

Программа с/курса
«Некоторые вопросы тензорного аппарата механика и теории
математических моделей механики сплошных сред»
«Some questions of the tensor apparatus of mechanics and the theory
of mathematical models of continuum mechanics»

Для студентов 4-6 курсов и аспирантов, 1/2 г. или 1 г.

(с/курс по выбору)

д.ф.-м.н., проф. М.У. Никабадзе

Аннотация

Рассматриваются некоторые необходимые вопросы тензорного исчисления, применяемые при изучении теории математических моделей механики сплошных сред.

Сформулированы и решены задачи на собственные значения тензора любого четного ранга и тензорно-блочной матрицы, состоящей из тензоров одинакового четного ранга. В частности, построена полная система собственных тензоров для тензора любого четного ранга, а также полная система собственных тензорных столбцов для тензорно-блочной матрицы любого четного ранга, состоящей из четырех тензоров одинакового любого четного ранга. Дано определение символа структуры (анизотропии) тензорных объектов и соответствующих им материалов.

Изложены некоторые недостатки классических теорий. Рассмотрены различные подходы к построению математических моделей сред со структурой. Сформулированы первые 8 аксиом механики сплошных сред, необходимых для построения предлагаемой теории математических моделей сред со структурой: аксиома сплошности, аксиома евклидовости пространства, аксиома существования абсолютного времени, аксиомы сохранения массы и тензора микроинерции (момента инерции микрочастицы), аксиома изменения количества движения, аксиома изменения момента количества движения микрополярной теории, аксиома изменения полной энергии микрополярной теории (первый закон термодинамики), аксиома притока тепла (второй закон термодинамики). Получены уравнения неразрывностей в различных формах, а также дифференциальные уравнения движения относительно тензоров напряжений и моментных напряжений и дифференциальное уравнение притока тепла. Приведены определяющие соотношения для классической и микрополярной теорий упругости и вязкоупругости при неизотермических процессах. Сформулированы кинематические, статические, смешанные граничные условия и начальные условия, а также граничные и начальные условия теплового содержания.

Приведен вывод уравнений движения относительно вектора перемещений в случае классических теорий, а также уравнений движения относительно векторов перемещений и вращений для материалов без центра симметрии и с центром симметрии в случае микрополярных теорий упругости и вязкоупругости. Даны постановки начально-краевых задач. Даны представления решений динамических задач в классической (в случае изотропного и трансверсально-изотропного материалов) и микрополярной (в случае изотропного материала) теорий упругости и вязкоупругости.

Найдены тензоры-операторы кофакторов для оператора уравнений движения теории упругости в перемещениях и оператора напряжения, позволяющие расщеплять уравнения и граничные условия. При этом уравнения в случае однородных тел расщепляются всегда, а граничные условия при кусочно-плоской границе. Построен тензорно-блочный матричный оператор кофакторов для тензорно-блочного матричного оператора уравнений движения микрополярной теории упругости в перемещениях и вращениях для изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных однородных сред и получены уравнения по отдельности векторов перемещений и вращений. Расщепленные уравнения получены и для редуцированной среды. Построен тензорно-блочный матричный оператор кофакторов для тензорно-блочного матричного оператора напряжения и моментного напряжения в случае

редуцированной среды с кусочно-плоской границей. Из разделенных уравнений получены расщепленные уравнения статической задачи теорий призматических тел постоянной толщины. Из последних систем уравнений в свою очередь выведены уравнения в моментах неизвестных векторов относительно любой системы ортогональных полиномов. Получены уравнения различных приближений (с нулевого по восьмого порядка) в моментах относительно систем полиномов Лежандра и Чебышёва. Начиная с первого приближения, системы уравнений распадаются на две системы: одна относительно моментов четных порядков, другая относительно моментов нечетных порядков неизвестной векторной функции. В силу найденного оператора кофакторов для оператора любой из этих систем для каждого момента неизвестной векторной функции получается уравнение эллиптического типа высшего порядка.

Приведены численные решения задач различных приближений о тонком теле с двумя малыми размерами и прямоугольной тонкой плоской области с заземленными краями при различных нагрузках, а также о двухслойной двумерной области с заземленными краями.

Даны различные формы записи условий совместимости деформации в классической и микрополярной теориях. Сформулированы традиционные и новые постановки краевых в классической теории относительно тензора напряжений и тензора деформаций, а также в микрополярной теории относительно тензоров напряжений и моментных напряжений.

Приведены, кроме рассмотренных выше, определяющие соотношения некоторых материалов и даны их классификации на основании соответствующих символов анизотропии.

Приведены численные решения задач различных приближений о тонком теле с двумя малыми размерами и прямоугольной тонкой плоской области с заземленными краями при различных нагрузках, а также о двухслойной двумерной области с заземленными краями.

I. Некоторые вопросы тензорного аппарата механика

1. Определитель Грамма. Декартова система координат. Дельта Кронекера. Символы Леви-Чивиты и некоторые свойства. [1-3,12].
2. Криволинейная система координат. Координатные линии и поверхности. Ковариантные и контравариантные базисы. Фундаментальная матрица и обратная к ней матрица. Дискриминантный тензор и его компоненты. Свойства компонент дискриминантного тензора. Формулы связи между ковариантными и контравариантными базисными векторами с помощью компонент дискриминантного тензора. [1-3,12].
3. Единичный тензор второго ранга и его компоненты в различных базисах. Изотропный тензор второго ранга. Изотропные (базисные) тензоры четвертого ранга. Представления произвольного изотропного тензора четвертого ранга при различных симметриях его компонент. Формулы преобразования компонент тензоров при переходе от одной системы координат к другой. [12].
4. Определитель тензора второго ранга и его выражение с помощью компонент дискриминантного тензора, а также символов Леви-Чивиты. Тензор алгебраических дополнений (тензор кофакторов) для тензора второго ранга и его выражение с помощью компонент дискриминантного тензора. Обратный тензорный признак (или теорема о делении тензора). [1-3,12].
5. Обратный тензор к тензору второго ранга и его выражение с помощью компонент дискриминантного тензора [1-3,12]. Формулировки задач на собственные значения для тензора второго [1-3] и четвертого ранга [4,5,12]. Их характеристические уравнения и канонические представления. Канонический (главный) базис и главные направления.

Инварианты тензоров второго [1-3] и четвертого ранга [4,5,12]. Выражения классических инвариантов (имеющихся в характеристическом уравнении) второго [1-3] и четвертого [4,5,12] ранга через первые инварианты их степеней и обратно [4,11]. Теорема Гамильтона–Кели. [1-5,12].

6. Представление тензора в виде суммы симметричного и кососимметричного тензоров, а также в виде суммы шарового тензора и тензора девиатора [1-3,12]. Сопутствующий кососимметричному тензору вектор [1-3,12]. Формулы связи между кососимметричным тензором и сопутствующим ему вектором [1-3,12].
7. Деривационные формулы для ковариантных и контравариантных базисных векторов. Символы Кристоффеля первого и второго рода и их выражения через компоненты единичного тензора второго ранга. Ковариантные и контравариантные производные от компонент тензора второго ранга. Условия коммутативности повторных ковариантных производных от компонент тензора. Тензор кривизны Римана–Кристоффеля. [1-5,12].
8. Набла-оператор Гамильтона, градиент, дивергенция и ротор от тензора [1-3]. Тензор-оператор несовместимости от тензора второго ранга [1-3] и его выражение и различные эквивалентные формы равенства нулю [12].

II. Некоторые математические модели механики сплошных сред

II.a. Некоторые математические модели классической и микрополярной теорий упругости

1. О некоторых недостатках классической теории.
2. Различные подходы к построению математических моделей сред со структурой.
3. Аксиома 1 (аксиома сплошности).
4. Примерная иерархия структурных уровней материи. Классификация по характерным масштабам расстояния l_0 и времени t_0 .
5. Аксиома 2 (евклидовость пространства).
6. Аксиома 3 (существование абсолютного времени).
7. Пространственные (эйлеровы) и материальные (лагранжевы) координаты.
8. Аксиома 4 (аксиомы сохранения массы и тензора микроинерции (момента инерции микрочастицы)): аксиома 4.1 (аксиома сохранения массы), аксиома 4.2 (аксиома сохранения тензора микроинерции (момента инерции микрочастицы)).
9. Уравнения неразрывности в переменных Лагранжа.
10. Дифференцирование по времени интеграла по подвижному объему.
11. Уравнения неразрывности в переменных Эйлера.
12. Аксиома 5. Аксиома изменения количества движения. Следствие аксиомы 5: уравнение относительно тензора напряжений.
13. Аксиома 6. Аксиома изменения момента количества движения микрополярной теории. Следствие аксиомы 6: уравнение относительно тензора моментных напряжений.
14. Удельная энергия деформации и определяющие соотношения в микрополярной теории упругости.
15. Теорема живых сил в микрополярной теории.
16. Аксиома 7. Аксиома изменения полной энергии микрополярной теории (первый закон термодинамики).
17. Аксиома 8. Аксиома притока тепла (второй закон термодинамики). Дифференциальное уравнение притока тепла.
18. Граничные и начальные условия теплового содержания.
19. Определяющие соотношения для модели линейного упругого тела.

20. Представления решений динамических задач в классической теории упругости.
21. Представление решения динамических задач для изотропного материала в классической теории упругости.
22. Кинематические граничные условия, статические граничные условия, смешанные граничные условия, начальные условия.
23. Постановки начально-краевых задач в динамической классической теории упругости.
24. Представление решения динамических задач для трансверсально-изотропного материала в классической теории упругости.
25. Представление решения динамических задач для изотропного материала в микрополярной теории упругости.
26. Уравнения движения относительно векторов перемещений и вращений для упругого материала без центра симметрии.
27. О статических граничных условиях в линейной трехмерной микрополярной теории упругости.
28. Расщепление уравнения движения для однородной изотропной микрополярной среды.
29. Расщепление статических граничных условий.
30. Характеристическое уравнение для тензорно-блочного матричного оператора второго ранга.
31. Расщепление уравнений в перемещениях классической теории упругости для трансверсально-изотропного тела.
32. Расщепление статических граничных условий классической теории упругости для трансверсально-изотропного тела.
33. Определитель и тензор алгебраических дополнений суммы двух тензоров второго ранга.
34. Характеристическое уравнение линейной комбинации тензоров второго ранга.
35. Канонические представления тензора-оператора уравнений движения в перемещениях и его определителя, а также тензора-оператора напряжения (тензор модулей упругости представляется в каноническом виде). Случай изотропной среды.
36. Условия совместимости деформации в классической теории.
37. Условия совместимости в напряжениях. Уравнения Бельтрами–Мичелла.
38. Традиционная и новая постановки краевой задачи в напряжениях.
39. Вариант условия совместимости относительно тензора деформаций для изотропного упругого материала.
40. Традиционная и новая постановки краевой задачи относительно тензора деформаций.
41. Тензор кривизны Римана–Кристоффеля. О числе независимых условий совместимости деформации.
42. Условия совместимости деформации в микрополярной теории.
43. Традиционные условия совместимости в тензорах напряжений и моментных напряжений.
44. Условия совместимости в тензорах напряжений и моментных напряжений со симметричными тензор-операторами.
45. Традиционная постановка краевой задачи относительно тензоров напряжений и моментных напряжений в микрополярной теории.
46. Новая постановка краевой задачи относительно тензоров напряжений и моментных напряжений в микрополярной теории.

II.6. Некоторые математические модели теории вязкоупругости

1. Модель упругого тела, модель вязкой жидкости, модель Максвелла, модель Фойхта. Дифференциальные и интегральные соотношения между напряжением и деформацией (определяющие соотношения).
2. Параллельное соединение n максвелловских элементов. Дифференциальные и интегральные соотношения между напряжением и деформацией (определяющие

- соотношения).
3. Последовательное соединение n фойхтовских элементов. Дифференциальные и интегральные соотношения между напряжением и деформацией (определяющие соотношения).
 4. Вязкоупругая начально-изотропная среда. Определяющие соотношения одномерной линейной вязкоупругой среды. Релаксация и ползучесть. Ядра релаксации и ползучести.
 5. Определяющие соотношения в виде интегралов Стилтъяса (представление Больцмана) одномерной линейной вязкоупругой среды. Определение произведения операторов релаксации и ползучести. Ядра разностного типа.
 6. Определяющие соотношения одномерной нелинейной вязкоупругой среды Вольтерры и Грина.
 7. Определяющие соотношения главной нелинейной теории вязкоупругости А.А.Ильюшина.
 8. Определяющие соотношения нелинейной теории вязкоупругости Ю.Н.Работнова.
 9. Определяющие соотношения нелинейной теории вязкоупругости Б.Е.Победри, американцев и японцев.
 10. Определяющие соотношения линейной теории начально вязкоупругого тела (связи между тензорами девиаторами и шаровыми тензорами тензоров напряжений и деформаций). Ядра объемной и сдвиговой релаксации, ядра объемной и сдвиговой ползучести. Стабильный материал.
 11. Определяющие соотношения линейной теории анизотропных вязкоупругих сред.
 12. Определяющие соотношения линейной теории изотропных вязкоупругих сред.
 13. Уравнения равновесия и движения в перемещениях для изотропных вязкоупругих сред.
 14. Уравнения Бельтрами–Мичелла линейной теории изотропных вязкоупругих сред.
 15. Постановки начально-краевых задач линейной теории изотропных вязкоупругих сред (самостоятельно!).

II.в. Определяющие соотношения некоторых математических моделей сплошных сред

16. Определяющие соотношения идеальной и вязкой жидкости.
17. Определяющие соотношения типа повторно-градиентной линейной теории упругих тел (материал Джеремилло (1929 г.)).
18. Определяющие соотношения повторно-градиентной теории упругих тел.
19. Определяющие соотношения типа повторно-градиентной теории упругих тел.
20. Определяющие соотношения повторно-градиентной теории вязкоупругих тел.
21. Определяющие соотношения типа повторно-градиентной теории вязкоупругих тел.
22. Определяющие соотношения теории Миндлина–Ерингена.
23. Определяющие соотношения физически нелинейных теорий упругости (Б.Е.Победря)
24. Определяющие соотношения теорий пластичности: определяющие соотношения различных теорий пластичности (Сен-Венана–Леви–Мизеса, Прандтля–Рейса, Генки, Прагера), Определяющие соотношения теории малых упруго-пластических деформаций (А.А. Ильюшина), Определяющие соотношения теории пластического течения.

Список литературы

I. Литература по тензорному исчислению

1. Победря Б.Е. Лекции по тензорному анализу. М., изд-во МГУ, 1986. 264 с.
2. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М., Наука, 1978. 296 с.

3. Димитриенко Ю.И. Тензорный анализ. Том 1. Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана. М.: 2011, 463 с.
4. Никабадзе М.У. О некоторых вопросах тензорного исчисления с приложениями к механике, *СМФН*, 2015, том 55, 3–194. <http://mi.mathnet.ru/rus/cmfd/v55/p3>, <https://istina.msu.ru/publications/book/10117043/>, <http://mi.mathnet.ru/cmfd267>
5. Nikabadze M.U. Topics on tensor calculus with applications to mechanics. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017, vol. 225, no 1, 194 p. DOI: [10.1007/s10958-017-3467-4](https://doi.org/10.1007/s10958-017-3467-4) <https://istina.msu.ru/publications/article/82581410/>
6. Курс лекций, прочитанный лектором.

II. Литература по микрополярной механике

7. Eringen A.C. Microcontinuum field theories: foundations and solids. 1999.
8. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, монография, под общей редакцией В. Д. Купрадзе. 1976 г.
9. В. Новацкий, Теория Упругости. Перевод с польского Б. Е. ПОБЕДРИ. 1975 г.
10. Димитриенко Ю.И. Универсальные законы механики и электродинамики сплошных сред. Том 2. Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана. М.: 2011, 559 с.
11. Никабадзе М.У. Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. М.: Изд-во Попечительского совета механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова. 2014. 515 с. <https://istina.msu.ru/publications/book/6738800/>
12. Курс лекций, прочитанный лектором.

III. Литература по классической механике

13. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том I и II, пятое издание (1994г.)
14. Илюшин А.А. Механика сплошной среды. 1990.
15. Победра Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. 2006.
16. Эглит М.Э. Лекции по основам механики сплошных сред. 2008.
17. Нигматулин Р.И. Механика сплошной среды. 2014.
18. Амензаде Ю.А. Теория упругости. 2003.
19. Тимошенко С.П. и Дж. Гудьер. Теория упругости. 1979.
20. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела.
21. Механика сплошных сред в задачах. Т. 1, 2. Под ред. М.Э. Эглит. 2017.