Функции Черноусько в задаче об устойчивости вращения спутника относительно центра масс

С.Ю. Садов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН Москва. Россия

Известное уравнение Белецкого

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin\delta = 4e\sin\nu, \qquad (1)$$

описывает вращение спутника, движущегося по эллиптической орбите с эксцентриситетом e, относительно центра масс в плоскости орбиты. Здесь ν — истинная аномалия, $\delta/2$ — угол между радиус-вектором спутника и наибольшей главной осью инерции, μ — инерциальный параметр. Мы рассматриваем область $|\mu| \ll 1$.

В ряде работ, начиная с [1] изучалась устойчивость решений уравнения (1), обладающих свойством $\delta(\nu + 2\pi) = \delta(\nu) + 2\pi p$ с целыми p. Было показано, что при $p \geq 2$ существует критическое значение эксцентриситета e_p, при котором происходит смена устойчивости решений, осциллирующих вблизи $\delta = 0$ и $\delta = \pi$ (см. [2,3]).

В [4,5] проведен анализ устойчивости кратно-периодических решений $\delta(\nu + 2\pi q) = \delta(\nu) + 2\pi p$, p, q — взаимно простые целые. При $p/q > 2$ на интервале $(0, 1)$ существует q критических значений эксцентриситета. Они приближаются к 1 с ростом p.

Вокруг устойчивых кратно-периодических решений существуют резонансные зоны. Ширина зоны, как функция инерциального параметра $\mu \to 0$, имеет порядок $|\mu|^{q/2}$. Коэффициент зависит от p, q и эксцентриситета и (с точностью до числового множителя) называется функцией Черноусько порядка q и индекса $(p-2)/q$.

Определим функции Черноусько более точно. Заменяя в уравнении (1) истинную аномалию ν на среднюю аномалию t, делая замену зависимой переменной

$$x_1(t) = \delta(\nu(t)) - (p/q)t, \qquad x_2(t) = |\mu|^{-1/2}\, dx_1/dt,$$

и обозначая точкой производную по t, получаем систему уравнений

$$\dot{x}_1 = \varepsilon x_2, \qquad \dot{x}_2 = \varepsilon f(x_1, t), \qquad (2)$$

где $\varepsilon = |\mu|^{1/2}$ и функция f имеет период 2π по обоим аргументам и зависит от p, q, e.

Вопрос об устойчивости малых 2π-периодических решений системы (2) решается усреднением: строим 2π-периодическую по t замену переменных $x_1 = x_1(y_1, y_2, t; \varepsilon)$, $x_2 = x_2(y_1, y_2, t; \varepsilon)$, приводящую (2) к формальной автономной системе

$$\dot{y}_1 = \varepsilon y_2, \qquad \dot{y}_2 = \varepsilon^{2q-1} g_{2q-1}(y_1) + \varepsilon^{2q+1} g_{2q+1}(y_1, y_2) + \dots.$$

Структура старшего коэффициента:

$$g_{2q-1}(y_1) = -\Phi_\alpha^{(q)}(e) \sin qy_1, \qquad \alpha = (p-2)/q.$$

Множитель $\Phi_\alpha^{(q)}(e)$, рассматриваемый как функция эксцентриситета, есть функция Черноусько. (В наших обозначених по сравнению [1] индекс α сдвинут на 2).

При фиксированном q и $p \to \infty$ функции $\Phi_{p/q}^{(q)}(e)$, соответствующим образом масштабированные, стремятся к определенным предельным функциям [5]. Нули последних определяют асимптотику критических значений эксцентриситета. Данное теоретическое исследование выявило вычислительные неточности работы [6].

Функции Черноусько напрямую связаны с Фурье-коэффициентами правой части $f(x_1, t)$ системы (2) по t. Это обьясняет их значение при исследовании различных вопросов, касающихся уравнения (1). В частности, асимптотический и численный анализ этих функций играет важную роль при изучении высших приближений метода усреднения в сингулярной области $e \to 1$.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 96-01-01411)

Литература. [1] Ф.Л. Черноусько // ЖВМ и МФ. **3:3** (1963), 528–538. [2] В.А. Сарычев. Вопросы ориентации искусственных спутников. ИНТ, сер. "Исслед. космич. простр." Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978. [3] В.В. Белецкий, В.Хентов. Резонансные вращения небесных тел. Горький, 1996. [4] С.Ю. Садов // Препр. ИПМ РАН **31** (1997). [5] S. Sadov // Mathematics and Computers in Simulation, **45:5-6** (1998), 465–484. [6] F.H. Lutze, Jr., M.W. Abbit, Jr. // Celest. Mech. **1:1**(1969), 31–35.

S. Yu. Sadov

Keldysh Institute of Applied Mathematics. Moscow, Russia

Chernous'ko functions are leading coeeficients in normal forms of Beletskii's equation of plane satellite motion about its mass center, corresponding to generalized periodic solutions. Their asymptotical and numerical analyses are reported.