Сингулярная нормальная форма для уравнения плоских колебаний спутника

С.Ю. Садов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Цель работы: для системы, содержащей регулярный и сингулярный параметры, развитие метода усреднения с учетом всех порядков и сравнение результатов, вытекающих из анализа нормальной формы, с численными.

Уравнение плоских колебаний спутника эквивалентно гамильтоновой системе с одной степенью свободы и 2π-периодической по времени функцией Гамильтона

$$H(x_1, x_2, t) = x_2^2/2 + \mu V(x_1, t; e),$$

где μ (инерциальный параметр) и e (эксцентриситет орбиты) — параметры задачи. Время t есть средняя аномалия; пусть $\nu = \nu(t, e)$ — истинная аномалия. Обозначим $\eta = (1 - e^2)^{1/2}$. Функция

$$V(x_1, t; e) = -\eta^{-6}(1 + e\cos\nu)^3 \cos(x_1 + 2(t - \nu))$$

сингулярна при $e \to 1$. При малых $|\mu|$ методом усреднения строится нормальная форма системы, имеющая вид

$$\dot{y}_1 = \mu^{1/2} y_2, \qquad \dot{y}_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^{j/2} g_j(y_1, y_2; e). \tag{1}$$

В [1] выведена оценка коэффициентов нормальной формы (1): $g_j = O(\eta^{-(j-1)/6})$ при $\eta \to 0$, из которой следует, что ломаная Ньютона правой части нормальной формы в плоскости показателей степеней параметров μ и η содержит два ребра: конечное $\mu^1\eta^0$ — $\mu^3\eta^{-3}$ и бесконечное, соответствующее мономам $\mu^{3k}\eta^{-3k}$, $k = 1, 2, \ldots$.

С другой стороны, численное исследование показывает, что к точке $e = 1$, $\mu = 0$ подходят два семейства критических значений параметров e, μ, при которых происходит бифуркация нечетного периодического решения изучаемого уравнения. Согласно вычислениям в [2], эти семейства имеют следующие асимптотики при $\eta \to 0$: $C_0^2 : \eta \sim A\mu^{2/3}$, $D_0^0 : \eta \sim B\mu$, с коэффициентами $0.115 < A < 0.118$, $0.240 < B < 0.246$. Сингулярная нормальная форма объясняет асимптотику этих двух семейств.

Укороченная нормальная форма, соответствующая конечному ребру, вычислена в [3]:

$$\dot{y}_1 = \mu^{1/2} y_2, \qquad \dot{y}_2 = -(\mu^{1/2}\varphi + \mu^{5/2}\eta^{-3}/648)\sin y_1, \qquad \varphi \approx -1.018.$$

Ей соответствует критическое семейство $C_0^2 : \eta \sim 0.1149\mu^{2/3}$.

Укороченная нормальная форма для бесконечного ребра получается при удержании в (1) первых приближений коэффициентов

$$g_{6k-1} \sim \frac{\alpha^{k-1}}{k!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial y_1^{k-1}} (g_5(y_1)^k), \qquad -g_5(y_1) \sim \frac{\eta^{-3}}{648} \sin y_1,$$

где $\alpha = -\pi^2/3$. Уравнение в вариациях для нормальной формы на решении $y_1 = y_2 = 0$ есть $\delta \ddot{y}_1 + \omega^2(\mu, \eta)\delta y_1 = 0$. При $\omega^2 = 1/4$ получаем критическое семейство со следом -2 и асимптотикой $\eta \sim 0.223\mu$, по-видимому, наблюдаемое как семейство D_0^0. Этот результат публикуется впервые.

Работа частично поддержана РФФИ (96-01-01409, 96-01-01411).

Список литературы

1. Садов С.Ю. Высшие приближения метода усреднения для уравнения плоских колебаний спутника // Препринт ИПМ № 48/96. — М.: ИПМ РАН, 1996.

2. Варин В.П. Критические подсемейства семейства K_0 периодических решений уравения колебаний спутника // Препринт ИПМ № 20/97. — М.: ИПМ РАН, 1997.

3. Садов С.Ю. Коэффициенты осредненного уравнения колебаний спутника // Препринт ИПМ № 27/95. — М.: ИПМ РАН, 1995.

Ключевые слова: усреднение, сингулярно возмущенные уравнения, ломаная Ньютона.

Singular normal form for the planar satellite oscillation equation

S.Yu. Sadov

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia

We consider a Hamiltonian system with 3/2 d.o.f. and two small parameters, regular and singular. By means of averaging up to infinite order w.r.t. the regular parameter, we construct the normal form. Its structure explains existence and asymptotics of some critical curves in the parameter plane.