ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ

И.В.Филимонова

filimi@yandex.ru

УДК 517.956

Изучается асимптотическое поведении при $t \to \infty$, определенных и положительных в цилиндрической области $\Omega \times (0, \infty)$, решений полулинейного параболического уравнения вида $u_t = Lu + f(u)$, где L(u) - дивергентного вида равномерно эллиптический оператор. Предполагается, что решение u удовлетворяет условию Неймана на $\partial\Omega \times (0, \infty)$, область $\Omega \subset R^n$ ограничена. Условия на функция $f(u)$ таковы, чтобы им удовлетворяла функция $f(u) = u^q$, $0 < q < 1$.

Ключевые слова: полулинейное уравнение, асимптотическое поведение, цилиндрическая область

The asymptotic behavior of positive solutions of a semilinear parabolic equation in a cylinder

We study the asymptotic behavior for $t \to \infty$, solutions of a semilinear parabolic equation of the form $u_t = Lu + f(u)$, where L(u) where L is a uniformly elliptic divergent operator. It is assumed that the solution u satisfies the Neumann condition on $\partial\Omega \times (0, \infty)$, $\Omega \subset R^n$ is a bounded domain. The conditions on the function $f(u)$ are such that they are satisfied by the function $f(u) = u^q$, $0 < q < 1$.

Keywords: mathematics, differential equations, spectral theory

В работе изучаются положительные решения полулинейного параболического уравнения

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + f(u). \tag{1}$$

определенные в цилиндрической области $\Omega \times (0, \infty)$ и удовлетворяющие условию Неймана на $\partial\Omega \times (0, \infty)$. Предполагается, что область $\Omega \subset R^n$ ограничена, коэффициенты $a_{i,j}(x,t)$ - ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие по x условию равномерной эллиптичности

$$\lambda_1|\xi|^2 < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j < \lambda_2|\xi|^2,$$

постоянные $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ не зависят от t. Под решением уравнения (1) понимается функция из $W^{1,1}_{2,loc}$, удовлетворяющая уравнению (1) в смысле интегрального тождества.

В работе [1] рассматривались положительные решения уравнения (1) с функцией $f(u) = u^q$, $0 < q < 1$. Для решений, удовлетворяющих условию Неймана,в [1] получена формула

$$u(x,t) = [a_0(1-q)(t+t_0)]^{1/(1-q)} + O(e^{-\delta t}),$$

.

Филимонова Ирина Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Irina Filimonova (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

где $\delta > 0$ не зависит от $u(x,t)$, а постоянная t_0 однозначно определяется решением $u(x,t)$. Цель настоящей работы сформулировать такие условия на функцию $f(u)$, что бы для решения была верна аналогичная формула.

В работах [2], [3] были получены условия на нелинейный член, при которых для решений будут иметь место формулы, которые верны для $f(u) = -u^q$, $q > 1$. Точнее в работах [2], [3] рассматривалось уравнение $u_t = Lu - a(x)f(u)$ с коэффициентами оператора L, не зависящими от t, $a(x) > 0$, и были получены условия на $f(u)$, что для положительных решений, удовлетворяющих условию Неймана, при $t \to \infty$ имеет место формула $u(x,t) = \alpha(t)(1+o(t))$, где $\alpha(t)$ — некоторое решение обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{\alpha} = -a_0 f(\alpha)$, с постоянной $a_0 > 0$, не зависящей от $u(x,t)$.

Перейдем к результатам настоящей работы.

Пусть $f(u) > 0$ при $u \in (0,\infty)$ и $f(u)/u \to 0$ при $u \to \infty$ тогда для любых $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ положительных при $t > t_0$ решений уравнения $\dot{\beta}(t) = f(\beta)$ имеет место $\beta_1(t)/\beta_2(t) = 1$ и $\beta_1(t) = \infty$ при $t \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $f(u) > 0$ *для* $u \in (0,\infty)$, $f(u)/u \to 0$ *при* $u \to \infty$, $f'(u)$ *монотонно убывает по* u *на* $(0,\infty)$. *Пусть* $\beta(t)$ *решение уравнения* $\dot{\beta}(t) = f(\beta)$ *такое, что* $\beta(0) = 1$, *и выполнено* $f(\beta(t))/\beta(t) = O(t^{-1})$ *при* $t \to \infty$. *Тогда положительное в* $\Omega \times (0,\infty)$ *решение* $u(x,t)$ *уравнения (1), удовлетворяющее условию Неймана, стремится к* ∞ *при* $t \to \infty$ *и имеет место формула*

$$u(x,t) = \beta(t+t_0) + O(e^{-\delta t}),$$

где $\delta > 0$ *не зависит от* $u(x,t)$, *постоянная* t_0 *однозначно определяется решением* $u(x,t)$.

Литература

1. *Filimonova I.V.* Asymptotic Behaviour of Positive Solutions of a Semilinear Parabolic Equation // Russian Journal of Mathematical Physics, **10**:2 (2003), 234-237.

2. *Филимонова И.В.* О поведении решений полулинейного параболического или эллиптического уравнения, удовлетворяющих нелинейному краевому условию, в цилиндрической области// Труды семинара им. И. Г. Петровского, **26**, (2007), 369–390.

3. *Кондратьев В.А.* Об асимптотическом поведении решений нелинейных параболических уравнений второго порядка // Труды МИАН, **260**, (2008), 180–192