

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова



Механико-математический факультет

А. Н. Голубятников

АФФИННАЯ СИММЕТРИЯ
СПЛОШНЫХ СРЕД

Москва 2001

ББК 22.25

Г62

УДК 531

А. Н. Голубятников. Аффинная симметрия сплошных сред: Учебное пособие. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2001. — 94 с.

Рецензент: к. ф.-м. н. А.В. Аксёнов

Печатается по постановлению Редакционно-издательского Совета механико-математического факультета МГУ.

Учебное пособие составлено на основе материала ряда специальных курсов по основам механики сплошной среды, читавшихся автором на механико-математическом факультете и факультете повышения квалификации преподавателей вузов в МГУ им. М. В. Ломоносова. Главное внимание уделяется моделированию анизотропных сред, связанному с классификацией подгрупп группы трехмерных линейных преобразований, сохраняющих объем, и вычислением их инвариантов. Изложен необходимый математический аппарат. Даны приложения к механике ориентируемых и структурируемых сред типа жидких кристаллов. Формулируется ряд нерешенных задач.

Для студентов, аспирантов и преподавателей механико-математического факультета МГУ, а также научных сотрудников, использующих в своей работе методы механики сплошной среды.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 99-01-01153, 00-15-96154).

Введение

Методы симметрии часто играют определяющую роль при математическом моделировании физических процессов. Инвариантность относительно определенной группы преобразований кладется в основу геометрического описания пространства-времени (кинематическая симметрия). Сознательное конструирование уравнений состояния и динамических уравнений, максимально позволяющее упростить решение задачи или построить эффективный приближенный метод, как правило, всегда опирается на некоторые соображения симметрии. Хорошо известны приложения теории групп, связанные с симметрией атомов, молекул и решеток. Большую роль симметрия играет при классификации и моделировании взаимодействий элементарных частиц.

Однако, к гораздо более широким возможностям приводит классический континуальный подход, использующийся в рамках механики сплошной среды для макроскопического описания всего многообразия известных веществ и их смесей, которые могут находиться, к тому же непрерывно взаимодействуя, в самых разнообразных агрегатных состояниях. Соответствующие симметрии сплошных сред называют материальными.

Термин «симметрия», связанный первоначально с преобразованиями, сохраняющими длину, в настоящее время стал более или менее универсальным, поэтому его использование в названии и тексте данного пособия предполагает исследование свойств инвариантности моделей сплошных сред относительно более широких множеств преобразований, в основном линейных, но не обязательно ортогональных. Собственно говоря, «аффинными» называют преобразования вида $x'^i = a_j^i x^j + b^i$, где a_j^i и b^i — постоянные параметры.

Большую роль в механике сплошной среды играет классификация симметрий, связанная с подгруппами группы трехмерных ортогональных преобразований O_3 , по существу, известная еще в древности. Но только сравнительно недавно были построены полные системы инвариантных тензоров, описывающие такие симметрии (Лохин, Седов [33, 34]).

Эти тензоры, наряду с характеристиками деформационного состояния среды, включаются в аргументы удельной внутренней энергии u . Для них могут быть составлены допол-

нительные уравнения, описывающие эволюцию во времени, а также пространственную неоднородность (как тензорных полей), представляющую своего рода ориентационную упругость. В ряде важных случаев эти тензорные поля можно считать пространственно однородными и «вмороженными» в среду, то есть они имеют постоянные сопутствующие компоненты в подходящей лагранжевой системе координат.

Следующий шаг к более детальному описанию сплошных сред был сделан Ноллом, Колеманом и Ваном [49, 51, 52], которые начали использовать для описания симметрий подгруппы более широкой группы трехмерных линейных преобразований $\pm SL_3$, сохраняющих величину объема. Дело в том, что с точки зрения ортогональных симметрий невозможно отличить модель изотропной жидкости от модели изотропного упругого тела. Хотя множества деформаций, не меняющих величины внутренней энергии, у этих сред существенно различны.

Остановимся на этом вопросе несколько подробнее в рамках ньютоновской механики. Пусть $x^i(\xi^\alpha, t)$ — закон движения среды, связывающий соответственно эйлеровы переменные x^i , лагранжевы переменные ξ^α и время t . При достаточно крупномасштабном моделировании внутренняя энергия среды $u(s, x_\alpha^i)$, помимо удельной энтропии s , обычно зависит только от первых пространственных производных закона движения — дисторсии (искажения) $x_\alpha^i = \partial x^i / \partial \xi^\alpha$.

В рамках ньютоновской механики при адиабатическом процессе уравнения движения однородной среды в отсутствие массовых сил в декартовых координатах x^i имеют вид

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha^i} \right), \quad \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \quad (*)$$

Встает задача о групповой классификации возможных зависимостей u от x_α^i . При этом величины u и s считаются скалярами. Отметим, что система уравнений (*), очевидно, всегда инвариантна относительно однородного растяжения и сдвигов переменных x^i, ξ^α, t и, кроме того, относительно преобразований Галилея $x'^i = x^i + V^i t$.

Согласно принципу независимости напряженного состояния среды от вращений системы отсчета наблюдателя, функция u будет зависеть только от сопутствующих компонент метрики трехмерного пространства $g_{\alpha\beta} = \delta_{ij} x_\alpha^i x_\beta^j$.

Пусть метрика начального состояния в данной лагранжевой системе координат равна $g_{\alpha\beta}^0 = \delta_{\alpha\beta}$. Рассмотрим собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ тензора g по отношению к тензору g_0 , которые определяются уравнением

$$\det(g_{\alpha\beta} - \lambda \delta_{\alpha\beta}) = 0$$

Предполагая, что функция u имеет скалярные аргументы, составленные из компонент тензоров g и g_0 , в случае упруго тела мы имеем $u(s, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Смысл данного предположения, собственно говоря, связан с необходимостью точного указания способа преобразования аргументов функции u при переходе к любым другим переменным, возможно, даже к другой системе отсчета (в этом случае переход к новым координатам зависит от времени и вид уравнений (*) может измениться).

Функция $u(s, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ в общем случае инвариантна относительно преобразований лагранжевых переменных вида $\xi'^a = r_{\beta}^a \xi^{\beta} + b^a$ с ортогональной матрицей вращений r и вектором сдвигов b . Инвариантность относительно сдвигов связана с однородностью среды, а вращения, отвечающие определенному произволу в выборе начального состояния, — с изотропией среды. Последние образуют трехпараметрическую группу O_3 .

В случае жидкости, как известно, u зависит только от произведения $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det(g_{\alpha\beta}) = \det^2(x_{\alpha}^i) = (\rho_0/\rho)^2$, которое выражается через плотность среды ρ . Это соответствует скалярной зависимости u от тензора g и тензорного квадрата тензора Леви-Чивита ϵ_0 начального состояния, составленного из куба g_0 .

Причем имеется сильное расширение группы симметрии, в общем положении до множества всех гладких трехмерных преобразований с якобианом $\det(\partial \xi'^a / \partial \xi^{\beta}) = \pm 1$. Это множество содержит, очевидно, две произвольные функции от трех переменных. Ясно, что для определения вида функции u , инвариантной относительно преобразований дисторсии, достаточно рассмотреть только группу линейных трехмерных преобразований $\pm SL_3$, которая может быть представлена матрицами с определителем, равным ± 1 . Группа имеет восемь непрерывных параметров.

Укажем также на другое расширение группы симметрии функции $u(g_{\alpha\beta})$ при специальной зависимости от λ_{α} . Пусть u зависит от отношений $\lambda_1/\lambda_3, \lambda_2/\lambda_3$, тогда группа симметрии

расширяется до десятипараметрической группы конформных преобразований K , умножающих метрику g_0 на некоторую скалярную функцию.

Пусть $GL_3 = \pm SL_3 \times D$ — общая линейная группа, которая является прямым (коммутирующим) произведением группы $\pm SL_3$ и группы всесторонних растяжений D , отвечающей матрицам вида $d \cdot 1$, где число $d > 0$ и 1 — единичная матрица. Тогда пересечение группы K с группой GL_3 , дает группу $O_3 \times D$. Причем для получения указанной специальной зависимости функции u достаточно требования инвариантности относительно этой более узкой группы.

Таким образом, наряду с подгруппами группы $\pm SL_3$ имеет смысл также рассматривать и подгруппы группы GL_3 , приводящие к нетривиальной спецификации вида функции $u(g_{\alpha\beta})$. Кроме того общая линейная группа возникает и в случае, когда u вообще не зависит от дисторсии, что соответствует среде без напряжений — «пыли», широко используемой для описания разреженных сред, например в космологии.

Уже из приведенных достаточно общих примеров следует, что в основу классификации сплошных сред по свойствам материальной симметрии может быть положено описание подгрупп (с точностью до сопряженности в группе GL_3 , то есть с точностью до выбора локального репера, голономного или неголономного в зависимости от физической ситуации) специальной линейной группы $\pm SL_3$, как наиболее простой, но значительно более широкой, чем ее подгруппа ортогональных преобразований O_3 . На этом пути подгруппы группы O_3 относят к группам симметрии твердых тел. В специальных случаях могут быть использованы и подгруппы группы GL_3 или другие, нелинейные, расширения.

Так как при преобразованиях лагранжевых переменных матрица дисторсии преобразуется также как при групповом умножении матриц $(x_\alpha^i)' = \partial \xi^\beta / \partial \xi'^\alpha \cdot x_\beta^i$, то в силу инвариантности функции u от x_α^i относительно преобразований $f^\alpha(\xi^\beta)$ внутренняя энергия будет автоматически нечувствительна к дисторсиям того же вида. Это позволяет, используя терминологию теории деформаций, говорить о допустимых линейных преобразованиях, не сводящихся к ортогональным, как о множествах одноосных растяжений и деформационных сдвигов, представленных соответственно диагональными и треугольны-

ми матрицами.

Большими группами материальных симметрий, не содержащими группу O_3 , обладают деформационные модели «жидких кристаллов». Представим себе среду, малая частица которой устроена, например, как пачка круглых карандашей или как колода игровых карт. В первом случае в ряде задач можно принять заданным вектор ориентации частиц среды $\mathbf{A}$ с лагранжевыми компонентами $A^\alpha = \delta_1^\alpha$, во втором — ковектор $\mathbf{a}$, определяющий нормаль к их площадкам, с $a_\beta = \delta_\beta^3$.

Если предположить зависимость внутренней энергии среды, как для жидкости, от $\det(g_{\alpha\beta})$, определяющего плотность, а также от $|\mathbf{A}|^2 = g_{11}$ или, во втором случае, от $|\mathbf{a}|^2 = g^{33}$, то, ограничиваясь подгруппами группы $\pm SL_3$, получим две пятипараметрические группы матриц вида

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & m & n \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & m \\ c & d & n \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

где $ad - bc = \pm 1$.

Удивительно, что, если на этом пути ограничиться средами с группами симметрий с числом параметров от четырех до восьми, то, не смотря на достаточно большое количество возможных групп (см. ниже), устойчивыми, то есть допускающими описание в длинноволновом приближении гиперболическими дифференциальными уравнениями (*), будут только указанные выше три типа сред: жидкость и два типа жидких кристаллов, и то при дополнительных ограничениях типа неравенств на вид внутренней энергии. Отметим также, что указанная выше среда с замороженным вектором $\mathbf{A} = \mathbf{H}/\rho$, как известно, также используется в магнитной гидродинамике при моделировании идеально проводящей жидкости ($\mathbf{H}$ — магнитное поле).

При более детальном описании поведения жидких кристаллов требуется, вообще говоря, введение вторых производных закона движения среды или даже самостоятельное рассмотрение самих ориентационных векторов и их производных. На этих моделях мы остановимся отдельно.

Цель данного учебного пособия — подвести читателя к инвариантно-групповой классификации анизотропных моделей механики сплошной среды путем использования групп линейных преобразований, связанных с материальными симметри-

ями; провести сравнение с другими моделями анизотропных сред и наметить пути построения в рамках механики сплошной среды общей теории ориентируемых и структурируемых сред.

Пособие состоит из трех глав. В первой главе кратко излагаются необходимые сведения из алгебры, дифференциальной геометрии и теории групп преобразований, не слишком выходящие за рамки университетского курса. Вторая глава посвящена определению линейных групп материальных симметрий сплошных сред, а также нахождению их тензорных инвариантов. В третьей главе рассматриваются физически апробированные модели жидких кристаллов и вопросы устойчивости анизотропных жидкостей.

Для предварительного чтения рекомендуется общеобразовательная литература [23, 30, 40]. Много полезных сведений по приложениям алгебры и геометрии в механике, а также по проблемам и моделям механики сплошной среды можно также найти в книгах [9, 10].

1. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 1.1. Группы

Напомним определение группы и некоторые общие свойства групп. Множество элементов $G \ni a, b, c, \dots$ называется группой, если на этом множестве определено умножение элементов ab , обладающее следующими свойствами:

- 1) замкнутость, $ab \in G$;
- 2) ассоциативность, $(ab)c = a(bc)$;
- 3) существование левого единичного элемента e такого, что $ea = a$ для всех элементов группы;
- 4) для каждого элемента a существование левого обратного a^{-1} такого, что $a^{-1}a = e$.

Можно доказать, что элементы e и a^{-1} определяются единственным образом и являются одновременно и соответствующими правыми элементами.

Примерами нам будут служить, прежде всего, множества невырожденных вещественных матриц n -го порядка с обычным матричным умножением: полная линейная группа GL_n , специальная (унимодулярная) линейная группа SL_n , состоящая из матриц с определителем, равным 1, расширенная унимодулярная линейная группа $\pm SL_n \ni a, \det a = \pm 1$, множество ортогональных матриц $O_n \subset \pm SL_n$, множество специальных ортогональных матриц $SO_n = O_n \cap SL_n$ и другие их подмножества. Сюда следует добавить также группу относительно сложения R^n (R — множество вещественных чисел).

При $n = 1$ $GL_1 = R \setminus \{0\}$, $\pm SL_1 = O_1 = \{\pm 1\}$, а $SL_1 = SO_1 = 1$.

Подмножество H группы G называется подгруппой, если H обладает всеми свойствами группы относительно той же операции умножения. Всякая группа G может быть разложена на непересекающиеся множества левых или правых смежных классов по данной подгруппе:

$$G = H \cup a_1 H \cup a_2 H \cup \dots = H \cup H a_1 \cup H a_2 \cup \dots \quad (1.1.1)$$

Произведение элемента на множество понимается как множество всех соответствующих произведений элементов.

Например, группа O_3 разлагается на два смежных класса SO_3 и $-SO_3$.

Два различных элемента группы G a и b сопряжены, если существует такой элемент $c \in G$, что $a = bcb^{-1}$. Аналогично определяется и сопряженность подгрупп.

Подгруппа H называется инвариантной (или нормальным делителем) в группе G , если для любого элемента $a \in G$ выполняется соотношение $aHa^{-1} = H$. Относительно инвариантной подгруппы H соответствующие разложения группы G на левые и правые смежные классы совпадают. Это позволяет ввести понятие фактор-группы G/H как множества смежных классов, определив соответствующее произведение классов как $aH \cdot bH = cH \ni ab$. Часто фактор-группа изоморфна некоторой подгруппе F группы G , состоящей из представителей смежных классов.

Если в разложении (1.1.1) всего два смежных класса, то соответствующая подгруппа H инвариантна. Так, группа SO_3 инвариантна, как подгруппа, в группе O_3 ; причем фактор-группа $O_3/SO_3 \sim \{\pm e\} \subset O_3$.

Иногда группу G , содержащую H , называют надгруппой группы H . Нормализатором N данной подгруппы H в группе G называется наибольшая подгруппа группы G , содержащая H в качестве нормального делителя. Например, группа O_3 есть нормализатор группы SO_3 в группе $\pm SL_3$.

Группа G коммутативна (или абелева), если для каждой пары ее элементов a и b произведение $ab = ba$. Множество элементов группы G , коммутирующих со всеми остальными элементами, составляет центр Z , который является инвариантной коммутативной подгруппой группы G . Пусть W — некоторая подгруппа центра группы G , тогда говорят, что G есть накрывающая группа фактор-группы G/W .

Подгруппа $\{\pm e\}$ есть центр группы O_3 .

Введем понятие коммутатора двух элементов $[ab] = = a^{-1}b^{-1}ab$. Отметим, что $[aa] = e$ и $[ab]^{-1} = [ba]$. Степень некоммутативности группы G определяется множеством всех коммутаторов $[G, G]$, составленных из ее элементов. Коммутантом (или производной группой) группы G называется наименьшая ее подгруппа $G_1 \supseteq [G, G]$, содержащая все коммутаторы. При этом G_1 есть нормальный делитель G , а фактор-группа G/G_1 коммутативна.

Процесс составления производных групп можно продолжить. Опишем на этом пути основные типы групп. Рассмотрим

последовательность подгрупп

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_n \supseteq \dots \quad (1.1.2)$$

где $G_n \supseteq [G_{n-1}, G_{n-1}]$.

Для коммутативной группы все $G_n = E$ при $n \geq 1$, где E — группа, состоящая из единичного элемента. Разрешимой группой класса k называется группа, у которой все $G_n = E$, начиная с $n = k$. В этом случае имеется нетривиальная ($\neq E$) инвариантная коммутативная подгруппа G_{k-1} . Ясно, что всякая коммутативная группа является разрешимой, и всякая подгруппа разрешимой группы также разрешима.

Название «разрешимая группа» восходит к теории разрешимости алгебраических уравнений в радикалах при наличии разрешимой группы симметрии уравнения. Для простоты мы опустили здесь промежуточный класс нильпотентных групп.

Некоммутативная группа, не содержащая нетривиальных инвариантных подгрупп, называется простой. К полупростым группам, включающим простые, относят группы, не имеющие нетривиальных разрешимых инвариантных подгрупп.

Приведем еще несколько примеров. Коммутативная группа SO_2 :

$$SO_2 \ni \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (1.1.3)$$

$\varphi \in [0, 2\pi)$. Групповая операция сводится, таким образом, к сложению величин φ , сравнимых по $\text{mod}(2\pi)$.

Группа всех треугольных матриц G является разрешимой. В случае матриц второго порядка она имеет коммутативную первую производную G_1 и тривиальную вторую $G_2 = E$:

$$G \ni \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad G_1 \ni \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.4)$$

Группы SL_2 и SO_3 просты.

Под полупрямым произведением групп $R \ni r$ и $S \ni s$ понимается группа RS , составленная из всевозможных произведений пар элементов rs и содержащее группу R в качестве инвариантной подгруппы. Правило умножения имеет вид

$$(r_1 s_1)(r_2 s_2) = r_1(s_1 r_2)s_2 = r_1(r_3 s_1)s_2 = r_4 s_3$$

где $r_1, \dots, r_4 \in R$, $s_1, \dots, s_3 \in S$.

Примером полупрямого произведения инвариантной разрешимой группы R на простую SO_3 является группа движений евклидова пространства L^3 , состоящая из трехмерных вращений, центральной инверсии и сдвигов. Она может быть представлена матрицами четвертого порядка как

$$R SO_3 \ni \begin{pmatrix} O_3 & \mathbf{b} \\ 000 & 1 \end{pmatrix}, \quad R \ni \begin{pmatrix} \pm 1 & \mathbf{b} \\ 000 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.5)$$

где $\mathbf{b} \in R^3$.

Рассмотрим также важный класс групп, состоящих из конечного числа элементов (конечные группы). Число элементов называется порядком группы. Отношение числа элементов группы к числу элементов ее любой подгруппы согласно разложению (1.1.1) является целым. Его называют индексом подгруппы.

Совокупность элементов конечной группы G таких, что каждый элемент G может быть получен из этих элементов путем перемножения и образования обратных элементов, называется системой образующих. Минимальное число образующих есть ранг группы. Группа с одной образующей всегда коммутативна и называется циклической.

Примером ~~циклической~~ ^{конечной} группы может служить группа симметрии правильного n -угольника. Она состоит из поворотов (1.1.3) на углы $2\pi m/n$, $m = 0, \dots, n-1$, а также включает n симметрий относительно прямых, проходящих через центр и вершины, а также центр и середины сторон n -угольника (для нечетного n эти прямые совпадают). Образующими являются, например, элемент, отвечающий углу поворота $2\pi/n$ и одна из симметрий.

В качестве второго примера рассмотрим симметрическую группу S_n , состоящую из перестановок чисел $\{1, 2, \dots, n\}$. Она имеет $n!$ элементов и может быть представлена матрицами n -го порядка, составленными из единиц и нулей, например при $n = 2$ вида

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.6)$$

Перестановки, у которых $\det p_k = 1$ называются четными, а при $\det p_k = -1$ — нечетными. Четные перестановки образуют «знакопеременную» подгруппу A_n группы S_n индекса 2.

Пусть G — конечная группа порядка n . Перенумеруем ее элементы a в некотором порядке. Тогда последовательное умножение любого заданного элемента b на все элементы группы: $ba_m = a_l$ сводится, очевидно, к перестановкам элементов. Единице группы будет соответствовать перестановка с единичной матрицей. Всем другим элементам будут отвечать матрицы, у которых на диагонали стоят одни нули. Таким образом, согласно описанному отображению всякая конечная группа G изоморфна некоторой подгруппе группы S_n .

Использование приведенной терминологии и общих свойств групп, указанных выше, позволяет перейти к необходимым для дальнейшего анализа группам преобразований.

§ 1.2. Преобразования

Группой преобразований множества X называется совокупность отображений G этого множества в себя, обладающие свойствами группы. Если на множестве X задана какая-либо структура, можно определить группу преобразований, сохраняющих данную структуру. Этот способ построения групп преобразований является достаточно универсальным.

Например, группа, содержащая ортогональные преобразования O_3 и сдвиги R^3 , типа (1.1.5) оставляет инвариантным поле метрического тензора g евклидова пространства L^3 и сама определяется этим свойством.

Орбитой точки $x \in X$ называется совокупность всех точек вида ax , $a \in G$, полученных из точки $x \in X$ действием группы преобразований. По определению, всякая точка орбиты переводится в любую другую точку этой же орбиты. Таким образом, каждая орбита является однородным пространством, на котором группа G действует «транзитивно», а все множество X расслаивается на однородные пространства.

Все однородные пространства могут быть описаны следующим образом. Зафиксируем некоторую точку $x \in X$. Совокупность элементов, оставляющих на месте эту точку, образует подгруппу H_x группы G , которая называется стационарной подгруппой точки x . Ясно, что множество элементов вида aH_x , представляющих некоторый левый смежный класс в разложении (1.1.1), переводит x в точку ax . Таким образом, всякое однородное пространство изоморфно множеству левых смежных

классов группы преобразований G по некоторой ее подгруппе H , которое также обозначают, как и фактор-группу, G/H . Можно использовать при соответствующем определении действия группы на множестве X и правые смежные классы.

Примером однородного пространства может служить сфера S^2 , изоморфная множеству левых смежных классов группы SO_3 по подгруппе SO_2 . Рассмотрим на этом пути классификацию подгрупп группы O_3 .

Всякое ортогональное преобразование трехмерного евклидова пространства L^3 может быть представлено матрицей

$$l = (l_j^i) = ((\delta_j^i - k^i k_j) \cos \varphi - \epsilon^i_{jk} k^k \sin \varphi \pm k^i k_j) \quad (1.2.1)$$

где единичный вектор k определяет направление оси, вокруг которой происходит вращение против часовой стрелки на угол φ ; ϵ^{ijk} — компоненты полностью антисимметричного тензора Леви-Чивита, $\epsilon^{123} = 1$; опускание индексов осуществляется с помощью метрики с компонентами $g_{ij} = \delta_{ij}$. Знак плюс отвечает собственному повороту ($\det l = 1$), знак минус — зеркальному, который сопровождается отражением в плоскости, перпендикулярной оси вращения (соответственно $\det l = -1$).

Оговорим запись матричных элементов. Верхний индекс означает номер строки, нижний — номер столбца. При горизонтальном расположении индексов — первый индекс — номер строки, второй — столбца.

Рассмотрим сначала действие группы собственных вращений SO_3 на сфере S^2 . Каждое вращение, отличное от тождественного преобразования e , оставляет на месте только две точки сферы, называемые полюсами. Пусть G — конечная подгруппа группы SO_3 порядка $n \geq 2$ и H — ее циклическая подгруппа порядка k , которая является стационарной подгруппой одного из своих полюсов $x \in S^2$. Будем считать, что этот полюс имеет кратность $k - 1$. Разложим G на множество левых смежных классов вида $a_p H$, $p = 0, \dots, n/k - 1$, и рассмотрим орбиту точки x . Каждая точка этой орбиты является полюсом подгруппы $a_p H a_p^{-1}$, сопряженной подгруппе H , той же кратности.

Пусть на S^2 имеется r орбит группы G . Тогда, считая каждый полюс столько раз, какова его кратность, и исключая

единицу группы e из рассмотрения, получим соотношение

$$\sum_{i=1}^r \frac{n(k_i - 1)}{k_i} = 2(n - 1) \quad (1.2.2)$$

С учетом неравенств $2 \leq k_i \leq n$ можно получить следующие оценки $2 \leq r \leq 4(1 - 1/n)$. С учетом этих неравенств имеем полное решение уравнения (1.2.2):

$$\begin{aligned} 1) r = 2, \quad k_1 = n, \quad k_2 = n \\ 2) r = 3, \quad k_1 = 2: \quad \begin{aligned} a) k_2 = 2, \quad k_3 = n/2 \\ b) k_2 = 3: \quad \begin{aligned} P) k_3 = 3, \quad n = 12 \\ Q) k_3 = 4, \quad n = 24 \\ R) k_3 = 5, \quad n = 60 \end{aligned} \end{aligned} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Полученные соотношения позволяют описать искомые конечные группы с точностью до сопряженности в группе O_3 или, что то же, с точностью до выбора декартова базиса e_i в пространстве L^3 , если речь идет о преобразовании векторов вида $x^i e_i$. Используем обозначения Шубникова, указывающие системы образующих.

Итак, допустимы лишь следующие группы собственных поворотов:

$$n, \quad n : 2, \quad 3/2, \quad 3/4, \quad 3/5 \quad (1.2.4)$$

которые обозначают соответственно группы симметрии правильной n -угольной пирамиды, правильной n -угольной призмы и правильных многогранников — тетраэдра, куба и икосаэдра (рис. 1–2). Группы симметрии соответственно куба и октаэдра, икосаэдра и додекаэдра, как известно, попарно совпадают.

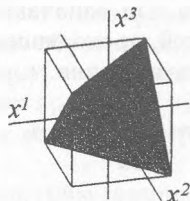


Рис. 1.

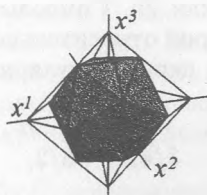


Рис. 2

Первая серия групп — циклические группы поворотов на углы, кратные $2\pi/n$, порядка n . Эту ось вращения называют

также осью n -го порядка. Вторая серия групп получается из первой добавлением поворотов на угол π вокруг n осей 2-го порядка, перпендикулярных основной оси n -го порядка. Порядок каждой группы $2n$, две образующие.

Группа симметрии тетраэдра имеет 12 элементов: 4 оси 3-го порядка, 3 оси 2-го порядка и единица группы. Группа симметрии куба имеет порядок 24: 3 оси 4-го порядка, 4 оси 3-го порядка, 6 осей 2-го порядка и единица группы. Группа симметрии икосаэдра имеет 60 элементов: 6 осей 5-го порядка, 10 осей 3-го порядка, 15 осей 2-го порядка и единица группы. Ранг всех этих групп равен 2.

Группа n инвариантна в группе $n : 2$. Группа $3/2$ имеет нормальный делитель $2 : 2$ индекса 3 и сама является нормальным делителем индекса 2 в группе $3/4$, а также подгруппой в группе $3/5$ индекса 5. Группа $3/5$ — простая и является наименьшей из всех простых групп.

Теперь рассмотрим подгруппы группы O_3 , включающие симметрии относительно плоскостей. Рассмотрим инверсию $I = -e$, которая коммутирует со всеми элементами группы SO_3 , причем всякий несобственный элемент группы O_3 равен произведению инверсии на собственный поворот. Ясно также, что всякая группа $G \subseteq O_3$, содержащая зеркальные повороты, будет иметь подгруппу индекса 2, состоящую из собственных поворотов. Поэтому присоединение инверсии к подгруппам группы SO_3 возможно только двумя способами: либо к группе $H \subseteq SO_3$ добавляется просто смежный класс $I H$, либо, когда такая группа H имеет подгруппу H_1 индекса 2, смежный класс вида $a H_1$ меняется на $I a H_1$.

В результате получаем следующие группы. Образующая группы, отвечающая зеркальному повороту на угол π/n , обозначается как $\overline{2n}$. Символы $n \cdot m$ и $n : m$ означают добавление симметрий относительно плоскостей, проходящих через ось вращения и перпендикулярно ей соответственно.

$$\overline{2n}, \quad \begin{matrix} n \cdot m, \\ 3/4, \end{matrix} \quad \begin{matrix} n : m, \\ \overline{6}/2, \end{matrix} \quad \begin{matrix} m \cdot n : m, \\ \overline{6}/4, \end{matrix} \quad \begin{matrix} \overline{2n} \cdot m, \\ 3/\overline{10} \end{matrix} \quad (1.2.5)$$

Группа $n \cdot m$ есть полная группа симметрии пирамиды, $m \cdot n : m$ — призмы. Группа $3/4$ отвечает полной группе симметрии тетраэдра, $\overline{6}/4$ — куба и $3/\overline{10}$ — икосаэдра.

При $n \rightarrow \infty$ можно также получить так называемые пре-

дельные группы, которые уже относятся к группам Ли:

$$\begin{aligned} \infty &= SO_2, & \infty : 2, & \quad \infty/\infty = SO_3, \\ \infty \cdot m, & \quad \infty : m, & \quad m \cdot \infty : m, & \quad \infty/\infty \cdot m = O_3 \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Группа $\infty \cdot m$ есть группа симметрии конуса, $m \cdot \infty : m$ — цилиндра и $\infty/\infty \cdot m$ — шара.

Отметим, что существуют еще счетные множества дискретных преобразований типа вращений на углы, кратные $2\pi/q$, где q — иррациональное число. Замыкание таких групп в топологии компактной группы SO_3 , очевидно, дает группу ∞ .

С точки зрения симметрии дискретных решеток допустимыми углами поворотов, собственных или зеркальных, являются только углы $\pi, 2\pi/3, \pi/2, \pi/3$, что нетрудно получить, рассматривая повороты вокруг параллельных осей, проходящих через соседние узлы. Однако, с точки зрения механики сплошной среды этим ограничиваться не следует. При крупномасштабном рассмотрении допустимой группой симметрии твердого тела может оказаться любая их перечисленных групп (1.2.4)–(1.2.6). Примером служит изотропное упругое тело, свойства которого инвариантны относительно группы O_3 .

§ 1.3. Группы Ли

Рассмотрим группу G , которая является гладким многообразием размерности r , предполагая, что результат операции $(a, b) \rightarrow ab^{-1}$ есть гладкая функция по совокупности переменных $a, b \in G$. Такие группы называются группами Ли. Используя условие гладкости (достаточно непрерывности), нетрудно показать, что связное подмножество G_0 группы G , содержащее единицу группы, которое называется связной компонентой единицы, является инвариантной подгруппой группы Ли G .

Таким образом, изучение всякой группы Ли сводится к исследованию ее связной компоненты единицы G_0 и дискретной фактор-группы G/G_0 . Исследование G_0 , в свою очередь, сводится к изучению структуры окрестности единичного элемента.

Рассмотрим связную группу Ли G , которая является группой преобразований некоторого гладкого n -мерного многообразия X . Пусть $x^i, i = 1, \dots, n$, — координаты точек $x \in X$, а элементу $a \in G$ соответствуют независимые параметры $a^\alpha, \alpha =$

$= 1, \dots, r$. Говорят также, что G — r -параметрическая группа. Тогда преобразования имеют вид:

$$x'^i = f^i(x^k, a^\alpha) \quad (1.3.1)$$

Пусть единице группы e отвечают значения параметров $a^\alpha = 0$, тогда $f^i(x^k, 0) = x^i$.

Композиция ab двух преобразований дает

$$x''^i = f^i(x'^k, b^\alpha) = f^i(x^l, c^\beta), \quad c^\alpha = \varphi^\alpha(a^\beta, b^\gamma) \quad (1.3.2)$$

причем $\varphi^\alpha(a^\beta, 0) = \varphi^\alpha(0, a^\beta) = a^\alpha$. Обратный элемент $b = a^{-1}$ определяется уравнением $\varphi^\alpha(a^\beta, b^\gamma) = 0$.

Рассмотрим последовательность преобразований $x \rightarrow x' \rightarrow x' + dx'$ соответственно с групповыми элементами a и da . Пусть их композиция равна $a + da$. Тогда имеем следующие равенства:

$$x''^i + dx'^i = f^i(x'^k, \delta a^\alpha) = f^i(x^l, a^\beta + da^\beta) = f^i(x^l, \varphi^\beta(a^\gamma, \delta a^\alpha))$$

Откуда следуют соотношения

$$dx'^i = \frac{\partial f^i(x'^k, b^\mu)}{\partial b^\alpha} \Big|_{b^\mu=0} \delta a^\alpha \equiv \xi_\alpha^i(x'^k) \delta a^\alpha \quad (1.3.3)$$

$$da^\beta = \frac{\partial \varphi^\beta(a^\gamma, b^\mu)}{\partial b^\alpha} \Big|_{b^\mu=0} \delta a^\alpha \equiv \theta_\alpha^\beta(a^\gamma) \delta a^\alpha \quad (1.3.4)$$

В соотношении (1.3.4) $\theta_\alpha^\beta(0) = \delta_\alpha^\beta$, следовательно, в окрестности единицы группы e можно ввести обратную матрицу ψ_α^{β} такую, что $\psi_\gamma^\beta \theta_\alpha^\gamma = \delta_\alpha^\beta$. Тогда, исключая δa^α из соотношений (1.3.3), (1.3.4), получим систему уравнений, определяющих преобразования группы,

$$\frac{\partial x'^i}{\partial a^\alpha} = \xi_\alpha^i(x'^k) \psi_\alpha^\beta(a^\gamma) \quad (1.3.5)$$

с начальными условиями $x'^i(0) = x^i$.

Отметим, что в силу независимости параметров a^α векторы на X с компонентами $\xi_{(\beta)}^i$ линейно независимы. Аналогично, величины $\theta_{(\beta)}^\alpha$ и $\psi_\alpha^{(\beta)}$ представляют собой набор компонент линейно независимых векторов и ковекторов на G соответственно (скобками отмечены номера векторов).

При $r = 1$ мы имеем 1-параметрическую группу, уравнения которой имеют вид (далее, если не оговорено противное, штрих опущен, а начальная точка обозначена индексом 0)

$$\frac{dx^i}{da} = \xi^i(x^k)\psi(a), \quad x^i(0) = x_0^i \quad (1.3.6)$$

Ясно, что после замены параметра типа $t = \int_0^a \psi(a) da$, всегда можно локально (в окрестности ϵ) считать, что $\psi = 1$.

Таким образом, проводя аналогию с гидродинамикой, одномерная группа Ли преобразований представляет собой закон движения жидкости со стационарным полем скорости. Соответствующий параметр t называется каноническим, а функция $\varphi(a, b)$ сводится к сложению. Группа коммутативна. Кроме того, всегда существует интеграл уравнений (1.3.6) вида $F(x^i) = t + F(x_0^i)$.

Примером может служить группа SO_2 (1.1.3), действующая линейно на $L^2 \ni (x^1, x^2)$: $a = \varphi$, $\xi^1 = -x^2$, $\xi^2 = x^1$.

Уравнения (1.3.5) составляют систему из nr уравнений с n неизвестными. Условием совместности служит равенство нулю внешней производной правой части. После выделение членов, содержащих x^i это дает

$$\xi_\sigma^k \frac{\partial \xi_\lambda^i}{\partial x^k} - \xi_\lambda^k \frac{\partial \xi_\sigma^i}{\partial x^k} = -\frac{\partial \psi_\alpha^\beta}{\partial a^\gamma} (\theta_\sigma^\gamma \theta_\lambda^\alpha - \theta_\lambda^\gamma \theta_\sigma^\alpha) \xi_\beta^i \equiv C_{\sigma\lambda}^\beta \xi_\beta^i$$

В силу линейной независимости векторов ξ_α величины $C_{\sigma\lambda}^\beta = \text{const}$ и называются структурными постоянными.

В результате имеем две системы уравнений

$$\xi_\sigma^k \frac{\partial \xi_\lambda^i}{\partial x^k} - \xi_\lambda^k \frac{\partial \xi_\sigma^i}{\partial x^k} = C_{\sigma\lambda}^\beta \xi_\beta^i \quad (1.3.7)$$

$$\frac{\partial \psi_\alpha^\tau}{\partial a^\beta} - \frac{\partial \psi_\beta^\tau}{\partial a^\alpha} = C_{\sigma\lambda}^\tau \psi_\alpha^\sigma \psi_\beta^\lambda \quad (1.3.8)$$

В свою очередь, системы уравнений (1.3.7) и (1.3.8) для величин $\xi_\alpha^i(x^k)$ и $\psi_\beta^\alpha(a^\gamma)$ также переопределены.

Рассмотрим действие группы G на множестве скалярных функций $F(x^i) \rightarrow F(x'^i(x^k)) \equiv F_\alpha(x^k)$. Используя бесконечно малые преобразования из окрестности единицы группы, получим для приращения функции формулу

$$dF = da^\alpha \xi_\alpha^i \frac{\partial F}{\partial x^i} \equiv da^\alpha X_\alpha F \quad (1.3.9)$$

Веденные операторы X_α называются инфинитезимальными. Используя эти операторы, уравнения (1.3.7) можно переписать в виде

$$[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma \quad (1.3.10)$$

где квадратные скобки означают коммутатор операторов.

Как для набора любых линейных дифференциальных операторов первого порядка, для операторов X_α должно выполняться так называемое тождество Якоби:

$$[X_\alpha [X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta [X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma [X_\alpha, X_\beta]] = 0$$

Это соотношение дает дополнительные условия на вид структурных постоянных $C_{\alpha\tau}^\rho$.

Таким образом, имеем систему необходимых локальных условий существования группы Ли:

$$C_{\alpha\beta}^\tau = C_{\beta\alpha}^\tau, \quad C_{\alpha\tau}^\rho C_{\beta\gamma}^\tau + C_{\beta\tau}^\rho C_{\gamma\alpha}^\tau + C_{\gamma\tau}^\rho C_{\alpha\beta}^\tau = 0 \quad (1.3.11)$$

Согласно определению, структурные постоянные представляют собой тензор $C(0)$, определенный в единице группы, и могут быть упрощены путем замен переменных a^α .

Дальнейшим исследованием теории групп Ли является доказательство существования и описание групп преобразований при выборе того или иного канонического типа структурных постоянных при заданных размерностях n и r .

Очевидно, решения уравнений (1.3.7) могут существовать в классе линейных функций $\xi^i = a_j^i x^j + b^i$, где a, b — постоянные. Эти уравнения сводятся в этом случае, после приведения подобных членов и сокращения на x^i , к системе алгебраических уравнений, чем объясняется большой прогресс в изучении групп линейных преобразований. Более сложны решения уравнений (1.3.8) для композиции параметров.

Рассмотрим линейное пространство с базисом из операторов X_α , в котором задано умножение, определяемое (на базисных операторах) формулами (1.3.10). Такое пространство называется алгеброй Ли. Умножение не является ассоциативным. Исследуем связь коммутатора в алгебре Ли с коммутатором группы.

В окрестности единицы группы с точностью до членов второго порядка малости по параметрам a^α в силу (1.3.5) имеем

$$x'^i \approx x^i + a^\alpha X_\alpha x^i + (1/2) a^\alpha a^\beta (X_\alpha (X_\beta x^i) + \partial \psi_\alpha^\gamma(0) / \partial a^\beta \cdot X_\gamma x^i)$$

Параметры обратного преобразования $c = a^{-1}$ определяются решением уравнения

$$\varphi^{\alpha}(a, c) \approx a^{\alpha} + c^{\alpha} + a^{\mu} c^{\nu} \partial \psi_{\nu}^{\alpha}(0) / \partial a^{\mu} = 0$$

с той же точностью. Эти приближения позволяют составить групповой коммутатор двух бесконечно малых преобразований a и b

$$[a, b]x^i \approx (1 + a^{\mu} b^{\nu} [X_{\mu}, X_{\nu}])x^i \quad (1.3.12)$$

Связь коммутаторов позволяет изучать свойства некоммутативности группы Ли с помощью более простого объекта — алгебры Ли. Пусть H — связная инвариантная нетривиальная подгруппа группы Ли G . Условие инвариантности $aba^{-1} \in H$, если $a \in G$, $b \in H$, очевидно, можно выразить через коммутатор $aba^{-1}b^{-1} = [a^{-1}b^{-1}] \in H$ и перейти к рассмотрению алгебры Ли. Тогда, если X_{μ} , $\mu = 1, \dots, s < r$, — базис алгебры Ли группы H , то должно выполняться равенство

$$[X_{\alpha}, X_{\mu}] = C_{\alpha\mu}^{\lambda} X_{\lambda}, \quad \alpha = 1, \dots, r, \quad \lambda, \mu = 1, \dots, s \quad (1.3.13)$$

В этом случае говорят об инвариантной подалгебре (или идеале) полной алгебры Ли.

При вычислении нормализатора N любой связной подгруппы $H \subseteq N \subseteq G$, $N \ni b: bNb^{-1} = H$, можно ограничиться вместо H ее бесконечно малой окрестностью единицы или соответствующей алгеброй Ли. При этом говорят о нормализаторе алгебры Ли в группе G (§ 2.2).

С помощью теории алгебр Ли доказана теорема Леви-Мальцева о том, что всякая связная группа Ли представляет собой полупрямое произведение максимальной разрешимой подгруппы на полупростую.

Коснемся вопроса геометрической структуры группы Ли. Поля векторов $\theta_{(\beta)}^{\alpha}$ и им сопряженных ковекторов $\psi_{\alpha}^{(\beta)}$ определяют голономный параллельный перенос на группе. Например, для вектора A , переносимого параллельно из точки a в точку b , имеем

$$A^{\alpha}(b) = \theta_{\beta}^{\alpha}(b) \psi_{\mu}^{\beta}(a) A^{\mu}(a) \quad (1.3.14)$$

Поскольку перенос не зависит от пути, то тензор кривизны группы Ли равен нулю. Однако дифференциальная связность

$$\Gamma_{\alpha\nu}^{\mu} = \psi_{\nu}^{\beta} \partial \theta_{\beta}^{\mu} / \partial a^{\alpha}$$

является несимметричной с тензором кручения

$$S_{\mu\nu}{}^\sigma = \Gamma_{[\mu\nu]}^\sigma = (1/2)C_{\beta\gamma}^\alpha \psi_\mu^\beta \psi_\nu^\gamma \theta_\alpha^\sigma$$

Символ $[\]$ означает антисимметризацию (с делением на 2).

Пусть $\mathbf{A}(0)$ — произвольный вектор в единице группы G , и $\mathbf{A}(a)$ — результат его параллельного переноса в точку a . Рассмотрим действие 1-параметрической подгруппы $a^\alpha(t)$ группы G , определяемой в соответствии с (1.3.14) уравнением геодезической линии,

$$\frac{da^\alpha}{dt} = A^\alpha(a^\beta), \quad A^\alpha(a^\beta) \frac{\partial x^i}{\partial a^\alpha} = \frac{dx^i}{dt} = \xi_\alpha^i(x^k) A^\alpha(0) \quad (1.3.15)$$

Решение уравнений (1.3.15) с использованием параметра t , построенное в виде ряда Тейлора в окрестности e , имеет вид экспоненциального отображения

$$x'^i = \exp(t A^\alpha(0) X_\alpha(x^k)) \cdot x^i \quad (1.3.16)$$

содержащего операторную экспоненту. Формула (1.3.16) позволяет восстановить, по крайней мере, окрестность единицы группы, если использовать, учитывая произвольность вектора $\mathbf{A}(0)$, координаты $t^\alpha = t A^\alpha(0)$, называемые каноническими.

Для линейных групп, когда $t^\alpha \xi_\alpha^i = a_j^i x^j$, отображение (1.3.16) сводится к действию матричной экспоненты $\mathbf{x}' = \exp \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$, где

$$\exp \mathbf{a} \equiv \mathbf{e} + \mathbf{a} + \dots + \mathbf{a}^n/n! + \dots \quad (1.3.17)$$

Рассмотрим также возможность инвариантного интегрирования на группе Ли G . Составим в точке e группы «элемент объема» $d\omega(0) = \delta a^1 \dots \delta a^r$. Переносим его параллельно в произвольную точку a с учетом, что при групповом преобразовании $\delta a^\alpha = \psi_\beta^\alpha(a) da^\beta$ [см. (1.3.4)], получим

$$d\omega(a) = d\omega(0) = \det(\psi_\beta^\alpha(a)) da^1 \dots da^r \quad (1.3.18)$$

Отметим, что на группе Ли можно также ввести симметричный тензор с компонентами $g_{\alpha\beta}(0) = -(1/2)C_{\nu\alpha}^\mu C_{\mu\beta}^\nu$. Для полупростых групп тензор g невырожден и может быть использован как метрический.

Остановимся на вопросе возможных канонических типов тензора структурных постоянных при числах параметров 2 и 3. Компоненты тензора $C(0)$ преобразуются по закону

$$C'_{\beta\gamma}{}^{\alpha} = l_{\lambda}^{\alpha} m_{\beta}^{\mu} m_{\gamma}^{\nu} C_{\mu\nu}^{\lambda} \quad (1.3.19)$$

где l и m — взаимно обратные матрицы.

При $r = 2$ тензор $C(0)$ имеет только две существенные компоненты C_{12}^{α} , $\alpha = 1, 2$, одна из которых всегда может быть сделана равной нулю, а другая, если она не равна нулю, заданным ненулевым числом. Итак, возможны только два случая:

- 1) $C_{12}^{\alpha} = 0$ — алгебра Ли коммутативна, и
- 2) $C_{12}^1 = 0$, $C_{12}^2 = 2$ — алгебра Ли разрешима. Соответственно имеем коммутативную и разрешимую группы Ли.

Примеры: группы матриц 1) $\begin{pmatrix} e^a & e^a b \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$ и 2) $\begin{pmatrix} e^a & e^a b \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}$.

В случае $r = 3$ с помощью тензора Леви-Чивита можно привести тензор $C(0)$ с учетом (1.3.11) к виду:

$$C_{\mu\nu}^{\beta} = \epsilon_{\mu\nu\alpha} d^{\alpha\beta} + \delta_{\mu}^{\beta} b_{\nu} - \delta_{\nu}^{\beta} b_{\mu} \quad d^{\alpha\beta} b_{\beta} = 0 \quad (1.3.20)$$

где d — симметричный тензор. Приведем тензор d к диагональному виду с числами $d_{\alpha} \in \{0, \pm 1\}$ на диагонали. Вектор b , как собственный, может быть отличен от нуля только при наличии хотя бы одного числа, например, $d_1 = 0$ (при этом $b_2 = b_3 = 0$). В результате получим следующую классификацию 3-мерных алгебр Ли, данную Бианки:

№	b_1	d_1	d_2	d_3	№	b_1	d_1	d_2	d_3
1	0	0	0	0	6	0	1	1	-1
2	0	1	0	0	7	1	0	0	0
3	0	1	1	0	8	1	0	1	0
4	0	1	-1	0	9	x	0	1	1
5	0	1	1	1	10	x	0	1	-1

Число $x > 0$ — параметр серии групп. В случае 1 алгебра Ли коммутативна, в случаях 2–4, 7–10 алгебры Ли разрешимы, в случаях 5, 6 — простые. Они соответствуют группам SO_3 и

SL_2 . Группа SL_2 также локально изоморфна группе типа группы Лоренца $O(2, 1)$, действующей в 3-мерном псевдоевклидовом пространстве с сигнатурой метрики $(++-)$.

Описание всех возможных алгебр Ли групп преобразований (конечно-параметрических) можно дать и в случаях малых размерностей n . При $n = 1$ и 2 эта задача была решена еще С. Ли, но до сих пор не исследован даже случай $n = 3$, представляющий интерес для механики сплошной среды.

Пусть $n = 1$. Тогда можно локально считать векторы $\xi_\alpha(x)$ (с одной компонентой) разложимыми в ряд Тейлора по степеням x . С помощью замены переменной x сделаем вектор $\xi_1 = 1$. Далее, используя линейные комбинации операторов X_α и их коммутаторы, получим только три возможных оператора, отвечающих векторам

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = x, \quad \xi_3 = x^2 \quad (1.3.21)$$

что соответствует группе проективных (дробно-линейных) преобразований прямой

$$x' = \frac{\epsilon^a(x+b)}{1-cx} \quad (1.3.22)$$

Рассмотрим подробнее группу SO_3 , элементы которой имеют вид (1.2.1). В качестве канонических координат можно выбрать декартовы компоненты вектора φk^a , где $\varphi \in [0, \pi]$, причем концы пар противоположных векторов вида $\pm \pi k$ отождествлены. Таким образом, группа SO_3 представляет собой шар радиуса π , с отождествленными диаметрально противоположными точками. Группа связна.

На этом множестве имеется два типа непрерывных кривых без самопересечений: пути, не претерпевающие диаметрального перехода и, следовательно, стягиваемые в точку, и пути с диаметральной скачком. Таким образом, группа SO_3 двусвязна.

Операторы алгебры Ли имеют вид $X_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}{}^\gamma x^\beta \partial / \partial x^\gamma$. Структурные постоянные равны $C_{\alpha\beta}^\gamma = -\epsilon_{\alpha\beta}{}^\gamma$. Алгебра Ли группы вращений изоморфна множеству Ω кососимметрических матриц 3-го порядка. Группа SL_3 может быть получена из Ω экспоненциальным отображением (1.3.17): $(l_j^i) = \exp(-\epsilon^i{}_{jl} k^l \cdot \varphi)$.

Вычисления дают

$$\psi_{\alpha}^{\beta} = k_{\alpha} k^{\beta} + (\delta_{\alpha}^{\beta} - k_{\alpha} k^{\beta}) \frac{\sin \varphi}{\varphi} + \epsilon_{\alpha}^{\beta l} k^l \frac{1 - \cos \varphi}{\varphi} \quad (1.3.23)$$

Элементарный объем (1.3.18) равен

$$d\omega = \frac{2(1 - \cos \varphi)}{\varphi^2} da^1 da^2 da^3 = 2(1 - \cos \varphi) d\varphi d\theta d\chi \quad (1.3.24)$$

в сферических координатах $\varphi, \theta \in [0, \pi], \chi \in [0, 2\pi]$. Вычисление полного объема дает $V = 8\pi^2$. Тензор $g_{\alpha\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta}$.

§ 1.4. Представления

Под представлением группы G будем понимать гомоморфное отображение G в группу $T(G)$ линейных операторов (или линейных преобразований), действующих в линейном пространстве L^n , такое, что

$$t(a_1)t(a_2) = t(a_1 a_2) \quad (1.4.1)$$

для всех пар элементов $a_1, a_2 \in G$. Тогда $t(e) = E$ и $t(a^{-1}) = t^{-1}(a)$ соответственно для отображения единицы и обратного элемента, E — единичный оператор.

Группы S и T линейных операторов эквивалентны (сопряжены в GL_n), если $S = AT A^{-1}$, где A — невырожденный линейный оператор. Покажем, что всякая конечная группа T линейных операторов эквивалентна некоторой подгруппе S ортогональной группы O_n . Пусть N — порядок группы T .

Используя операцию усреднения по группе $\langle \cdots \rangle_G$, определим оператор A , который задает эквивалентность групп T и S , соотношением

$$A^* A = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N t_k^* t_k \equiv \langle t^* t \rangle_T \quad (1.4.2)$$

символ $*$ означает транспонирование. $A^* A$ представляет собой матрицу положительно определенной квадратичной формы. Оператор A существует, так как матрицу $A^* A$ можно привести ортогональным преобразованием к диагональному виду, после чего извлечь квадратный корень.

Покажем, что элементы $s_k = At_k A^{-1} \in S$ являются ортогональными операторами. Действительно, с использованием (1.4.2) получим

$$s_k^* s_k = (At_k A^{-1})^* (At_k A^{-1}) = (A^{-1})^* t_k^* A^* At_k A^{-1} = E$$

Таким образом, всякое представление конечной группы эквивалентно ортогональному. Этот же результат остается справедливым и для представлений любой группы, на которой можно организовать инвариантный процесс усреднения (1.4.2), по крайней мере, для любой топологически компактной группы, имеющей конечный объем. Например, для компактной группы SO_3 с использованием элементарного объема (1.3.18).

Далее мы будем считать, что представление осуществляется ортогональными преобразованиями, оставляющими инвариантными в пространстве L^n заданную евклидову метрику $(x, y) = \delta_{ij} x^i y^j$.

Отметим, что здесь мы ограничились только вещественным случаем, хотя все рассуждения переносятся и на комплексный с заменой слов «ортогональное» преобразование на «унитарное» (в этом случае $*$ означает транспонирование с комплексным сопряжением), а «евклидова» метрика на «эрмитова». При этом всегда можно перейти к вещественным величинам, учитывая, что умножение комплексных матриц $a + ib$ эквивалентно произведению вещественных матриц вида $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Наиболее простое представление — тривиальное: $t(a) = 1$ для всех $a \in G$. Оно одномерно, а пространство L^1 является множеством инвариантов группы G . Другим примером служит так называемое регулярное представление конечной группы, связанное с перестановками элементов при групповом умножении (§ 1.1).

Важным вопросом теории представлений является разложение представления на неприводимые. Под этим понимается выделение из пространства L^n линейных инвариантных подпространств L_μ (размерностей n_μ) с приведением матриц операторов представления $T(G)$ к блочно ступенчатому виду. Например, группа треугольных матриц $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеет инвариантное подпространство $L^1 \ni \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Для групп ортогональных преобразований представления всегда вполне приводимы, что означает приведение ма-

триц преобразований к клеточно диагональному виду. Покажем, что, если $L^n = L_1 + L_2$ и L_1 инвариантно, то его ортогональное дополнение L_2 также инвариантно.

Действительно, пусть $x \in L_1$, $y \in L_2$, $a \in G$, тогда $t^{-1}(a)x \in L_1$ и $(t^{-1}(a)x, y) = (x, t(a)y) = 0$. Следовательно, $t(a)y \in L_2$ и L_2 инвариантно.

Говорят, что представление $T(G)$ индуцирует в пространствах L_1, L_2 представления $T_1(G)$ и $T_2(G)$ и является их суммой. Всякое приводимое ортогональное представление распадается на сумму неприводимых и может быть из них составлено.

Рассмотрим лемму Шура, доказываемую в курсе алгебры. Пусть $T_1(G), T_2(G)$ — два неприводимых представления группы G , действующие в L_1 и L_2 соответственно. Если линейный оператор $A : L_2 \rightarrow L_1$ удовлетворяет соотношению $T_1 A = A T_2$, то $A = \lambda E$, где либо число $\lambda = 0$, если представления неэквивалентны, либо $\lambda \neq 0$, если эти представления эквивалентны.

Введем скалярное произведение функций на группе G . Для конечной группы

$$(\varphi, \psi)_G = \langle \varphi(a) \psi(a) \rangle_{a \in G} \quad (1.4.3)$$

Покажем, что матричные элементы $t_j^i(a)$ двух неприводимых неэквивалентных ортогональных представлений ортогональны в смысле скалярного произведения (1.4.3).

Пусть $B : L_2 \rightarrow L_1$ — произвольный фиксированный оператор. Построим оператор

$$A = \langle t_1(a) B t_2(a^{-1}) \rangle_{a \in G} \quad (1.4.4)$$

Тогда

$$t_1(a) A = \langle t_1(ab) B t_2(b^{-1}) \rangle_{b \in G} = \langle t_1(c) B t_2(c^{-1}a) \rangle_{c \in G} = A t_2(a)$$

то есть $T_1 A = A T_2$, и в силу леммы Шура $A = 0$. Для матричных элементов это дает

$$\langle t_{(1)j}^i(a) B_p^j t_{(2)q}^p(a^{-1}) \rangle_{a \in G} = 0$$

В силу ортогональности матриц представлений

$$t_{(2)q}^p(a^{-1}) = t_{(2)n}^m(a) \delta^{pn} \delta_{qm}$$

Рассмотрим множество операторов

$$B_{p(r)}^{j(k)} = \delta^{jk} \delta_{pr} \quad (1.4.5)$$

где скобками отмечены номера операторов, без скобок — индексы. Тогда после сокращения на компоненты метрических тензоров пространств L_1 и L_2 окончательно получим

$$(t_{(1)j}^i, t_{(2)n}^m)_G = 0 \quad (1.4.6)$$

Кроме того, всякое ортогональное представление $T(G)$ в L^n порождает n^2 взаимно ортогональных функций $t_j^i(a)$ на G . Действительно, рассмотрим оператор A (1.4.4), где положим $t_1(a) = t_2(a) = t(a)$, при заданном операторе $B : L^n \rightarrow L^n$. Тогда $AT = T.A$, и по лемме Шура $A = \lambda(B)E$. Это дает

$$(t_j^i, t_n^m)_G B_p^j \delta^{pn} \delta_{qm} = \lambda \delta_q^i$$

Суммируя по i, q , в силу ортогональности матриц t получим $\lambda = B_i^i/n$. Выбор операторов (1.4.6) приводит к соотношениям

$$(t_j^i, t_q^p)_G = \frac{1}{n} \delta^{ip} \delta_{jq} \quad (1.4.7)$$

Развитый анализ ортогональных функций на группе G позволяет определять представления группы G , используя только скалярные функции, называемые характерами, $\chi(a) = t_i^i(a)$, $a \in G$.

Перечислим свойства характеров:

- 1) характеры эквивалентных представлений совпадают;
- 2) характеры неприводимых неэквивалентных представлений ортогональны между собой, и, следовательно, неприводимые представления с одинаковыми характерами эквивалентны;
- 3) для всякого неприводимого представления $(\chi, \chi)_G = 1$, и, следовательно,

$$(\chi_\mu, \chi_\nu)_G = \delta_{\mu\nu}$$

для всевозможных неприводимых представлений;

- 4) характер приводимого представления $T(G)$ равен сумме характеров всех неприводимых представлений, содержащихся в $T(G)$,

$$\chi(a) = \sum_{\nu} m_{\nu} \chi_{\nu}(a)$$

5) в силу ортогональности характеров неприводимых представлений

$$m_\nu = (\chi, \chi_\nu)_G$$

6) критерий приводимости представления $T(G)$ имеет вид

$$(\chi, \chi)_G = \sum_\nu m_\nu^2 > 1$$

7) у сопряженных элементов группы G значения характеров равны, и, более того, они равны характеру соответствующего канонического вида операторов, что позволяет легко вычислять характеры;

8) тривиальное представление имеет $\chi_0(a) = 1$, что позволяет определять число линейно независимых инвариантных подпространств в пространстве любого приводимого представления

$$m_0 = (\chi, 1)_G \quad (1.4.8)$$

просто усредняя характер представления $T(G)$ по группе;

9) для регулярного представления конечной группы $\chi(e) = N$, $\chi(a) = 0$, $a \neq e$, поэтому кратность каждого из неприводимых представлений, с которой оно входит в регулярное, равна размерности пространства L_ν , в котором оно действует,

$$m_\nu = \frac{1}{N} \chi(e) \chi_\nu(e) = n_\nu, \quad \sum_\nu m_\nu^2 = N$$

Таким образом, регулярное представление содержит все неприводимые представления конечной группы, что может быть использовано для их исследования. Для групп Ли регулярное представление $T(G)$ определяется как представление сдвигов на группе в пространстве скалярных функций

$$F(b) \rightarrow t(a)F(b) = F(ab) = F_a(b), \quad a, b \in G$$

Все неприводимые представления компактных групп конечномерны и содержатся в регулярном.

Введем понятие тензорного произведения представлений. Пусть представления $T_1(G)$, $T_2(G)$ группы G действуют в пространствах L_1 , L_2 с базисами $e_1, \dots, e_{n_1}$ и $h_1, \dots, h_{n_2}$. Рассмотрим линейное пространство формальных пар $xu \in L$ элементов $x \in L_1$ и $u \in L_2$ размерности $n_1 n_2$, линейность которого

согласована с линейностью пространств L_1, L_2 , то есть имеет место отождествление вида

$$(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2)(\gamma \mathbf{y}_1 + \delta \mathbf{y}_2) = \alpha \gamma \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 + \beta \gamma \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_1 + \alpha \delta \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_2 + \beta \delta \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2 \quad (1.4.9)$$

Пространство $L = L_1 \otimes L_2$ называется тензорным произведением пространств L_1, L_2 . Его базис состоит из пар $\mathbf{e}_i \mathbf{h}_j$. Порядок умножения существенен.

Рассмотрим преобразования базисных векторов исходных пространств $t_1(a)\mathbf{e}_i = t_{(1)i}^j(a)\mathbf{e}_j$, $t_2(a)\mathbf{h}_p = t_{(2)p}^q(a)\mathbf{h}_q$. Тогда, используя свойство (1.4.9), получим

$$t(a)\mathbf{e}_i \mathbf{h}_p = t_{(1)i}^j(a)t_{(2)p}^q(a)\mathbf{e}_j \mathbf{h}_q \quad (1.4.10)$$

Таким образом, матричные элементы тензорного произведения $T(G) = T_1(G) \otimes T_2(G)$ получаются последовательным перемножением каждого матричного элемента $T_1(G)$ на все матричные элементы $T_2(G)$. При этом характеры представлений перемножаются.

Пусть $GL_n^{\otimes r}$ — r -я тензорная степень группы GL_n . По определению, эти преобразования действуют в пространстве «контравариантных» тензоров ранга r с размерностью n^r . При замене базиса $l_j^i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j'$ компоненты тензоров $\mathbf{T} = T^{i_1 \dots i_r} \mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_r}$ преобразуются противоположным образом.

«Ковариантные» тензоры различных рангов вводятся как тензорные степени пространства линейных скалярных форм $l_i x^i$, $\mathbf{x} \in L^n$, с базисом $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$. Также можно ввести и тензоры смешанной природы, например вида $\mathbf{T} = T_j^{i_1 i_2} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \mathbf{e}^j$, для которых определяется операция свертывания — суммирование по паре (одному верхнему и одному нижнему) индексов типа $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_{(1)} = T_j^{ij} \mathbf{e}_i = T_{(1)}^i \mathbf{e}_i$.

Компоненты тензора $\mathbf{T} = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} \mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_r} \mathbf{e}^{j_1} \dots \mathbf{e}^{j_r}$ в фиксированном базисе при действии группы $G \subset GL_n$ преобразуются как

$$T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} = a_{k_1}^{i_1} \dots a_{k_r}^{i_r} b_{j_1}^{k_1} \dots b_{j_r}^{k_r} T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_r}, \quad b = a^{-1} \in G \quad (1.4.11)$$

Поскольку порядок следования индексов в тензорной алгебре оказывается существенным, то важную роль играют группы перестановок индексов одинакового вида $P \subseteq S_r \times S_s$ (§ 1.1),

с действием которых связаны вопросы приводимости тензорных пространств путем операций симметризации или антисимметризации. Так, например, пространство тензоров второго ранга разбивается на прямую сумму пространств симметричных и антисимметричных тензоров

$$T^{ij} = T^{(ij)} + T^{[ij]}$$

В данном случае мы имеем два представления группы S_2 (1.1.6) операторами вида

$$p_0 \rightarrow \delta_i^k \delta_j^l, \quad p_1 \rightarrow \delta_i^l \delta_j^k \quad \text{или} \quad p_1 \rightarrow -\delta_i^l \delta_j^k \quad (1.4.12)$$

инвариантно действующих в пространствах симметричных и антисимметричных тензоров.

Характеры представлений (1.4.12) группы перестановок (суммирование по парам индексов k, i и l, j) принимают значения соответственно $\{n^2, \pm n\}$. Рассмотрим одномерные неприводимые представления группы S_2 со значениями $\{1, \pm 1\}$. Тогда с помощью 5-го свойства характеров можно подсчитать, например, размерности пространств симметричных и антисимметричных тензоров $n_s = \frac{n^2+n}{2}$, $n_a = \frac{n^2-n}{2}$.

Аналогичными операторами описываются перестановки индексов и у тензоров высших рангов. Тензоры, отличающиеся лишь перестановкой индексов, называются изомерами. Так как тензор с компонентами вида δ_j^i инвариантен относительно группы GL_n , то действие операторов перестановок коммутирует с преобразованиями из GL_n .

Во многих приложениях, связанных с представлениями ортогональных групп O_n , большую роль играет так называемое спинорное представление. Ограничимся изучением спинорного представления группы SO_3 (1.2.1).

Рассмотрим четыре эрмитовы матрицы второго порядка (матрицы Паули)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.4.13)$$

и $\pi = e$, где e — единичная матрица, и присоединим к ним также 2-мерный тензор Леви-Чивита $\epsilon_{\alpha\beta}$. Потребуем инвариантность совокупности этих геометрических объектов относительно преобразований, соответствующих следующему строению индексов: $\sigma_{i,\alpha\beta}$, $\pi_{\alpha\beta}$, $i = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta = 1, 2$, где латинский

индекс — ковекторный относительно группы SO_3 , по греческим индексам, также ковекторным, преобразования линейные комплексные, причем черта отвечает комплексно сопряженному преобразованию,

$$(l^{-1})^i_k \sigma_i = a^* \sigma_k a, \quad \pi = a^* \pi a, \quad \det a = 1 \quad (1.4.14)$$

В результате получим отображение группы унитарных унимодулярных преобразований $SU_2 \ni a$ в группу вращений $SO_3 \ni l$ вида

$$(a^a_\beta) = \pm (\cos(\varphi/2) e + i \sin(\varphi/2) k^l \sigma_l) = \begin{pmatrix} p & q \\ -\bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix} \quad (1.4.15)$$

Здесь $e = (\delta^a_\beta)$ и $\sigma_{i,\beta}^a = \sigma_{i,\bar{\gamma}\beta} \pi^{\bar{\gamma}a}$. Напомним, что k — направляющий вектор оси вращения на угол φ .

В силу соотношения $\det a = |p|^2 + |q|^2 = 1$ группа SU_2 с вещественной точки зрения представляет собой трехмерную сферу S^3 , связна и односвязна. Она является универсальной (односвязной) накрывающей группы SO_3 с центром $\{\pm e\}$.

Группа действует в линейном комплексном пространстве C^2 , элементы которого называются спинорами. Различные тензорные степени SU_2 (с учетом комплексного сопряжения) приводят к спин-тензорным величинам. Используя матрицы Паули, можно, например, поставить в соответствие каждому спинору ψ^a два вещественных вектора (флажок)

$$v_k^{(1)} + i v_k^{(2)} = \sigma_k^a \epsilon_{a\gamma} v^\alpha v^{\bar{\gamma}}$$

Эти векторы ортогональны и равны по величине. Обратное отображение возможно только с точностью до знака.

§ 1.5. Инварианты

Рассмотрим действие группы преобразований $G \ni a$ на множестве функций многих переменных $x \in X$: $t(a)F(x) = F(ax) = F_a(x)$. Функция $I(x)$ называется инвариантной относительно группы G , если для всех a и x

$$I(ax) = I(x) \quad (1.5.1)$$

Таким образом, инвариант $I(x)$ постоянен на орбитах группы G .

Это определение может быть использовано уже для определения инвариантности геометрических объектов самой различной природы, если известен только закон преобразования величин x , среди которых могут быть независимые и зависимые переменные, их производные, базисные векторы и все тому подобное. Более сложный подход требуется при определении инвариантности систем уравнений $F^A(x^i) = 0$, $A = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$, относительно преобразований, переводящих решение в решение. В этом случае пишут

$$F^A((ax)^i) \Big|_{F(x)=0} = 0 \quad (1.5.2)$$

Условие инвариантности многообразия $F^A(x^i) = 0$, заданного конечными (не дифференциальными) уравнениями, сводится к представлению уравнений многообразия в виде

$$F^A(I_1, \dots, I_k) = 0 \quad (1.5.3)$$

где $I_1, \dots, I_k$ — функционально независимые инварианты группы. Инвариантное многообразие состоит из орбит группы.

Приведем несколько примеров. Функция $I(x^2 + y^2)$, очевидно, инвариантна относительно преобразований группы вращений O_2 . Группа треугольных матриц $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ оставляет инвариантным вектор e_1 . Поле метрического тензора L^3

$$g = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$$

инвариантно относительно группы (1.1.5).

Важными вопросами теории симметрии являются методы определения инвариантных тензоров для данной группы $G \subset GL_n$, нахождение группы инвариантности данной системы тензоров $G\{\mathbf{T}\}$ и построения всех ее тензорных инвариантов. Группы инвариантности тензоров относятся к линейным алгебраическим группам, которые определяются решением систем алгебраических уравнений. Они всегда имеют конечное число связных компонент [5].

Инвариантность, например, тензора $\mathbf{T} = T^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \dots e_{i_r}$, как формальной функции базисных векторов, преобразующихся как $e^{i_1} = a_j^{i_1} e^j$, означает, что для его компонент должны выполняться равенства

$$b_{j_1}^{i_1} \dots b_{j_r}^{i_r} T^{j_1 \dots j_r} = T^{i_1 \dots i_r}, \quad b = a^{-1} \in G \quad (1.5.4)$$

Отметим, что в силу одновременной принадлежности $a, b \in G$ это определение приводит к тому же результату, что и требование инвариантности самих компонент тензора при его преобразовании в заданном базисе (1.4.11).

Группой инвариантности системы тензоров называется максимальное множество всех преобразований $G\{\mathbf{T}\}$, которые оставляют инвариантным каждый из этих тензоров. Оно является группой. Например, группа O_n задается тензором типа $\mathbf{g} = \mathbf{e}_1^2 + \dots + \mathbf{e}_n^2$, метрическим для L_n , группа SL_n — полностью антисимметричным тензором Леви-Чивита

$$\epsilon = n! \mathbf{e}_{[1} \dots \mathbf{e}_{n]}$$

(антисимметризация с делением на $n!$), а группа SO_n — парой тензоров $\mathbf{g}, \epsilon$.

Единичный тензор $\mathbf{E} = (\delta_j^i)$ всегда инвариантен относительно всех преобразований группы GL_n и, таким образом, не выделяет никакой ее существенной подгруппы. Его тензорные степени $\delta_j^i \delta_l^k, \delta_j^i \delta_l^k \delta_q^p, \dots$ и их изомеры также обладают этим свойством, что позволяет осуществлять с тензорами операции, инвариантные относительно полной линейной группы. В частности, проводить перестановки индексов или образовывать тензоры с обратным законом преобразования.

Инвариантность тензора относительно группы G означает существование тривиального представления $G \rightarrow 1$ среди всех неприводимых представлений, входящих в отображение $G \rightarrow GL_n^{\otimes r}$. Число линейно независимых инвариантных тензоров ранга r согласно (1.4.8) равно

$$m_0(r) = (\chi^r, 1)_G = \langle \chi^r \rangle_G \quad (1.5.5)$$

где χ — характер «векторного» представления, а угловые скобки означают операцию усреднения по группе.

В качестве примеров вычислим эти числа для групп ∞ , $\infty : 2$, ∞/∞ (1.2.6), действующих в L^3 и имеющих общую формулу для характера всех элементов $\chi = 1 + 2 \cos \varphi$, для малых r

r	1	2	3	4	5	6
∞	1	3	7	19	51	141
$\infty : 2$	0	2	3	10	25	71
∞/∞	0	1	1	3	6	15

(1.5.6)

Если тензор обладает дополнительной симметрией или антисимметрией, связанной, например, с действиями какой-либо группы перестановок P , то усреднение необходимо произвести по прямому произведению групп $P \times G$. Например, если мы хотим найти число симметричных тензоров второго ранга, определенных над L^3 , инвариантных относительно группы $SO_3 \ni a = (a_q^p)$, то характер определяется с учетом действия группы перестановок двух индексов S_2 (1.4.12), как

$$\chi(p_o a) = \delta_i^k \delta_j^l a_k^i a_l^j = (a_k^k)^2 = \chi^2(a) = (1 + 2 \cos \varphi)^2,$$

$$\chi(p_1 a) = \delta_i^l \delta_j^k a_k^i a_l^j = a_k^l a_l^k = \chi(a^2) = 1 + 2 \cos 2\varphi$$

Таким образом, с использованием элемента объема (1.3.24)

$$m_s = \frac{1}{2} \langle \chi^2(a) + \chi(a^2) \rangle_{a \in SO_3} = 1 \quad (1.5.7)$$

Этот инвариант представляет собой тензор g . Для антисимметричных тензоров второго ранга второе слагаемое в (1.5.7) войдет со знаком минус, и мы получим $m_a = 0$.

Если удастся «угадать» нужное число инвариантных тензоров и проверить их линейную независимость, то подсчетов числа m_0 оказывается достаточно для построения инвариантного тензора общего вида. Однако, существуют и более универсальные методы.

Для конечных и компактных групп одним из средств получения инвариантов является метод усреднения по группе. Пусть $F(x)$ — произвольная функция. Тогда функция

$$F_{inv}(x) = \langle F(ax) \rangle_{a \in G} \quad (1.5.8)$$

определенная с помощью усреднения по группе преобразований будет обязательно инвариантной. Ясно, что усредняя базисные функции, таким способом можно получить любую инвариантную функцию. Усреднение по группе G можно проводить в два или несколько этапов, сначала усредняя по какой-нибудь простой ее подгруппе H , а затем по множеству левых смежных классов G/H .

Для некомпактных групп, когда процесс усреднения не определен, существуют свои, правда, менее универсальные подходы. Хорошо известен унитарный прием Вейля. Пусть

требуется найти аналитические функции $F(x)$, инвариантные относительно группы Ли G , комплексное расширение которой имеет компактную вещественную форму K . Это означает, что существует аналитическое продолжение, в смысле теории функций комплексного переменного, элементов группы, превращающей ее в компактную, локально изоморфную исходной.

В качестве примера можно указать расширение группы $GL_1(R) \ni r$ до $GL_1(C) \ni c$ путем замены вещественного параметра r на комплексный c и переход к унитарной подгруппе $U_1 \ni c : |c| = 1$, изоморфной SO_2 , по которой уже можно проводить усреднение. Аналогично, группа GL_n допускает аналитическое продолжение в группу унитарных матриц U_n (оставляющих инвариантной эрмитову форму $(\delta_{\bar{\alpha}\beta})$), а группа типа $SO(m, n - m)$, например группа Лоренца $SO(1, n - 1)$, — в ортогональную группу SO_n .

Кроме того, существуют специальные приемы, позволяющие находить инварианты групп, представленных треугольными, в частности, диагональными матрицами. В последнем случае речь идет, по существу, о применении широко известной в механике π -теоремы о виде однородных функций со степенным законом преобразования значений. Ниже мы отдельно коснемся метода, связанного с применением операторов бесконечно малых преобразований для определения инвариантов связных групп Ли.

Покажем теперь как строятся тензоры, инвариантные относительно группы G , допускающей процесс усреднения (достаточно и применимости унитарного приема). Рассмотрим произвольный тензор заданного ранга и строения индексов, например $T = T^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \dots e_{i_r}$. Преобразуя векторы базиса, составим функцию от $F(a_j^i e_i)$ и проведем ее усреднение по группе G :

$$T_{inv} = T^{i_1 \dots i_r} e_{j_1} \dots e_{j_r} \left\langle a_{i_1}^{j_1} \dots a_{i_r}^{j_r} \right\rangle_{a \in G} \quad (1.5.9)$$

Последовательно осредняя все базисные тензоры, мы получим все инвариантные тензоры данного строения.

Рассмотрим группы преобразований ∞ , $\infty : 2$ и $\infty/\infty = SO_3$, для которых мы подсчитывали числа инвариантов (1.5.6). Группа ∞ имеет двумерную клетку (1.1.3) и единицу на диагонали, остальные элементы равны нулю. Группа $\infty : 2$ получается из нее добавлением диагональной матрицы

$a = \text{diag}(1, -1, -1)$ и ее произведений.

Осреднение векторов для ∞ дает $\langle e'_i \rangle = \delta_i^3 e_3$. Действуя далее на вектор e_3 элементом a группы $\infty : 2$ и осредняя по фактор-группе $\infty : 2/\infty = 2$, получим только нулевой вектор, и, следовательно, то же для группы SO_3 .

Для тензоров второго ранга в соответствии с (1.5.6) имеем, опуская повторения, следующие нетривиальные результаты:

$$\infty \quad \langle e_1'^2 \rangle = \frac{e_1^2 + e_2^2}{2}, \quad \langle e_1' e_2' \rangle = \frac{e_1 e_2 - e_2 e_1}{2}, \quad \langle e_3'^2 \rangle = e_3^2,$$

$$\infty : 2 \quad \langle e_1'^2 \rangle = \frac{e_1^2 + e_2^2}{2}, \quad \langle e_3'^2 \rangle = e_3^2$$

$$\infty/\infty \quad \langle e_1'^2 \rangle = \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{3}$$

В последнем случае достаточно провести усреднение, например, по группе симметрии тетраэдра $3/2$, проверив, что полученный тензор инвариантен относительно группы SO_3 .

Тензорной функцией $\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_N)$ называется зависимость компонент тензора $\mathbf{T}$ от компонент тензоров $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_N$, пробегающих некоторое множество значений, инвариантная относительно произвольного выбора базиса $e'_j = a_j^i e_i$. Это означает, что для любого набора функций вида

$$T^{i_1 \dots i_r} = F^{i_1 \dots i_r}(T_1^{j_1 \dots j_{r_1}}, \dots, T_N^{j_1 \dots j_{r_N}}) \quad (1.5.10)$$

где $r_1, \dots, r_N$ — ранги тензоров $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_N$ соответственно выполняются соотношения

$$T^{i_1 \dots i_r} = F^{i_1 \dots i_r}(T_1'^{j_1 \dots j_{r_1}}, \dots, T_N'^{j_1 \dots j_{r_N}}) \quad (1.5.11)$$

для любого преобразования $a \in GL_n$.

Таким образом, мы имеем пример инвариантности системы функций типа (1.5.3) как многообразия в пространстве переменных $\mathbf{T}, \mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_N$. В принципе, в случае аналитической зависимости (1.5.10) общий вид тензорной функции можно было бы получить, усредняя соотношение (1.5.11), после аналитического продолжения, по группе U_n . Однако, этот путь сложен. В конкретных случаях лучше использовать свойства инвариантности системы аргументов.

Зафиксируем в данном базисе значения аргументов функции $F(\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_N)$ в общем положении и вычислим группу инвариантности этих тензоров $G\{\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_N\}$. Тогда в силу (1.5.11) этой же группой симметрии будут обладать и соответствующие значения функции как тензора ранга r . Составим, если это возможно, необходимое число конкретных линейно независимых тензоров ранга r из тензоров $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_N$. Суммируя полученные тензоры со скалярными коэффициентами — функциями скаляров, составленных из аргументов исходной тензорной функции, получим, по крайней мере, ее общий вид.

Продemonстрируем этот подход на типичном примере зависимости $y = f(\mathbf{x}, \mathbf{g})$ вектора y от вектора $\mathbf{x}$ и метрического тензора $\mathbf{g}$. Группа $G\{\mathbf{x}, \mathbf{g}\} = SO_{n-1}$. Общий вид ее векторных инвариантов есть $\alpha \mathbf{x}$. Все скаляры, составленные из $\mathbf{x}$ и $\mathbf{g}$, равны $\alpha(|\mathbf{x}|)$. Таким образом, общий вид функции есть $y = \alpha(|\mathbf{x}|)\mathbf{x}$.

Другим важным примером, связанным с уравнениями состояния в механике сплошной среды, является зависимость двух тензоров второго ранга со смешанными индексами $\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{S})$ — матричная функция. В случае аналитической зависимости можно написать ряд с постоянными коэффициентами

$$T_j^i = F_j^i(S_k^k) = a_0 \delta_j^i + a_1 S_j^i + a_2 S_k^i S_j^k + \dots \quad (1.5.12)$$

который, очевидно, инвариантен относительно группы GL_n .

Используя теорему Гамильтона-Кэли о том, что всякая матрица является корнем своего характеристического многочлена $\det(S_j^i - \lambda \delta_j^i)$, можно всегда ограничиться в ряду (1.5.12) только первыми n членами, собрав оставшуюся часть в скалярные коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, уже как функции коэффициентов характеристического многочлена (или, при желании, собственных чисел λ_i), составленных из компонент тензора $\mathbf{S}$ путем сверток.

Отметим, что в случае общего положения тензор $\mathbf{S}$ инвариантен относительно n -параметрической группы диагональных матриц, и описанная конструкция следует из инвариантности значений функции $\mathbf{T}(\mathbf{S})$ относительно этой же группы в соответствие с изложенным выше методом.

Тот же результат справедлив и для ряда, содержащего обратные матрицы $\mathbf{S}^{-1}$. Можно проверить, используя тензор Леви-Чивита, что операция перехода к обратной матрице также инвариантна относительно группы GL_n .

Распространим определение группы инвариантности системы тензоров на понятие группы симметрии тензорных полей. Пусть множество X , на котором действует группа преобразований G представляет собой дифференцируемое многообразие M^n , в каждой точке которого имеется линейное касательное пространство L^n . Например, контравариантный тензор $T(x)$ ранга r в точке $x \in M^n$ определяется как элемент тензорного произведения $(L^n)^{\otimes r}$. Совокупность тензоров

$$T(x) = T^{i_1 \dots i_r}(x^k) e_{i_1} \dots e_{i_r}$$

представляет собой тензорное поле.

При преобразованиях голономных систем координат $x'^i = f^i(x^k, a)$, $a \in G$, многообразия M^n базисные векторы в данной точке преобразуются как $e'_j = \partial x^i / \partial x'^j e_i$. Рассматривая тензорное поле как формальную функцию от x^k и e_i , инвариантную относительно группы G , можно написать соотношение инвариантности для компонент поля

$$\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x'^{i_r}}{\partial x^{j_r}} T^{j_1 \dots j_r}(x^k) = T^{i_1 \dots i_r}(x'^k(x^k)) \quad (1.5.13)$$

Это условие означает, что в данной системе координат (x^k) при преобразовании точек многообразия $x \rightarrow x'$ «увлеченное» этим преобразованием значение тензорного поля из точки x , стоящее в левой части (1.5.13), совпадает со значением исходного поля в точке x' . Геометрическое понятие увлечения является синонимом «вмороженности» в механике сплошной среды, то есть сохранения лагранжевых компонент поля при движении среды.

Например, центральное поле силы тяжести $g = -\gamma m r / |r|^3$, где r — радиус-вектор, инвариантно относительно группы O_3 .

Если преобразования группы оставляют на месте данную точку $x_0 = x'(x_0)$, то условие инвариантности тензорного поля $T(x)$ в точке x_0 совпадают с рассмотренной выше инвариантностью тензора $T(x_0)$, определенного в этой точке. Эта ситуация типична для линейных однородных преобразований $x'^i = a^i_j x^j$ в точке $x = 0$.

Основываясь на понятии тензорной функции укажем простой способ построения тензорных полей в линейном пространстве L^n (с тривиальной аффинной связностью), инвариантных

относительно группы линейных преобразований $G: x'^i = a_j^i x^j$, оставляющих на месте начало координат O . Пусть группа G есть группа симметрии системы тензоров $T_1, \dots, T_N$, заданных в точке O и $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ — радиус-вектор произвольной точки P .

Составим в точке O тензорную функцию $T = F(\mathbf{r}, T_1, \dots, T_N)$, компоненты которой, очевидно, как функции компонент радиуса-вектора $\mathbf{r}$ удовлетворяют необходимым условиям симметрии. Остается перенести параллельно (без изменения компонент в прямолинейной системе координат) тензор T в точку P . Таким образом, например, строится рассмотренное выше центральное поле с точностью до умножения на скаляр $f(|\mathbf{r}|)$.

С группами Ли связан локальный подход к определению инвариантных полей. Рассмотрим однопараметрическую группу Ли G преобразований переменных $x^k \rightarrow x'^i(x^k, a)$. Оператор бесконечно малого преобразования (1.3.9) может быть использован для определения инвариантов группы G в классе гладких функций $I(x^i)$. Разлагая малое преобразование функции $I((ax)^i) - I(x^i)$ в ряд Тейлора и приравнявая коэффициент при a нулю, получим необходимое условие инвариантности

$$X I = \xi^i \frac{\partial I}{\partial x^i} = 0 \quad (1.5.14)$$

Всякое решение этого уравнения определяет инвариант группы. Действительно, пусть $I(x)$ — решение уравнения (1.5.14). Подставляя в (1.5.14) вместо x^i $x'^i = f^i(x, a)$ и используя уравнение группы (1.3.6) при каноническом параметре a , получим

$$0 = \xi^i(x') \frac{\partial I(x')}{\partial x'^i} = \frac{dx'^i}{da} \frac{\partial I(x')}{\partial x'^i} = \frac{\partial I(f(x, a))}{\partial a}$$

Таким образом, функция $I(f(x, a))$ не зависит от a . Полагая $a = 0$, имеем соотношение инвариантности $I(f(x, a)) = I(x)$.

Для r -параметрической группы соотношение (1.5.14) справедливо для всех инфинитезимальных операторов группы X_α .

Иногда мы имеем дело с относительной инвариантностью функции $y = F(x^i)$ с заданным законом $y \rightarrow t(a^\alpha)y$ дополнительного преобразования значений (это сводится к определе-

нию инвариантного многообразия (1.5.3) в пространстве переменных y, x^i). Вводя коэффициенты $\eta_\alpha = (\partial t(a)/\partial a^\alpha)_{a=0}$, получим

$$X_\alpha F - \eta_\alpha F = 0 \quad (1.5.15)$$

В частности, в π -теореме значения функции $y = F(x^1, \dots, x^n)$, описывающей инвариантную относительно выбора единиц измерений зависимость, и значения ее аргументов x_i преобразуются как

$$y' = \exp(\eta_1 a^1 + \dots + \eta_r a^r) y, \quad x'^i = \exp(\beta_{i1} a^1 + \dots + \beta_{ir} a^r) x^i$$

где r — число независимых единиц измерений, что отвечает коммутативной группе изменений масштабов. В результате получаем систему уравнений

$$\sum_{i=1}^n \beta_{i\alpha} x^i \frac{\partial F}{\partial x^i} - \eta_\alpha F = 0$$

определяющую функцию F .

В случае инвариантности тензорного поля $\mathbf{T}(x)$ типа (1.5.13), используя векторные поля $\xi_\alpha^i(x^l)$, получим

$$\begin{aligned} (L_\alpha \mathbf{T}(x))^{i_1 \dots i_r} &\equiv \\ &\equiv \xi_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x^k} T^{i_1 \dots i_r} - \frac{\partial \xi_\alpha^{i_1}}{\partial x^j} T^{j i_2 \dots i_r} - \dots - \frac{\partial \xi_\alpha^{i_r}}{\partial x^j} T^{i_1 \dots i_{r-1} j} = 0 \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

Операторы вида $L_\alpha \mathbf{T}(x)$ называются производными Ли. В случае тензорного поля со смешанными индексами, например, $\mathbf{T}(x) = T_j^i e_i e^j$ производная Ли имеет вид

$$(L_\alpha \mathbf{T}(x))_j^i = \xi_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x^k} T_j^i - \frac{\partial \xi_\alpha^i}{\partial x^k} T_j^k + \frac{\partial \xi_\alpha^k}{\partial x^j} T_k^i \quad (1.5.17)$$

и равна нулю для инвариантного поля.

Для линейных однородных преобразований $\xi_\alpha^i(0) = 0$ и уравнения типа (1.5.16) (без первого члена) определяют инвариантный тензор в точке 0.

Найдя множество инвариантов связной компоненты единицы G_0 произвольной группы Ли G , далее можно исследовать действие дискретной фактор-группы G/G_0 на этом множестве. В частности, в случае алгебраических групп, для которых G/G_0 конечна, для определения инвариантов G , можно использовать метод усреднения.

§ 1.6. Дифференциальные уравнения

Обратимся специально к исследованию инвариантности дифференциальных уравнений, используя определение (1.5.2). Рассмотрим отображение пространств $\varphi: R^n \rightarrow R^m$. Таким отображением, например, может быть векторное поле $v(x)$ на многообразии, локально изоморфном R^n . Множество всех бесконечно дифференцируемых отображений образует, по определению, расслоенное пространство R^{n+m} с базой R^n , слоем R^m и сечением f класса C^∞ .

Отображения φ и ψ r -эквивалентны в точке $x \in R^n$, если равны все их частные производные порядка $\leq r$. Струей порядка r называется класс r -эквивалентности в R^{n+m} . Координаты струи есть частные производные порядка $\leq r$ соответствующих отображений. Множество значений струи в данной точке порядка r образует некоторое пространство R^k . Таким образом, возникает отображение $R^n \rightarrow R^k$ и, соответственно, расслоенное пространство $J_r^{n,m}$. Для $r = 1$ получаем пространство размерности $n + m + nm$, для $r = 2$ — размерности $n + m + nm + \frac{mn(n+1)}{2}$ и так далее.

Из струй составляются дифференциально-геометрические объекты, учитывающие закон преобразования, индуцированный преобразованиями базы R^n . Более общими преобразованиями являются преобразования пространства R^{n+m} или самих струй различных порядков. Ниже мы ограничимся только преобразованиями, переводящими R^{n+m} в себя. Такие преобразования называют точечными.

Рассмотрим действие однопараметрической группы Ли G на расслоенном пространстве R^{n+m}

$$x'^i = f^i(x, y, a), \quad y'^A = g^A(x, y, a) \quad (1.6.1)$$

которое определяется уравнениями

$$\frac{df^i}{da} = \xi^i(f, g), \quad \frac{dg^A}{da} = \eta^A(f, g) \quad (1.6.2)$$

с начальными условиями $f^i(x, y, 0) = x^i$, $g^A(x, y, 0) = y^A$ $i = 1, \dots, n$; $A = 1, \dots, m$.

Зная функции $\xi^i(f, g)$, $\eta^A(f, g)$, найдем действие группы G на $J_1^{n,m}$. Пусть $y^A = \varphi^A(x)$, тогда, используя соотношения

(1.6.1), для преобразованной функции $y'^A = \varphi'^A(x', a)$ получим

$$g^A(x, y, a) = \varphi'^A(f(x, y, a), a) \quad (1.6.3)$$

Обозначим $p_i^A = \partial \varphi^A / \partial x^i$, $p_{ij}^A = \partial^2 \varphi^A / \partial x^i \partial x^j$, ... Дифференцируя соотношение (1.6.3) по x^i , найдем вид преобразования производных первого порядка

$$g_{,i}^A + p_i^B g_{,B}^A = p_j'^A (f_{,i}^j + p_i^B f_{,B}^j) \quad (1.6.4)$$

где запятыми, для краткости, обозначены соответствующие производные.

Введем оператор, действующий на пространстве всех струй $J_{\infty}^{n,m}$,

$$D_i = \partial / \partial x^i + p_i^A \partial / \partial y^A + p_{ij}^A \partial / \partial p_j^A + \dots$$

Дифференцируя (1.6.4) по параметру группы a и полагая $a = 0$, будем иметь вектор бесконечно малого преобразования производных

$$\eta_i^A \equiv \left. \frac{\partial p_j'^A(x, u, p, a)}{\partial a} \right|_{a=0} = D_i \eta^A - p_j^A D_i \xi^j \quad (1.6.5)$$

Используя рекуррентную формулу

$$\eta_{i_1 \dots i_r}^A = D_{i_1} \eta_{i_2 \dots i_r}^A - p_{ji_2 \dots i_r}^A D_{i_1} \xi^j$$

можно вычислить также векторы бесконечно малого преобразования любых производных. Для вторых производных имеем

$$\eta_{ij}^A = D_i D_j \eta^A - P_{kj}^A D_i \xi^k - P_{ki}^A D_j \xi^k - P_k^A D_i D_j \xi^k \quad (1.6.6)$$

и так далее.

В случае r -параметрической группы Ли соответственно будем иметь r векторов с компонентами $\xi_{(\alpha)}^i$, $\eta_{(\alpha)}^A$, $\eta_{(\alpha)i}^A$, ...

Введем операторы Ли

$$X_{\alpha} = \xi_{(\alpha)}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta_{(\alpha)}^A \frac{\partial}{\partial y^A} + \eta_{(\alpha)i}^A \frac{\partial}{\partial p_i^A} + \dots \quad (1.6.7)$$

Для алгебры Ли группы точечных преобразований достаточно первых двух членов, более «длинные» операторы называется продолженными порядка r в зависимости от порядка пространства струй $J_r^{n,m}$, в котором они действуют. Ниже мы используем необходимые нам отрезки операторов X_α , порядок которых следует из записи.

Используя эти операторы, можно определять при заданной группе G вид так называемых дифференциальных инвариантов $I(x, y, p)$, решая уравнение

$$X_\alpha I = 0 \quad (1.6.8)$$

Дифференциальные инварианты играют большую роль в геометрии многообразий. Например, на римановых многообразиях определение тензора кривизны и его скаляров, которые состояются из первых и вторых производных метрического тензора, инвариантно относительно множества всех невырожденных преобразований систем координат.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$F^\sigma(x, y, p) = 0, \quad \sigma = 1, \dots, s \quad (1.6.9)$$

Условие ее инвариантности относительно группы Ли G точечных преобразований, которую называют основной группой инвариантности системы (1.6.9), имеет вид

$$X_\alpha F^\sigma(x, y, p)|_{F^\tau=0} = 0 \quad (1.6.10)$$

Можно применять и эквивалентную запись, не полагая $F(x) = 0$,

$$X_\alpha F^\sigma(x, y, p) = \lambda_\tau^\sigma(x, y) F^\tau(x, y, p)$$

где $\lambda_\tau^\sigma(x, y)$ — множители Лагранжа, определяющиеся при вычислении группы симметрии. Таким образом, действие операторов группы G индуцирует линейные преобразования левых частей уравнений (в частности, при $\lambda_\tau^\sigma(x)$ говорят, что уравнения имеют тензорный вид).

Отметим, что при заданной системе (1.6.9) мы получаем систему уравнений для функций ξ^i, η^A , в которую входят переменные $p_i^A, p_{ij}^A, \dots$. Функций ξ^i, η^A не зависят от значений производных, поэтому, если все производные нельзя исключить с помощью уравнений (1.6.9), то приведение подобных членов

с оставшимися производными и приравнивание их нулю приводят, обычно, к сильно переопределенной системе. Однако, эта система совместна, так как всегда есть решение, когда все операторы группы равны нулю, отвечающее, по крайней мере, тождественному преобразованию.

В случае системы обыкновенных уравнений первого порядка

$$\frac{dy^A}{dt} = v^A(t, y^1, \dots, y^m) \quad (1.6.11)$$

разрешенной относительно производных ($s = m$), производные могут быть исключены полностью. В этом случае имеем

$$\eta_{,t}^A + v^B \eta_{,B}^A = v^A (\xi_{,t} + v^B \xi_{,B}) + \xi v_{,t}^A + \eta^B v_{,B}^A \quad (1.6.12)$$

Система (1.6.12) всегда имеет решение $\xi = 1$, $\eta^A = v^A$. Однако в этом случае уравнения (1.6.2), необходимые для построения группы преобразований, точно совпадают с исходным уравнением. Эта группа симметрии отвечает сдвигу вдоль мировых линий $y^A = y^A(t)$, определяемых системой. Таким образом, отыскание полной группы инвариантности обыкновенных уравнений даже более сложно, чем их решение. Для сужения задачи требуются дополнительные ограничения, которые могут быть предложены только при специальном виде правой части. Например, в случае линейных уравнений можно ограничиться линейными преобразованиями переменных y^A .

Или можно специально конструировать системы, обладающие заданными свойствами симметрии. При этом, обычно, понижается порядок системы. Например, пусть правая часть (1.6.11) не зависит от y^1 . То есть система уравнений инвариантна относительно сдвигов y^1 . Тогда уравнения отвечающие $A = 2, \dots, m$ могут быть решены независимо, а затем отдельно проинтегрировано первое уравнение.

В общем случае, очевидно, что если известна основная группа инвариантности уравнений G , это может быть использовано для построения новых решений. С другой стороны, ее подгруппы H могут служить для нахождения инвариантно-групповых решений. Пусть $H \subset G$, $X_H I(x, y) = 0$, причем среди инвариантов I_H имеются m разрешимых относительно y^A , а остальные можно считать не зависящими от y^A . Тогда исходная система уравнений (1.6.9) допускает понижение порядка в

переменных $z^A(t^a(x))$, где $t^a(x)$ — инварианты, не зависящие от y^A ; $z^A(t^a)$ — новые искомые функции. При этом новая система уравнений будет допускать основную группу $F \subset G$, если F переводит множество инвариантов группы H в себя. В частности, $F \supset G/H$, если H — нормальный делитель G . Но могут появиться и новые симметрии.

В качестве примера рассмотрим основную группу инвариантности уравнений одномерного адиабатического движения совершенного газа (v — скорость, ρ — плотность, p — давление)

$$\begin{aligned} v_t + vv_x + p_x/\rho &= 0, \\ \rho_t + v\rho_x + \rho v_x &= 0, \\ p_t + vp_x + \gamma pv_x &= 0 \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

Алгебра Ли группы G имеет вид

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, & X_2 &= \partial_x, & X_3 &= t\partial_x + \partial_v, \\ X_4 &= \rho\partial_\rho + p\partial_p, & X_5 &= t\partial_t - v\partial_v - 2p\partial_p, \\ X_6 &= x\partial_x + v\partial_v - 2\rho\partial_\rho, \\ \text{при } \gamma &= 3 & X_7 &= tx\partial_x + t^2\partial_t + (x - vt)\partial_v - \\ & & & - t\rho\partial_\rho - 3tp\partial_p \end{aligned} \quad (1.6.14)$$

где нижними индексами обозначены соответствующие производные.

Операторы имеют следующий смысл: X_1, X_2 отвечают сдвигам, X_3 — преобразованиям Галилея, $X_4 - X_6$ — растяжениям. При $\gamma = 3$ имеется дополнительная симметрия, связанная с преобразованиями: $t' = t/(1 - at)$, $x' = x/(1 - at)$, $v' = v(1 - at) + ax$, $p' = p(1 - at)^3$, $\rho' = \rho(1 - at)$.

Типичные классы инвариантно-групповых решений, нахождение которых сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений: 1) бегущие волны, инвариантные относительно оператора $X_1 + cX_2$, что дает зависимость v, ρ, p от $x - ct$; 2) автомодельные решения, инвариантные относительно комбинаций операторов растяжений; 3) решения, предельные к автомодельным, имеют оператор $X_1 + cX_6$, $c = \text{const}$. Интересен простой класс решений, инвариантный относительно преобразования Галилея X_3 : $\rho(t) = A/t$, $p = B/t^\gamma$, $v = (x + C)/t$, $A, B, C = \text{const}$, описывающий однородный разлет. Пример группы, не позволяющей выразить искомые функции через инварианты от аргументов, дает оператор X_4 : $\{I\} = (v, p/\rho, t, x)$.

Возможны также частично-инвариантные решения относительно $H \subset G$, при отыскании которых используются только связи между инвариантами H , не специализирующие полностью все искомые функции. Примером для системы (1.6.13) могут служить простые волны. В этом случае используются связи $p = p(v)$, $\rho = \rho(v)$, инвариантные относительно группы с операторами X_1, X_2 . Эти связи определяются после подстановки в систему (1.6.13). Само инвариантно-групповое решение отвечает только постоянным значениям искоемых функций.

К более сложной конструкции приводит общая зависимость операторов алгебры Ли группы инвариантности дифференциальных уравнений от самих производных. Такие группы симметрии, действующие в пространстве $J_\infty^{n,m}$, называют группами Ли-Беклунда.

Многие уравнения механики и математической физики могут быть представлены как уравнения Эйлера, отвечающие экстремуму некоторого функционала действия. Согласно теореме Нётер инвариантность функционала действия непосредственно приводит к дивергентным формам уравнений, представляющих собой следствия уравнений Эйлера или тождественных им.

Такого вида уравнения называют также законами сохранения в связи с возможностью установления непосредственной зависимости значений некоторых интегралов от начальных и краевых условий. Для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, это дает первые интегралы. Примерами могут служить законы сохранения энергии и импульса, связанные с инвариантностью системы относительно сдвигов времени и пространственных координат.

Рассмотрим функционал

$$J = \int \Lambda(x, y, p_1) dx^1 \dots dx^n \quad (1.6.15)$$

ограничившись производными первого порядка. Функционал J называется инвариантным относительно группы Ли G точечных преобразований, если выполняется условие инвариантности внешней дифференциальной формы $\Lambda(x, y, p_1) dx^1 \dots dx^n$, стоящей под знаком интеграла. Для бесконечно малых преобразований в случае однопараметрической группы получим

$$X\Lambda + \Lambda D_i \xi^i = 0 \quad (1.6.16)$$

Из условия инвариантности (1.6.16) следует

$$\xi^i \frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} + \eta^A \frac{\partial \Lambda}{\partial y^A} + \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i^A} (D_i \eta^A - p_j^A D_i \xi^j) + \Lambda D_i \xi^i = \quad (1.6.17)$$

$$= \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial y^A} - D_i \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i^A} \right) (\eta^A - p_j^A \xi^j) + D_i \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial p_i^A} (\eta^A - p_j^A \xi^j) + \Lambda \xi^i \right) = 0$$

Если выполняются уравнения Эйлера

$$\frac{\delta \Lambda}{\delta y^A} \equiv \frac{\partial \Lambda}{\partial y^A} - D_i \frac{\partial \Lambda}{\partial p_i^A} = 0 \quad (1.6.18)$$

то получаем дивергентное уравнение

$$D_i \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial p_i^A} (\eta^A - p_j^A \xi^j) + \Lambda \xi^i \right) = 0 \quad (1.6.19)$$

Отметим, что для получения законов сохранения, вообще говоря, не нужно строго требовать выше определенной инвариантности функционала J . Достаточно, чтобы на решениях уравнений Эйлера выполнялось соотношение

$$X\Lambda + \Lambda D_i \xi^i \Big|_{\delta \Lambda / \delta y^A = 0} = -D_i B^i(x, y, p) \quad (1.6.20)$$

В этом случае говорят об инвариантности подынтегральной формы с точностью до дивергенции. В уравнение (1.6.19), очевидно, войдет дополнительный член $D_i B^i$.

В качестве примера рассмотрим лагранжиан $\Lambda = v^2/2 - gx$, $v = dx/dt$, отвечающий движению материальной точки единичной массы в однородном поле тяжести. Функционал J инвариантен при $B(t, x)$ относительно группы с алгеброй Лп :

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = t\partial_x, \quad X_3 = \partial_x, \quad X_4 = t\partial_t + \left(\frac{x}{2} - \frac{3gt^2}{4} \right) \partial_x$$

которая дает следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{2} + gx &= C_1, & B &= 0, \\ vt - x + \frac{gt^2}{2} &= C_2, & B &= \frac{gt^2}{2} - x, \\ v + gt &= C_3, & B &= gt \\ v^2 t + v \left(\frac{3gt^2}{2} - x \right) + \frac{g^2 t^3}{2} - gxt &= C_4, & B &= \frac{3gxt}{2} - \frac{g^2 t^3}{4} \end{aligned}$$

Уравнение Эйлера $dv/dt + g = 0$, очевидно, допускает еще группу растяжений, отвечающую оператору $X_5 = t\partial_t + 2x\partial_x$. Эта группа растягивает Λdt и не укладывается в изложенную схему. Этот пример также показывает, что группа инвариантности функционала действия является подгруппой основной группы симметрии уравнений Эйлера.

Мы здесь не касаемся вопросов инвариантности относительно множеств преобразований, содержащих произвольные функции, а также обратных утверждений о существовании подходящих групп симметрии при наличии законов сохранения.

Уравнения газовой динамики (1.6.13) могут быть получены как уравнения Эйлера для лагранжевой формы

$$\left(\frac{v^2}{2} - f(\xi)\rho^{\gamma-1}\right) d\xi dt \quad (1.6.21)$$

Варируется закон движения среды $x(\xi, t)$, независимая лагранжева переменная ξ играет роль массы слоя газа, $v = x_t$, $\rho = 1/x_\xi$, $p = (\gamma - 1)f(\xi)\rho^\gamma$. Функция $f(\xi)$ связана с распределением энтропии и считается заданной.

Алгебра Ли (1.6.14), вычисленная, правда, в эйлеровых переменных, как мы видели выше, может быть частично использована и для построения законов сохранения при произвольной функции $f(\xi)$. Уравнения Эйлера $v_t + p_\xi = 0$ сами представляют собой закон сохранения количества движения. Уравнение энергии имеет вид $(v^2/2 + f\rho^{\gamma-1})_t + (pv)_\xi = 0$. Преобразования Галилея дают $(vt - x)_t + (pt)_\xi = 0$.

При $\gamma = 3$ имеем еще два закона сохранения

$$\left[t\left(\frac{v^2}{2} + f\rho^2\right) - \frac{xv}{2}\right]_t + \left[p\left(tv - \frac{x}{2}\right)\right]_\xi = 0,$$

$$\left[t^2\left(\frac{v^2}{2} + f\rho^2\right) - txv + \frac{x^2}{2}\right]_t + \left[tp\left(tv - x\right)\right]_\xi = 0$$

Первый связан с инвариантностью лагранжевой формы (1.6.21) относительно растяжений с оператором

$$2X_5 + X_6 + X_4 = 2t\partial_t + x\partial_x - v\partial_v - \rho\partial_\rho - 3p\partial_p,$$

второй — с инвариантностью (1.6.21) с точностью до xx_t относительно оператора X_7 (1.6.14).

При степенной зависимости $f(\xi)$ возможны дополнительные интегралы.

Рассмотрим важный при отыскании инвариантно-групповых решений вопрос о сохранении дивергентного вида хотя бы одного из уравнений. Если инвариантное решение сводится к интегрированию обыкновенных уравнений, то это сразу приводит к получению первого интеграла. Примером может служить интеграл Седова в автомодельной задаче о сильном взрыве [41].

Пусть имеется уравнение вида $D_i f^i(x, y, p) = 0$, а искомое решение $y^1 = \varphi^A(x)$ инвариантно относительно группы с оператором X . Тогда достаточное условие сохранения дивергентной формы имеет вид

$$X f^i - f^k D_k \xi^i + f^i D_k \xi^k = 0 \quad (1.6.22)$$

Доказательство очевидно в специальных координатах, в которых вектор группы инвариантности решения приводится к виду $\xi^i = \delta_1^i, \eta^A = 0$ с учетом закона преобразования дивергенции.

Это условие эквивалентно инвариантности внешней формы $f^{[i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_n]}$ или интеграла от потока вектора $\mathbf{f}$ через поверхность $\psi(x) = \text{const}$, где $X\psi \neq 0$. Для нетривиальности результата необходимо, чтобы исходная дивергентная форма не соответствовала по теореме Нетер группе инвариантности решения. Так, в интеграле Седова исходной дивергентной формой является уравнение энергии, соответствующее сдвигам времени, а ищется решение, инвариантное относительно группы растяжений, оставляющей на месте интеграл энергии по поверхности $t = \text{const}$.

2. МАТЕРИАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

§ 2.1. Кинематика

В механике сплошной среды, как в ньютоновской механике (НМ), так и в специальной теории относительности (СТО), основной характеристикой движения и деформированного состояния среды является закон движения — соотношение, связывающее эйлеровы и лагранжевы переменные, $x^i(\xi^a, t)$, $i, a = 1, 2, 3$. Таким образом, описание движения (кинематика), прежде всего, связано с соотношением системы отсчета наблюдателя и системы отсчета, сопутствующей среде. Под системой отсчета понимается идеализированная всепроникающая сплошная среда, которая может быть непосредственно связана или нет с движущимися объектами.

В НМ и СТО существуют так называемые инерциальные системы отсчета, по определению, движущиеся без ускорения, неврещающиеся и недеформирующиеся. Кроме того, в ньютоновской механике вводится абсолютное время t , единое для всех инерциальных систем отсчета. В теории относительности в каждой системе отсчета существует свое местное время, собственное для данной системы отсчета. Инерциальные системы отсчета являются наиболее простыми и их, как правило, используют в качестве систем отсчета наблюдателя.

Правила, связывающие разные инерциальные системы отсчета, определяют множество кинематических симметрий данной теории. Таким образом, в НМ в основу кинематики кладется группа Галилея, в СТО — группа Лоренца. Уравнения, описывающие движение сплошной среды, при отсутствии внешних силовых полей должны быть инвариантны относительно соответствующей группы симметрии.

В принципе, после составления «правильных» уравнений движения относительно некоторой инерциальной системы отсчета при определенной ковариантности уравнений можно перейти к любой другой системе отсчета, которая ускоренно движется, вращается и деформируется. Конечно, описание движения новой системы относительно класса инерциальных систем, должно быть определено дополнительными уравнениями. В частности, можно перейти к сопутствующей данной среде системе, где вообще никакого относительного движения нет. При этом и в НМ, и в СТО можно использовать любое местное вре-

мя, не обязательно собственное или абсолютное. Все это приводит к появлению массы новых членов в уравнениях движения типа сил инерции. Однако, уравнения, по-прежнему остаются инвариантными относительно группы исходной кинематической симметрии, представленной лишь в другой системе координат четырехмерного пространства-времени. Подробнее о 4-мерной формулировке ньютоновской механики сплошной среды см. в [9, 10].

Другое положение вещей в общей теории относительности, где уравнения теории инвариантны относительно множества всех гладких преобразований пространства-времени. И вообще не существует «хорошего» класса систем отсчета. Впрочем, в этой теории можно ввести невращающиеся и несжимаемые системы отсчета, но не неускоряющиеся и не недеформируемые сдвиговым образом.

Обратимся к кинематике СТО. Рассмотрим однородную группу Лоренца $O(1, 3)$ линейных преобразований переменных x^i ($i = 1, 2, 3, 4$) ($x^4 = ct$, c — величина скорости света), оставляющих инвариантным метрический тензор псевдоевклидова пространства L^4 , который в декартовых координатах всякой инерциальной системы отсчета имеет вид

$$\eta = e_4^2 - e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 \quad (2.1.1)$$

Как тензорное поле тензор η инвариантен также и относительно группы сдвигов R^4 . Полная группа инвариантности тензорного поля η называется группой Пуанкаре. Ее связная компонента единицы представляет собой полупрямое произведение коммутативной инвариантной подгруппы R^4 на собственную группу Лоренца — простую связную компоненту единицы группы $O(1, 3)$.

Инфинитезимальные операторы группы Лоренца имеют вид

$$\begin{aligned} X_1 &= x^2 \partial_3 - x^3 \partial_2, & X_2 &= x^3 \partial_1 - x^1 \partial_3, \\ X_3 &= x^1 \partial_2 - x^2 \partial_1, & X_4 &= x^1 \partial_4 + x^4 \partial_1, \\ X_5 &= x^2 \partial_4 + x^4 \partial_2, & X_6 &= x^3 \partial_4 + x^4 \partial_3 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

где $\partial_i = \partial/\partial x^i$. К ним добавляются операторы сдвигов $Y_i = \partial_i$.

К связной группе Пуанкаре следует прибавить также элементы группы отражений, как пространственных координат, так и времени, в обозначениях Шубникова $\bar{2} \times \underline{1}$.

Можно выписать вид матрицы элементарного преобразования Лоренца (без отражений) в плоскости x, ct

$$l = \begin{pmatrix} \text{ch}\psi & \text{sh}\psi \\ \text{sh}\psi & \text{ch}\psi \end{pmatrix}, \quad \text{th}\psi = \frac{V}{c} \quad (2.1.3)$$

Ясно, что группа (2.1.3) может быть аналитически продолжена в группу вращений SO_2 , что делает возможным вычисление инвариантов путем усреднения.

В СТО вводится так называемый метрический тензор q многообразия мировых линий $\xi^\alpha = \text{const}$ с лагранжевыми компонентами

$$q^{\alpha\beta} = -\xi_i^\alpha \xi_j^\beta \eta^{ij}, \quad \xi_i^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} \quad (2.1.4)$$

Пространственный элемент длины определяется как $dl^2 = (q^{-1})_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$. Согласно описанной выше конструкции поле тензора q (2.1.4) всегда остается инвариантным относительно группы Пуанкаре.

Предельный переход $c \rightarrow \infty$ в преобразовании $x \rightarrow lx$ дает одномерное преобразование Галилея $x' = x + Vt$, $t' = t$. Все трехмерные преобразования этого типа образуют коммутативную подгруппу однородной группы Галилея. Соответствующие инфинитезимальные операторы группы Лоренца X_{3+p} переходят в $t\partial_p$, $p = 1, 2, 3$. К этим преобразованиям добавляются вращения и отражения. Однородная группа Галилея локально изоморфна группе движений 3-мерного евклидова пространства (1.1.5), но здесь добавляется еще отражение времени $\underline{1}$. Далее присоединяются пространственные и временные сдвиги.

Если проследить, как преобразуются контравариантные и ковариантные компоненты тензора η при предельном переходе $c \rightarrow \infty$ в координатах x^i , $\bar{x}^4 = t$, $i = 1, 2, 3$, то окажется, что временная часть η^{ij} и пространственная часть η_{ij} обращаются в нуль. Неоднородную группу Галилея можно определять как группу инвариантности двух оставшихся, теперь уже независимых, тензорных полей: $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ и $(\bar{e}^4)^2$.

В результате, тензор q после обращения матрицы компонент принимает обычный вид метрического тензора трехмерного пространства $t = \text{const}$. Если использовать матрицу дисторсии $x_\alpha^i = \partial x^i / \partial \xi^\alpha$, то получим

$$q_{\alpha\beta} = \delta_{ij} x_\alpha^i x_\beta^j \quad (2.1.5)$$

В СТО при инвариантности теории относительно полной группы кинематической симметрии — группы Пуанкаре в качестве лагранжиана удобно задавать плотность внутренней энергии среды $-\varepsilon$, отнесенной к единице объема инерциального наблюдателя, как функцию переменных $q^{\alpha\beta}$ (2.1.4) и варьировать функции $\xi^\alpha(x^i, t)$, придерживаясь эйлерова подхода.

В НМ проще в лагранжевых переменных ограничиться лагранжианом $v^2/2 - u$ с удельной внутренней энергией u (если только мы не имеем дело с теорией массообмена в смеси сред), которая зависит от переменных $q_{\alpha\beta}$ (2.1.5) и варьировать $x^i(\xi^\alpha, t)$. Член с квадратом скорости инвариантен относительно преобразований Галилея с точностью до дивергенции (§ 1.6), инвариантность выражений (2.1.5) можно проверить и непосредственно.

При моделировании многих физических процессов, происходящих в жидкостях и твердых телах, широко используется модель несжимаемой среды, позволяющая эффективно решать важные практические задачи. Обобщением могут служить среды, допускающие и другие более сложные кинематические связи [22]. В принципе, возможна схема классификации таких сред по группам материальной симметрии, которые являются подгруппами группы $\pm SL_3$, описанными ниже.

К приложениям можно отнести, например, среды, состоящие из нерастяжимых нитей, или, например, поток автомобилей в условиях насыщения, когда соблюдается минимальная дистанция и ширина ряда, но сами ряды двигаются с разными скоростями, и тому подобное.

Наименьшей симметрией обладает абсолютно твердое тело, в модели которого фиксируются как функции лагранжевых переменных ξ^α все шесть компонент $q_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta}^0$ как равные начальным. Можно рассмотреть модели сред со связями вида

$$I_k(q_{\alpha\beta}) = f_k(\xi^\alpha), \quad k = 1, \dots, N < 6 \quad (2.1.6)$$

где левые части представляют собой инварианты выбранной для построения данной модели группы симметрии.

При вариационном подходе к выводу уравнений движения среды вместо удельной внутренней энергии в лагранжиан подставляется сумма $\lambda^k(I_k - f_k)$, содержащая также искомые множители Лагранжа λ^k . Функции $f_k(\xi^\alpha)$ задаются в начальный момент времени или определяются при решении задач с помощью, например, подходящих условий на разрывах.

Не исключена возможность построения и частично жестких моделей сплошных сред с данной симметрией таких, например, как изотропное несжимаемое упругое тело. В этом случае в уравнениях связей (2.1.6) может фигурировать только часть инвариантов, остальные будут входить во внутреннюю энергию среды u . Таким образом, сопутствующие компоненты тензора напряжений определяются как

$$p^{\alpha\beta} = 2\rho \frac{\partial(\lambda^k I_k + u)}{\partial q_{\alpha\beta}} + \tau^{\alpha\beta}, \quad (2.1.7)$$

где $\tau^{\alpha\beta}$ — компоненты, например, тензора вязких напряжений. Для несжимаемой среды $\lambda(I - f) = -p(1/\rho - 1/\rho_0)$, где p — давление как множитель Лагранжа.

Тензор вязких напряжений τ определяется как тензорно-значная функция, зависящая от метрического тензора q , тензора скоростей деформаций e ($e_{\alpha\beta} = 1/2(q_{\alpha\beta})_t$) и инвариантная относительно данной группы материальной симметрии, причем для всех e должно выполняться неравенство $\tau \cdot e \geq 0$. При составлении τ следует также иметь в виду, что $e_{\alpha\beta} \partial I_k / \partial q_{\alpha\beta} \equiv 0$. Проще всего ввести инвариантный скалярный диссипативный потенциал $D(q_{\alpha\beta}, e_{\alpha\beta})$ такой, что $\tau^{\alpha\beta} = \partial D / \partial e_{\alpha\beta}$.

Большой интерес представляют модели сред, когда число связей оказывается большим или равным 3. В этом случае уравнений связей может оказаться достаточно, конечно, с учетом дополнительных краевых или интегральных условий, как в случае твердого тела, для полного определения закона движения среды. Уравнения движения служат для определения, возможно неполного при $N > 3$, коэффициентов Лагранжа. Отметим, что в таких случаях в уравнения (2.1.6) в лагранжевых переменных вообще не входят производные по времени, однако разрешимость связей, как уравнений в частных производных, может представлять собой достаточно сложную математическую проблему.

§ 2.2. Непрерывные группы

Как уже упоминалось, подход к описанию материальной симметрии сплошных сред, инвариантных относительно линейных групп преобразований лагранжевых переменных, предложен и

развивался Ноллом, Колеманом и Ваном [49, 51, 52] в связи с проблемой классификации жидких кристаллов. В работе Вана [52] были также указаны некоторые наиболее известные подгруппы группы $\pm SL_3$ ($\det a = \pm 1$).

В этом параграфе мы дадим полную классификацию связанных подгрупп группы SL_3 , точнее их алгебр Ли, вычисленных с точностью до сопряженности в полной линейной группе GL_3 , или с точностью до выбора сопутствующего базиса. Для каждой из найденных подгрупп группы SL_3 укажем также полный набор ее функционально независимых скалярных инвариантов, составленных из компонент тензора q .

Если ограничиться простыми средами с полной локальной кинематической симметрией, неважно, относительно ли группы Лоренца или же группы Галилея, то в этом случае внутренняя энергия u будет зависеть от закона движения среды только через сопутствующие компоненты метрического тензора $q_{\alpha\beta}$ многообразия мировых линий ее материальных точек (§ 2.1). Поэтому полученные формулы могут быть прямо применены к построению моделей сплошных сред.

Группа SL_3 восьмимерна. Ее алгебра Ли состоит из всех матриц с равным нулю следом. Физически это соответствует множеству всех аффинных деформаций, сохраняющих объем. Все одномерные подалгебры алгебры Ли группы SL_3 получаются приведением матриц общего положения с нулевым следом к вещественным жордановым формам. Для локального восстановления связной одномерной группы к ее алгебре Ли надо применить матричную экспоненту.

Двумерные алгебры всегда разрешимы или, в частности, коммутативны. Присоединяя к каждому из канонических типов одномерных подалгебр элемент общего вида и учитывая структурные уравнения, получим некоторые двумерные подалгебры. Затем, вычисляя нормализаторы исходных одномерных алгебр в группе SL_3 , с их помощью упрощаем вид полученных двумерных алгебр. И, наконец, следует проверить попарную несопряженность алгебр одинаковой структуры в группе SL_3 . Здесь полезно иметь в виду, что сопряженность алгебр влечет за собой сопряженность и их нормализаторов.

Далее, очевидно, применяется тот же метод расширения. Любая разрешимая алгебра содержит последовательность вложенных разрешимых подалгебр таких, что всякая последую-

шая является инвариантной в предыдущей и ее размерность на единицу меньше. Таким образом, присоединяя на каждом шаге один оператор, получим все разрешимые подалгебры алгебры Ли группы SL_3 . Упрощения опять проводятся на каждом шагу с помощью нормализаторов инвариантных подалгебр.

Произвольная алгебра Ли согласно теореме Леви-Мальцева разлагается в полупрямую сумму полупростой и инвариантной разрешимой подалгебр. Структура полупростых алгебр Ли хорошо известна. В данном случае они могут быть только простыми размерности три. Для построения простых подалгебр к каждому каноническому типу одномерной подалгебры присоединяем по два оператора. Далее присоединяем допустимые инвариантные разрешимые подалгебры.

В таблице 1 приведены результаты вычислений подалгебр алгебры Ли группы SL_3 . Первая цифра номера (r, n) означает размерность группы. Символ ϵ_β^α обозначает матрицу, у которой на пересечении α -ой строки и β -го столбца стоит 1, остальные элементы — нули. Таким образом, матрица ϵ_β^α отвечает инфинитезимальному оператору $\xi^\beta \partial / \partial \xi^\alpha$ векторного представления; x — параметр серии подгрупп.

Параллельно указаны скалярные инварианты $I_k(q_{\alpha\beta})$ соответствующих связанных подгрупп группы SL_3 в пространстве трехмерных симметрических тензоров второго ранга $((q_{\alpha\beta}) = (q_{\alpha\beta})^{-1}, q = \det(q_{\alpha\beta}))$.

Для определения зависимости $I_k(q_{\alpha\beta})$ для каждой алгебры Ли размерности r с операторами $(a_{\beta(s)}^\gamma)$ решается система уравнений вида

$$\sum_{\alpha \leq \beta} (a_{\alpha(s)}^\gamma q_{\gamma\beta} + a_{\beta(s)}^\gamma q_{\gamma\alpha}) \frac{\partial I}{\partial q_{\alpha\beta}} = 0, \quad s = 1, \dots, r, \quad (2.2.1)$$

где после суммирования по всем $\gamma = 1, 2, 3$ в силу симметрии тензора q элементы, стоящие ниже главной диагонали матрицы $(q_{\alpha\beta})$, следует заменить им симметричными, принятыми за независимые.

Итак, всякая связанная подгруппа группы SL_3 сопряжена в ней одной из групп, алгебры Ли которых указаны в таблице 1. Имеется всего 40 типов связанных подгрупп, среди которых есть 8 непрерывных однопараметрических серий. Эти результаты получены автором в работе [15]

Свойства материальной симметрии сплошных сред, отвечающих подгруппам унимодулярной линейной группы, в принципе, могут быть значительно расширены за счет добавления всесторонних растяжений, которые составляют однопараметрическую группу D с инфинитезимальным оператором

$$d = e_1^1 + e_2^2 + e_3^3. \quad (2.2.2)$$

Такое расширение симметрии имеет, например, место для модели сплошной среды, называемой «пылью», которая используется в космологии.

Опишем метод построения связных подгрупп полной линейной группы $GL_3 = \pm SL_3 \times D$ (их алгебр Ли) путем присоединения к алгебрам Ли подгрупп группы SL_3 оператора d . Связные подгруппы Ли группы GL_3 строятся из связных подгрупп группы SL_3 с помощью следующего приема [36]. Так как оператор растяжения d коммутирует со всеми операторами алгебры Ли групп SL_3 , он либо присоединяется к базису алгебры Ли данной подгруппы, либо при наличии у ее алгебры Ли инвариантной подалгебры коразмерности 1 (содержащей, в частности, множество всех коммутаторов) образуется линейная комбинация этого оператора с любым оператором, не входящим в эту инвариантную подалгебру.

Операторы одномерных подалгебр с точностью до умножения на число отвечают всем каноническим жордановым вещественным формам матриц. Свойства несопряженности подгрупп группы GL_3 следуют из несопряженности соответствующих подгрупп группы SL_3 .

При вычислении инвариантов подгрупп группы GL_3 достаточно знание инвариантов подгрупп группы SL_3 , порождающих эти группы, или инвариантов их нормальных делителей коразмерности 1. Действие одномерной подгруппы, отвечающей присоединенному оператору, сводится в пространстве указанных инвариантов к умножению на число, которое уже может быть исключено алгебраически.

Полная классификация связных подгрупп группы GL_3 проведена в работе [16], где также установлен вид соответствующих инвариантных функций $I_k(q_{\alpha\beta})$, необходимых для построения удельной внутренней энергии u . Эти результаты позволяют рассмотреть модели сред, качественно отличающихся, например, при наличии высокой материальной симметрии,

допускающей только один инвариант, от жидкостей, для которых $u = u(s, q)$, $q = \det(q^{\alpha\beta})$, s — удельная энтропия.

Таблица 1. Непрерывные группы матеральной симметрии.

№	Алгебра Ли	Инварианты
1.1	$x(e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3) + e_2^1 - e_1^2,$ $x \geq 0$	$q, q_{33}(q_{11} + q_{22})^2,$ $q_{33}q^{33}, q^{33}(q^{11} + q^{22})^2,$ $q_{33} \exp \left(2x \operatorname{arctg} \frac{2q_{12}}{q_{11} - q_{22}} \right)$
1.2	$x(e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3) + e_2^1,$ $x = 0; 1$	$q, q_{33}q_{11}^2, q_{11}q_{13}^2, q_{13}q^{23},$ $q_{11} \exp \left(-2x \frac{q_{12}}{q_{11}} \right)$
1.3	$e_1^1 + xe_2^2 - (1+x)e_3^3,$ $-1/2 < x \leq 1$	$q, q_{11}q_{22}q_{33}, q_{22}q_{13}^2,$ $q_{11}q_{23}^2, q_{33}q_{11}^{1+x}$
1.4	$e_2^1 + e_3^2$	$q, q_{11}, q^{33}, q_{22} - 2q_{13},$ $q_{11}q^{23} + q_{12}q^{33}$
2.1	$e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3, e_2^1 - e_1^2$	$q, q_{33}(q_{11} + q_{22})^2,$ $q_{33}q^{33}, q^{33}(q^{11} + q^{22})^2$
2.2	$e_1^1 - e_2^2, e_1^1 - e_3^3$	$q, q_{22}q_{13}^2, q_{11}q_{23}^2,$ $q_{11}q_{22}q_{33}$
2.3	$e_2^1 + e_3^2, e_1^3$	$q, q_{11}, q^{33},$ $q_{11}q^{23} + q_{12}q^{33}$
2.4	$e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3, e_2^1$	$q, q_{33}q_{11}^2, q_{11}q_{13}^2,$ $q_{13}q^{23}$
2.5	e_1^1, e_3^1	$q, q_{11}, q^{22}, q^{23}$
2.6	e_3^1, e_3^2	$q, q_{11}, q_{12}, q_{22}$
2.7	$e_1^1 - e_3^3, e_2^1 + e_3^2$	$q, q^{33}q_{11}^{-1}, q_{22} - 2q_{13},$ $(q_{11}q^{23} + q_{12}q^{33})q_{11}^{-3/2}$
2.8	$xe_1^1 + (1+x)e_2^2 - (1+2x)e_3^3,$ e_2^1	$q, q^{23}q_{11}^{-1/2}, q^{33}q_{11}^{1+2x}$ $q_{11}^{-1}q_{13}^2q_{33}^{-1}$
2.9	$e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3 - e_2^1, e_1^3$	$q, q^{23}q_{11}^{-1}, q^{33}q_{11}^{-2},$ $q_{11} \exp \left(\frac{2q_{12}}{q_{11}} \right)$
2.10	$2e_1^1 - e_2^2 - e_3^3 - e_3^2, e_1^3$	$q, q_{11}q_{22}^2, q_{11}^{-1}q_{12}^4,$ $q^{33} \exp \left(-\frac{2q^{23}}{q^{33}} \right)$

Таблица 1. Непрерывные группы материальной симметрии (продолжение).

№	Алгебра Ли	Инварианты
3.1	$e_2^1 + e_1^2, e_3^1 + e_1^3, e_3^2 - e_2^3$	$q, q_{11} - q_{22} - q_{33},$ $q^{11} - q^{22} - q^{33}$
3.2	$e_1^1 - e_2^2, e_2^1, e_1^2$	q, q_{33}, q^{33}
3.3	$e_2^1 - e_1^2, e_3^1 - e_1^3, e_3^2 - e_2^3$	$q, q_{11} + q_{22} + q_{33},$ $q^{11} + q^{22} + q^{33}$
3.4	$e_1^1 - e_3^3, e_2^1 + e_3^2, e_3^1$	$q, q_{11} q^{33},$ $(q_{11} q^{23} + q_{12} q^{33}) q_{11}^{-3/2}$
3.5	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1$	$q, q_{11} q_{13}^2 q_{33}^{-1}, q^{23} q_{11}^{-1/2}$
3.6	$(1+x)e_1^1 - x e_2^2 - e_3^3,$ $e_2^1, e_3^1, \quad x \leq 1$	$q, q^{23} q_{11}^{-1/2}, q_{11}^{-x} (q^{22})^{1+x}$
3.7	$x(2e_1^1 - e_2^2 - e_3^3) - e_2^2,$ $e_2^1, e_3^1, \quad x = 0; 1$	$q, q^{33} q_{11}^{-1/2},$ $q^{33} \exp\left(-2x \frac{q^{23}}{q^{33}}\right)$
3.8	$x(2e_1^1 - e_2^2 - e_3^3) - e_3^2 + e_2^3,$ $e_3^1, e_2^1, \quad x \geq 0$	$q, (q^{22} + q^{33}) q_{11}^{-1/2},$ $q_{11} \exp\left(2x \arctg \frac{2q^{23}}{q^{22} - q^{33}}\right)$
3.9	$x e_1^1 + e_2^2 - (1+x)e_3^3,$ $e_3^1, e_2^2, \quad x \leq 1$	$q, q_{11}^{-1} q_{12}^2 q_{22}^{-1}, q_{11} q_{22}^{-x}$
3.10	$e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3 - e_2^1, e_3^1, e_3^2$	$q, q_{11}^{-2} q^{33}, q_{11} \exp\left(\frac{2q_{12}}{q_{11}}\right)$
3.11	$x(e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3) + e_2^1 - e_1^2,$ $e_3^2, e_3^1, \quad x \geq 0$	$q, q^{33} (q_{11} + q_{22})^{-2},$ $q_{33} \exp\left(-2x \arctg \frac{2q_{12}}{q_{11} - q_{22}}\right)$

Таблица 1. Непрерывные группы материальной симметрии (продолжение).

№	Алгебра Ли	Инварианты
4.1	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1$	$q, q^{23} q_{11}^{-1/2}$
4.2	$2e_1^1 - e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1, e_3^2 - e_3^3$	$q, (q^{22} + q^{33}) q_{11}^{-1/2}$
4.3	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_3^1, e_3^2$	$q, q_{11}^{-1} q_{12}^2 q_{22}^{-1}$
4.4	$e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3, e_2^1 - e_1^2, e_3^1, e_3^2$	$q, q^{33} (q_{11} + q_{22})^{-2}$
4.5	$e_1^1 - e_2^2, e_2^1, e_3^1, e_3^2$	q, q^{33}
4.6	$(1+x)e_1^1 - x e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1, e_3^2,$ $x \leq 1$	$q, q_{11}^{-1} (q^{33})^{1+x}$
4.7	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_1^2$	$q, q_{33} q^{33}$
5.1	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1, e_3^2$	q
5.2	$e_1^1 - e_2^2, e_2^1, e_3^1, e_3^2$	q, q^{33}
5.3	$e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1, e_3^2$	q, q_{11}
6.1	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1, e_3^2$	q
6.2	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1, e_3^2$	q
8.1	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_1^2, e_3^1,$ e_3^2, e_3^3	q

§ 2.3. Группы с конечным числом связных компонент

Используя описание всех непрерывных подгрупп группы $\pm SL_3$ (таблица 1), можно дать классификацию ее подгрупп, обладающих конечным числом связных компонент. К этому множеству подгрупп относятся все алгебраические подгруппы, необходимые, например, для построения тензорных инвариантов, определяющих симметрию сплошной среды. Ниже проводится описание соответствующих подгрупп группы $\pm SL_3$ путем присоединения подходящих дискретных элементов.

Рассмотрим группу $\pm SL_3 \ni a, \det a = \pm 1$. Классификация ее подгрупп с максимальными конечными или предельными (по числу элементов) компактными фактор-группами по связным компонентам единицы проводится путем исследования нормализаторов непрерывных подгрупп в группе $\pm SL_3 \ni a$ и представлена в таблице 2, где указаны базисы алгебр Ли и образующие соответствующих фактор-групп. Описание подгрупп дано с точностью до сопряженности в полной линейной группе GL_3 . Все подгруппы группы $\pm SL_3$ с конечным числом элементов сопряжены в ней известным кристаллографическим подгруппам ортогональной группы O_3 (§ 1.2).

В таблице 2 использованы обозначения, которые в связи с необходимым уточнением описания несопряженности подгрупп несколько изменены по сравнению с обычными обозначениями кристаллографических групп: G_0 — связная компонента единицы группы G ; m_α — отражение вдоль базисного вектора e_α ; n_α — поворот вокруг e_α на угол $2\pi/n$, n — натуральное число (символ ∞_α означает непрерывную группу вращений вокруг e_α); элемент $\bar{6}$, входящий в группу симметрии куба, представляет собой зеркальный поворот (с отражением вдоль оси поворота) на угол $\pi/3$ вокруг вектора $e_1 + e_2 + e_3$. Остальные обозначения такие же, как в таблице 1.

Окончательная классификация подгрупп группы $\pm SL_3$ сводится к перечислению подгрупп указанных в таблице 2 максимальных фактор-групп, причем не сопряженных в этих же фактор-группах. Это связано с тем, что в случае сопряжения подгрупп группы $\pm SL_3$ с одинаковой связной компонентой единицы G_0 представитель преобразования сопряжения должен входить в нормализатор G_0 в $\pm SL_3$. В полной группе O_3 эти подгруппы могут быть сопряжены, поэтому возникает необхо-

димось дополнительной классификации.

Среди максимальных фактор-групп есть несколько характерных типов групп, подгруппы которых мы укажем ниже. Группы вида $\{m_1\}$, $\{m_1, m_2\}$, $\{m_1, 2_1\}$, $\{m_1, m_2, m_3\}$ коммутативны и содержат только элементы второго порядка. Поэтому все их подгруппы не сопряжены и их образующие получаются из исходных и их всевозможных произведений. Группа $\{m_1, \infty_1\}$ также коммутативна, все ее конечные подгруппы в ней не сопряжены и равны $\{n_1\}$, $\{n_1, m_1\}$, $\{2n_1\}$ ($2n_\alpha$ — зеркальный поворот на угол π/n вокруг e_α).

Подгруппы группы симметрии цилиндра $\{m_1, m_2, \infty_2\}$ строятся с помощью приема, использованного в § 1.2. Выделим инвариантную подгруппу собственных ($\det a = 1$) поворотов $\{2_1, \infty_2\}$. Образующая соответствующей фактор-группы отвечает полному отражению $\bar{2}$, которое коммутирует со всеми элементами. Все несопряженные конечные группы $\{2_1, \infty_2\}$ подгруппы есть $\{n_2\}$ и $\{2_1, n_2\}$. Остальные несопряженные подгруппы полной группы $\{m_1, m_2, \infty_2\}$ получаются либо простым присоединением к образующим указанных подгрупп элемента $\bar{2}$, либо с помощью выделения из них подгрупп индекса два и добавлением всех произведений отражения $\bar{2}$ и оставшихся элементов. Опуская лишние (сопряженные) подгруппы, имеем

$$\{m_1, m_2, \infty_2\} \supset \{n_2\}, \{\bar{2}n_2\}, \{2_1, n_2\}, \{m_1, n_2\}, \{m_2, n_2\}, \{m_1, \bar{2}n_2\}, \{m_1, m_2, n_2\} \quad (2.3.1)$$

Подгруппы группы $\{m_1, m_2, 4_2\}$, которая является группой симметрии правильной четырехугольной призмы, строятся аналогичным образом. Здесь следует иметь в виду несопряженность также и элементов вида 2_1 и 2_{13} , m_1 и m_{13} (в группе нет преобразований, взаимно отображающих их собственные векторы), где пара индексов $\alpha\beta$ означает ось $e_\alpha + e_\beta$. Итак,

$$\begin{aligned} \{m_1, m_2, 4_2\} \supset & \{1\}, \{2_1\}, \{2_{13}\}, \{2_2\}, \{4_2\}, \{\bar{2}\}, \{m_1\}, \{m_{13}\}, \{m_2\}, \\ & \{\bar{4}_2\}, \{2_1, 2_2\}, \{2_{13}, 2_2\}, \{2_1, 4_2\}, \{2_{13}, 4_2\}, \{m_1, 2_1\}, \{m_2, 2_2\}, \\ & \{m_{13}, 2_{13}\}, \{m_1, 2_2\}, \{m_1, m_2\}, \{m_{13}, 2_2\}, \{m_{13}, m_2\}, \{m_1, 4_2\}, \\ & \{m_{13}, 4_2\}, \{m_2, 4_2\}, \{m_1, \bar{4}_2\}, \{m_{13}, \bar{4}_2\}, \{m_1, m_2, 2_2\}, \{m_{13}, m_2, 2_2\} \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Составим подгруппы группы симметрии куба $\{\bar{6}, 4_2\}$. Выделяя нормальный делитель $\{3, 4_2\}$, состоящий из собственных

поворотов (3 без индекса означает поворот вокруг $e_1 + e_2 + e_3$ на $2\pi/3$, символ $\alpha - \beta$ — ось $e_\alpha - e_\beta$), получим следующие несопряженные подгруппы, выписанные с возрастанием числа элементов:

$$\begin{aligned} \{1\}, \{2_{13}\}, \{2_2\}, \{3\}, \{4_2\}, \{2_1, 2_2\}, \{2_{13}, 2_2\}, \\ \{2_{1-2}, 3\}, \{2_1, 4_2\}, \{2_2, 3\}, \{3, 4_2\} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Присоединяя, как и выше, полное отражение $\bar{2}$ и отбрасывая лишние подгруппы соответственно имеем

$$\begin{aligned} \{\bar{2}\}, \{m_{13}\}, \{m_{13}, 2_{13}\}, \{m_2\}, \{m_2, 2_2\}, \{\bar{6}\}, \{\bar{4}_2\}, \{m_2, 4_2\}, \{m_1, 2_2\}, \\ \{m_1, 2_1, 2_2\}, \{m_{13}, 2_2\}, \{2_{13}, m_2\}, \{m_{13}, 2_{13}, 2_2\}, \{m_{1-2}, 3\}, \\ \{m_{1-2}, 2_{1-2}, 3\}, \{m_1, 4_2\}, \{m_1, \bar{4}_2\}, \{m_{13}, \bar{4}_2\}, \{m_1, 2_1, 4_2\}, \{2_2, \bar{6}\}, \\ \{3, \bar{4}_2\}, \{4_2, \bar{6}\} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Таким образом, с учетом конечных подгрупп получаем всего 3 серии подгрупп с одним непрерывным и одним натуральным параметрами, 64 серии с непрерывным параметром, 42 серии с натуральным и 371 отдельную подгруппу. Всего 480 типов.

Аналогично подгруппам группы $\pm SL_3$ строятся и подгруппы полной линейной группы GL_3 , полная классификация которых еще не проведена. Описание подгрупп с конечным числом связных компонент группы $\pm SL_3$ дано в работе [19], где также описано присоединение дискретных элементов к однопараметрическим подгруппам группы GL_3 . В работе [13] такая же задача полностью решена для подгрупп группы Лоренца.

Таблица 2. Подгруппы с максимальными фактор-
группами.

№	Алгебра Ли	x	$\max(G/G_0)$
1.1	$x(e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3) + e_2^1 - e_1^2,$ $x \geq 0$	0 $\neq 0$	m_2, m_3 m_3, ∞_3
1.2	$x(e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3) + e_2^1,$ $x = 0; 1$	0 1	m_1, m_2, m_3 $m_3, 2_3$
1.3	$e_1^1 + xe_2^2 - (1+x)e_3^3,$ $-1/2 < x \leq 1$	0 1 $\neq 0; 1$	$m_1, m_2, 4_2$ m_2, m_3, ∞_3 m_1, m_2, m_3
1.4	$e_2^1 + e_3^2$		$m_2, 2_2$
2.1	$e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3, e_2^1 - e_1^2$		m_2, m_3
2.2	$e_1^1 - e_2^2, e_1^1 - e_3^3$		$\bar{0}, 4_2$
2.3	$e_2^1 + e_3^2, e_3^1$		$m_2, 2_2$
2.4	$e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3, e_2^1$		m_1, m_2, m_3
2.5	e_2^1, e_3^1		m_1, ∞_1, m_2
2.6	e_3^1, e_3^2		m_2, m_3, ∞_3
2.7	$e_1^1 - e_3^3, e_2^1 + e_3^2$		$m_2, 2_2$
2.8	$xe_1^1 + (1+x)e_2^2 - (1+2x)e_3^3, e_2^1$		m_1, m_2, m_3
2.9	$e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3 - 3e_2^1, e_3^1$		$m_3, 2_3$
2.10	$2e_1^1 - e_2^2 - e_3^3 - 3e_3^2, e_3^1$		$m_1, 2_1$
3.1	$c_2^1 + c_1^2, c_3^1 + c_1^3, c_3^2 - c_2^3$		m_1, m_2
3.2	$c_1^1 - e_2^2, e_2^1, e_1^2$		m_2, m_3
3.3	$e_2^1 - e_1^2, e_3^1 - e_1^3, e_3^2 - e_2^3$		m_1
3.4	$e_1^1 - e_3^3, e_2^1 + e_3^2, e_3^1$		$m_2, 2_2$
3.5	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1$		m_1, m_2, m_3
3.6	$(1+x)e_1^1 - xe_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1,$ $ x \leq 1$	-1 1 $\neq \pm 1$	$m_1, 4_1, m_2$ m_1, ∞_1, m_2 m_1, m_2, m_3

Таблица 2. Подгруппы с максимальными фактор-
группами (продолжение).

№	Алгебра Ли	x	$\max(G/G_0)$
3.7	$x(2e_1^1 - e_2^2 - e_3^3) - e_3^2, e_2^1, e_3^1,$ $x = 0; 1$	0 1	m_1, m_2, m_3 $m_1, 2_1$
3.8	$x(2e_1^1 - e_2^2 - e_3^3) - e_3^2 + e_3^1, e_2^1, e_3^1,$ $x \geq 0$	0 $\neq 0$	m_1, m_2 m_1
3.9	$xe_1^1 + e_2^2 - (1+x)e_3^3, e_3^1, e_3^2,$ $ x \leq 1$	-1 1 $\neq \pm 1$	$m_2, m_3, 4_3$ m_1, m_3, ∞_3 m_1, m_2, m_3
3.10	$e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3 + e_2^1, e_3^1, e_3^2$		$m_3, 2_3$
3.11	$x(e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3) + e_2^1 - e_1^2, e_3^1, e_3^2,$ $x \geq 0$	0 $\neq 0$	m_1, m_3 m_3
4.1	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1$		$m_1, 4_1, m_2$
4.2	$2e_1^1 - e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1, e_3^2 - e_3^3$		m_1, m_2
4.3	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_3^1, e_3^2$		$m_2, m_3, 4_3$
4.4	$e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3, e_2^1 - e_1^2, e_3^1, e_3^2$		m_2, m_3
4.5	$e_1^1 - e_2^2, e_2^1, e_3^1, e_3^2$		m_1, m_2, m_3
4.6	$(1+x)e_1^1 - xe_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1, e_3^2,$ $x \leq 1$		m_1, m_2, m_3
4.7	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1$		m_2, m_3
5.1	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1, e_3^2$		m_1, m_2, m_3
5.2	$e_1^1 - e_2^2, e_2^1, e_3^1, e_3^2$		m_2, m_3
5.3	$e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1, e_3^2$		m_1, m_2
6.1	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1, e_3^2$		m_2, m_3
6.2	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1, e_3^2, e_3^3$		m_1, m_2
8.1	$e_1^1 - e_2^2, e_2^2 - e_3^3, e_2^1, e_3^1, e_3^2,$ e_1^3, e_3^2, e_2^3		m_1

§ 2.4. Тензорные инварианты

Рассмотрим вопрос об описании множеств тензорных инвариантов подгрупп группы $\pm SL_3$. Все конечные подгруппы группы $\pm SL_3$ сопряжены в ней конечным (кристаллографическим)

подгруппам группы ортогональных преобразований O_3 , классификация которых была приведена в § 1.2. Полное описание тензорных инвариантов подгрупп группы O_3 дано в работах [33, 34]. В работе [14, 33] аналогичная задача решена и для подгрупп группы Лоренца.

Опишем сначала тензорные инварианты конечных подгрупп. Рассмотрим в евклидовом векторном пространстве L^3 с базисом e_i ($i = 1, 2, 3$) и метрическим тензором

$$g = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 \quad (2.4.1)$$

некоторое множество тензоров $T_1, \dots, T_N$, содержащее тензор g , который остается инвариантным для всех преобразований из группы O_3 . В силу присутствия невырожденного тензора g ограничимся тензорами с контравариантными компонентами.

Группа инвариантности данных тензоров $G\{T_1, \dots, T_N\}$ определяется максимальным множеством матриц (a_j^i) , связанных с преобразованиями базиса $e'_i = a_j^i e_j$, которые оставляют инвариантными значения компонент каждого из этих тензоров:

$$T_l^{i_1 i_2 \dots i_r} = b_{j_1}^{i_1} b_{j_2}^{i_2} \dots b_{j_r}^{i_r} T_l^{j_1 j_2 \dots j_r} \quad (2.4.2)$$

где $l = 1, 2, \dots, N$, матрица $b = a^{-1}$.

Очевидно, что свойства инвариантности тензоров сохраняются при всех операциях тензорной алгебры, перестановках индексов и, в данном случае, свертываниях с использованием тензора g с ковариантными компонентами. Этот процесс называется образованием комитантов.

Группа инвариантности множества тензоров определяется вещественными решениями алгебраической системы уравнений (2.4.2) и, следовательно, как линейная алгебраическая группа над полем вещественных чисел имеет конечное число связанных компонент [5]. То же справедливо и над полем комплексных чисел, что также будет использовано при построении алгебр тензорных инвариантов.

Для каждой из подгрупп группы O_3 строится алгебра всех инвариантных относительно нее тензоров. Этим решается следующая задача: дать полную классификацию всех указанных систем тензоров, содержащих g , по их группам инвариантности. Результаты приведены в таблице 3, где указаны образующие алгебр инвариантных тензоров, которые одновременно

определяют и саму группу инвариантности. Таким образом, каждая замкнутая подгруппа группы O_3 является группой инвариантности некоторой системы тензоров.

Для инвариантных тензоров введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 6 e_{[123]}, & D_{nh} &= \operatorname{Re}(e_1 + ie_2)^n, \\ T_d &= e_{(123)}, & T_h &= e_1^2 e_2^2 + e_2^2 e_3^2 + e_3^2 e_1^2, \\ O_h &= e_1^4 + e_2^4 + e_3^4, & Y_h &= 2\sqrt{5}(e_1^6 + e_2^6 + e_3^6) + \\ &+ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sum_{is} (e_1^4 e_2^2 + e_2^4 e_3^2 + e_3^4 e_1^2) + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sum_{is} (e_1^2 e_2^4 + e_2^2 e_3^4 + e_3^2 e_1^4) \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

тензор $e_{ij\dots k} = e_i e_j \dots e_k$, символы при индексах $()$ и $[]$ означают симметрирование и альтернирование с делением на факториал числа индексов, символ $\sum_{is}$ — суммирование по всем изомерам (отличающихся только перестановкой индексов) указанных тензоров.

Тензор D_{nh} инвариантен относительно группы n , которая в комплексном базисе $e_1 \pm ie_2, e_3$ имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} -e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{2\pi k}{n} \quad (2.4.4)$$

$k = 0, \dots, n-1$, позволяющий эффективно определить все ее инварианты, которые, таким образом, являются комитантами указанных в таблице тензоров. Все остальные надгруппы группы n (кроме групп симметрии правильных многогранников) получаются из нее последовательным удвоением числа элементов и, следовательно, содержат каждую предыдущую группу в качестве нормального делителя. При подходящем выборе базиса на множестве инвариантов подгруппы индекса 2 группа действует как умножение на ± 1 , что позволяет полностью определить все ее тензорные инварианты. Все они также являются комитантами указанных в таблице 3 тензоров.

Отметим, что в случае групп типа $n : 2$ в зависимости от четности числа n группа задается разными по структуре тензорами. В случае $m+1 : m$, когда $n=1$, следует добавить тензор e_2^2 .

Рассмотрим группы симметрии правильных многогранников. Пусть оси декартовых координат проходят соответственно через середины противоположных ребер тетраэдра и

икосаэдра и центры граней куба (рис. 1-2). Тогда тензор T_d пропорционален сумме третьих тензорных степеней единичных векторов, представляющих оси третьего порядка тетраэдра, тензор T_h — линейная комбинация изомеров свертков (по одной паре индексов) $T_d \cdot T_d$ и $T_d \cdot \epsilon$.

Тензор Y_h пропорционален сумме шестых степеней единичных векторов, направленных вдоль осей пятого порядка икосаэдра. В силу конструкции тензоры T_d , O_h и Y_h инвариантны соответственно относительно групп симметрии тетраэдра, куба и икосаэдра, причем они отличаются от изомеров степеней тензора g , определяющего группу O_3 .

Рассмотрим действие групп $3/2, 3/4, 3/5$. Эти группы являются неприводимыми над полем комплексных чисел C , что легко проверяется с помощью теории характеров (§ 1.4). В силу локального изоморфизма группы Лоренца, конечные подгруппы которой также сопряжены в ней подгруппам O_3 , и комплексной унимодулярной ортогональной группы $SO_3(C)$ ($\det a = 1$) существует только две цепочки вложений (без промежуточных групп)

$$\begin{aligned} 3/2 &\subset 3/4 \subset SO_3(R) \subset SO_3(C), \\ 3/2 &\subset 3/5 \subset SO_3(R) \subset SO_3(C) \end{aligned}$$

Пусть $m_0(r)$ — размерность подпространства инвариантных относительно данной группы тензоров в пространстве тензоров ранга r , которая определяется путем осреднения следа тензорного представления $(b_i^r)^r$ по соответствующей группе (§ 1.4). Тогда имеем следующие числа инвариантов

r	1	2	3	4	5	6
$3/2$	0	1	2	7	20	66
$3/4$	0	1	1	4	10	31
$3/5$	0	1	1	3	6	16
SO_3	0	1	1	3	6	15

Тензорные инварианты групп $SO_3(R)$ и $SO_3(C)$ согласно унитарному приему Вейля (методу аналитического продолжения) совпадают и все являются комитантами тензоров g и ϵ [7]. Таким образом, вычисления $m_0(r)$ показывают, что указанные в таблице 3 тензоры задают группы $3/2, 3/4, 3/5$ и над полем комплексных чисел.

В силу теоремы A'' работы Рашевского [38] всякий тензор, инвариантный над полем C относительно неприводимой

группы инвариантности системы тензоров $G\{\mathbf{T}_i\}$ имеет вид

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1(\mathbf{T}_i) \cdot (\epsilon \dots \epsilon), \quad (2.4.5)$$

где $\mathbf{S}_1(\mathbf{T}_i)$ — некоторый комитант тензоров $\{\mathbf{T}_i\}$, с которым полностью свертывается произведение ряда тензоров ϵ .

В данном случае квадрат тензора ϵ выражается через куб метрического тензора g . Поэтому в формуле (2.4.5) в силу присутствия g может быть свертка только с ϵ в первой степени, причем при этом не должна сужаться группа инвариантности. Это возможно, только если группа состоит из собственных вращений, сохраняющих ϵ . Но для всех таких групп (см. таблицу 3) тензор ϵ входит в число определяющих тензоров и дополнительная свертка с ним ничего нового не дает. Поэтому все инвариантные тензоры являются комитантами приведенных тензоров, задающих группу.

Отметим, что под «числовыми» коэффициентами алгебры тензорных инвариантов (алгебраического кольца) группы $G\{\mathbf{T}_i\}$ здесь следует понимать достаточно произвольные функции от скаляров, составленных из компонент тензоров $\{\mathbf{T}_i\}$ путем алгебраических операций, в которых при вещественности определяющих тензоров также можно ограничиться вещественными коэффициентами, отделяя при необходимости вещественную и мнимую части. Это обстоятельство важно при наличии среди тензоров $\{\mathbf{T}_i\}$ некоторого числа переменных в заданном базисе тензоров, что часто используется в механике сплошной среды при составлении тензорных уравнений.

Все остальные группы симметрии правильных многогранников получаются из рассмотренных постепенным удвоением числа элементов и их инварианты строятся с помощью уже рассмотренного выше приема.

Собственно говоря, можно было сразу ограничиться только конечными «ключевыми» подгруппами группы $\pm SL_3$, все остальные из которых получаются удвоением числа элементов. Это группы

$$2n - 1, \quad 3/2, \quad 3/5$$

В виду большого числа описанных выше подгрупп группы $\pm SL_3$ с конечной группой связанных компонент этот метод будет далее систематически использован.

Таблица 3. Тензорные инварианты конечных групп.

G/G_0	Тензоры	G/G_0	Тензоры
n	$g, \epsilon, D_{nh}, e_3,$	$3/2$	g, ϵ, T_d
$n : 2$	$g, \epsilon, e_3 D_{nh} (n \text{ — неч.}),$ $D_{nh} (n \text{ — четн.})$	$\bar{6}/2$	g, T_h
$\bar{2}n$	$g, e_{[12]}, e_3 D_{nh}$	$3/4$	g, ϵ, O_h
$n : m$	$g, e_{[12]}, D_{nh}$	$3/\bar{4}$	g, T_d
$n \cdot m$	g, D_{nh}, e_3	$\bar{6}/4$	g, O_h
$m \cdot n : m$	$g, D_{nh}, e_3^2 (n = 1)$	$3/5$	g, ϵ, Y_h
$\bar{2}n \cdot m$	$g, e_3 D_{nh}$	$3/\bar{10}$	g, Y_h

Приведем также системы инвариантных тензоров, определяющих соответствующие, если возможно, связные подгруппы или их минимальные надгруппы в группе SL_3 . Результаты представлены в таблице 4. Связные подгруппы перечисляются по принципу: размерность — номер в соответствии с таблицей 1. В скобках также указаны необходимые значения параметра x , числа m, n — натуральные взаимно простые. Здесь приходится различать тензоры с контравариантными (базис e_a) и ковариантными (базис e^a) или смешанными компонентами. Остальные обозначения те же.

Связные подгруппы группы SL_3 , не указанные в таблице 4, не дают новых тензорных инвариантов.

Специально отметим тензоры, определяющие группы со следующими фактор-группами по связной компоненте единицы $G_{2,2}$:

$$\{3\} \quad \epsilon, e_1^2(e^1)^2 + e_2^2(e^2)^2 + e_3^2(e^3)^2, \\ (e_1 + e_2 + e_3)(e^1 + e^2 + e^3) \quad (2.4.6)$$

$$\{2_2, 3\} \quad T_d$$

где тензор

$$e_1^2(e^1)^2 + e_2^2(e^2)^2 + e_3^2(e^3)^2$$

определяет группу G с максимальной фактор-группой $G/G_{2,2} = \{\bar{6}, 4_2\}$.

Эти две группы являются ключевыми для серии подгрупп со связной компонентой единицы $G_{2,2}$ и, следовательно, их инварианты достаточно легко составимы из тензоров (2.4.6) и

тензора e_{123} . То же касается и всех других надгрупп в группе $\pm SL_3$ тех групп, которые указаны в таблице 4.

Полные алгебры тензорных инвариантов всех подгрупп группы $\pm SL_3$ можно построить методами, развитыми выше (эта задача предоставляется читателю). Отбор групп инвариантности указанных выше тензоров, проведен в работе [21]. Кроме этого, можно указать на нерешенную задачу описания тензорных инвариантов подгрупп группы GL_3 .

Таблица 4. Определяющие тензоры связанных групп.

№	x	Тензоры	№	x	Тензоры
1.1 1.3	0 $\frac{m}{n} - 1$, $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} \leq 2$	$e_1^2 + e_2^2, e_{[12]}, e_3$ $e_{123}, e_1^m e_3^n$	1.2 1.4	0	$e_1, e_{[12]}, e_3$ $e_1, e_{[12]}, e_2^2 - 2e_{(13)}$
2.1 2.3 2.5 2.8 2.8	0 $-\frac{n}{m+2n}$	$e_3(e_1^2 + e_2^2), e_{[12]}$ $\epsilon, e_1 e^2 + e_2 e^3$ $e_1, e_{[12]}, e_{[13]}$ $e_1, e_{[12]} e_3$ $e_1^m (e^3)^n, e_{[12]} e_3$	2.2 2.4 2.6 2.8	$\frac{n}{m-2n}$	e_{123} $e_3 e_1^2, e_{[12]} e_3$ ϵ, e_1, e_2 $e_1^m e_3^n, e_{[12]} e_3$
3.1 3.3 3.7 3.9	0 $-\frac{m}{n}$, $n \leq m$	$\epsilon, e_1^2 - e_2^2 - e_3^2$ $\epsilon, e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ $\epsilon, e_1, e_{[12]}$ $\epsilon, e_1^m e_2^n$	3.2 3.6 3.8 3.11	$-\frac{n}{m}$, $n \leq m$ 0 0	$e_{[12]}, e_3$ $\epsilon, (e^2)^m (e^3)^n$ $\epsilon, e_1, (e^2)^2 + (e^3)^2$ $\epsilon, e_1^2 + e_2^2, e^3$
4.6	$-\frac{n}{m} - 1$	$\epsilon, e_1^m (e^3)^n$	4.7		$e_{[12]} e_3$
5.2		ϵ, e^3	5.3		ϵ, e_1
G_{81}		ϵ			

3. АНИЗОТРОПНЫЕ ЖИДКОСТИ

§ 3.1. Устойчивость

Многообразие возможных материальных симметрий, перечисленных выше, требует, вообще говоря, их физического отбора при конструировании моделей механики сплошных сред. Чтобы понять допустимые принципы выбора группы симметрии, рассмотрим в качестве примера в рамках ньютоновской механики простейшую модель среды с удельной внутренней энергией вида

$$u = 1/2 C^{\alpha\beta} \delta_{ij} x_{\alpha}^i x_{\beta}^j + \text{const}, \quad C^{\alpha\beta} = \text{const} \quad (3.1.1)$$

фактически линейной относительно компонент тензора деформаций $\epsilon_{\alpha\beta} = 1/2 (q_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta})$, $q_{\alpha\beta} = \delta_{ij} x_{\alpha}^i x_{\beta}^j$. При постоянной начальной плотности ρ_0 уравнения движения такой среды будут представлять собой три независимых однородных линейных уравнения

$$x_{tt}^i = C^{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}^i \quad (3.1.2)$$

где нижние индексы означают производные по t и ξ^{α} . Тензор напряжений имеет вид $p^{\alpha\beta} = 2\rho \delta u / \delta q_{\alpha\beta} = \rho C^{\alpha\beta}$.

Отметим, что данная модель несколько отличается от стандартной линейной модели Гука, в которой удельная внутренняя энергия квадратична по компонентам тензора деформаций, линеаризованного относительно состояния $x^k = \xi^k$.

Группа материальной симметрии такой среды определяется видом симметричного тензора C . Пусть тензор C имеет диагональный вид с числами c_1, c_2, c_3 на диагонали. Ясно, что условия корректности постановки задачи с начальными данными требуют, во всяком случае неотрицательности чисел c_{α} как коэффициентов функции (3.1.1). Таким образом, во-первых, сразу могут быть отброшены все группы симметрии типа преобразований Лоренца, оставляющие инвариантными законнеопределенные квадратичные формы.

Рассмотрим далее групповую классификацию данного уравнения, используя непрерывные группы симметрии одного неотрицательного симметричного тензора второго ранга. Если $c_{\beta} \neq 0$, то с помощью растяжения ξ^{β} всегда можно сделать $c_{\beta} = 1$. Имеются следующие случаи:

а) $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ — изотропное упругое тело, выдерживающее только определенные растягивающие нагрузки, группа симметрии SO_3 ;

б) $c_1 = c_2 = 1, c_3 = 0$ — группа типа группы Галилея, среда не реагирует на нагрузки вдоль оси ξ^3 ;

в) $c_1 = 1, c_2 = c_3 = 0$ — группа, оставляющая инвариантным вектор e_1 , среда реагирует только на нагрузку вдоль оси ξ^1 ;

г) все $c_\alpha = 0$ — «пыль», среда без напряжений, группа симметрии — GL_3 .

Итак, требование неотрицательной определенности тензора C проводит определенный отбор допустимых в данном случае групп. Собственно говоря, к строгой гиперболичности с $c_\beta > 0$ приводит только одна группа SO_3 .

Для более или менее сложной зависимости $u(s(\xi^\gamma), q_{\alpha\beta})$ анализ сводится к исследованию гиперболичности нелинейных уравнений типа уравнений (*)

$$\delta_{ij} x_{tt}^j = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^i \partial x_\beta^j} x_{\alpha\beta}^j + F_i(x^i, t, \xi^\gamma, x_t^i, x_\alpha^j), \quad (3.1.3)$$

где явно выделены члены, содержащие вторые производные. Далее будем предполагать зависимость u от своих аргументов, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемой, а F_i — непрерывными.

В уравнении (3.1.3) допускается и наличие массовых сил, зависящих от младших производных. Анизотропия среды считается полностью замороженной в среду в смысле зависимости сопутствующих компонент, например, векторов, задающих анизотропию. Однако, результаты остаются справедливыми, если рассмотреть, отказавшись от замороженности анизотропии и адиабатичности, и так называемые релаксационные модели, известные в механике магнитных жидкостей [9, 10], в которых (при лагранжевом подходе) добавляются для описания диссипативных процессов только производные первого порядка по времени t .

В общем случае требуется исследовать неотрицательную

определенность биквадратичной формы [12]

$$E = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^i \partial x_\beta^j} m^i m^j n_\alpha n_\beta = \left(4 \frac{\partial^2 u}{\partial q_{\alpha\beta} \partial q_{\mu\nu}} + 2 \frac{\partial u}{\partial q_{\beta\nu}} q^{\alpha\mu} \right) m_\alpha n_\beta m_\mu n_\nu, \quad (3.1.4)$$

где $m_\alpha = m^i x_\alpha^i \delta_{ij}$.

Смысл векторов $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ можно установить, рассматривая распространение волны слабого разрыва, при котором функции $x^i(\xi^\alpha, t)$ являются гладкими. Тогда для вторых производных имеем следующие кинематические условия на разрыве [9, 10] $[x_{\alpha\beta}^i] = m^i n_\alpha n_\beta$, $[x_{tt}^i] = m^i D^2$, где вектор $\mathbf{m}$ характеризует величину скачка, а единичный вектор $\mathbf{n}$ — направление его распространения, D — величина скорости распространения скачка относительно среды. Используя уравнение (3.1.3), при заданном $\mathbf{n}$ получим систему линейных однородных уравнений для определения вектора $\mathbf{m}$, содержащую неотрицательное собственное число D^2 , нетривиальная разрешимость которой при любом $\mathbf{n}$ и представляет предмет исследования.

Отметим, что для несжимаемой среды соотношение $(\det(q_{\alpha\beta}))_t = 0$ приводит на слабых разрывах к условию поперечности скачка $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$. При этом после исключения давления, играющего роль множителя Лагранжа, мы приходим к исследованию неотрицательности формы E на множестве ортогональных векторов $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$. Таким образом, вначале можно исследовать условия гиперболичности уравнений для соответствующих несжимаемых сред, полагая в метрических аргументах функции u $\det(q_{\alpha\beta}) = 1$.

Ограничимся четырехпараметрическими подгруппами группы SL_3 (таблица 2). В этом случае функция u будет зависеть только от одного существенного инварианта $I(q_{\alpha\beta})$. Удобно использовать произвольный базис, выбранный в данной точке. Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — векторы, задающие свойства анизотропии среды, контравариантные и соответственно ковариантные компоненты которых в сопутствующем базисе, не зависят от дисторсии x_α^i , характеризующей состояние среды. Тогда нужные инварианты можно представить в виде:

- 1) $I = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{A}|}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$;
- 2) $I = \frac{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{A}|}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$;
- 3) $I = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{a}|}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq 0$;

$$4) I = \frac{|\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2}{|\mathbf{a}|}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq 0;$$

$$5) I = |\mathbf{a}|^2$$

$$6) I = |\mathbf{a}|^{2(1+x)} |\mathbf{A}|^{-2}, \quad x \leq 1, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = 0;$$

$$7) I = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{A}|^2, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \neq 0;$$

С учетом зависимости $u(I)$ можно представить E как

$$E = u'Q + u''P^2, \quad Q = \frac{\partial^2 I}{\partial x_\alpha^i \partial x_\beta^j} m^i m^j n_\alpha n_\beta, \quad P = \frac{\partial I}{\partial x_\alpha^i} m^i n_\alpha.$$

Вычисление форм P и Q в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1 = \mathbf{m}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$ дает

1)

$$P = -\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{|\mathbf{A}|} - A_1 A_2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{A}|^3},$$

$$Q = 2 \frac{a_1 b_1}{|\mathbf{A}|} + 2 A_1 A_2 \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{|\mathbf{A}|^3} - A_2^2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{A}|^3} + 3 A_1^2 A_2^2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{A}|^5};$$

2)

$$P = -2 \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{|\mathbf{A}|} - A_1 A_2 \frac{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{A}|^3},$$

$$Q = 2 \frac{a_1^2 + b_1^2}{|\mathbf{A}|} + 4 A_1 A_2 \frac{b_1 b_2 + a_1 a_2}{|\mathbf{A}|^3} - A_2^2 \frac{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{A}|^3} +$$

$$+ 3 A_1^2 A_2^2 \frac{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2}{|\mathbf{A}|^5};$$

3)

$$P = \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1}{|\mathbf{a}|} + a_1 a_2 \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{a}|^3},$$

$$Q = 2 \frac{A_2 B_2}{|\mathbf{a}|} + 2 a_1 a_2 \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1}{|\mathbf{A}|^3} - a_1^2 \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{a}|^3} + 3 a_1^2 a_2^2 \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{a}|^5};$$

4)

$$P = 2 \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{|\mathbf{a}|} + a_1 a_2 \frac{|\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2}{|\mathbf{a}|^3},$$

$$Q = 2 \frac{A_2^2 + B_2^2}{|\mathbf{a}|} + 4 a_1 a_2 \frac{B_1 B_2 + A_1 A_2}{|\mathbf{a}|^3} - a_1^2 \frac{|\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2}{|\mathbf{a}|^3} +$$

$$+3a_1^2 a_2^2 \frac{|\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{B}|^2}{|\mathbf{a}|^5};$$

5)

$$P = -2a_1 a_2, \quad Q = 2a_1^2;$$

6)

$$P = -2 \frac{|\mathbf{a}|^{2x}}{|\mathbf{A}|^2} \left((1+x)a_1 a_2 + A_1 A_2 \frac{|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{A}|^2} \right),$$

$$Q = 2 \frac{|\mathbf{a}|^{2x}}{|\mathbf{A}|^2} \left((1+x) \left(2x \frac{a_1^2 a_2^2}{|\mathbf{a}|^2} + a_1^2 + 4 \frac{a_1 a_2 A_1 A_2}{|\mathbf{A}|^2} \right) - \frac{A_2^2 |\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{A}|^2} + \right. \\ \left. + 4 \frac{A_1^2 A_2^2 |\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{A}|^4} \right),$$

7)

$$P = 2A_1 A_2 |\mathbf{a}|^2 - 2a_1 a_2 |\mathbf{A}|^2,$$

$$Q = 2a_1^2 |\mathbf{A}|^2 + 2A_2^2 |\mathbf{a}|^2 - 8a_1 a_2 A_1 A_2$$

Указанные компоненты векторов анизотропии представляют собой скалярные произведения типа $a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{m}$ и так далее, и формы P, Q могут быть выписаны далее в любом базисе.

Будем говорить, что состояние сплошной среды, характеризующееся дисторсией, в данной материальной точке неустойчиво, если существует хотя бы одна пара векторов $\mathbf{m}, \mathbf{n}$, для которой $E < 0$. Среда неустойчива в данной точке, если ее состояния для почти всех дисторсий являются неустойчивыми. Чтобы исследовать вопрос о возможной неустойчивости среды вне зависимости от вида функции $u(I)$, рассмотрим множество пар $M(\mathbf{m}, \mathbf{n})$, удовлетворяющих уравнению $P = 0$. Тогда при $u'(I) \neq 0$ анализ неустойчивости сводится к исследованию возможности перехода через нулевое значение формы Q на множестве M .

В случаях 1 и 2 положим $\mathbf{n} = \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$, тогда $P = 0$. В первом случае величина $Q|\mathbf{A}|(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|)^{-1}$ принимает все значения из отрезка $[-1; 1]$ и, таким образом, является знакопеременной. Во втором все значения из $[-1; 1]$ принимает величина $Q|\mathbf{A}|\{(|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2)^2 + 4(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2\}^{-1/2}$.

В случаях 3 и 4 результат формулируется аналогично с заменой соответственно векторов $\mathbf{n}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{A}$ на векторы

m, A, B, a . Следовательно, во всех четырех случаях среда в целом неустойчива.

Случаи 5 и 6 при $x = -1$ являются исключительными. Согласно таблице 1 они допускают расширение группы симметрии до пятипараметрической. При $P = 0$ форма Q не меняет знака, достигая лишь нулевого значения. Если ввести соответственно инварианты $J = |a|$ или $J = |A|$, то условия неотрицательности формы E принимают вид

$$u'(J) \geq 0, \quad u''(J) \geq 0, \quad (3.1.5)$$

при этом среду можно считать устойчивой.

В случае 6 при любом $x \neq -1$, выбирая $m = a \times A / |a \times A|$, $A \cdot n \neq 0$, получим $P = 0$, $Q < 0$. Далее положим $(a \cdot n)^2 / |a|^2 = 1/2$, тогда при $P = 0$ форма

$$Q = 2 \frac{|a|^{2(1+x)}}{|A|^4} \left(2 \frac{(A \cdot m)^2}{|A|^2} - 1 \right) (A \cdot n)^2 > 0,$$

если только $1/2 < (A \cdot m)^2 |A|^{-2} < 1$. Можно показать, что эти условия выполняются при достаточно малых $|A \cdot n| \neq 0$, зависящих от значения x . Таким образом, все среды с $x \neq -1$ являются неустойчивыми.

В случае 7, если векторы A и a не коллинеарны и, как можно считать, составляют угол $\alpha \in (0; \pi/2)$, рассмотрим векторы m и n , принадлежащие плоскости векторов A, a . Тогда при $P = 0$ форма Q принимает два значения $2|a|^2 |A|^2 \sin \alpha (\sin \alpha \pm 1)$ и, таким образом, знакопеременна. Случай $\alpha = 0$ всегда приводит к $P = 0$ и $Q \geq 0$, однако, отвечает частному виду деформированного состояния. Среда в целом неустойчива.

Учет сжимаемости приводит к рассмотрению дополнительной зависимости u от $\det(q_{\alpha\beta})$ и расширению множества допустимых пар до $m \cdot n \geq 0$. Однако, результаты исследования неустойчивости для несжимаемых сред при $m \cdot n = 0$ остаются справедливыми и оставляют возможность существования устойчивых сред только в случаях 5 и 6 ($x = -1$), в зависимости от вида функции $u(q_{\alpha\beta})$, и, в частности, в случае обычной изотропной жидкости с группой материальной симметрии SL_3 .

С точки зрения физических приложений случай 6 ($x = -1$) отвечает, например, магнитной гидродинамике с идеальной проводимостью электрического тока (в этом случае магнитное

поле, как антисимметричный тензор второго ранга, имеет вид $\epsilon_0 \cdot \mathbf{A}$, где ϵ_0 — тензор Леви-Чивита начального состояния), а также в теории жидких кристаллов средам со стержнеобразными молекулами или средам с более сложными подобными структурными образованиями (нематикам) с вектором ориентации стержней $\mathbf{A}$, случай 5 соответствует средам, состоящим из дискообразных молекул, или слоистым жидкокристаллическим средам (смектикам) с вектором $\mathbf{a}$, нормальным к слоям. Приведенные результаты получены в работе [17]

Дадим также необходимые и достаточные условия для положительной определенности формы E , налагаемые на вид функции u для сжимаемых сред [27]. Введем удельный объем $V = 1/\rho$. Тогда

$$\begin{aligned} 5) \quad & u_J > 0, \quad u_{VV} > 0, \quad u_{JJ}u_{VV} > V^2 (u_J/V)_V^2; \\ 6, x = -1) \quad & u_J > 0, \quad u_{VV} > 0, \quad u_{JJ}u_{VV} > u_{JV}^2 \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

При отсутствии зависимости u от V сюда добавляется еще неравенство $u_{JJ} > 0$ (см.(3.1.5)).

Для групп материальной симметрии меньшей размерности задача о гиперболичности уравнений движения в общем случае еще ждет своего решения. Известны необходимые условия для изотропного упругого тела [12], а также могут быть предложены некоторые достаточные.

§ 3.2. Жидкие кристаллы

Жидкие кристаллы представляют собой вещества, в основном, органического происхождения, при равновесии или движении которых приходится учитывать ориентацию их молекул или более сложных структурных образований. Различают два больших класса жидких кристаллов — нематического (нити) и смектического (мыла) типов, у которых структурные элементы имеют либо вытянутую, либо плоскую формы.

С другой стороны, благодаря возможности с помощью организации течения или приложения внешних полей и создания специальных краевых условий легко управлять ориентацией, жидкие кристаллы имеют уникальные оптические свойства. В зависимости от действия тепловых условий или влияния концентрации растворителя жидкие кристаллы бывают термотропные и лиотропные.

Типичным примером термотропного нематического жидкого кристалла служит 4-метоксибензолиден-4'-бутиланилина (МББА), молекулы которого по форме похожи на жесткие стержни диаметром 0,5 нм и длиной 2 нм с относительно гибкой короткой концевой цепью. Мезофаза существует в интервале от 16 — 21° С до 39 — 47° С в зависимости от чистоты образца.

Отметим, что в технических приложениях часто возникают самые разнообразные задачи о движении смесей жидкостей или газов с твердыми несферическими частицами [2, 11], вплоть до проблем ледохода и лесосплава.

Ориентация жидкого кристалла, осредненная по большому числу молекул, в рамках механики сплошной среды описывается единичным вектором $\mathbf{n}$, называемым директором. Плотность многих жидких кристаллов меняется незначительно. Например, для МББА относительное изменение удельного объема при фазовом переходе жидкость — нематик равно 0.017 при плотности мезофазы $\rho = 1.09 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ [4]. Поэтому часто при теоретических исследованиях предполагается, что выполнено условие несжимаемости: $\rho = \text{const}$.

Вдали от условий фазовых переходов согласно теории жидких кристаллов, развитой К. Озеевом и Ф. Франком, плотность свободной энергии деформации ориентации имеет вид [25]

$$\rho F_d = \frac{1}{2} (K_1(\text{div } \mathbf{n})^2 + K_2(\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{n} + q)^2 + K_3|\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{n}|^2), \quad (3.2.1)$$

где в случае несжимаемого жидкого кристалла коэффициенты K_α , $\alpha = 1, 2, 3$, и параметр q являются функциями температуры. Собственно говоря, для нематической мезофазы $q = 0$. Выделяют также холестерические жидкие кристаллы, имеющие непараллельную структуру уже в свободном состоянии, когда $|q|$ порядка 10^7 1/м . Для МББА $K_1 = 6 \text{ пН}$, $K_2 = 4 \text{ пН}$, $K_3 = 7,5 \text{ пН}$ (здесь и ниже параметры МББА даны при $T = 25^\circ \text{ С}$ [4]), $q = 0$.

Формулировка краевых условий для образца жидкого кристалла зависит от вида плотности поверхностной энергии F_s . На границе с другими средами, твердыми или жидкими, часто принимается, что

$$F_s = \alpha + \frac{1}{2}\beta (1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})^2), \quad (3.2.2)$$

где $\mathbf{b}$ — единичный вектор оси «легкого» ориентирования. Для МББА на свободной поверхности $\alpha = 0,04$ Н/м. Параметр сцепления β порядка $10^{-8} - 10^{-3}$ Н/м и зависит от физико-химической обработки контактной поверхности [45]. Вектор $\mathbf{b}$ образует угол в 15° с нормалью ν [48] и, таким образом, даже при $\mathbf{n} = \mathbf{b}$ имеется еще частичная свобода ориентации, связанная с вращением $\mathbf{n}$ вокруг ν .

Состояние движения жидких кристаллов описывается в эйлеровых переменных полем скорости $\mathbf{v}$ и его производными: ускорением $d\mathbf{v}/dt$, тензором скоростей деформаций $\mathbf{e}$ с компонентами $e_{ij} = (1/2)(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$ и вектором вихря $\boldsymbol{\omega} = (1/2)\text{rot } \mathbf{v}$, а также вектором угловой скорости вращения директора $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{n} \times d\mathbf{n}/dt$.

Для несжимаемой среды $\text{div } \mathbf{v} \equiv e^i_i = 0$. Изменение вектора ориентации жидкого кристалла $\mathbf{n}$ со временем можно также характеризовать производной Яуманна $D_J \mathbf{n} \equiv d\mathbf{n}/dt - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{n}$, не зависящей от вращения системы отсчета как твердого тела. Наряду с предположением о несжимаемости, как правило, пренебрегают внутренним моментом количества движения, исключая тем самым из рассмотрения звуковые и ориентационные волны [4].

Уравнения движения и уравнения внутреннего момента количества движения (эквивалентные уравнениям эволюции директора $\mathbf{n}$) имеют вид [9, 10]

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \nabla_j p^{ij} + \rho F^i, \quad (3.2.3)$$

$$L^i + \nabla_j r^{ij} = \epsilon^{ijk} p_{jk}, \quad (3.2.4)$$

$$p^{ij} = -\rho \nabla^i n^k \frac{\partial F_d}{\partial \nabla_j n^k} - p \delta^{ij} + \tau^{ij}, \quad r^{ij} = \rho \epsilon^{ikl} n_k \frac{\partial F_d}{\partial \nabla_j n^l} \quad (3.2.5)$$

Причем предполагается, что $\epsilon^{ijk} n_i \tau_{jk} = 0$ и $L^i n_i = 0$. Здесь $\mathbf{p}$ — тензор напряжений, $\boldsymbol{\tau}$ — тензор вязких напряжений и $\mathbf{r}$ — тензор моментных напряжений, $\mathbf{F}$ — удельная массовая сила и $\mathbf{L}$ — объемная плотность момента сил.

Умножая скалярно уравнения (3.2.3) на $\mathbf{v}$ и (3.2.4) на $\boldsymbol{\Omega}$, составим уравнение живых сил

$$\rho \frac{d}{dt} \frac{v^2}{2} = \nabla_j (p^{ij} v_i + r^{ij} \Omega_i) - p^{ij} \nabla_j v_i - r^{ij} \nabla_j \Omega_i + \rho F^i v_i +$$

$$+(L^i - \epsilon^{ijk} p_{jk}) \Omega_i$$

Предполагая, что полное уравнение энергии имеет вид

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + u \right) = \nabla_j (p^{ij} v_i + r^{ij} \Omega_i - q^j) + \rho F^i v_i + L^i \Omega_i$$

где $u \equiv F + Ts = F_0(T) + F_d(T, n_i, \nabla_i n_j) + Ts$ — удельная внутренняя энергия среды, $s = -\partial F / \partial T$ — удельная энтропия и $\mathbf{q}$ — вектор потока тепла, получим [9, 10]

$$\rho \frac{ds}{dt} + \nabla_i \frac{q^i}{T} = q^i \nabla_i \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \tau^{ij} (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ijk} (\Omega^k - \omega^k)) \quad (3.2.6)$$

В уравнении производства энтропии (3.2.6) в качестве термодинамических сил можно выбрать $T \nabla(1/T)$ и $\boldsymbol{\tau}$ и соответствующих потоков — вектор $\mathbf{q}$ и тензоры ϵ , $n D_J n$.

Для нематической мезофазы в случае линейной и однородной зависимости сил от потоков с коэффициентами, которые являются тензорными функциями [34] от метрического тензора и директора $\mathbf{n}$, входящего четным образом, с точностью до переопределения давления имеем

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & \eta_1 \epsilon_{ij} + \eta_2 n_i \epsilon_{jk} n^k + \eta_3 n_j \epsilon_{ik} n^k + \eta_4 n_i n_j \epsilon_{kl} n^k n^l + \\ & + \eta_5 n_i D_J n_j + \eta_6 n_j D_J n_i, \quad q_i = -(\kappa_\perp \nabla_i T + \kappa_a n_i n^j \nabla_j T) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Коэффициенты вязкости $\eta_k, k = 1, \dots, 6$, называются коэффициентами Лесли [4]. Для МББА $\eta_1 = 83, \eta_2 = -35, \eta_3 = 46, \eta_4 = 6,5, \eta_5 = -1, \eta_6 = -77,5$ (мПа·с) и $\kappa_\perp = 0,126, \kappa_a = 0,084$ (Вт/(м·К)). Для сравнения для воды в тех же единицах $\eta_1 = 2, \kappa_\perp = 0,58$, остальные — нули.

Отметим неравенство $|\eta_6| \gg |\eta_5|$, характерное для нематической фазы веществ с вытянутыми молекулами. Для веществ с плоскими молекулами неравенство противоположно [28]. Соотношение $\eta_2 - \eta_3 \approx \eta_5 + \eta_6$ согласуется с принципом симметрии Онзагера. Второй закон термодинамики, связанный с неотрицательностью правой части равенства (3.2.6) требует также выполнения неравенств:

$$\begin{aligned} \eta_1 \geq 0, \quad \eta_1/2 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 \geq 0, \quad \eta_5 - \eta_6 \geq 0, \\ 4(2\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)(\eta_5 - \eta_6) - (\eta_5 + \eta_6 + \eta_2 - \eta_3)^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$\kappa_{\perp} \geq 0, \quad \kappa_{\perp} + \kappa_a \geq 0$$

что, очевидно, выполняется для МББА.

В качестве примера рассмотрим локальное влияние течения на ориентацию нематической фазы. Пусть имеет место стационарный неограниченный поток жидкого кристалла с полем скорости $\mathbf{v}(ky, 0, 0)$ и директором $\mathbf{n}(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, $k > 0$ и φ — постоянные. Внешние силы и моменты отсутствуют; давление, коэффициенты упругости и вязкости постоянны. Тогда уравнения (3.2.3)–(3.2.4) сводятся к уравнению $\tau_{12} - \tau_{21} = 0$, которое в силу (3.2.7) дает

$$\cos 2\varphi = \frac{\eta_5 - \eta_5}{\eta_2 - \eta_3}, \quad (3.2.9)$$

причем независимо от величины сдвига k . Для МББА правая часть (3.2.9) равна 0,944, $\varphi = \pm 9.6^\circ$. Экспериментально реализуется положительное значение.

Более подробный анализ этой задачи показывает, что существует еще одно, перпендикулярное потоку, положение равновесия директора. Однако, исследование устойчивости этих состояний дает, что устойчиво именно указанное выше значение, остальные неустойчивы.

Оценим порядок величин, входящих в уравнения (3.2.3), (3.2.4), (3.2.7) нематической мезофазы при изотермическом характере течения ($T = \text{const}$). Наряду с характерными для жидкости коэффициентами вязкости η_k входят модули упругости ориентации K_a . Используя, например, их средние абсолютные величины можно составить безразмерный малый параметр $\varepsilon = K\rho/\eta^2$. Для МББА $\varepsilon = 3,7 \cdot 10^{-6}$. Уравнения моментов (3.2.4) позволяет выразить производную директора $D_J \mathbf{n}$ через пространственные производные $\mathbf{n}$ и скорости $\mathbf{v}$

$$D_J n^i = \frac{1}{\eta_5 - \eta_6} \left(-\rho \frac{\partial F_d}{\partial n_j} + \rho \nabla_k \frac{\partial F_d}{\partial \nabla_k n_j} + (\eta_3 - \eta_2) e_k^j n^k - h^j \right) \times \\ \times (\delta_j^i - n^i n_j) \quad (3.2.10)$$

где $\mathbf{h} = \mathbf{n} \times \mathbf{L}$, и исключить ее из тензора вязких напряжений $\boldsymbol{\tau}$, входящего в уравнения движения (3.2.3). Тогда отношение полученных членов, содержащих производные от $\mathbf{n}$ и от $\mathbf{v}$, в полном тензоре напряжений $\mathbf{p}$ равно ε/Re , где $\text{Re} = v d \rho / \eta$ —

число Рейнольдса, v и d — характерные значения относительной скорости и линейного размера, входящие в краевые или начальные условия и связанные с постановкой задачи.

Возможны следующие, типичные для течений жидких кристаллов, диапазоны изменения числа Re .

1) $Re \ll \varepsilon$. В этом случае в уравнениях (3.2.10) в основном приближении выпадают все члены, содержащие скорость v и ее производные, и оно, независимым образом определяет эволюцию директора $\mathbf{n}$, как в покоящейся среде. Далее после определения $\mathbf{n}$ уравнения движения, которые можно записать в виде

$$\rho \frac{dv_i}{dt} + \nabla_i(p + \rho F_d) = \rho F_i + \nabla_j \tau_{ij}^j + ((\tau_{kl} - \pi_k) n^l - h_k) \nabla_i n^k \quad (3.2.11)$$

линеаризованные относительно компонент скорости v_i , определяют вместе с уравнением неразрывности $\nabla_i v^i = 0$ распределения p и $\mathbf{v}$.

2) $\varepsilon \ll Re \ll 1$. Вообще при всех $Re \gg \varepsilon$ в уравнениях (3.2.3) после исключения $D_j \mathbf{n}$ следует опустить члены, отвечающие упругости ориентации среды. При этом, если $\mathbf{h} = 0$ (например, нет внешних массовых пар), а также, если можно приближенно считать правую часть соотношения (3.2.9) равной ± 1 , что отвечает соответственно предельно удлинненным или уплощенным структурным элементам [28] уравнения (3.2.10) явно интегрируются: $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$, где контравариантные или соответственно ковариантные компоненты вектора $\mathbf{N}$ являются произвольными функциями только лагранжевых переменных. В первом случае говорят о «вмороженности» в среду интегральных кривых векторного поля $\mathbf{n}$, во втором — поле $\mathbf{n}$ ортогонально двум семействам вмороженных линий.

В частности, при $\varepsilon \ll Re \ll 1$ (приближение Стокса) в формуле для ускорения пренебрегают конвективным членом. Однако в отличие от случая изотропной несжимаемой жидкости уравнения движения в эйлеровом представлении остаются из-за наличия вектора ориентации $\mathbf{n}$ нелинейными, если только число Струхала $St = d/(vt)$, где t — характерное время задачи, не велико. При $St \sim Re^{-1} \gg 1$ вектор $\mathbf{n}$ можно считать зависящим только от эйлеровых переменных x^i , что характерно для задач об импульсном «просачивании» сквозь заданную в пространстве ориентационную решетку, уравнения движения линейны.

Пренебрежение в уравнениях (3.2.10) в приближении Стокса вторыми производными директора $\mathbf{n}$ при необходимости учета краевых условий, связанных, например, с заданием ориентации на опорных поверхностях, требует рассмотрения асимптотической теории «ориентационного» пограничного слоя толщиной порядка $d\sqrt{\varepsilon/\text{Re}}$.

3) $\text{Re} \gg 1$ при отсутствии турбулентности. Можно использовать уравнения идеальной изотропной несжимаемой жидкости с замороженной ориентацией, учитывая воздействие ориентационных и вязких краевых условий с помощью теории пограничного слоя.

Если нематики можно отнести к ориентирующимся средам типа молекулярных кристаллов, то смектики относятся скорее к классу структурирующимся сред. Часто смектические слои состоят из вытянутых молекул, расположенных под определенным углом к своему слою. При этом возможен небольшой обмен молекулами между слоями (эффект просачивания сквозь структуру).

В простейшей теории смектиков, предложенной П. де Женом, полагается [25, 28] $n_i = \nabla_i N / |\nabla N|$ и

$$\rho F_d = \frac{1}{8} B (|\nabla N|^2 - 1)^2 + \frac{1}{2} K (\Delta N)^2 \quad (3.2.12)$$

где скаляр N играет роль переменной, описывающей уравнением $N = \text{const}$ форму слоя; Δ — оператор Лапласа. Величина параметра B порядка 10^7 Н/м², K порядка 10 пН, как в нематической фазе. Таким образом, данная теория смектической фазы аналогична моментной теории упругости [9, 10] большей частью с нулевыми упругими постоянными и с очень малым (порядка 1 нм) параметром размерности длины $\sqrt{K/B}$. Аналогичным образом (с использованием двух скалярных переменных) строится и теория колончатой фазы [28], элементы которой образуются из плоских молекул-дисков.

Отметим следующие возможности развития теории «мягких» сред. Если пренебречь диссипативным эффектом «просачивания», то переменные типа N можно считать лагранжевыми, определяющими сильную связь между ориентацией и деформацией. В результате чего теория сводится к теории простых сред Нолла, но со вторыми производными от закона движения, входящими во внутреннюю энергию среды, с прило-

жениями для описания возможных агрегатных состояний всего многообразия перечисленных выше групп аффинной симметрии. При моделировании процессов длинноволнового приближения вторыми производными можно пренебречь и использовать полученные выводы об устойчивости сред с высокой материальной симметрией.

Другой возможностью является более широкое динамическое описание материальной симметрии, как в моделях жидких кристаллов, но с введением аффинного репера, канонического для данной группы симметрии, от векторов которого и их производных, помимо производных закона движения среды и энтропии, зависят энергия и диссипация среды. В такой теории структурируемых сред, элементы которых могут выстраиваться в наблюдаемые линии, поверхности, решетки, репер предполагается голономным, но не «вмороженным» в среду. Для моделирования фазовых переходов добавляются скалярные параметры порядка.

Традиционно к задачам гидродинамики жидких кристаллов помимо описания и расчетов разнообразных течений в ориентирующих внешних электрическом и магнитном полях и тепловых потоках относятся задачи о течениях в трубках, капиллярах, в слоях между движущимися твердыми или свободными поверхностями; о движении в жидких кристаллах твердых частиц, жидких и жидкокристаллических капель, пузырьков, отдельных больших молекул или молекулярных образований; о течениях различных смесей веществ, находящихся в одинаковых или разных мезофазах и других агрегатных состояниях. Значительное место занимают также исследования устойчивости течений, перехода к турбулентности и осредненного описания развитых турбулентных потоков. В крупных масштабах с применением модели Эриксона-Лесли это относится, например, к волокнистым суспензиям [2] и растворам полимеров.

Литература

1. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н. Гидродинамика жидких кристаллов // Итоги науки и техники. Гидромеханика. Том 7. М.: ВИНТИ, 1973. С. 106–213.
2. Бабкин В. А. Введение в механику волокнистых суспензий. Петрозаводск: Изд-во ПГУ, 1993. 108 с.
3. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
4. Блинов Л. М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978. 384 с.
5. Борель А. Линейные алгебраические группы // Арифметические группы и автоморфные функции. Под ред. И. И. Пятацкого-Шапиро. М.: Мир, 1969. С. 7–33.
6. Браун Г., Уолкен Дж. Жидкие кристаллы и биологические структуры. М.: Мир, 1982. 200 с.
7. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947. 408 с.
8. Вит Р. де. Континуальная теория дисклинаций // Механика. Новое в зарубежной науке. Том 9. М.: Мир, 1977. 208 с.
9. Галин Г. Я., Голубятников А. Н., Каменярж Я. А., Карликов В. П., Куликовский А. Г., Петров А. Г., Свешникова Е. И., Шикина И. С., Эглит М. Э. Механика сплошных сред в задачах. Том 1: Теория и задачи. Под ред. М. Э. Эглит. М.: Изд-во «Московский Лицей», 1996. 396 с.
10. Галин Г. Я., Голубятников А. Н., Каменярж Я. А., Карликов В. П., Куликовский А. Г., Петров А. Г., Свешникова Е. И., Шикина И. С., Эглит М. Э. Механика сплошных сред в задачах. Том 2: Ответы и решения. Под ред. М. Э. Эглит. М.: Изд-во «Московский Лицей», 1996. 394 с.
11. Гидродинамическое взаимодействие частиц в суспензиях. Под ред. Ю. А. Бувевича // Механика. Новое в зарубежной науке. Том 22. М.: Мир, 1980. 246 с.
12. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 304 с.
13. Голубятников А. Н. Подгруппы Ли группы Лоренца с конечной группой компонент // Докл. АН СССР. 1969. 186, №3. С. 503 – 505.

14. Голубятников А. Н., Лохин В. В. Тензорные инварианты подгрупп группы Лоренца // Докл. АН СССР. 1969. 187, №2. С. 249 – 251.
15. Голубятников А. Н. Непрерывные группы симметрии жидких кристаллов // Докл. АН СССР. 1978. 240, №2. 298 – 301.
16. Голубятников А. Н. Аффинные группы симметрии анизотропных сплошных сред и их инварианты // Современный групповой анализ. Под ред. Н. Х. Ибрагимова, Л. М. Берковича и др. М.: МФТИ, 1993. С. 25 – 32.
17. Голубятников А. Н., Калугин А. Г. Об устойчивости несжимаемых сплошных сред с высокой аффинной симметрией // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. 1996. №2. С. 59 – 62.
18. Голубятников А. Н., Калугин А. Г. Об устойчивости поверхности жидкости с анизотропным поверхностным натяжением // Материалы Международной конференции и Чебышевских чтений, посвященных 175-летию со дня рождения П. Л. Чебышева. Т. 2. М.: МГУ, 1996. С. 396 – 398.
19. Голубятников А. Н. Аффинная симметрия сплошных сред // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1997, №6. С. 56 – 59.
20. Голубятников А. Н. К теории аффинной симметрии поверхностного натяжения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1998, N 5. С. 61 – 63.
21. Голубятников А. Н. Аффинная симметрия и релаксационные модели сплошных сред // Упругость и неупругость. Под ред. Кийко И. А., Исраилова М. Ш., Бровко Г. Л. М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 88 – 90.
22. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
23. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.
24. Желнорович В.А. Теория спиноров и ее применение в физике и механике. М.: Наука, 1982. 272 с.
25. Жен П. Ж. де. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 400 с.
26. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математиче-

- ской физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
27. Калугин А. Г. Об устойчивости анизотропных сплошных сред // Современные методы и достижения в механике сплошных сред. Материалы конференции. М.: МГУ, 1997. С. 35 – 36.
 28. Кац Е. П., Лебедев В. В. Динамика жидких кристаллов. М.: Наука, 1988. 144 с.
 29. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1972. 336 с.
 30. Кострикин А. П. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977. 496 с.
 31. Куликовский А. Г., Любимов А. Г. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
 32. Куликовский А. Г., Свешникова Е. П. Нелинейные волны в упругих телах. М.: Изд-во «Московский лицей», 1998. 412 с.
 33. Лохин В. В. Нелинейные тензорные функции в пространстве Минковского // Модели и задачи механики сплошных сред. Научные труды НИИ механики МГУ. Том 31. М.: Изд-во МГУ, 1974. С. 6 – 66.
 34. Лохин В. В., Седов Л. П. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // Прикл. матем. и механ. 1963. 27, вып. 3. С. 393 – 417.
 35. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применения в физике. М.: Физмагиз, 1958. 354 с.
 36. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
 37. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 496 с.
 38. Рашевский П. К. Тензоры с данной группой инвариантности и сферические функции на однородных пространствах // Труды Моск. матем. общ-ва. Том 20. Изд-во МГУ, 1969. С. 83 – 110.
 39. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
 40. Седов Л. И. Механика сплошной среды. 5-е изд. М.: Наука, 1994. Том 1. 528 с. Том 2. 560 с.
 41. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 6-е изд. М.: Наука, 1967. 428 с.

42. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред // Успехи матем. наук, 1965. 20, вып. 5. С. 121 – 180.
43. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975. 680 с.
44. Спенсер Э. Математическая теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.
45. Сонин А. С. Введение в физику жидких кристаллов. М.: Наука, 1983. 320 с.
46. Трусдеа К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
47. Шубников А. В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 172 с.
48. Эриксен Дж. Исследования по механике сплошной среды // Механика. Новое в зарубежной науке. Том 13. М.: Мир, 1977. 248 с.
49. Coleman B. D. Simple liquid crystals // Arch. Ration. Mech. Anal. 1965. 20, No 1. 41 – 58.
50. Golubiatnikov A. N. Linear Groups of Symmetries of State Equations in Continuum Relativistic Mechanics // Ядерная физика, 2000. 63, No 4. С. 749 – 752.
51. Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Arch. Ration. Mech. Anal. 1958. 2, No 3. P. 197 – 226.
52. Wang C.-C. A general theory of subfluids // Arch. Ration. Mech. Anal. 1965. 20, No 1. 1 – 40.

Оглавление

Введение	3
1. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ	9
§ 1.1. Группы	9
§ 1.2. Преобразования	13
§ 1.3. Группы Ли	17
§ 1.4. Представления	25
§ 1.5. Инварианты	32
§ 1.6. Дифференциальные уравнения	42
2. МАТЕРИАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ	51
§ 2.1. Кинематика	51
§ 2.2. Непрерывные группы	55
§ 2.3. Группы с конечным числом связных компонент	63
§ 2.4. Тензорные инварианты	67
3. АНИЗОТРОПНЫЕ ЖИДКОСТИ	75
§ 3.1. Устойчивость	75
§ 3.2. Жидкие кристаллы	81
Литература	89

Голубятников Александр Николаевич

Аффинная симметрия сплошных сред

Подписано в печать 12.02.2001 г.

Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Объем 6 п.л.

Заказ 15

Тираж 100 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом
факультете МГУ. г. Москва, Ленинские горы.

Лицензия на издательскую деятельность ЛР №040746,
от 12.03.1996 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-
математического факультета и франко-русского центра
им. А.М.Ляпунова.