

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*Посвящается  
50-летию факультета  
прикладной математики,  
информатики и механики*

**Актуальные проблемы  
прикладной математики,  
информатики и механики**

*Сборник трудов  
Международной научной конференции*

Воронеж,  
11–13 ноября 2019 г.

Воронеж  
Издательство  
«Научно-исследовательские публикации»  
2020

УДК 531(063)+51-7(063)

ББК 22.2я5+22.1я5

А43

***Председатель организационного комитета***

Шашкин А. И. – д-р физ.-мат. наук, профессор, декан факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

***Заместители председателя организационного комитета***

Медведев С. Н. – канд. физ.-мат. наук, доцент (Воронеж)

Шишкина Э. Л. – д-р физ.-мат. наук, доцент (Воронеж)

Аристова Е. М. – канд. физ.-мат. наук, доцент (Воронеж)

***Члены организационного комитета:***

Г. В. Абрамов д-р техн. наук, проф.; Т. В. Азарнова д-р техн. наук, проф.; А. А. Арзамасцев д-р техн. наук, проф. (Тамбов); М. А. Артемов д-р физ.-мат. наук, проф.; Н. Д. Вервейко д-р физ.-мат. наук, проф.; В. Г. Задорожний д-р физ.-мат. наук, проф.; Н. А. Каплиева канд. физ.-мат. наук, доц.; И. Л. Каширина д-р техн. наук, проф.; А. В. Ковалев д-р физ.-мат. наук, проф.; А. В. Кузнецов канд. физ.-мат. наук, доц.; Т. М. Леденева д-р техн. наук, проф.; Л. Н. Ляхов д-р физ.-мат. наук, проф.; М. Г. Матвеев д-р техн. наук, проф.; О. А. Медведева канд. физ.-мат. наук, доц.; Ю. К. Тимошенко д-р физ.-мат. наук, проф.

***Председатель программного комитета***

Шашкин А. И. – д-р физ.-мат. наук, профессор, декан факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета

***Заместители председателя программного комитета***

Jorg Becker – prof. Dr. Dr.h.c., (Германия)

В. В. Воеводин – д-р физ.-мат. наук, проф., член-кор. РАН (Москва)

***Члены программного комитета:***

Semyon Levitsky д-р физ.-мат. наук, проф. (Израиль); Andrew Schumann Dr., assoc. prof. (Польша); Lopez Trujillo Marcelo Ph.D., prof. (Колумбия); А. А. Буренин д-р физ.-мат. наук, проф., член-кор. РАН (Комсомольск-на Амуре); В. П. Гергель д-р техн. наук, проф. (Нижний Новгород); А. П. Жабко д-р физ.-мат. наук, проф. (Санкт-Петербург); В. М. Иевлев д-р физ.-мат. наук, проф., академик РАН (Воронеж); Илолов Мамадшо д-р ф.-м.н., профессор, академик АН РТ (Таджикистан); В. А. Ковалев д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва); В. В. Кравченко канд. физ.-мат. наук, проф. (Мексика); Г. И. Маргаров канд. техн. наук, проф. (Армения); А. А. Маркин д-р физ.-мат. наук, проф. (Тула); Н. М. Матченко д-р физ.-мат. наук, проф. (Тула); В. М. Мирсалимов д-р физ.-мат. наук, проф. (Азербайджан); Е. И. Моисеев д-р физ.-мат. наук, проф., академик РАН (Москва); Л. А. Петросян д-р физ.-мат. наук, проф. (Санкт-Петербург); С. Л. Подвальный д-р техн. наук, проф. засл. раб. высш. школы РФ (Воронеж); Ю. Н. Радаев д-р физ.-мат. наук, проф. (Москва); В. П. Радченко д-р физ.-мат. наук, проф. (Самара); А. Ф. Ревуженко д-р физ.-мат. наук проф., засл. деятель науки РФ (Новосибирск); А. А. Сирота д-р техн. наук, проф. (Воронеж); С. М. Ситник д-р физ.-мат. наук, доц. (Белгород); А. Н. Спорыхин д-р физ.-мат. наук, проф., засл. деятель науки РФ (Воронеж); А. В. Чигарев д-р физ.-мат. наук, проф. (Минск, Белоруссия); А. В. Язенин д-р физ.-мат. наук, проф., засл. раб. высш. школы РФ (Тверь)

***Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики :***

А43 сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2020. – 1950 с.

ISBN 978-5-6042216-7-9

В сборнике предлагаются научные работы, доклады и лекции, представленные на Международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», проводимой Воронежским государственным университетом.

Сборник предназначен для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

УДК 531(063)+51-7(063)

ББК 22.2я5+22.1я5

ISBN 978-5-6042216-7-9

© ФГБОУ ВО ВГУ, 2020

© ООО «Вэлборн», 2020

## РАЗРАБОТКА ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КИРША В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

В. И. Бухалов<sup>1</sup>, А. Л. Попов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Московский государственный строительный университет*

### Введение

Решение упругопластических задач при плосконапряженном состоянии получены в ограниченном числе постановок. В частности, в различных постановках и выборе исходного представления для решений в пластической зоне приводится решение упругопластической задачи Ламе [1–6]. Однако, до сих пор не имеет аналитического решения упругопластическая задача Кирша, несмотря на ряд приближенных подходов к ее решению [7–9].

В задаче Кирша при заданном напряжении в пластине, превышающем половину предела текучести, возникают пластические зоны, не охватывающие полностью контур отверстия. Это существенно осложняет ее решение по сравнению с ситуацией двухосевого напряженного состояния, при котором пластическая зона полностью охватывает отверстие. В связи с этим, оказывается неприменим известный аналитический подход, предложенный в [10].

Представленный в [11] полуаналитический подход к решению задач такого типа, состоящий в явном аналитическом представлении для напряжений в пластической области и итерационной процедуры численного решения в упругой области при заранее неизвестной границе пластической зоны, тестировался на решении упругопластической задачи Ламе при одном из значений внешнего давления и одном соотношении внутреннего и внешнего радиусов кольца. Оценивалась скорость сходимости метода к точному решению при данном сочетании параметров. Ниже представлено продолжение данного подхода и проведена оценка сходимости итерационной процедуры в расширенном сочетании возможных параметров внешнего давления и внутреннего радиуса кольца.

### Аналитическое решение упругопластической задачи Ламе методом итерации упругого решения

Итерационная процедура решения упругопластической задачи Ламе для радиальной ( $\sigma_r$ ) и окружной ( $\sigma_\theta$ ) компонент напряжений плоского напряженного состояния в кольце с радиусами  $a$ ,  $b$  ( $b > a$ ), находящегося под действием равномерного внешнего давления  $P_0 > \sigma_Y/2$  ( $\sigma_Y$  — предел текучести) строится на основе упругого решения этой задачи [5]

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = \pm \frac{A}{r^2} + B, \quad A = \frac{(P_0 - P_1)r_1^2 b^2}{b^2 - r_1^2}, \quad B = \frac{P_1 r_1^2 - P_0 b^2}{b^2 - r_1^2}. \quad (1)$$

Здесь  $r$  — радиальная координата с началом в центре кольца; в исходном приближении  $r_1 = a$ ,  $P_1 = 0$ .

Вычислив с помощью выражений (1) эквивалентное напряжение

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta}$$

и приравняв его пределу текучести  $\sigma_Y$ , получим приближённое выражение для радиуса ( $r_T$ ) пластической зоны:

$$r_T^4 = 3A^2/(\sigma_Y^2 - B^2). \quad (2)$$

На рис. 1 показаны этапы итерационной процедуры: *a* — исходная расчетная схема для кольца, нагруженного по внешнему контуру, *б* — промежуточная расчетная схема для упругой задачи, в которой  $r_1 = r_T$ ,  $P_1 = \sigma_r^p$  полученные на предыдущем этапе решения (показано штриховой линией на рис. 1 *a*).

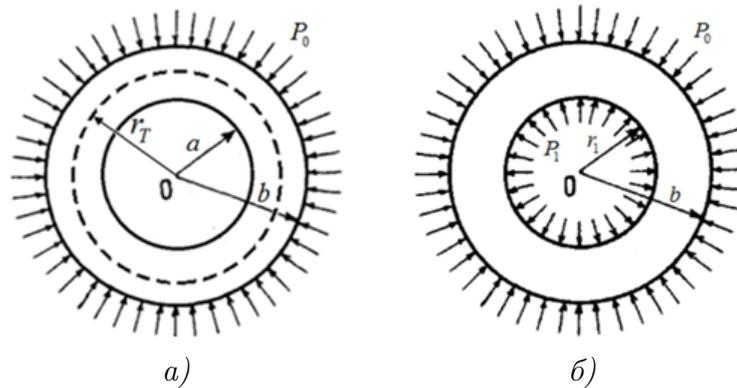


Рис. 1. Расчетные схемы по этапам итерационной процедуры

Для второй итерации рассматривается упругое кольцо с внутренней границей, проходящей по окружности радиуса  $r_T$ , вдоль которой задаётся давление  $P_1$ , равное радиальной компоненте напряжений в пластической зоне  $\sigma_r^p$ . Выражения для окружной и радиальной компонент напряжений в пластической зоне могут быть выписаны, например, из [4]:

$$\sigma_r^p = -\frac{2 \sin \psi}{\sqrt{3}} \sigma_Y, \quad \sigma_\theta^p = -\left(\frac{\sin \psi}{\sqrt{3}} + \cos \psi\right) \sigma_Y, \quad r = a \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \frac{\exp(\psi\sqrt{3}/2)}{\sqrt{\sin(\pi/3 - \psi)}}. \quad (1)$$

Здесь  $\psi = \psi(r)$  — функция радиальной координаты, зависящая от  $r$  неявным образом. Задав в ней  $r = r_T$ , находим  $\psi = \psi_T$  и далее — значение давления  $P_1$ .

По найденным значениям  $P_1$  и  $r_1 = r_T$ , используя формулу (2), определяем второе приближение для радиуса пластической зоны. Последующие приближения выполняются подобно описанному.

В качестве первого примера рассмотрим итерационную процедуру при внешней нагрузке  $P_0 = 0.9\sigma_Y$  и радиусах кольца  $a = 1.5$  мм,  $b = 10$  мм. Результаты расчета для 6 итераций сведены в табл. 1.

Таблица 1

Аналитическое итерационное решение упругопластической задачи Ламе

Номер итерации	$r_T$ , мм	$\psi(r_T)$	$P_1/\sigma_Y$
1	3.03	0.509	0.563
2	4.067	0.665	0.712
3	4.295	0.69	0.735
4	4.307	0.692	0.736
5	4.296	0.69	0.735
6	4.309	0.691	0.736

Из табл. 1 видно, что начиная с 4-й итерации, значения радиуса пластической зоны стабилизируются в окрестности 4.3 мм. Это значение совпадает со значением радиуса пластической зоны, найденным в [6] из аналитического решения упругопластической задачи Ламе.

### Численно-аналитическое итерационное решение упругопластической задачи Ламе

Численно-аналитическое решение задачи Ламе проводилось с использованием программной среды Ansys. Для моделирования расчетной сетки для кольца с внутренним радиусом отверстия  $a = 1.5$  мм и внешним  $b = 10$  мм достаточно было, вследствие симметрии, взять только 1/4 часть (см. рис. 2).

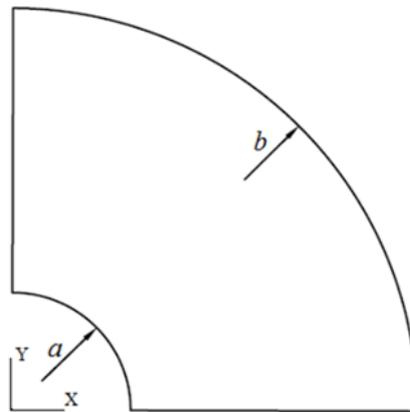


Рис. 2. Расчетная область для решения МКЭ

После построения модели, были заданы свойства материала. Для данной задачи было задано идеальноупругопластическое тело с пределом текучести  $\sigma_Y = 250$  МПа, модулем юнга  $E = 210$  ГПа и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.3$ . Вычислительная сетка была выбрана четырехугольной с средним значением длины элемента ребра 0.02 мм.

Сначала было получено решение задачи в упругопластической постановке с наложением следующих граничных условий: внешнее давление  $P_0 = 0.9\sigma_Y$ ; край отверстия свободен от усилий; стороны оснований модели, прилегающих к отверстию, могут свободно перемещаться только вдоль своих осей (в силу симметрии модели).

Результат численного решения в упругопластической постановке дал для радиуса пластической зоны значение  $r_T = 4.29$  мм, что хорошо согласуется с аналитическим решением.

Следующим этапом являлось итерационное решение этой же задачи с исходной упругой постановкой, но с использованием численного модуля программы Ansys. Результаты расчета для 5 итераций сведены в табл. 2.

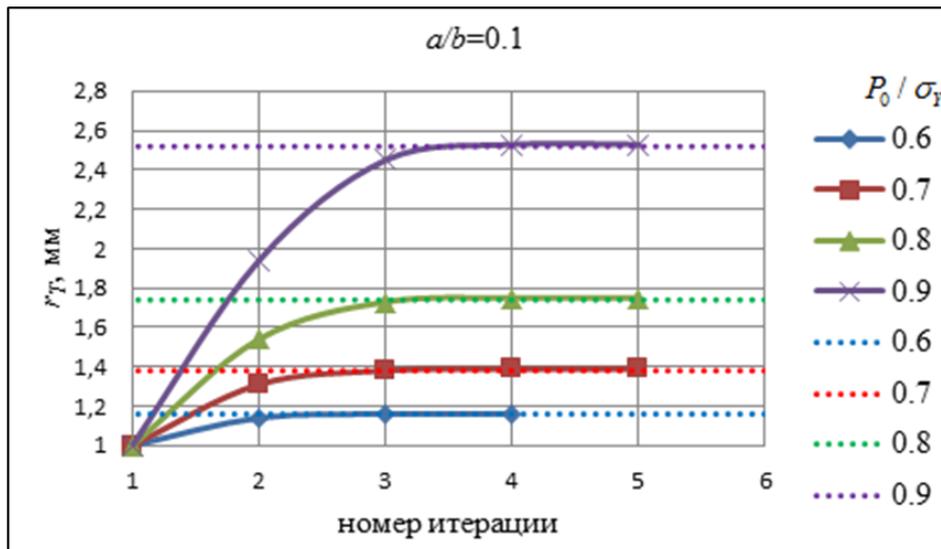
Таблица 2

*Итерационное решение упругопластической задачи Ламе с использованием МКЭ*

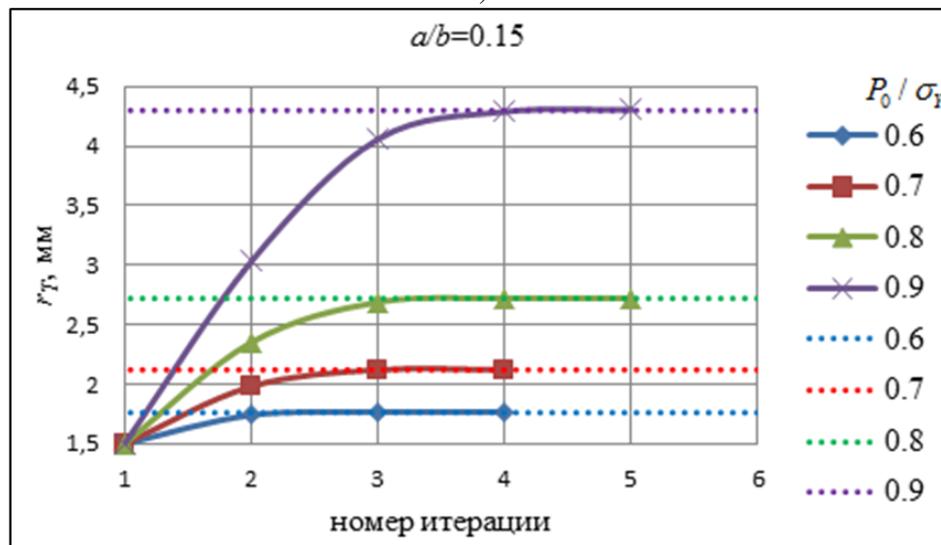
Номер итерации	$r_T$ , мм	$\psi(r_T)$	$P_1/\sigma_Y$
1	3.03	0.509	0.563
2	4.08	0.664	0.711
3	4.288	0.689	0.734
4	4.305	0.691	0.736
5	4.305	0.691	0.736

Видно, что в первом приближении радиус пластической зоны совпадает с аналогичным значением, полученным из упругого решения. Дальнейшие приближения также оказались близки к полученным аналитическим методом. Начиная с 4-й итерации значение радиуса пластической зоны совпало со значением радиуса пластической зоны, найденным из аналитического решения упругопластической задачи Ламе и далее не менялось.

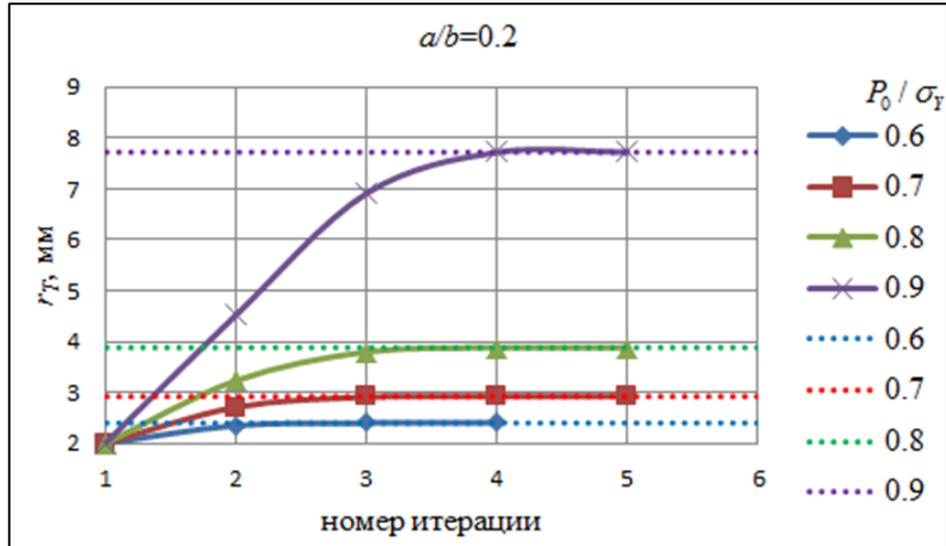
Аналогичные итерационные решения упругопластической задачи Ламе по нахождению радиуса  $r_T$  с использованием МКЭ были выполнены и при других вариантах значений  $P_0$  и  $a$ . Эти значения и результаты расчетов представлены в виде графиков на рис. 3 (сплошными линиями), где также показаны (пунктиром) результаты точного аналитического решения соответствующих задач Ламе в упругопластической постановке по методике [6].



a)



b)



в)

Рис. 3. Результаты решения упругопластической задачи Ламе при различном соотношении  $P_0/\sigma_T$ : а) – при  $a = 1$  мм, б) – при  $a = 1.5$  мм, в) – при  $a = 2$  мм

Как видно из приведенных графиков сходимость к точным аналитическим решениям для радиуса  $r_T$  наступает на 3-й и 4-й итерациях в зависимости от значений внешнего давления  $P_0$  и внутреннего радиуса кольца  $a$ . Можно также отметить, что максимальное отклонение радиуса пластической зоны  $r_T$  не превышает 0.72 % от значения, полученного из точного решения.

### Заключение

В данной работе на модельной задаче Ламе в упругопластической постановке представлена итерационная процедура полуаналитического решения, когда в пластической области используются явные аналитические выражения для компонент напряжений, а в упругой области находится либо аналитическое решение (в силу простоты модели), либо численное решение. Выполнена численная оценка сходимости итерационной процедуры при различных значениях параметров задачи. Граница упругопластической области и величина давления на ней определяются на каждом этапе из решения упругой задачи. С использованием численного метода, отработка процедуры проведена для различных соотношений внешнего давления и внутреннего радиуса кольца. Показано, что во всех случаях для сходимости процедуры определения границы пластической области требуется небольшое количество итераций, а отклонение радиуса пластической зоны  $r_T$  составляет менее 1 % от точного аналитического решения.

Предложенный подход будет впоследствии обобщен для реализации полуаналитического решения упругопластической задачи Кирша.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 19-31-90058 и № 18-01-00920).

### Литература

1. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести: учебник для студентов вузов / Н. Н. Малинин. – изд. 2-е, перераб. и доп. – Москва : «Машиностроение», 1975. – 400 с.

2. Соколовский, В. В. Теория пластичности: учебник / В. В. Соколовский. – изд. 3-е, перераб. и доп. – Москва : Высшая Школа, 1969. – 608 с.
3. Аннин, Б. Д. Упруго-пластическая задача: учебник / Б. Д. Аннин, Г. П. Черепанов. – Новосибирск : Наука СО, 1983. – 239 с.
4. Alexandrov, S. Elastic/plastic discs under plane stress conditions / S. Alexandrov. – Berlin : Springer, 2015. – P. 114.
5. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г. С. Варданян [и др.]; под ред. Г. С. Варданян. – Москва : изд. АСВ, 1995. – 568 с.
6. Бухалов, В. И. Задача Гадолина в упругопластической постановке / В. И. Бухалов, А. Л. Попов, Д. А. Челюбеев // Журнал «Прикладная математика и механика». – 2018. – Т. 82, № 6. – С. 804–812.
7. Фаерберг, И. И. Растяжение пластинки с круговым отверстием за пределом упругости / Тр. ЦАГИ. – 1947. – № 615. – С. 1–13.
8. Перлин, П. И. Приближенный метод решения упругопластических задач / П. И. Перлин // Инж. журн. – 1960. – вып. 28. – С. 145–150.
9. Tuba, I. S. An analytic method for elastic-plastic solutions / I. S. Tuba // Int. J. Solids Struct. – 1967. – Vol. 3. – P. 543–564.
10. Галин, Л. А. Плоская упруго-пластическая задача / Л. А. Галин // Журнал «Прикладная математика и механика». – 1946. – Т. 10, вып. 3. – С. 367–378.
11. Александров, С. Е. Итерационное решение упругопластической задачи Ламе / С. Е. Александров, В. И. Бухалов, А. Л. Попов // XII Всеросс. съезд по фундамент. пробл. теорет. и прикл. механики. Уфа, 19–24 авг. 2019 г. Аннот. докл. – Уфа : РИЦ БашГУ, 2019. – С. 197.