случая исчерпывают все возможности, откуда следует пункт (a).

(b) Отображение φ является композицией двух отображений

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) : \{(t_\alpha)_{\alpha<0}\} \times \{(t_i)\} \times \{(t_\beta)_{\beta>0}\} \to \\ \to U^- \times H \times U \text{ и } \theta : U^- \times H \times U \to U^-HU.$$

Мы докажем, что они являются изоморфизмами, определенными над $\mathbb{K}_0$.

Для отображения ψ_2 это следует из леммы 48. Рассмотрим ψ_3. Пусть $\{v_i\}$ — базис пространства $V^{\mathbb{K}}$, полученный из весовых векторов решетки M, и a_{ij} — соответствующие координатные функции на $\operatorname{End} V^{\mathbb{K}}$. Для каждого корня α выберем индексы $i(\alpha)$ и $j(\alpha)$ так, чтобы

$$n(\alpha) = a_{i(\alpha),j(\alpha)}(x_\alpha) \neq 0.$$

Положим

$$x = \prod_{\beta>0} x_\beta(t_\beta).$$

Ясно, что для всех i, j функции $a_{ij}(x)$ являются полиномами с целыми коэффициентами от t_β. Упорядочив положительные корни в соответствии с высотой, мы получаем, что

$$a_{i(\alpha),j(\alpha)}(x) = n(\alpha)t_\alpha + (\text{полином с целыми коэффициентами от переменных } t_\beta, \text{ где } \beta \text{ меньше, чем } \alpha).$$

Отсюда следует, что ψ_3 — изоморфизм над $\mathbb{K}_0$. Аналогично проводится доказательство для ψ_1.

Чтобы доказать, что θ является изоморфизмом, мы упорядочим векторы v_i так, чтобы U^-, H и U записывались соответственно нижними треугольными матрицами с единицами на диагонали, диагональными матрицами и верхними треугольными матрицами с единицами на диагонали. Далее мы можем предполагать, что U^-, H и U состоят из всех обратимых матриц описанного вида.

Пусть $x = u^-hu \in U^-HU$; обозначим через t_{ij} матричные коэффициенты матриц u^- (при $i > j$), h (при $i = j$) и u (при $i < j$). Упорядочим индексы ij так, чтобы при $i \leqslant l, j \leqslant m$ и $ij \neq lm$ индекс ij предшествовал индексу lm. Тогда

$$\begin{aligned} a_{ij}(x) &= t_{ij}t_{jj} + a'_{ij} && \text{при } i > j, \\ a_{ij}(x) &= t_{ij} + a'_{ij} && \text{при } i = j, \\ a_{ij}(x) &= t_{ii}t_{ij} + t_{ii}t_{ij} + a'_{ij} && \text{при } i < j, \end{aligned}$$

где a'_{ij} — полином с целыми коффициентами от переменных t, предшествующих t_{ij}. Теперь мы можем по индукции выразить t_{ij} как рациональные функции с коэффициентами из $\mathbb{Z}$ от a_{ij}. При этом в знаменателе у них будут только выражения, представляющие функции t_{ii}, которые не обращаются в ноль на U^-HU. Таким образом, θ — изоморфизм над $\mathbb{K}_0$ и (b) доказано. □

Пример 10. В группе SL_n подмножество U^-HU состоит из матриц (a_{ij}), у которых миноры $|a_{11}|$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, ... отличны от нуля.

Из полученных результатов легко выводится следующий важный факт.

Пусть G — группа Шевалле над полем $\mathbb{C}$, рассматриваемая, так же как и выше, как алгебраическая матричная группа над простым полем $\mathbb{Q}$ и записанная в базисе из решетки M. Рассмотрим соответствующий идеал I над $\mathbb{Z}$ (состоящий из всех полиномов с целыми коэффициентами от матричных элементов, которые обращаются в нуль на G). Тогда множество нулей идеала I в матричной группе над любым алгебраически замкнутыми

полем $\mathbb{K}$ совпадает с группой Шевалле над $\mathbb{K}$ того же самого типа, что и группа G (то есть имеет ту же систему корней и решетку весов).

Таким образом, мы имеем функториальное определение с помощью уравнений всех полупростых алгебраических групп заданного типа.

17.1 Задачи

1. Докажите пункт (b) леммы 46.
2. Докажите лемму 47.
3. Докажите утверждение примера 10.

18 Лекция 18. Образующие и соотношения. Специальные автоморфизмы.

18.1 Задание универсальной группы Шевалле образующими и соотношениями

Дадим представление универсальной группы Шевалле с помощью образующих и более простых соотношений.

Пусть Φ — система корней и $\mathbb{K}$ — поле. Мы будем рассматривать группу, порожденную набором символов $\{x_\alpha(t) \mid \alpha \in \Phi, t \in \mathbb{K}\}$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

(A) $x_\alpha(t)$ аддитивно зависит от t;

(B) если α и β — корни и $\alpha + \beta \neq 0$, то

$$[x_\alpha(t), x_\beta(u) = \prod x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij}t^i u^j),$$

где i, j — целые положительные числа, а c_{ij} — те же числа, что и в соотношениях для групп Шевалле;

(B') если положить $w_\alpha(t) := x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$, где $t \in \mathbb{K}^*$, то

$$w_\alpha(t)x_\alpha(u)w_\alpha(-t) = x_{-\alpha}(-t^{-2}u);$$

(C) если положить $h_\alpha(t) := w_\alpha(t)w_\alpha(-1)$, где $t \in \mathbb{K}^*$, то $h_\alpha(t)$ мультипликативно зависит от t.

Теорема 33. *Предположим, что система корней Φ неразложима. Тогда*

(a) *соотношения (R) являются следствиями соотношений (A) и (B), если ранг $\Phi \geqslant 2$, и соотношений (A) и (B'), если ранг $\Phi = 1$;*

(b) *в любом случае, если мы добавим соотношение (C), то мы получим полную систему соотношений для универсальной группы Шевалле, построенной по системе корней Φ и полю $\mathbb{K}$.*

Доказательство опирается на ряд лемм.

Будем обозначать через G' группу, определенную образующими $\{x'_\alpha(t) \mid \alpha \in \Phi, t \in \mathbb{K}\}$, и соотношениями (A) и (B), если ранг $\Phi \geqslant 2$, или (A) и (B'), если ранг $\Phi = 1$. Мы обозначим через G универсальную группу Шевалле, построенную по Φ и $\mathbb{K}$, и через π — гомоморфизм $\pi : G' \to G$, задаваемый формулой $\pi(x'_\alpha(t)) = x_\alpha(t)$.

Лемма 49. *Пусть S – такое множество корней, что*

(a) *если $\alpha \in S$, то $-\alpha \notin S$;*

(b) *если $\alpha, \beta \in S$ и $\alpha + \beta \in \Phi$, то $\alpha + \beta \in S$.*

Пусть $\mathcal{X}'_S$ — подгруппа группы G', порожденная множеством $\{x'_\alpha(t) \mid \alpha \in S, t \in \mathbb{K}\}$. Тогда π изоморфно отображает $\mathcal{X}'_S$ на соответствующую группу $\mathcal{X}_S$ в G.

Доказательство. Используя соотношения (A) и (B), мы можем каждый элемент из $\mathcal{X}'_S$ привести к виду

$$\prod_{\alpha \in S} x'_\alpha(t_\alpha), \quad t_\alpha \in \mathbb{K},$$

а нам при этом известно, что каждый элемент из $\mathcal{X}_S$ может быть записан в такой форме единственным образом. $\square$

Лемма 50. *Следующие соотношения являются следствиями соотношений* (A) *и* (B), *если ранг* $\Phi \geqslant 2$, *или* (A) *и* (B'), *если ранг* $\Phi = 1$*:*

(a) $w'_\alpha(t)x'_\beta(u)w'_\alpha(-t) = x'_\gamma(ct^{-\langle\beta,\alpha\rangle}u)$;

(b) $w'_\alpha(t)w'_\beta(u)w'_\alpha(-t) = w'_\gamma(ct^{-\langle\beta,\alpha\rangle}u)$;

(c) $w'_\alpha(t)h'_\beta(u)w'_\alpha(-t) = h'_\gamma(ct^{-\langle\beta,\alpha\rangle}u)h'_\gamma(ct^{-\langle\beta,\alpha\rangle})^{-1}$,

где $\gamma = w_\alpha(\beta)$, $c = c(\alpha,\beta) = \pm 1$ *не зависит от* t *и* u *и* $c(\alpha,\beta) = c(\alpha,-\beta)$;

(d) $h'_\alpha(t)x'_\beta(u)h'_\alpha(t)^{-1} = x'_\beta(t^{\langle\beta,\alpha\rangle}u)$;

(e) $h'_\alpha(t)w'_\beta(u)h'_\alpha(t)^{-1} = w'_\beta(t^{\langle\beta,\alpha\rangle}u)$;

(f) $h'_\alpha(t)h'_\beta(u)h'_\alpha(t)^{-1} = h'_\beta(t^{\langle\beta,\alpha\rangle}u)h'_\beta(t^{\langle\beta,\alpha\rangle})^{-1}$.

Доказательство. (a) Предположим, что $\alpha \neq \pm\beta$. Пусть S — множество корней вида $i\alpha + j\beta$, где i и j — целые числа и $j > 0$. Согласно (B), $\mathcal{X}'_S$ нормализуется группами $\mathcal{X}'_\alpha$ и $\mathcal{X}'_{-\alpha}$, а следовательно, и элементами $w'_\alpha(t)$. Таким образом, $w'_\alpha(t)x'_\beta(u)w'_\alpha(-t) \in \mathcal{X}'_S$. По предыдущей лемме нам достаточно доказать, что соотношение (a) выполняется в G. Но в G оно следует из соотношений (R).

Предположим теперь, что $\alpha = \beta$ и что ранг $\Phi \geqslant 2$. В этом случае используем следующий факт (который мы доказали, когда доказывали простоту группы Шевалле):

$(*)$ Существуют корни δ и η и целое положительное число j такие, что $\alpha = \delta + j\eta$ и

$$[x'_\delta(t), x'_\eta(u)] = \prod_{m,n>0} x'_{m\delta+n\eta}(c_{m,n}t^m u^n),$$

причем $c_{1j} \neq 0$.

Положим

$$T = \{mw_\alpha(\delta) + nw_\alpha(\eta) \mid m, n \text{ — целые положительные числа}\}.$$

Сопрягая обе части равенства $(*)$ с помощью элемента $w'_\alpha(t)$, мы получаем равенство, где все члены, кроме

$$w'_\alpha(t)x'_{\delta+j\eta}(c_{1j}tu^j)w'_\alpha(-t),$$

лежат в $\mathcal{X}'_T$ (это следует из уже разобранного случая). Значит,

$$w'_\alpha(t)x'_{\delta+j\eta}(c_{1j}tu^j)w'_\alpha(-t) \in \mathcal{X}'_T,$$

и, рассуждая так же, как раньше, с заменой S на T, что и в этом случае выполнено соотношение (a).

Если же $\alpha = \beta$ и ранг $\Phi = 1$, то соотношение (a) совпадает с (B'). Случай $\alpha = -\beta$ для всех рангов следует из случая $\alpha = \beta$ (оставим в качестве упражнения).

Соотношения (b)–(f) следуют из (a) и определения элементов $w'_\alpha(t)$ и $h'_\alpha(t)$. $\square$

Утверждение (a) нашей теоремы следует из пунктов (a)–(d) доказанной леммы.

Лемма 51. *Пусть $\mathcal{H}'_\alpha$ — группа, порожденная всеми элементами $h'_\alpha(t)$, $\mathcal{H}'_i = \mathcal{H}'_{\alpha_i}$ и H' — группа, порожденная всеми $\mathcal{H}'_\alpha$. Тогда*

(a) *каждая подгруппа $\mathcal{X}'_\alpha$ нормальна в H';*

(b) $H' = \prod_{i=1}^{l} \mathcal{H}'_i$.

Доказательство. (a) следует их пункта (f) предыдущей леммы.

(b) Пусть β — любой корень. Запишем β в виде $\beta = w\alpha_i$, где α_i — простой корень и $w \in W$. Пусть $w = w_\alpha \dots$ — приведенное разложение и $\gamma = w_\alpha \beta$. Тогда

$$h'_\beta(t) = w'_\alpha(1) h'_\gamma(c(-1)^{-\langle \beta,\alpha\rangle} t) h'_\gamma(c(-1)^{-\langle \beta,\alpha\rangle})^{-1} w'_\alpha(-1)$$

по пункту (c) леммы 50 и, следовательно, по лемме 50 (e)

$$h'_\beta(t) = h'_\gamma(c(-1)^{-\langle \beta,\alpha\rangle} t) h'_\gamma(c(-1)^{-\langle \beta,\alpha\rangle})^{-1} \cdot w'_\alpha(t^{-\langle \beta,\alpha\rangle}) w'_\alpha(-1) \in \mathcal{H}'_\gamma \cdot \mathcal{H}'_\alpha.$$

Индукцией по длине w получаем (b). $\square$

Доказательство теоремы 33(b). Пусть G'' — группа, определенная образующими $\{x''_\alpha(t) \mid \alpha \in \Phi, t \in \mathbb{K}\}$ и соотношениям $(A), (B)$, если ранг $\Phi > 1$, или (B'), если ранг $\Phi = 1$, и (C). Пусть $w''_\alpha(t)$, $h''_\alpha(t)$, $\dots$ определены как обычно, с помощью образующих $x''_\alpha(t)$. Мы хотим доказать, что гомоморфизм $\pi'' : G'' \to G$ является изоморфизмом.

Пусть $x \in \ker \pi''$. Мы уже знаем, что тогда $x \in H''$. По предыдущей лемме и (C),

$$x = \prod h''_i(t_i), \quad t_i \in \mathbb{K}^*.$$

Применяя π'', мы получаем, что $1 = \prod h_i(t_i)$. Так как группа G универсальна, то $t_i = 1$ для всех i и, значит, $x = 1$. $\square$

18.2 Специальные автоморфизмы групп Шевалле

Начиная с этого момента, мы рассматриваем изоморфизмы и автоморфизмы групп Шевалле над совершенными полями (то есть либо полями нулевой характеристики, либо полями характеристики p, содержащими для каждого элемента его корень p-й степени). Предположение о совершенности поля не является строго необходимым, но в одном-двух местах оно упрощает рассуждения. Мы начнем с доказательства существования некоторых автоморфизмов, связанных с симметриями исходной системы корней.

Лемма 52. *Пусть Φ — неразложимая система корней, в которой встречаются корни разной длины. Пусть*

$$\Phi^* = \{\alpha^* = 2\alpha/(\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \Phi\}$$

— система, полученная с помощью инверсии. Тогда:

(a) Φ^* *— система корней;*

(b) *при отображении * длинные корни переходят в короткие и обратно; при этом углы между корнями и системы простых корней сохраняются;*

(c) *если* $p = (\alpha_0, \alpha_0)/(\beta_0, \beta_0)$, *где* α_0 — *длинный корень,* β_0 — *короткий, то отображение*

$$\alpha \mapsto \begin{cases} p\alpha^*, & \text{если } \alpha \text{ — длинный корень,} \\ \alpha^*, & \text{если } \alpha \text{ — короткий корень} \end{cases}$$

продолжается до гомотетии.

Доказательство. (a) верно, так как $\langle \alpha^*, \beta^* \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$, (b) и (c) очевидны. □

Система корней Φ^*, получающаяся таким образом из системы Φ, называется системой корней, *дуальной к* Φ.

Пример 11. (a) При $n \geqslant 3$ системы $\mathbf{B}_n$ и $\mathbf{C}_n$ взаимно дуальны. Системы $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{F}_4$ ($p = 2$) и $\mathbf{G}_2$ ($p = 3$) дуальны сами себе.

(b) Пусть $\alpha, \beta, \alpha+\beta, \alpha+2\beta$ — положительные корни системы Φ типа $\mathbf{B}_2$. Положительными корнями в системе Φ^* будут $\alpha^*, \beta^*, (\alpha+\beta)^* = 2\alpha^* + \beta^*$ и $(\alpha+2\beta)^* = \alpha^* + \beta^*$. Отождествив α с β^* и β с α^*, мы получим отображение системы B_2 в себя:

$$\alpha \mapsto \beta,\ \beta \mapsto \alpha,\ \alpha+\beta \mapsto \alpha+2\beta,\ \alpha+2\beta \mapsto \alpha+\beta.$$

Это отображение задается отражением относительно прямой L (L — биссектриса угла между α и β) и соответствующим изменением длин корней.

Теорема 34. *Пусть* Φ, Φ^* *и* p *– такие же, как выше,* $\mathbb{K}$ — *поле характеристики* p *(*p *равно* 2 *или* 3*),* G *и* G^* — *универсальные группы Шевалле, построенные по парам* $(\Phi, \mathbb{K})$ *и* $(\Phi^*, \mathbb{K})$*. Тогда существуют такие гомоморфизм* $\varphi : G \to G^*$ *и набор чисел* $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ *для всех* $\alpha \in \Phi$*, что*

$$\varphi(x_\alpha(t)) = \begin{cases} x_{\alpha^*}(\varepsilon_\alpha t), & \text{если } \alpha \text{ — длинный корень,} \\ x_{\alpha^*}(\varepsilon_\alpha t^p), & \text{если } \alpha \text{ — короткий корень.} \end{cases}$$

Если поле $\mathbb{K}$ *совершенно, то* φ — *изоморфизм абстрактных групп.*

Пример 12. (a) Если $\mathbb{K}$ — совершенное поле характеристики два, то группы Spin_{2n+1}, SO_{2n+1} (расщепимая форма) и Sp_{2n} изоморфны.

(b) Рассмотрим систему $\mathbf{C}_2$, $p = 2$, $\varepsilon_\alpha = 1$. Теорема утверждает, что у группы U имеется такой эндоморфизм φ (как и раньше, мы отождествили Φ и Φ^*), что

$$\varphi(x_\alpha(t)) = x_\beta(t), \qquad \varphi(x_\beta(t)) = x_\alpha(t^2), \tag{1}$$

$$\varphi(x_{\alpha+\beta}(t) = x_{\alpha+2\beta}(t^2), \qquad \varphi(x_{\alpha+2\beta}(t) = x_{\alpha+\beta}(t). \tag{2}$$

Поскольку $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 2$, в группе U остается единственное нетривиальное соотношение типа (B)

$$[x_\alpha(t), x_\beta(u) = x_{\alpha+\beta}(tu)x_{\alpha+2\beta}(tu^2). \tag{3}$$

Применив к нему φ, мы получаем

$$[x_\beta(t), x_\alpha(u^2)] = x_{\alpha+2\beta}(t^2u^2)x_{\alpha+\beta}(tu^2). \tag{4}$$

Это соотношение действительно выполняется, так как оно может быть получено из (3) переходом к обратным элементам и заменой t на u^2 и u на t.

(c) Автоморфизм φ, рассмотренный в (b), является внешним, так как, реализовав группу G как Sp_4, мы получим, что при $t \neq 0$ ранг линейного преобразования $x_\alpha(t) - 1$ равен 1, в то время как ранг $x_\beta(t) - 1$ равен двум.

(d) Рассмотрим в примере (b) поле $\mathbb{K}$ из двух элементов. Мы получим внешний группы S_6, так как $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2) \simeq S_6$. Чтобы убедиться в этом, представим S_6 как группу Вейля типа $\mathbf{A}_5$. Она сохраняет билинейную форму, матрица которой в базисе из простых корней имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Действительно, с точностью до умножения на константу эта форма равна

$$\sum x_i x_j (\alpha_i, \alpha_j) = |\sum x_i \alpha_i|^2.$$

Рассмотрим теперь эту форму по модулю два. Тогда она кососимметрична и ее ядро совпадает с прямой, проходящей через $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5$, так что на факторпространстве по этой прямой мы имеем невырожденную форму. Поэтому получаем гомоморфизм $\psi : S_6 \to \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$, Легко видеть, что $\ker \psi \not\supset \mathbf{A}_6$, так что $\ker \psi = 1$. Поскольку

$$|S_6| = 6! = 720 = 2^4(2^2 - 1)(2^4 - 1) = |\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)|,$$

ψ — изоморфизм.

Изоморфизм ψ^{-1} может быть описан следующим образом. Группа $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}_2)$ действует на проективном пространстве P^3, состоящем из 15 точек. Для каждой точки p существует 8 не ортогональных ей точек. Они разбиваются на два множества S_1 и S_2 по 4 точки в каждом так, что $\{p\} \cup S_1$ и $\{p\} \cup S_2$ состоят из 5 попарно не ортогональных точек и это единственные пяти-ээлементные множества с таким свойством, содержащие p. Всего имеется $15 \cdot 2/5 = 6$ таких пятиэлементных множеств. Группа $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2)$ переставляет эти шесть множеств; это задает гомоморфизм $\psi^{-1} : \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2) \to S_6$.

Под действием внешнего автоморфизма стабилизаторы точек и изотропных прямых (прямых, соответствующих изотропным плоскостям в четырехмерном пространстве) переходят друг в друга. Каждое из описанных выше 5-точечных множеств соответствует множеству из 5 попарно не пересекающихся изотропных прямых.

Доказательство теоремы. Если $p = 2$, то все $\varepsilon_\alpha = 1$. Мы должны показать, что отображение φ, определенное на $x_\alpha(t)$ выписанными равенствами, сохраняет соотношения (A), (B) и (C). (A) и (C) проверяются сразу. Нетривиальными соотношениями в (B) являются

$$[x_\alpha(t), x_\beta(u)] = \begin{cases} x_{\alpha+\beta}(\pm tu), & \text{если } |\alpha| = |\beta| \text{ и } \angle(\alpha, \beta) = 120^\circ, \\ x_{\alpha+\beta}(\pm 2tu), & \text{если } \alpha \text{ и } \beta \text{ — ортогональные короткие корни и} \\ & \alpha + \beta \in \Phi, \\ x_{\alpha+\beta}(\pm tu) x_{\alpha+2\beta}(\pm tu^2), & \text{если } |\alpha| > |\beta| \text{ и } \angle(\alpha, \beta) = 135^\circ. \end{cases}$$

Если $p = 2$, то второе равенство можно опустить; кроме того, нет неопределенности в знаках. Как вытекает из вычислений, приведенных выше в примере (b), отображение φ сохраняет эти соотношения. Поэтому φ продолжается до гомоморфизма, а в случае совершенного поля — и до изоморфизма.

Случай $\mathbf{G}_2$, $p = 3$ оставим для следующей лекции.

18.3 Задачи.

1. Выведите соотношение леммы 50 (a) для $\alpha = -\beta$ из того же соотношения при $\alpha = \beta$.

2. Рассмотрим универсальную группу типа $\mathbf{C}_2$ — $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}$ — поле характеристики два. Пусть форма Q имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Постройте в явном виде все матрицы $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathbf{C}_2$.

Подсказка: некоторые из этих матриц имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Покажите с помощью построенных в предыдущем упражнении матриц выполнение подходящих для системы корней $\mathbf{B}_2$ соотношений из доказательства теоремы 34 для образов гомоморфизма.

19 Лекция 19. Специальный автоморфизм групп Шевалле типа $\mathbf{G}_2$.

Напомним, что на прошлой лекции мы начали доказывать следующую теорему (теорема 34):

Пусть Φ, Φ^* и p – такие же, как выше, $\mathbb{K}$ — поле характеристики p (p равно 2 или 3), G и G^* — универсальные группы Шевалле, построенные по парам $(\Phi, \mathbb{K})$ и $(\Phi^*, \mathbb{K})$. Тогда существуют такие гомоморфизм $\varphi : G \to G^*$ и набор чисел $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ для всех $\alpha \in \Phi$, что

$$\varphi(x_\alpha(t)) = \begin{cases} x_{\alpha^*}(\varepsilon_\alpha t), & \text{если } \alpha \text{ — длинный корень,} \\ x_{\alpha^*}(\varepsilon_\alpha t^p), & \text{если } \alpha \text{ — короткий корень.} \end{cases}$$

Если поле $\mathbb{K}$ совершенно, то φ — изоморфизм абстрактных групп.

Нам остался только случай $\mathbf{G}_2$, $p = 3$. Доказательство в этом случае опирается на ряд лемм. Оно сложнее, потому что для характеристики три возвращается проблема подбора знаков.

Лемма 53. *Пусть G — группа Шевалле. Пусть α и β — разные простые корни и n — порядок элемента $w_\alpha w_\beta$ в группе W, так что*

$$w_\alpha w_\beta w_\alpha \cdots = w_\beta w_\alpha w_\beta \ldots \text{ (n сомножителей с каждой стороны).}$$

Тогда

(a) $w_\alpha(1) w_\beta(1) w_\alpha(1) \cdots = w_\beta(1) w_\alpha(1) w_\beta(1) \ldots$ *(n сомножителей с каждджой стороны);*

(b) *обе части равенства переводят x_α в $-x_{w(\alpha)}$ (где $w = w_\alpha w_\beta w_\alpha \ldots$).*

Доказательство. Мы можем считать, что G — универсальная группа. Для упрощения обозначений предположим, что $n = 3$ (заметим, что бывают еще случаи $n = 4$ и $n = 6$, оставим их в качестве упражнений). Рассмотрим элемент

$$x = w_\alpha(1) w_\beta(1) w_\alpha(1) w_\beta(-1) w_\alpha(-1) w_\beta(-1).$$

Пусть $G_\alpha = \langle \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{-\alpha} \rangle$. Тогда произведение первых пяти сомножителей в x лежит в

$$w_\alpha(1) w_\beta(1) G_\alpha w_\beta(-1) w_\alpha(-1) = G_{w_\alpha w_\beta(\alpha)} = G_\beta$$

и, значит, $x \in G_\beta$. Аналогично, $x \in G_\alpha$. В силу единственности получаем $x \in H$. Поскольку группа универсальна, это означает $x = 1$.

Пусть $y = w_\alpha(1) w_\beta(1) w_\alpha(1)$. Тогда $y(x_\alpha) = c x_{-\beta}$, где $c = \pm 1$. Поскольку y переводит $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ в $[x_\beta, x_{-\beta}] = h_\beta$, то $y(x_{-\alpha}) = c x_\beta$, где c — то же, что и выше. Перейдя к экспонентам и учитывая, что $w_\alpha(1) = x_\alpha(1) x_{-\alpha}(-1) x_\alpha(1)$, мы получаем

$$y w_\alpha(1) y^{-1} = w_{-\beta}(c) = w_\beta(-c).$$

В силу пункта (a)

$$y w_\alpha(1) y^{-1} = w_\beta(1),$$

поэтому $c = -1$, что доказывает (b). $\square$

Лемма 54. *Если a и b — элементы ассоциативной алгебры над полем характеристики ноль, которые коммутируют с $[a,b]$, и* exp *имеет смысл, то*

$$\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b \cdot \exp(-[a,b]/2).$$

Доказательство. Рассмотрим формальный степенной ряд по t

$$f(t) = \exp(-(a+b)t)\exp at \exp bt \exp(-[a,b]t^2/2).$$

Дифференцируя, получаем

$$f'(t) = (-(a+b) + a - [b,a]t + b - [a,b]t)f(t) = 0.$$

Значит, $f(t) = f(0) = 1$. $\square$

Пусть теперь G — универсальная группа Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над полем характеристики ноль. Ее система корней имеет следующий вид:

$$\pm\alpha,\ \pm(\alpha+3\beta),\ \pm(2\alpha+3\beta) \text{ — длиннные корни длины } \sqrt{3}$$

и

$$\pm\beta,\ \pm(\alpha+\beta),\ \pm(\alpha+2\beta) \text{ — короткие корни длины 1.}$$

Шаг 1. *Пусть $y = w_\alpha(1)w_\beta(1)$ — элемент группы G, соответствующий элементу группы Вейля $w = w_\alpha w_\beta$ (поворот на 60° по часовой стрелке). Тогда можно так изменить знаки у элементов базиса Шевалле алгебры L, чтобы $yx_\gamma = -x_{w(\gamma)}$ для всех $\gamma \in \Phi$.*

Доказательство. Пусть $yx_\gamma = c_\gamma x_{w(\gamma)}$, $c_\gamma = \pm 1$. Тогда

$$c_\gamma = c_{-\gamma} \text{ и } c_\gamma c_{w(\gamma)} c_{w^2(\gamma)} = -1 \text{ (по пункту (b) предыдущей леммы).} \qquad (*)$$

Изменим знаки у $x_{w(\alpha)}$ и $x_{w^2(\alpha)}$ так, чтобы $c_\alpha = -1$ и $c_{w(\alpha)} = -1$ (и таким же образом поменяем знаки у $x_{-w(\alpha)}$ и $x_{-w^2(\alpha)}$). Тогда из $(*)$ вытекает, что $c_\gamma = -1$ для всех γ на w-орбите корня α. Точно так же можно добиться, чтобы $c_\gamma = -1$ для всех γ на w-орбите корня β. $\square$

Шаг 2. (a) *Если выполнено условие 1, то для всех корней γ, δ имеем*

$$N_{w(\gamma),w(\delta)} = -N_{\gamma,\delta}.$$

(b) *Изменяя знаки у x_γ, можно добиться, чтобы сохранилось условие 1 и $N_{\alpha,\beta} = 1$, $N_{\alpha+\beta,\beta} = 2$. При этом*

$$N_{\beta,\alpha+2\beta} = N_{\alpha+\beta,\alpha+2\beta} = 3 \text{ и } N_{\alpha,\alpha+3\beta} = 1.$$

Доказательство. Рассматривая действие y на $[x_\gamma, x_\delta]$ и используя 1, получаем (a). При доказательстве (b) мы используем следующее утверждение:

Если γ и δ — корни и $\{\gamma + i\delta \mid -r \leqslant i \leqslant q\}$ есть δ-серия, проходящая через γ, то $N_{\gamma,\delta} = \pm(r+1)$; кроме того, $N_{\gamma,\delta}$ и $N_{\gamma+\delta,-\delta}$ имеют одинаковый знак (так как их произведение равно $q(r+1)$).

Изменяя знаки у x_γ одновременно для всех корней γ на одной w-орбите, мы не нарушим условие 1. При этом мы можем добиться, чтобы $N_{\alpha,\beta} = 1$ и $N_{\alpha+\beta,\beta} = 2$. В силу предыдущего имеем

$$N_{\beta,\alpha+2\beta} = N_{\alpha+\beta,\alpha+2\beta} = 3N_{-\alpha-\beta,2\alpha+3\beta} = -3N_{\beta,\alpha} = 3.$$

Далее (по тождеству Якоби),

$$[x_\alpha, [x_{\alpha+2\beta}, x_\beta]] = [x_{\alpha+2\beta}, [x_\alpha, x_\beta]],$$

так что

$$N_{\alpha+2\beta,\beta} \cdot N_{\alpha,\alpha+3\beta} = N_{\alpha,\beta} \cdot N_{\alpha+2\beta,\alpha+\beta}.$$

Поэтому

$$N_{\alpha,\alpha+3\beta} = N_{\alpha,\beta} = 1.$$

□

Шаг 3. *Если выполнены шаги* 1 *и* 2, *то*

(a) $[x_\alpha(t), x_\beta(u)] = x_{\alpha+\beta}(tu)x_{\alpha+3\beta}(-tu^3)x_{\alpha+2\beta}(-tu^2)x_{2\alpha+3\beta}(t^2u^3)$;
(b) $[x_{\alpha+\beta}(t), x_\beta(u)] = x_{\alpha+2\beta}(2tu)x_{\alpha+3\beta}(-3tu^2)x_{2\alpha+3\beta}(3t^2u)$;
(c) $[x_\alpha(t), x_{\alpha+3\beta}(u)] = x_{2\alpha+3\beta}(tu)$;
(d) $[x_{\alpha+2\beta}(t), x_\beta(u)] = x_{\alpha+3\beta}(-3tu)$;
(e) $[x_{\alpha+\beta}(t), x_{\alpha+2\beta}(u)] = x_{2\alpha+3\beta}(3tu)$.

Доказательство. (a) Из шага 2 следует, что

$$x_\beta(u)x_\alpha = (\exp \operatorname{ad} ux_\beta)x_\alpha = x_\alpha - ux_{\alpha+\beta} + u^2x_{\alpha+2\beta} + u^3x_{\alpha+3\beta}.$$

Умножив на $-t$ и взяв экспоненты, мы получим, используя предыдущую лемму, что

$$\begin{aligned} x_\beta(u)x_\alpha(-t)x_\beta(-u) &= \exp(-tx_\alpha - tu^3x_{\alpha+3\beta}) \exp(tux_{\alpha+\beta} - tu^2x_{\alpha+2\beta} = \\ &= x_\alpha(-t)x_{\alpha+3\beta}(-tu^3)x_{2\alpha+3\beta}(t^2u^3/2)x_{\alpha+\beta}(tu)x_{\alpha+2\beta}(-tu^2)x_{2\alpha+3\beta}(t^2u^3/2); \end{aligned}$$

отсюда следует (a). Пункт (b) доказывается аналогично (упражнение). В пп. (c)–(e) правая часть соответствует единственному корню вида $i\gamma + j\delta$; коэффициент при tu равен $N_{\gamma,\delta}$. □

Мы воспользовались возможностью подробно разобрать все нетривиальные соотношения в группе U. Однако использовать их мы будем только в характеристике 3, где они существенно упрощаются.

Шаг 4. (a) *Существует такой автоморфизм θ группы G, что для всех $\gamma \in \Phi$, $t \in \mathbb{K}$ имеет место*

$$\theta(x_\gamma(t)) = x_{w(\gamma)}(-t),$$

где w — вращение на 60° *по часовой стрелке.*

(b) *Если характеристика поля равна трем, то существует такой эндоморфизм φ группы G, что если обозначить через r перестановку корней, задаваемую вращением на* 30° *по часовой стрелке, то*

$$\varphi(x_\gamma(t)) = \begin{cases} x_{r(\gamma)}(-t), & \text{если } \gamma \text{ — длинный корень,} \\ x_{r(\gamma)}(t^3), & \text{если } \gamma \text{ — короткий корень.} \end{cases}$$

Доказательство. (a) В качестве θ можно взять внутренний автоморфизм, задаваемый элементом y из шага 1.

(b) Ясно, что φ сохраняет соотношения (A) и (C).

Теперь надо проверить сохранение соотношений (B) на всех парах корней.

(1) Если между корнями угол равен 30° или 90°, то сумма таких корней никогда не является корнем, поэтому и в исходном соотношении (B) справа стоит единица, и в его образе при отображении φ (так как угол между образами корней не поменяется).

(2) Если угол между корнями равен 60° и корни длинные, то их сумма корнем не является. Образами этих корней про отображении φ являются два коротких корня, угол между которыми равен 60°. Это ситуация пункта (e) (либо отображения формулы этого пункта с помощью элемента группы Вейля), в котором справа в поле характеристики три стоит e, то есть соотношение сохраняется.

Очевидно, что соотношение сохраняется (ровно симметричными рассуждениями), если изначально перед нами были два коротких корня с углом 60° между ними.

(3) Если угол между корнями равен 120° и корни длинные, то это соответствует формуле (c). Отображение φ тогда переводит (c) в

$$[x_{\alpha+\beta}(-t), x_\beta(-u)] = x_{\alpha+2\beta}(-tu),$$

то есть в (b). Остальные случаи длинных корней с углом 120° получаются из данного применением группы Вейля.

Если же угол между корнями равен 120° и корни короткие, то это, симметрично, формула (b), из которой получается формула (c), отраженная с помощью элемента группы Вейля.

(4) Остался только угол 150°, то есть длинный и короткий корень, образующие систему простых корней. Возьмем пару (α, β). Сравним константы $N_{\gamma,\delta}$ для системы положительных корней, связанной с (α, β), и для системы положительных корней, связанной с $(-\alpha, \alpha+\beta)$. Мы видим, что $N_{\alpha,\beta} = 1$ соответствует $N_{-\alpha,\alpha+\beta} = 1$ и $N_{\alpha+\beta,\beta} = 2$ соответствует $N_{\beta,\alpha+\beta} = -2$. Изменив знак у векторов x_γ для всех коротких корней γ, мы получим в системе $(-\alpha, \alpha+\beta)$ те же константы, что и раньше в системе (α, β). Поскольку w_α отображает одну систему в другую, отображение η, заданное на образующих формулой

$$x_\gamma(t) \mapsto \begin{cases} x_{w_\alpha(\gamma)}(-t), & \text{если } \gamma \text{ — короткий корень,} \\ x_{w_\alpha(\gamma)}(t), & \text{если } \gamma \text{ — длинный корень} \end{cases}$$

продолжается до автоморфизма группы G. Поэтому, чтобы доказать, что φ сохраняет $R(\gamma, \delta)$, достаточно показать, что $\eta \circ \varphi$ его сохраняет, то есть что соотношение (a) из (3)

сохраняется при отображении

$$x_\gamma(t) \mapsto \begin{cases} x_{w_\alpha(r\gamma)}(t), & \text{если } \gamma \text{ — длинный корень,} \\ x_{w_\alpha(r\gamma)}(t^3), & \text{если } \gamma \text{ — короткий корень} \end{cases}$$

(заметим, что перестановка корней $w_\alpha r$ соответствует отражению относительно биссектрисы угла $\angle(\alpha, \beta)$).

Итак, нам нужно доказать, что следующие равенства согласованы:

(a) $[x_\alpha(t), x_\beta(u)] = x_{\alpha+\beta}(tu)x_{\alpha+3\beta}(-tu^3)x_{\alpha+2\beta}(-tu^2)x_{2\alpha+3\beta}(t^2u^3)$;

(a′) $[x_\beta(t), x_\alpha(u^3)] = x_{\alpha+3\beta}(t^3u^3)x_{\alpha+\beta}(-tu^3)x_{2\alpha+3\beta}(-t^3u^6)x_{\alpha+2\beta}(t^2u^3)$.

Ясно, что (a′) получается из (a) заменой t на u^3 и u на t и переходом к обратным элементам. Это доказывает шаг 4. □

Закончим теперь доказательство нашей теоремы. В первом утверждении осталось разобрать единственный случай группы G типа $\mathbf{G}_2$, $p = 3$. Если $G = G^*$, то он следует из шага 4. На самом деле всегда имеется изоморфизм $G \cong G^*$, как вытекает из следующего утверждения:

Универсальная группа Шевалле определяется системой корней Φ *и полем* $\mathbb{K}$ *независимо от алгебры* L *и базиса Шевалле в* L.

Предположим теперь, что поле $\mathbb{K}$ совершенно. Тогда φ взаимно однозначно отображает одно множество образующий на другое, так что отображение φ^{-1} определено на образующих. Поскольку φ сохраняет соотношения (A), (B), (C), то и φ^{-1} их сохраняет и, значит, φ^{-1} продолжается до гомоморфизма G^* в G, то есть φ — изоморфизм. □

19.1 Задачи

1. Докажите лемму 53 для $n = 4$.

2. Докажите лемму 53 для $n = 6$.

3. Докажите пункт (3b) в рассуждениях теоремы.

4. Докажите, что описаный автоморфизм φ группы Шевалле типа G_2 над совершенным полем характертистики три является внешним.

20 Лекция 20. Основная теорема об автоморфизмах групп Шевалле, часть 1

Теорема 35. *Пусть G и G' — группы Шевалле, построенные по $(L, \mathcal{B} = \{x_\alpha, h_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}, \Lambda, \mathbb{K})$ и $(L', \mathcal{B}' = \{x_{\alpha'}, h_{\alpha'} \mid \alpha' \in \Phi'\}, \Lambda', \mathbb{K}')$ соответственно. Предположим, что существует такой изоморфизм между Φ и Φ' ($\alpha \mapsto \alpha'$), что Λ отображается на Λ'. Тогда существуют такие изоморфизм $\varphi : G \to G'$ и набор чисел $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ ($\alpha \in \Phi$), что $\varphi(x_\alpha(t)) = x_{\alpha'}(\varepsilon_\alpha t)$ для всех $\alpha \in \Phi$, $t \in \mathbb{K}$. При этом можно выбрать ε_α так, чтобы $\varepsilon_\alpha = 1$, если α или $-\alpha$ — простой корень.*

Доказательство. В силу теоремы единственности для алгебр Ли с заданной системой корней существует такой изоморфизм $\psi : L \to L'$, что $\psi(x_\alpha) = \varepsilon_\alpha x_{\alpha'}$, $\psi(h_\alpha) = h_{\alpha'}$, где ε_α — комплексные числа и $\varepsilon_\alpha = 1$, если α или $-\alpha$ — простой корень. Также мы знаем, что $N_{\alpha,\beta} = \pm(r+1) = \pm N_{\alpha',\beta'}$. Индукцией по высоте α легко доказать, что $\varepsilon_\alpha = \pm 1$.

Пусть ρ — точное представление алгебры L', использованное при построении G'. Тогда $\rho \circ \psi$ — представление алгебры L, которое можно использовать при построении G. Мы имеем $x_\alpha(t) \mapsto x_{\alpha'}(\varepsilon_\alpha t)$, так что получаем искомый изоморфизм. $\square$

Следствие 27. (a) *Пусть Φ — неразложимая система корней, σ — перестановка простых корней, сохраняющая углы между ними, $\sigma \neq 1$. Если все корни имеют одинаковую длину, то σ продолжается до автоморфизма системы Φ. Если же это не так, то σ переводит длинные корни в короткие и наоборот; при этом σ можно так продолжить до перестановки всех корней, меняющей местами длинные и короткие корни, чтобы отображение*

$$\alpha \mapsto \begin{cases} \sigma\alpha, & \text{если } \alpha \text{ — длинный корень,} \\ p\sigma\alpha, & \text{если } \alpha \text{ — короткий корень,} \end{cases}$$

было изоморфизмом систем корней (p определено как выше).

(b) *Пусть $\mathbb{K}$ — поле и G — группа Шевалле, построенная по $(\Phi, \mathbb{K})$. Пусть σ — перестановка из (a). Если встречаются корни разной длины, мы предположим, что $\mathbb{K}$ — совершенное поле характеристики p. Если G — группа типа D_{2n} и $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$, мы предположим, что $\sigma(\Lambda) = \Lambda$. Тогда существуют автоморфизм φ группы G. и набор чисел $\varepsilon_\alpha = \pm 1$ ($\varepsilon_\alpha = 1$, если α или $-\alpha$ — простой корень), такие, что*

$$\varphi(x_\alpha(t)) = \begin{cases} x_{\sigma(\alpha)}(\varepsilon_\alpha t), & \text{если } \alpha \text{ — длинный корень или все корни имеют} \\ & \text{одинаковую длину,} \\ x_{\sigma(\alpha)}(\varepsilon_\alpha t^p), & \text{если } \alpha \text{ — короткий корень.} \end{cases}$$

Доказательство. (a) Ясно.

(b) Если G — универсальная группа, то существование автоморфизма φ следует из предыдущих теорем. Если G не универсальна, то рассмотрим универсальное накрытие $\pi : G' \to G$. Чтобы показать, что φ можно спустить с G' на G, необходимо проверить, что $\varphi(\ker\pi) \subseteq \ker\pi$.

Так как $\ker\pi$ лежит в центре C' группы G', то, за исключением случая группы G типа D_{2n} при $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$, требуемый результат вытекает из того, что C' циклическая группа.

Пусть теперь G — группа типа $\mathbf{D}_{2n}$ и $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$. Группа C' канонически изоморфна

$$\operatorname{Hom}(\Lambda_1/\Lambda_0, \mathbb{K}^*) = (\Lambda_1/\Lambda_0)^*.$$

Этот изоморфизм задает соответствие между подгруппами C в C' и решетками Λ, лежащими между Λ_0 и Λ_1. Ясно, что $\varphi(C) \subseteq C$ тогда и только тогда, когда $\sigma(\Lambda) = \Lambda$. Поскольку $\ker\pi$ соответствует решетке Λ, с помощью которой строится группа G, и $\sigma(\Lambda) = \Lambda$, то $\varphi(\ker\pi) \subseteq \ker\pi$, что и доказывает (b). □

Замечание 4. *Приведенные аргументы показывают, что автоморфизм группы G типа $\mathbf{D}_{2n}$ с $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$, оставляющий на месте H и переставляющий группы $\mathcal{X}_\alpha$ в соответствии с перестановкой σ, может существовать, только если $\sigma(\Lambda) = \Lambda$.*

Описанные автоморфизмы группы G, так же как и тождественный автоморфизм, мы будем называть *диаграммными автоморфизмами.*

Лемма 55. *Пусть G — группа Шевалле над полем $\mathbb{K}$, и пусть задан набор элементов $f_\alpha \in \mathbb{K}^*$ для всех простых корней α. Продолжим f до гомоморфизма решетки Λ_0 в $\mathbb{K}^*$. Тогда существует единственный автоморфизм φ группы G такой, что*

$$\varphi(x_\alpha(t)) = x_\alpha(f_\alpha t) \text{ для всех } \alpha \in \Phi.$$

Доказательство. Рассмотрим соотношение (B)

$$[x_\alpha(t), x_\beta(u)] = \prod x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij}t^i u^j).$$

Применив φ, мы получим то же соотношение, в котором t заменено на $f_\alpha t$, u — на $f_\beta u$ (поскольку $f_{i\alpha+j\beta} = f_\alpha^i f_\beta^j$). Ясно, что соотношения (A) и (C) также сохраняются. Единственность φ очевидна. □

Автоморфизмы этого типа будем называть *диагональными автоморфизмами.*

Пример 13. Сопряжение группы SL_n с помощью диагональных элементов из GL_n.

Если группа Шевалле G реализована как матричная группа и γ — автоморфизм поля $\mathbb{K}$, то отображение γ, заданное на образующих формулой $\gamma : x_\alpha(t) \to x_\alpha(\gamma(t))$, продолжается до автоморфизма группы G.

Такой автоморфизм мы будем называть *кольцевым автоморфизмом.*

Нам понадобится сейчас еще один важный факт про порядки групп Шевалле над конечными полями.

Лемма 56. *Пусть G — универсальная группа Шевалле над конечным полем $\mathbb{K}$, состоящим из q элементов. Тогда*

$$|G| = q^N(q-1)^l \sum_{w\in W} q^{n(w)}$$

(напомним, что $n(w)$ — это количество положительных корней, которые становятся отрицательными под действием элемента w, либо длина элемента w в самом коротком разложении его в произведение простых отражений).

Доказательство. Напомним, что согласно разложению Брюа $G = \bigcup\limits_{w\in W} BwB$ (непересекающееся объединение) и $BwB = UHwU_w$, где справа представление единственно. Поэтому

$$|G| = |U| \cdot |H| \cdot \sum_{w\in W} |U_w|.$$

Далее, очевидно,

$$|U| = q^N, \quad |U_w| = q^{n(w)}, \quad |H| = (q-1)^l.$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Следствие 28. *U является p-силовской подгруппой в G, где $p = \operatorname{char}\mathbb{K}$.*

Доказательство. При $n(w) \neq 0$ число $q^{n(w)}$ делится на p. Поскольку $n(w) = 0$ в том и только том случае, когда $w = 1$, p не делит $\sum\limits_w q^{n(w)}$. □

Наконец сформулируем основную теорему, которую будем дальше доказывать.

Теорема 36. *Пусть G — группа Шевалле, построенная по неразложимой системе корней Φ и совершенному полю $\mathbb{K}$. Тогда каждый автоморфизм группы G можно представить в виде композиции внутреннего автоморфизма, диагонального автоморфизма, диаграммного автоморфизма и кольцевого автоморфизма.*

Доказательство. Пусть σ — некоторый автоморфизм группы G.

Шаг 1. *Автоморфизм σ можно нормализовать умножением на внутренний автоморфизм так, чтобы $\sigma(U) = U$ и $\sigma(U^-) = U^-$. Если это сделано, то $\sigma(H) = H$ и существует такая перестановка простых корней, что $\sigma(\mathcal{X}_\alpha) = \mathcal{X}_{\rho(\alpha)}$ и $\sigma(\mathcal{X}_{-\alpha}) = \mathcal{X}_{-\rho(\alpha)}$ для всех простых корней $\alpha \in \Phi$.*

Доказательство. Если поле $\mathbb{K}$ конечно, то согласно только что доказанному следствию U является силовской p-подгруппой в G (где $p = \operatorname{char}\mathbb{K}$), и по теореме Силова мы можем нормализовать σ с помощью внутреннего автоморфизма так, чтобы $\sigma(U) = U$ (так как силовская подгруппа можем при автоморфизме переходить только в силовскую, в все силовские подгруппы сопряжены). Для бесконечного поля доказательство соответствующего утверждения более сложно; оно будет приведено в конце доказательства теоремы (шаги (5)–(12)). Пока будем считать, что нормализация уже произошла и $\sigma(U) = U$.

Поскольку U^- сопряжено U, то

$$\sigma(U^-) = uwUw^{-1}u^{-1} \text{ для некоторых } w \in W, u \in U.$$

Так как $U \cap U^- = 1$, то $uwUw^{-1}u^{-1} \cap U = 1$, то есть $wUw^{-1} \cap W = 1$, то есть $w = w_0$, так что

$$\sigma(U^-) = uU^-u^{-1}.$$

Нормализовав σ с помощью внутреннего автоморфизма, соответствующего элементу u^{-1}, мы получим $\sigma(U) = U$, $\sigma(U^-) = U^-$.

Далее, $B = UH =$ (нормализатор U) и $B^- = U^-H =$ (нормализатор U^-). Поэтому σ переводит в себя группы B, B^- и $H = B \cap B^-$. Кроме того, σ переставляет двойные

(B,B)-классы смежности. Так как при $w \neq 1$ множество $B \cup BwB$ является группой тогда и только тогда, когда $w = w_\alpha$, где α — простой корень, то σ переставляет эти группы.

Докажем, что

$$(B \cup Bw_\alpha B) \cap U^- = \mathcal{X}_{-\alpha}.$$

Так как

$$B \cup Bw_\alpha B = Bw_\alpha^{-1} \cup Bw_\alpha Bw_\alpha^{-1} = Bw_\alpha^{-1} \cup B\mathcal{X}_{-\alpha}$$

и

$$B \cap U^- = 1, \qquad B\mathcal{X}_{-\alpha} \cap U^- = \mathcal{X}_{-\alpha},$$

мы должны показать, что $Bw_\alpha^{-1} \cap U^-$ пусто. Для этого достаточно показать, что

$$Bw_\alpha^{-1}w_0 \cap U^-w_0 = Bw_\alpha^{-1}w_0 \cap w_0U$$

пусто. Но это следует из того, что двойные классы BwB не пересекаются.

Итак, группы $\mathcal{X}_{-\alpha}$, где α — простые корни, переставляются автоморфизмом σ. Аналогично доказывается, что переставляются группы $\mathcal{X}_\alpha$, соответствующие простым корням α. В обоих случаях перестановка простых корней будет одной и той же, так как группы $\mathcal{X}_\alpha$ и $\mathcal{X}_{-\beta}$, где α, β — простые корни, коммутируют между собой тогда и только тогда, когда $\alpha \neq \beta$. □

Шаг 2. *Автоморфизм σ можно так дополнительно нормализовать с помощью диагонального автоморфизма, чтобы*

$$\sigma(x_\alpha(1)) = x_{\rho(\alpha)}(1) \text{ для всех простых корней } \alpha.$$

Если это сделано, то для всех простых корней α имеем $\sigma(x_{-\alpha}(1)) = x_{-\rho(\alpha)}(1)$ и $\sigma(w_\alpha(1)) = w_{\rho(\alpha)}(1)$. Кроме того, ρ сохраняет углы между корнями.

При доказательстве шага 2 мы воспользуемся следующим утверждением:

Лемма 57. *Пусть α — корень, $t \in \mathbb{K}^*$, $u \in \mathbb{K}$. Тогда*

$$x_\alpha(t)x_{-\alpha}(u)x_\alpha(t) = x_{-\alpha}(u)x_\alpha(t)x_{-\alpha}(u)$$

в том и только том случае, когда $u = -t^{-1}$. В этом случае обе части равны $w_\alpha(t)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случаи SL_2 и PSL_2, где это непосредственно проверяется. □

Доказательство шага 2. С помощью диагонального автоморфизма можно добиться, чтобы $\sigma(x_\alpha(1)) = x_{\rho(\alpha)}(1)$ для всех простых корней α. По лемме 57 с $t = 1$ имеем $\sigma(x_{-\alpha}(-1)) = x_{-\rho(\alpha)}(-1)$ и, значит, $\sigma(w_\alpha(1)) = w_{\rho(\alpha)}(1)$. Пусть α и β — простые корни. Тогда $\angle(\alpha,\beta) = \pi - \pi/n$, где n — порядок элемента $w_\alpha w_\beta$ в группе W, то есть порядок $w_\alpha(1)w_\beta(1) \mod H$, который совпадает с порядком $\sigma(w_\alpha(1)w_\beta(1)) \mod H$, что равно порядку элемента $w_{\rho(\alpha)}w_{\rho(\beta)}$ в группе W. Значит, $\angle(\alpha,\beta) = \angle(\rho(\alpha),\rho(\beta))$. □

Шаги 3–12 мы докажем на следующей лекции.

Задачи.

1. Докажите, что автоморфизм φ из следствия 27 — внешний.

2. Рассмотрим подгруппу в $G_\pi(\mathbf{G}_2, \mathbb{K})$, порожденную группами $\mathcal{X}_\alpha$, соответствующими длинным корням α. Она изоморфна группе типа $\mathbf{A}_2$. Докажите, что ее диаграммный автоморфизм можно реализовать с помощью внутреннего автоморфизма группы типа $\mathbf{G}_2$.

3. Докажите, что каждый диагональный автоморфизм группы $G_\pi(\Phi, \mathbb{K})$ можно реализовать как сопряжение в группе $G_\pi(\Phi, \overline{\mathbb{K}})$ с помощью некоторого элемента из $H(\overline{\mathbb{K}})$.

21 Лекция 21. Основная теорема об автоморфизмах групп Шевалле, окончание

Напомним, что мы доказываем теорему о стандартности любого автоморфизма группы Шевалле над совершенным полем. На данный момент доказано, что исходный автоморфизм σ можно так нормализовать с помощью внутреннего и диагонального автоморфизмов, что

$$\sigma(x_{\pm\alpha}(1)) = x_{\pm\rho(\alpha)}(1) \text{ для всех простых корней } \alpha,$$

где ρ — перестановка корней, сохраняющая углы между ними.

Шаг 3. *Можно нормализовать σ с помощью диаграммного автоморфизма так, чтобы $\rho = 1$.*

Доказательство. Мы доказали, что существует диаграммный автоморфизм, соответствующий перестановке ρ, при условии, что

(a) $\operatorname{char}\mathbb{K} = 2$ для систем Ф типа $\mathbf{C}_2$ и $\mathbf{F}_4$;

(b) $\operatorname{char}\mathbb{K} = 3$ для системы Ф типа $\mathbf{G}_2$;

(c) $\rho(L) = L$, если Ф — система типа $\mathbf{D}_{2n}$ и $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$.

Пусть Ф — система типа $\mathbf{C}_2$ или $\mathbf{F}_4$ и $\rho \neq 1$. Тогда существуют такие простые корни α и β, α — длинный, β — короткий, что $\alpha+\beta$ и $\alpha+2\beta$ — корни, $\rho(\alpha) = \beta$, $\rho(\beta) = \alpha$. Применяя σ к равенству

$$w_\alpha(1)\mathcal{X}_\beta w_\alpha(1)^{-1} = \mathcal{X}_{\alpha+\beta},$$

получаем

$$\sigma(\mathcal{X}_{\alpha+\beta}) = w_\beta(1)\mathcal{X}_\alpha w_\beta(1)^{-1} = \mathcal{X}_{\alpha+2\beta}.$$

Аналогично, $\sigma(\mathcal{X}_{\alpha+2\beta} = \mathcal{X}_{\alpha+\beta}$. Так как группы $\mathcal{X}_\alpha$ и $\mathcal{X}_{\alpha+2\beta}$ коммутируют, то и группы $\mathcal{X}_\beta$ и $\mathcal{X}_{\alpha+\beta}$ должны коммутировать. Поэтому $N_{\beta,\alpha+\beta} = 0$, то есть $\pm 2 = 0$. Таким образом, $\operatorname{char}\mathbb{K} = 2$, то есть требуемый диаграммный автоморфизм существует. Аналогично доказывается, что он существует для системы корней типа $\mathbf{G}_2$.

Наконец, если Ф — система типа $\mathbf{D}_{2n}$, $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ и перестановка ρ продолжается естественным образом на Ф, то $\rho(\Lambda) = \Lambda$, так что существует требуемый диаграммный автоморфизм. □

Шаг 4. *Можно нормализовать σ с помощью кольцевого автоморфизма так, чтобы $\sigma = 1$ (иначе говоря, если $\sigma(U) = U$, $\sigma(U^-) = U^-$ и $\sigma(x_\alpha(1)) = x_\alpha(1)$ для всех простых корней α, то σ является кольцевым автоморфизмом).*

Доказательство. Фиксируем простой корень α и определим отображение $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ формулой $\sigma(x_\alpha(t)) = x_\alpha(f(t))$. Мы должны показать, что f — автоморфизм поля $\mathbb{K}$.

Ясно, что отображение f аддитивно, эпиморфно, $f(1) = 1$ и $\sigma(w_\alpha(t)) = w_\alpha(f(t))$. Отсюда следует, что $\sigma(h_\alpha(t)) = h_\alpha(f(t))$. Так как ядро отображения $t \mapsto h_\alpha(t)$ содержится в подгруппе $\{\pm 1\}$ и $h_\alpha(t)$ мультипликативно зависит от t, то отображение f мультипликативно с точностью до знака.

Пусть $f(tu) = af(t)f(u)$, где $a = a(t,u) = \pm 1$ и $t, u \neq 0$. Нужно показать, что $a = 1$. Мы имеем

$$af(t)f(u) + f(u) = f(tu) + f(u) = f((t+1)u) = bf(t+1)f(u) = bf(t)f(u) + bf(u).$$

Поэтому $(b-a)f(t) = 1-b$, где $a = a(t,u)$, $b = a(t+1,u)$. Если $a = b$, то $a = b = 1$. Если же $a \neq b$, то $b \neq 1$, то есть $b = -1$ и, значит, снова $a = 1$. Таким образом, мы доказали, что f — автоморфизм.

Пусть β — другой простой корень, связанный с α в схеме Дынкина (если такой существует). Обозначим через g автоморфизм поля $\mathbb{K}$, соответствующий корню β. Ясно, что σ переводит $\mathcal{X}_{\alpha+\beta}$ в себя. Рассмотрим равенство $[x_\alpha(t), x_\beta(u)] = x_{\alpha+\beta}(\pm tu)\dots$ (где знак + или − не зависит от t и u). Применив к нему σ в случае $(t,u) = (v,1)$ и $(t,u) = (1,v)$, мы получим

$$\sigma([x_\alpha(v), x_\beta(1)]) = [x_\alpha(f(v)), x_\beta(1)] = x_{\alpha+\beta}(\pm f(v))\dots,$$
$$\sigma([x_\alpha(1), x_\beta(v)]) = [x_\alpha(1), x_\beta(g(v))] = x_{\alpha+\beta}(\pm g(v))\dots.$$

Так как оба эти выражения совпадают с $\sigma(x_{\alpha+\beta}(\pm v))$, то $f(v) = g(v)$.

Поскольку система Ф неразложима, автоморфизмы, соответствующие разным простым корням, совпадают, то есть $\sigma(x_\alpha(t)) = x_\alpha(f(t))$ для всех простых корней α и $t \in \mathbb{K}^*$. Применив к группе G кольцевой автоморфизм f^{-1}, мы получим нормализацию $f = 1$, то есть σ оставляет на месте все элементы вида $x_\alpha(t), w_\alpha(t)$, где α — простой корень, $t \in \mathbb{K}$. Так как эти элементы порождают группу G, то σ — тождественный автоморфизм. □

Предположим теперь, что $\mathbb{K}$ — бесконечное поле, и рассмотрим нормализацию $\sigma(U) = U$ из шага 1.

Шаг 5. *Пусть $\mathbb{K}$ — бесконечное поле, A и M — его аддитивная и мультипликативные группы, $A_0 \subset A$ и $M_0 \subset M$ — такие подгруппы, что группа A/A_0 конечна, а M/M_0 не содержит элементов бесконечного порядка. Тогда, если $M_0A_0 \subseteq A_0$, то $A_0 = A$.*

Доказательство. Пусть F — аддитивная группа, порожденная M_0. Тогда F — поле, так как оно замкнуто относительно сложения и умножения, и если $f \in F$, $f \neq 0$, то $f^{-r} \in F$ для некоторого $r > 0$, так что $f^{-1} = f^{r-1} \in F$. Если $a \in A$, $a \neq 0$, то $Fa \cap A_0 \neq 0$, так как группа Fa бесконечна, а группа A/A_0 конечна. Значит, $fa \in A_0$ для некоторого $f \in F$, $f \neq 0$, так что

$$a \in f^{-1}A_0 \subseteq FA_0 \subseteq A_0.$$

□

Шаг 6. *Если поле $\mathbb{K}$ бесконечно и B_0 — подгруппа конечного индекса в B, то $[B_0, B_0] = U$.*

Доказательство. Фиксируем корень α и отождествим $\mathcal{X}_\alpha$ с A (аддитивная группа поля $\mathbb{K}$) и $\mathcal{X}_\alpha \cap B_0$ — с A_0 из шага (5). Положим

$$M_0 = \{t^2 \mid h_\alpha(t) \in \mathcal{H}_\alpha \cap B_0\}.$$

Тогда

$$h_\alpha(t)x_\alpha(u)h_\alpha(t)^{-1} = x_\alpha(t^2u),$$

так что $M_0A_0 \subseteq A_0$. Группа M_0 бесконечна и M/M_0 не имеет элементов бесконечного порядка. Тогда из шага 5 следует, что $\mathcal{X}_\alpha \cap B_0 = \mathcal{X}_\alpha$, то есть $\mathcal{X}_\alpha \subseteq B_0$. Учитывая соотношение выше, получаем, что $\mathcal{X}_\alpha \subseteq [B_0, B_0]$ и, значит, $U \subseteq [B_0, B_0]$. Поскольку группа B_0/U коммутативна, имеем $[B_0, B_0] \subseteq U$. □

Шаг 7. *Если A — связная разрешимая алгебраическая группа, то $[A, A]$ — связная унипотентная группа.*

Это следует из такой теоремы:

Теорема 37 (Ли–Колчин)**.** *Всякая связная разрешимая группа в некотором базисе записывается верхними треугольными матрицами.*

Доказательство. Мы используем индукцию по размерности пространства V, на котором действует группа. При этом нам нужно найти общий собственный вектор для всех элементов группы и, кроме того, мы можем предполагать, что V неприводимо. Пусть $A_1 = [A, A]$. Используя индукцию по длине производного ряда группы A, мы можем считать, что существует вектор $v \in V$, $v \neq 0$, для которого $x_1(v) = \chi(x_1)v$ при всех $x_1 \in A_1$. Ясно, что χ — рациональный характер группы A_1. Пусть V_χ — пространство всех векторов v, удовлетворяющих этому условию. Группа A нормализует A_1, и, значит, переставляет пространства V_χ, отвечающие разным характерам χ. Число таких ненулевых пространств V_χ конечно.

Поскольку A — связная группа, то соответствующая перестановка тождественна. Так как пространство V неприводимо, имеется только одно ненулевое подпространство V_χ, и оно совпадает с V, то есть A_1 действует умножением на константы. Поскольку $A_1 = [A, A]$, то каждый элемент из A_1 имеет определитель 1, так что имеется только конечное число скалярных матриц. Но A_1 — связная группа, поэтому все скаляры равны 1, то есть A_1 действует тривиально. Таким образом, на V действует абелева группа A/A_1 и, значит, имеется общий собственный вектор. □

Для дальнейшего нам понадобится геометрическая интерпретация разложения Брюа.

Пусть V есть n-мерное линейное пространство. *Флагом* в V называется последовательность подпространств $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n$, для которой $\dim V_i = i$. Выбранному базису $\{v_1, \ldots, v_n\}$ соответствует флаг $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n$, где $F_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$, который называется *стандартным флагом*.

Группа Шевалле G действует на пространстве V и, значит, на пространстве флагов. Группа B совпадает со стабилизатором стандартного флага, так что двойные смежные классы $B \setminus G/B$ взаимно однозначно соответствуют множеству G-орбит на пространстве пар флагов.

Алгебраическое многообразие называется *полным*, если любое его плотное вложение в другое многообразие является эпиморфизмом.

Пример 14. Аффинная прямая не полна. Ее можно вложить в проективную прямую. Следующие многообразия полны:

(a) все проективные пространства;

(b) все многообразия флагов;

(c) G/B, где G — связная линейная алгебраическая группа, B — ее максимальная связная разрешимая подгруппа.

Мы теперь сформулируем (без доказательства) два результата о действии связных алгебраических групп на полных многообразиях.

Шаг 8. Теорема Бореля. *Связная разрешимая алгебраическая группа, действующая на полном многообразии, имеет неподвижную точку.*

Это обобщение теоремы Ли–Колчина, которую можно переформулировать следующим образом: каждая связная разрешимая алгебраическая группа переводит в себя некоторый флаг в пространстве, на котором она действует.

Нам нужно уточнение некоторого частного случая этой теоремы.

Теорема 38. *Если A — связная унипотентная группа, действующая на полном многообразии V, причем все определено над совершенным полем $\mathbb{K}$, и если V содержит точку над $\mathbb{K}$, то V содержит точку над $\mathbb{K}$, инвариантную относительно действия A.*

Обозначения. Пусть G — группа Шевалле над бесконечным полем $\mathbb{K}$, $\overline{\mathbb{K}}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{K}$. Тогда $\overline{G}$, $\overline{B}$, $\overline{U}$ обозначают группы G, B, U, построенные над $\overline{\mathbb{K}}$, а $\overline{G}_{\mathbb{K}}$ — множество элементов из $\overline{G}$, координаты которых лежат в $\mathbb{K}$.

Шаг 9. *Отображение $\overline{G}_{\mathbb{K}} \to (\overline{B} \setminus \overline{G})_{\mathbb{K}}$ эпиморфно.*

Доказательство. Предположим, что многообразие $\overline{B}x$ определено над $\mathbb{K}$ и $x = wu$, как в разложении Брюа. Мы можем взять в качестве w произведение элементов $w_\alpha(1)$, определенных над $\mathbb{K}$. Следовательно, $\overline{B}u^-$, где $u^- = wuw^{-1} \in U^-$, также определено над $\mathbb{K}$. Далее, $\overline{U}^-$ определено над $\mathbb{K}$. Поэтому элемент $u^- = \overline{B}u^- \cap \overline{U}$ определено над $\mathbb{K}$ и, значит, x определен над $\mathbb{K}$. □

Шаг 10. $\overline{G}_{\mathbb{K}} = \overline{H}_{\mathbb{K}} \cdot G$.

Доказательство. Очевидно, что $\overline{G}_{\mathbb{K}} \supseteq \overline{H}_{\mathbb{K}} \cdot G$, так что нужно доказать обратное вложение.

Пусть $x \in \overline{G}_{\mathbb{K}}$. Это означает, что все элементы матрицы x лежат в $\mathbb{K}$. Мы знаем, что $x = uhwv$, где элемент w определен над простым полем. Тогда и $xw^{-1} = uhu^- \in \overline{G}_{\mathbb{K}}$, где $u^- \in U^-$. Запишем

$$uhu^- = \prod_{\alpha\in\Phi^+} x_\alpha(t_\alpha) \prod h_i(t_i) \prod_{\alpha\in\Phi^-} x_\alpha(t_\alpha),$$

где $t_i, t_\alpha \in \mathbb{K}$.

По теореме 32 существует изоморфизм φ алгебраических многообразий $\overline{\mathbb{K}}^n \times \overline{\mathbb{K}}^{*l} \times \overline{\mathbb{K}}^n$ и UHU^-, определенный над простым подполем и заданный формулой

$$\varphi((t_\alpha)_{\alpha\in\Phi^+}, (t_i)_{i=1,\dots,l}, (t_\alpha)_{\alpha\in\Phi^-}) = \prod_{\alpha\in\Phi^+} x_\alpha(t_\alpha) \cdot \prod_{i=1}^{l} h_i(t_i) \cdot \prod_{\alpha\in\Phi^-} x_\alpha(t_\alpha).$$

Применим к нашему элементу uhu^- гомоморфизм φ^{-1}. Так как элемент uhu^- определен над $\mathbb{K}$ и гомоморфизм φ^{-1} определен над простым подполем, то все числа t_α и t_i лежат в $\mathbb{K}$, что нам и требовалось. □

Шаг 11. *Если A — связная унипотентная подгруппа в $\overline{G}$, определенная над $\mathbb{K}$, то она G-сопряжена некоторой подгруппе в $\overline{U}$.*

Доказательство. Пусть A действует на $\overline{B} \setminus \overline{G}$ умножением справа. Из шага 8 следует, что существует определенный над $\mathbb{K}$ класс $\overline{B}x$, инвариантный относительно A. В силу

шага 9 можно выбрать x лежащим в $\overline{G}_{\mathbb{K}}$ и затем, используя шаг 10, лежащим в G. Мы имеем $\overline{B}xa = \overline{B}x$ для всех $a \in A$, то есть $xax^{-1} \in \overline{B}$ для всех $a \in A$, так что $xAx^{-1} \subseteq \overline{B}$. Так как группа A унипотентна, $xAx^{-1} \subseteq \overline{U}$. $\square$

Шаг 12. *Если $\mathbb{K}$ — бесконечное совершенное поле, то можно нормализовать σ так, чтобы $\sigma(U) = U$.*

Доказательство. Так как группа $\sigma(B)$ разрешима, то и группа $\overline{\sigma(B)}$ (минимальная алгебраическая подгруппа в $\overline{G}$, содержащая $\sigma(B)$) разрешима. Поэтому группа $\overline{\sigma(B)}_0$ (связная компонента единицы группы $\overline{\sigma(B)}$) разрешима и является подгруппой конечного индекса в $\overline{\sigma(B)}$. Ясно, что $\overline{\sigma(B_0)} = \overline{\sigma(\overline{B})}_0$, где B_0 — некоторая подгруппа конечного индекса в B.

Положим $A = [\overline{\sigma B_0}, \overline{\sigma B_0}]$. Группа A связна и унипотентна в силу шага 7 и определена над $\mathbb{K}$. Из шага 6 следует, что $\sigma(U) \subseteq A$. Применяя шаг 11, мы найдем такой элемент $x \in G$, что $xAx^{-1} \subseteq \overline{U}$. Тогда $x\sigma(U)x^{-1} \subseteq U$, то есть мы нормализовали автоморфизм σ так, что $\sigma(U) \subseteq U$. При этом $U \subseteq \sigma^{-1}(U)$; но U — максимальная нильпотентная подгруппа, не содержащая нетривиальных элементов из центра G (проверьте это!). Поэтому $\sigma^{-1}(U) = U$, так что $\sigma(U) = U$. $\square$

Теорема наконец-то доказана. $\square$

Следствие 29. *Если $\mathbb{K}$ — конечное поле, то группа $\operatorname{Aut} G / \operatorname{Int} G$ разрешима.*

Теорема 39. *Пусть G, G' — группы Шевалле, построенные по $(\Phi, \mathbb{K})$ и $(\Phi', \mathbb{K}')$, причем системы Φ и Φ' неразложимы, а $\mathbb{K}$ и $\mathbb{K}'$ — совершенные поля. Предположим, что G и G' изоморфны как абстрактные группы. В случае, когда поле $\mathbb{K}$ конечно, предположим также, что $\operatorname{char}\mathbb{K} = \operatorname{char}\mathbb{K}'$. Тогда $\mathbb{K}$ изоморфно $\mathbb{K}'$, а системы Φ и Φ' либо изоморфны, либо являются системами типа $\mathbf{B}_n$ и $\mathbf{C}_n$ $(n \geqslant 3)$ и $\operatorname{char}\mathbb{K} = \operatorname{char}\mathbb{K}' = 2$.*

Доказательство. Так же как в шагах 1 и 2 предыдущей теоремы, мы можем нормализовать изоморфизм σ таким образом, чтобы $\sigma(U) = U'$ и $\sigma(x_\alpha(1)) = x_{\rho(\alpha)}(1)$, где теперь ρ — некоторое сохраняющее углы отображение Φ на Φ'. Поэтому либо $\Phi \cong \Phi'$, либо Φ и Φ' — системы типа $\mathbf{B}_n$ и $\mathbf{C}_n$ $(n \geqslant 3)$. Так же, как и раньше в шаге 3, доказывается, что во втором случае $\operatorname{char}\mathbb{K} = \operatorname{char}\mathbb{K}' = 2$. Так же, как и в шаге 4, доказывается, что $\mathbb{K} \cong \mathbb{K}'$. $\square$

Следствие 30. *Если характеристика поля $\mathbb{K}$ не равна двум, то построенные по нему группы Шевалле типа $\mathbf{B}_n$ и $\mathbf{C}_n$ $(n \geqslant 3)$ не изоморфны.*

Задачи.

1. Проверьте, что U — максимальная нильпотентная подгруппа, не содержащая нетривиальных элементов из центра группы G (см. доказательство шага 12).

2. Пусть D — группа диагональных автоморфизмов по модулю внутренних диагональных автоморфизмов. Докажите, что $D \cong \operatorname{Hom}(L_0, \mathbb{K}^*)/(\text{гомоморфизмы, продолжающиеся на } L_1) \cong \prod \mathbb{K}^*/\mathbb{K}^{*e_i}$, где e_i — элементарные делители группы L_1/L_0.

3. Если $\mathbb{K}$ — конечное поле, то $D \cong C$, где C — центр соответствующей универсальное группы.

4. Если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто или все e_i равны 1, то $D = 1$.