ЯНВАРЬ 1993 г., ТОМ 29, № 1

УДК 517.927.25

Л. В. КРИЦКОВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ОЦЕНКИ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ОТРЕЗКЕ. II

Настоящая работа является непосредственным продолжением [1], в которой получено представление (явная формула сдвига) для корневых функций оператора

$$\mathscr{L}u\equiv u^{(n)}+p_{n-1}(x)\,u^{(n-1)}+\ldots+p_1(x)\,u'+p_0(x)\,u.$$

Коэффициенты $p_m(x)$, $m=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, оператора $\mathscr{L}$ могут иметь несуммируемые особенности на концах интервала задания $G=(a,\,b)$, при этом выполнено условие (условие P_m на G)

$$\int\limits_a^b|p_m(x)|\,[\,(x-a)\,(b-x)\,]^{n-1-m}dx<\infty.$$

Корневые функции оператора $\mathscr{L}$ понимаются в обобщенной трактовке В. А. Ильина.

3. Оценки норм корневых функций. Введем основные обозначения, принятые в этой части работы. Через $\|u(\cdot)\|_p$ при $p\in[1,\infty)$ будем обозначать норму функции $u(x)$ в пространстве Лебега $L_p(G)$, а через $\|u(\cdot)\|_\infty$ — величину $\sup\limits_{x\in G}|u(x)|$. Если K — некоторый компакт интервала G, то под символами $\|u(\cdot)\|_{p,K}$ и $\|u(\cdot)\|_{\infty,K}$ будем понимать соответственно нормы в $L_p(K)$ и в $C(K)$.

Для норм корневых функций $u_k(x;\,\lambda)$ оператора $\mathscr{L}$, отвечающих собственному значению $\lambda\in\mathbf{C}$, имеет место

Теорема 4. *Пусть в операторе $\mathscr{L}$ коэффициенты $p_m(x)$ удовлетворяют условию P_m на G для всех $m=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Тогда найдется такое число $\mu_0>0$, что для любого $\mu\in\mathbf{C}$: $|\mu|\geqslant\mu_0$ выполнены равномерные по номеру k оценки*

$$\|u_k(\cdot\,;\,\lambda)\|_\infty=O(|\mu|^{1/p})\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{C}{|\mu|}\right)^j\|u_{k-j}(\cdot\,;\,\lambda)\|_p, \tag{38}$$

$$\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{1}{|\mu|}\right)^{(k-j)s}\|u_j(\cdot\,;\,\lambda)\|_\infty^s=O(|\mu|^{s/p})\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{C}{|\mu|}\right)^{(k-j)s}\|u_j(\cdot\,;\,\lambda)\|_p^s, \tag{39}$$

где $s,\,p\in[1,\infty)$, а константа C и константы в $O(\cdot)$ зависят лишь от порядка оператора, интервала G, коэффициентов $p_m(x)$ и чисел p, s.

Замечание 1. Равномерные по k оценки норм корневых функций вида (38) и (39) были получены в [2] в случае $n=2$. Оценкам же норм корневых функций с константой в $O(\cdot)$, зависящей от порядка k корневой функции, посвящен широкий круг исследований [3—7].

Замечание 2. При $n\geqslant3$ оценки (38) и (39) являются не улучшаемыми по спектральному параметру μ.

Доказательство теоремы 4 основано на явной формуле сдвига (31) для корневых функций оператора $\mathscr{L}$ [1, теорема 2, равенство (31)].

Зафиксируем точку $x\in G$, числа $\lambda\in\mathbf{C}$ и $t\leqslant\min\left(t^*, \frac{1}{n}\operatorname{dist}(x,\partial G)\right)$ и выпишем формулы сдвига для смещений $\pm t, \pm 2t, \ldots, \pm nt$:

$$u_k(x\pm t;\lambda)=\sum_{m=0}^{n-1}(\pm1)^m\frac{u_k^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}s_m(\mu t)+$$

$$+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{u_k^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}f_{m0}^{\pm}(t,x,\mu)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{u_{k-j}^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}F_{mj}^{\pm}(t,x,\mu),$$

$$u_k(x\pm 2t;\lambda)=\sum_{m=0}^{n-1}(\pm1)^m\frac{u_k^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}s_m(2\mu t)+$$

$$+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{u_k^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}f_{m0}^{\pm}(2t,x,\mu)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{u_{k-j}^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}F_{mj}^{\pm}(2t,x,\mu),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_k(x\pm nt;\lambda)=\sum_{m=0}^{n-1}(\pm1)^m\frac{u_k^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}s_m(n\mu t)+$$

$$+\sum_{m=0}^{n-1}\frac{u_k^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}f_{m0}^{\pm}(nt,x,\mu)+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{u_{k-j}^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}F_{mj}^{\pm}(nt,x,\mu),$$

в которых через $f_{m0}^{\pm}(lt,x,\mu)$ обозначена величина $(\pm1)^mF_m^{\pm}(lt,x,\mu)-s_m(l\mu t)$.

Рассмотрим квадратную $(n\times n)$-матрицу

$$\mathscr{A}_0(z)=\begin{pmatrix} s_0(z) & s_1(z) & \ldots & s_{n-1}(z)\\ s_0(2z) & s_1(2z) & \ldots & s_{n-1}(2z)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ s_0(nz) & s_1(nz) & \ldots & s_{n-1}(nz)\end{pmatrix}. \tag{40}$$

Из определения функций $s_m(lz)$ следует, что

$$\mathscr{A}_0(z)=\frac{1}{n}\begin{pmatrix} e^{\eta_1 z} & e^{\eta_2 z} & \ldots & e^{\eta_n z}\\ e^{2\eta_1 z} & e^{2\eta_2 z} & \ldots & e^{2\eta_n z}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ e^{n\eta_1 z} & e^{n\eta_2 z} & \ldots & e^{n\eta_n z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^2 & \ldots & \eta_1^{n-1}\\ 1 & \eta_2 & \eta_2^2 & \ldots & \eta_2^{n-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \eta_n & \eta_n^2 & \ldots & \eta_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

Поэтому определитель матрицы $\mathscr{A}_0(z)$ равен

$$\det\mathscr{A}_0(z)=(\sqrt{n})^{-n}i^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant n}(\exp(\eta_\beta z)-\exp(\eta_\alpha z)). \tag{41}$$

Обозначим через $A_{rl}(z)$ алгебраическое дополнение к элементу $s_{r-1}(lz)$ в матрице $\mathscr{A}_0(z)$. Так как $|s_{r-1}(lz)| \leqslant \exp(n|z|)$, то в силу неравенства Адамара для определителей имеет место оценка

$$|A_{rl}(z)| \leqslant (\sqrt{n-1})^{n-1} \exp(n(n-1)|z|). \tag{42}$$

Умножим обе части равенства для $u_k(x \pm lt; \lambda)$ на $A_{rl}(\mu t)$ и сложим получающиеся соотношения*:

$$\sum_{l=1}^{n} A_{rl}(\mu t) u_k(x \pm lt; \lambda) = \sum_{m=0}^{n-1} (\pm 1)^m \frac{u_k^{(m)}(x; \lambda)}{\mu^m} \sum_{l=1}^{n} s_m(l\mu t) \times$$

$$\times A_{rl}(\mu t) + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{u_k^{(m)}(x; \lambda)}{\mu^m} \sum_{l=1}^{n} f_{m0}^{\pm}(lt) A_{rl}(\mu t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{u_{k-j}^{(m)}(x; \lambda)}{\mu^m} \sum_{l=1}^{n} F_{mj}^{\pm}(lt) A_{rl}(\mu t).$$

Использовав теорему Лапласа в первой сумме правой части и перегруппировав слагаемые, получим

$$(\pm 1)^{r-1} \frac{u_k^{(r-1)}(x; \lambda)}{\mu^{r-1}} \det \mathscr{A}_0(\mu t) = \sum_{l=1}^{n} A_{rl}(\mu t) u_k(x \pm lt; \lambda) -$$

$$- \sum_{m=0}^{n-1} \frac{u_k^{(m)}(x; \lambda)}{\mu^m} \sum_{l=1}^{n} f_{m0}^{\pm}(lt) A_{rl}(\mu t) -$$

$$- \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{u_{k-j}^{(m)}(x; \lambda)}{\mu^m} \sum_{l=1}^{n} F_{mj}^{\pm}(lt) A_{rl}(\mu t). \tag{43}$$

Возьмем норму левой и правой частей (43) в L_p $(0 < t < C_1/|\mu|)$, где $C_1 > 0$ — пока произвольная постоянная. Учитывая оценки теорем 1, 2 первой части [1], неравенство (42) и полагая $K(x) \equiv \left[x - \frac{nC_1}{|\mu|},\quad x + \frac{nC_1}{|\mu|}\right]$, придем к оценке

$$\left| \frac{u_k^{(r-1)}(x; \lambda)}{\mu^{r-1}} \right| \left(\int_0^{C_1/|\mu|} |\det \mathscr{A}_0(\mu t)|^p dt \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant n(\sqrt{n-1})^{n-1} e^{n^2 C_1} \| u_k(\cdot; \lambda) \|_{p, K(x)} +$$

$$+ 2C_1^{1/p} n (\sqrt{n-1})^{n-1} e^{n^2 C_1} \left\{ \Omega\left(|\mu|, \frac{nC_1}{|\mu|} \right) \sum_{m=0}^{n-1} \left| \frac{u_k^{(m)}(x; \lambda)}{\mu^m} \right| |\mu|^{-1/p} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{2nC_1}{|\mu|} \right)^j \sum_{m=0}^{n-1} \left| \frac{u_{k-j}^{(m)}(x; \lambda)}{\mu^m} \right| |\mu|^{1/p} \right\}. \tag{44}$$

Выберем постоянную $C_1 \leqslant 1/n$ так, чтобы при $|z| \leqslant C_1$ было выполнено неравенство $\left| \frac{\exp(z) - 1}{z} - 1 \right| \leqslant \frac{1}{4n}$. Тогда при $\alpha \neq \beta$ имеем $\left| \frac{\exp(\eta_\beta z) - \exp(\eta_\alpha z)}{z} \right| \geqslant |\eta_\beta - \eta_\alpha| - \frac{1}{2n} > \frac{1}{n}$.

* Для компактности записи вместо $F_{mj}^{\pm}(lt, x, \mu)$ и $f_{m0}^{\pm}(lt, x, \mu)$ будем писать $F_{mj}^{\pm}(lt)$ и $f_{m0}^{\pm}(lt)$.

С помощью последнего неравенства из соотношения (41) получаем, что при $|z|\leqslant C_1$

$$|\det \mathscr{A}_0(z)|\geqslant(\sqrt{n})^{-n^2}|z|^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

а поэтому

$$\int_0^{C_1/|\mu|}|\det \mathscr{A}_0(\mu t)|^p dt=\frac{1}{|\mu|}\int_0^{C_1}|\det \mathscr{A}_0(\tau)|^p d\tau\geqslant$$

$$\geqslant|\mu|^{-1}(\sqrt{n})^{-n^2}\frac{2}{n^2p}C_1^{\frac{n(n-1)p}{2}+1}. \tag{45}$$

Используем (45) для оценки левой части неравенства (44). Так как при $|\mu|\geqslant 1$ выполнено неравенство $\Omega\left(|\mu|,\frac{nC_1}{|\mu|}\right)\leqslant\Omega\left(1,\frac{1}{|\mu|}\right)$, получим

$$\left|\frac{u_k^{(r-1)}(x;\lambda)}{\mu^{r-1}}\right||\mu|^{-1/p}\leqslant C_2\|u_k(\cdot;\lambda)\|_{p,K(x)}+C_2\Omega\left(1,\frac{1}{|\mu|}\right)\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{n-1}\left|\frac{u_k^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}\right||\mu|^{-1/p}+$$

$$+C_2\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{2}{|\mu|}\right)^j\sum_{m=0}^{n-1}\left|\frac{u_{k-j}^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}\right||\mu|^{-1/p}.$$

Складывая полученные оценки по всем $r=1, 2, \dots, n$ и выбирая $\mu_0\geqslant 1$ так, чтобы при $|\mu|\geqslant\mu_0$ $\Omega\left(1,\frac{1}{|\mu|}\right)\leqslant\frac{1}{2nC_2}$, придем к оценке

$$\sum_{m=0}^{n-1}\left|\frac{u_k^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}\right||\mu|^{-1/p}\leqslant C_3\|u_k(\cdot;\lambda)\|_{p,K(x)}+$$

$$+C_3\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{2}{|\mu|}\right)^j\sum_{m=0}^{n-1}\left|\frac{u_{k-j}^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}\right||\mu|^{-1/p},$$

откуда следует, что

$$\sum_{m=0}^{n-1}\left\|\frac{u_k^{(m)}(\cdot;\lambda)}{\mu^m}\right\|_{\infty,K}|\mu|^{-1/p}\leqslant(1+$$

$$+C_3)\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{2+2C_3}{|\mu|}\right)^j\|u_{k-j}(\cdot;\lambda)\|_p, \tag{46}$$

где $K=\left[a+\frac{nC_1}{|\mu|},\ b-\frac{nC_1}{|\mu|}\right]$.

Применим (46) для оценки $\|u_k(\cdot;\lambda)\|_\infty$.

Положим $t=nC_1/|\mu|$. Учитывая, что $\|u_k(\cdot;\lambda)\|_\infty=\sup\limits_{x\in K}\{|u_k(x+t;\lambda)|,|u_k(x-t;\lambda)|,|u_k(x;\lambda)|\}$, из формулы сдвига для $u_k(x\pm t;\lambda)$ получим

$$\|u_k(\cdot;\lambda)\|_\infty|\mu|^{-1/p}\leqslant 2e^{nC_1}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{2nC_1}{|\mu|}\right)^j\sum_{m=0}^{n-1}\left\|\frac{u_{k-j}^{(m)}(\cdot;\lambda)}{\mu^m}\right\|_{\infty,K}|\mu|^{-1/p}.$$

Воспользовавшись (46), имеем

$$\|u_k(\cdot;\lambda)\|_\infty |\mu|^{-1/p} \leqslant 2(1+C_3)e^{nC_1}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{2nC_1}{|\mu|}\right)^j \sum_{\alpha=0}^{k-j}\left(\frac{2+2C_3}{|\mu|}\right)^\alpha \times$$

$$\times \|u_{k-j-\alpha}(\cdot;\lambda)\|_p \leqslant 2(1+C_3)e^{nC_1}\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{4+4C_3}{|\mu|}\right)^j \|u_{k-j}(\cdot;\lambda)\|_p, \tag{47}$$

что совпадает с (38), если положить $C=4+4C_3$.

$\cdot\frac{1}{|\mu|}$

Для обоснования второй оценки (39) достаточно возвести обе части (47) в степень s, воспользоваться неравенством Гёльдера для сумм и потребовать, чтобы при $|\mu|\geqslant\mu_0$ выполнялось неравенство $16(1+C_3)\leqslant 1/2$. Тогда (39) является очевидным следствием получающейся при этом оценки

$$\|u_j(\cdot;\lambda)\|_\infty^s = O(|\mu|^{s/p})\sum_{\alpha=0}^{j}\left(\frac{8+8C_3}{|\mu|}\right)^{\alpha s}\|u_{j-\alpha}(\cdot;\lambda)\|_p^s$$

с константой $C=16+16C_3$.

Теорема 4 полностью доказана.

4. Оценка антиаприорного типа для корневых функций. При исследовании сходимости спектральных разложений методом В. А. Ильина существенное место занимают оценки, связывающие нормы «соседних» корневых функций, т. е. корневых функций, участвующих в равенстве

$$\mathscr{L}u_k(\cdot;\lambda)-\lambda u_k(\cdot;\lambda)=\mu^{n-1}u_{k-1}(\cdot;\lambda), \qquad k\geqslant 1.$$

Следуя В. А. Ильину [8, 9], оценку L_p-нормы корневой функции $u_{k-1}(x;\lambda)$ через L_p-норму функции $u_k(x;\lambda)$ будем называть оценкой антиаприорного типа.

Оценки антиаприорного типа в регулярном случае хорошо известны [5, 6]. Для сингулярных дифференциальных операторов такие оценки получены в [10, § 3] в случае $n=2$.

Теорема 5. *Пусть в операторе $\mathscr{L}$ коэффициенты $p_m(x)$ удовлетворяют условию P_m на G для всех $m=0, 1, \ldots, n-1$. Тогда найдется такое число $\mu_0>0$, что для любого $\mu\in\mathbf{C}$, $|\mu|\geqslant\mu_0$ и любого $p\geqslant 1$ выполнены оценки*

$$\|u_{k-1}(\cdot;\lambda)\|_p\leqslant D_k|\mu|\,\|u_k(\cdot;\lambda)\|_p,\ k\geqslant 1, \tag{48}$$

в которых константа $D_k>0$ зависит лишь от порядка оператора, интервала G, коэффициентов $p_m(x)$, числа p и порядка k корневой функции.

Очевидным следствием теоремы 4 и оценки антиаприорного типа (48) является следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть выполнены все условия теоремы 5. Тогда найдется такое число $\mu_0>0$, что для любого $\mu\in\mathbf{C}$ $|\mu|\geqslant\mu_0$ и любого $p\geqslant 1$ имеет место оценка*

$$\|u_k(\cdot;\lambda)\|_\infty\leqslant D'_k|\mu|^{1/p}\|u_k(\cdot;\lambda)\|_p;$$

здесь константа $D'_k>0$, как и в теореме 5, зависит от порядка k корневой функции.

Доказательство теоремы 5. Зафиксируем $x\in G$ и положительное $t\leqslant\min\left(t^*, \dfrac{1}{(k+1)n}\operatorname{dist}(x,\partial G)\right)$. Тогда для каждого $l=1, 2, \ldots, (k+1)n$ справедливо равенство

$$\sum_{j=0}^{k}\sum_{m=0}^{n-1}(\pm 1)^{m+nj}\frac{u_{k-j}^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}s_{mj}(\mu, lt)=u_k(x\pm lt;\lambda)-$$

$$-\sum_{j=0}^{k}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{u_{k-j}^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}f_{mj}^{\pm}(lt, x, \mu), \tag{49}$$

в котором функции $f^{\pm}_{mj}$ удовлетворяют (см. [1, теорема 3]) неравенству

$$|f^{\pm}_{mj}(lt, x, \mu)| \leqslant 2\Omega(|\mu|, lt)(3lt)^{j}[\min(l|\mu|t, 1)]^{m+j(n-1)}\sigma(l\mu t). \qquad (50)$$

Рассмотрим систему равенств (49) как систему из $(k+1)n$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных

$$u_k(x;\lambda),\ \pm\frac{u'_k(x;\lambda)}{\mu},\ \ldots,\ (\pm 1)^{n-1}\frac{u_k^{(n-1)}(x;\lambda)}{\mu^{n-1}},$$

$$(\pm 1)^n u_{k-1}(x;\lambda),\ (\pm 1)^{n+1}\frac{u'_{k-1}(x;\lambda)}{\mu},\ \ldots,\ (\pm 1)^{(k+1)n-1}\frac{u_0^{(n-1)}(x;\lambda)}{\mu^{n-1}}$$

с правой частью, зависящей от неизвестных, и матрицей системы $\mathscr{B}(\mu, t)$ следующей структуры: элемент в позиции (r, l) этой матрицы равен $s_{r-1-n\alpha,\alpha}(\mu, lt)$, если $n\alpha+1\leqslant r\leqslant n(\alpha+1)$, $\alpha=0, 1, \ldots, k$.

Воспользовавшись этим, выразим величину $(\pm 1)^{m+nj}\dfrac{1}{\mu^m}u_{k-j}^{(m)}(x;\lambda)$ из левой части (49).

Пусть $B_{rl}(\mu, t)$ — алгебраическое дополнение к элементу в позиции (r, l) матрицы $\mathscr{B}(\mu, t)$. Умножая обе части равенства (49) на $B_{rl}(\mu, t)$ и складывая получившиеся соотношения, получаем

$$\sum_{j=0}^{k}\sum_{m=0}^{n-1}(\pm 1)^{m+nj}\frac{u_{k-j}^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}\sum_{l=1}^{(k+1)n}s_{mj}(\mu, lt)B_{rl}(\mu, t)=$$

$$=\sum_{l=1}^{(k+1)n}u_k(x\pm lt;\lambda)B_{rl}(\mu, t)-\sum_{j=0}^{k}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{u_{k-j}^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m}\sum_{l=1}^{(k+1)n}f^{\pm}_{mj}(lt)B_{rl}(\mu, t). \qquad (51)$$

Левая часть этого равенства в силу теоремы Лапласа равна

$$(\pm 1)^{r-1}\frac{1}{\mu^{r-1}}u_k^{(r-1)}(x;\lambda)\det\mathscr{B}(\mu, t),\ \text{если}\ 1\leqslant r\leqslant n,$$

$$(\pm 1)^{r-1}\frac{1}{\mu^{r-n-1}}u_{k-1}^{(r-n-1)}(x;\lambda)\det\mathscr{B}(\mu, t),\ \text{если}\ n+1\leqslant r\leqslant 2n,$$

. . . .

$$(\pm 1)^{r-1}\frac{1}{\mu^{r-kn-1}}u_0^{(r-kn-1)}(x;\lambda)\det\mathscr{B}(\mu, t),\ \text{если}\ kn+1\leqslant r\leqslant (k+1)n.$$

Докажем два утверждения о свойствах матрицы $\mathscr{B}(\mu, t)$.

Л е м м а 8. *Для алгебраических дополнений элементов матрицы $\mathscr{B}(\mu, t)$ выполнена оценка*

$$|B_{rl}(\mu, t)|\leqslant t^{\frac{nk(k+1)}{2}}\sigma_0(|\mu|t)/t^{\alpha},$$

в которой α — целое число: $n\alpha+1\leqslant r\leqslant n(\alpha+1)$, а функция $\sigma_0(\xi)$ ограничена на $\mathbf{R}$.

Для обоснования леммы 8 достаточно применить неравенство Адамара к определителю $B_{rl}(\mu, t)$ и, воспользовавшись представлением (37) (см. [1, лемма 7]), положить

$$\sigma_0(\xi)=(\sqrt{n(k+1)-1})^{n(k+1)-1}[e^{n(k+1)\xi}(1+\max_{s,j}|a_{sj}|\sum_{j=1}^{nk}\xi^{-j})]^{\frac{n(k+1)-1}{2}}.$$

Л е м м а 9.

$$|\det\mathscr{B}(\mu, t)|=t^{\frac{nk(k+1)}{2}}[(\sqrt{n})^{-n}\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant n}|e^{\eta_\beta\mu t}-e^{\eta_\alpha\mu t}|]^{(k+1)^2}.$$

Доказательство леммы 9. Воспользуемся представлением (37) функций $s_{mj}(\mu, t)$ (см. [1, лемма 7]). Элементарными преобразованиями столбцов матрицы $\mathscr{B}(\mu, t)$ перейдем к матрице $\mathscr{B}_0(\mu t)$ следующей блочной структуры:

$$\mathscr{B}_0(z) = (\mathscr{A}_1 \quad \mathscr{D}\mathscr{A}_1 \quad \mathscr{D}^2\mathscr{A}_1 \ldots \mathscr{D}^k\mathscr{A}_1),$$

где $\mathscr{D}^j$ — j-я степень диагональной матрицы $\operatorname{diag}(1, 2, 3, \ldots, (k+1)n)$, а матрица $\mathscr{A}_1$ размера $(k+1)n \times n$ имеет вид

$$\mathscr{A}_1 = \begin{pmatrix} s_0(z) & s_1(z) & \ldots & s_{n-1}(z) \\ s_0(2z) & s_1(2z) & \ldots & s_{n-1}(2z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_0((k+1)nz) & s_1((k+1)nz) & \ldots & s_{n-1}((k+1)nz) \end{pmatrix}.$$

Прослеживая, как меняется определитель матрицы $\mathscr{B}(\mu, t)$ в результате проводимых над ней преобразований, придем к равенству

$$|\det \mathscr{B}(\mu, t)| = \left(\frac{t}{n}\right)^{\frac{nk(k+1)}{2}} \prod_{j=1}^{k} (j!)^{-n} |\det \mathscr{B}_0(\mu t)|. \tag{52}$$

Для вычисления определителя матрицы $\mathscr{B}_0(z)$ представим ее в виде произведения матриц

$$\mathscr{B}_0(z) = V_{k+1}(e^{\eta_1 z}, e^{\eta_2 z}, \ldots, e^{\eta_n z}) \begin{pmatrix} W_0 & & & \\ & W_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & W_0 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Второй сомножитель произведения является квазидиагональной матрицей из $(k+1)^2$ блоков, на главной диагонали которой стоят матрицы

$$W_0 = \begin{pmatrix} 1 & \eta_1 & \eta_1^2 \ldots \eta_1^{n-1} \\ 1 & \eta_2 & \eta_2^2 \ldots \eta_2^{n-1} \\ . & . & \ldots & . \\ 1 & \eta_n & \eta_n^2 \ldots \eta_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Первый же сомножитель представляет собой блочную матрицу вида

$$V_{k+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \begin{pmatrix} W & D_0W & D_0^2W \ldots D_0^kW \\ WX & D_1WX & D_1^2WX \ldots D_1^kWX \\ WX^2 & D_2WX^2 & D_2^2WX^2 \ldots D_2^kWX^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ WX^k & D_kWX^k & D_k^2WX^k \ldots D_k^kWX^k \end{pmatrix},$$

где $X = \operatorname{diag}(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n)$, $D_\alpha = \operatorname{diag}(\alpha n+1, \alpha n+2, \ldots, (\alpha+1)n)$ — диагональные матрицы и

$$W = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \ldots x_n \\ x_1^2 & x_2^2 \ldots x_n^2 \\ \ldots & \ldots \\ x_1^n & x_2^n \ldots x_n^n \end{pmatrix}.$$

Определитель второго сомножителя в (53) равен $(\sqrt{n})^{n(k+1)} \times$ $\times i^{\frac{(n-1)(n-2)(k+1)}{2}}$, а для вычисления $\det V_{k+1}$ применим метод рекуррентных соотношений.

Рекуррентное соотношение для $\det V_{k+1}$ имеет вид

$$\det V_{k+1}(x_q, x_{q+1}, \dots, x_n) = (-1)^{\frac{k(k-1)(n-q)}{2}} \prod_{j=1}^{k} j!\, x_q^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \times$$
$$\times \prod_{j=q+1}^{n} (x_j - x_q)^{(k+1)^2} \det V_{k+1}(x_{q+1}, \dots, x_n). \tag{54}$$

Ввиду громоздкости выкладок опишем схему вывода соотношения (54) при $k=q=1$.

Вычтем из каждой строки определителя матрицы $V_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, начиная с последней, предыдущую строку, умноженную на x_1. Разлагая получившийся определитель по первому столбцу, после несложных преобразований столбцов имеем

$$\det V_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^{n-1} x_1^2 \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1) \times$$
$$\times \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 2x_2^2 - x_2x_1 & \dots & 2x_n^2 - x_nx_1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & 3x_2^3 - 2x_2^2x_1 & \dots & 3x_n^3 - 2x_n^2x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{2n-1} & x_2^{2n-1} & \dots & x_n^{2n-1} & 2nx_2^{2n} - (2n-1)x_2^{2n-1}x_1 & \dots & 2nx_n^{2n} - (2n-1)x_n^{2n-1}x_1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из каждого $(n+s)$-го столбца $(s+1)$-й, умноженный на x_{s+1}. Вынося общие множители последних $n-1$ столбцов, получим

$$\det V_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^{n-1} x_1^2 \prod_{j=2}^{n} (x_j - x_1)^2 \times$$
$$\times \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & 2x_2^2 & \dots & 2x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{2n-1} & x_2^{2n-1} & \dots & x_n^{2n-1} & (2n-1)x_2^{2n-1} & \dots & (2n-1)x_n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Повторяя аналогичные действия с полученным определителем, придем к рекуррентному соотношению (54) для $\det V_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Из (54) следует, что

$$\det V_{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$
$$= (-1)^{\frac{k(k+1)n(n-1)}{4}} \prod_{j=1}^{k} (j!)^n \prod_{j=1}^{n} x_j^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \prod_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n} (x_\beta - x_\alpha)^{(k+1)^2}.$$

Так как $\prod\limits_{j=1}^{n} \exp(\eta_j z) = 1$, то окончательно определитель $\mathscr{B}_0(z)$ по абсолютной величине равен

$$(\sqrt{n})^{-n(k+1)} \prod_{j=1}^{k} (j!)^n \Big[\prod_{1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n} |\exp(\eta_\beta z) - \exp(\eta_\alpha z)| \Big]^{(k+1)^2},$$

что, будучи учтенным в (52)', доказывает равенство леммы 9.

Пусть в равенствах (51) $x \in K = [a + n(k+1)t, b - n(k+1)t]$. Положим $t = C_1/|\mu|$, причем постоянная $C_1 \in \left(0, \frac{1}{(k+1)n}\right]$ такова, что

$\left|\frac{e^z-1}{z}-1\right| \leqslant 1/(4n)$ при $|z| \leqslant C_1$. Тогда при $\alpha \neq \beta$ $|\exp(\eta_\beta z)-$ $-\exp(\eta_\alpha z)| \geqslant |z|/n$ и результаты последних двух лемм 8, 9 приводят к неравенствам

$$|B_{rl}(\mu,t)| \leqslant \left(\frac{C_1}{|\mu|}\right)^{\frac{nk(k+1)}{2}} \sigma_0(C_1) \Big/ \left(\frac{C_1}{|\mu|}\right)^{\alpha}, \quad n\alpha+1 \leqslant r \leqslant n(\alpha+1), \tag{55}$$

$$|\det \mathscr{B}(\mu,t)| \geqslant \left(\frac{C_1}{|\mu|}\right)^{\frac{nk(k+1)}{2}} (\sqrt{n})^{-n^2(k+1)^2}. \tag{56}$$

Возьмем норму в L_p $(x \in K)$ левой и правой части (51) и учтем (55) и (56). Тогда при $\alpha n+1 \leqslant r \leqslant (\alpha+1)n$ и $|\mu| \geqslant 1$ получим оценку

$$\left\|\frac{u_{k-\alpha}^{(r-\alpha n-1)}(\cdot;\lambda)}{\mu^{r-\alpha n-1}}\right\|_{p,K} |\mu|^{-\alpha} \leqslant C_2 \|u_k(\cdot;\lambda)\|_p +$$

$$+ C_2 \Omega\left(1, \frac{1}{|\mu|}\right) \sum_{j=0}^{k} \sum_{m=0}^{n-1} \left\|\frac{u_{k-j}^{(m)}(\cdot;\lambda)}{\mu^m}\right\|_{p,K} |\mu|^{-j}.$$

Сложим эти оценки по всем $r=1, 2, \ldots, (k+1)n$ и возьмем $\mu_0 > 0$ так, чтобы при $|\mu| \geqslant \mu_0$ было выполнено неравенство $C_2(k+1)n\Omega(1, 1/|\mu|) \leqslant$ $\leqslant 1/2$. Тогда после очевидных преобразований придем к оценке

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{m=0}^{n-1} \left\|\frac{u_{k-j}^{(m)}(\cdot;\lambda)}{\mu^m}\right\|_{p,K} |\mu|^{-j} \leqslant 2n(k+1) C_2 \|u_k(\cdot;\lambda)\|_p. \tag{57}$$

Воспользуемся явной формулой сдвига для корневой функции $u_{k-1}(x \pm t; \lambda)$:

$$u_{k-1}(x \pm t; \lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{u_{k-1-j}^{(m)}(x;\lambda)}{\mu^m} F_{mj}^{\pm}(t,x,\mu)$$

при $x \in K$ и $t=(k+1)nC_1/|\mu|$.

Беря норму в $L_p(x \in K)$ его левой и правой части и учитывая, что

$$\|u_{k-1}(\cdot;\lambda)\|_p \leqslant \|u_{k-1}(x-t;\lambda)\|_{L_p(x\in K)} + \|u_{k-1}(x+t;\lambda)\|_{L_p(x\in K)},$$

и оценки теоремы 2 (см. [1]), получаем

$$\|u_{k-1}(\cdot;\lambda)\|_p \leqslant 4e \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{2}{|\mu|}\right)^j \sum_{m=0}^{n-1} \left\|\frac{u_{k-1-j}^{(m)}(\cdot;\lambda)}{\mu^m}\right\|_{p,K}.$$

Применим оценку (57) к правой части последнего неравенства. Имеем $\|u_{k-1}(\cdot;\lambda)\|_p |\mu|^{-1} \leqslant 8en(k+1)C_2 \cdot 2^{k-1} \|u_k(\cdot;\lambda)\|_p$, т. е. оценка антиаприорного типа, а следовательно, и теорема 4 полностью доказаны.

Автор выражает признательность В. А. Ильину за полезные обсуждения результатов работы.

Литература

1291-1302

1. Крицков Л. В. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 8. С. ~~2294—2305~~.
2. Крицков Л. В. // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 6. С. 1306—1309.

3. J o o I. // Acta sci. math. 1984. Vol. 47. P. 201—204.
4 K o m o r n i k V. // Acta sci. math. 1983. Vol. 45. P. 261—271.
5. K o m o r n i k V. // Acta math. hung. 1985. Vol. 45. P. 451—457
6. К е р и м о в Н. Б. // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 5. С. 1054—1056.
7. Л о м о в И. С. // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 80—93.
8. И л ь и н В. А. // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 5. С. 771—794.
9. И л ь и н В. А., М о и с е е в Е. И. // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 10. С. 1859—1867.
10. К р и ц к о в Л. В. Некоторые спектральные свойства сингулярных обыкновенных операторов второго порядка: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1990.

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

*Поступила в редакцию
3 марта 1992 г.*