

УДК 536.6.011.6

К оптимизации решения задачи Лагранжа по начальным данным¹

©1998 г. А.Н. Голубятников, Н.Е. Леонтьев

Поступило в феврале 1998 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

Решение классической задачи Лагранжа об ускорении поршня первоначально покоящейся однородной массой сжатого газа при относительно малой массе поршня приводит к сравнительно небольшому коэффициенту полезного действия (КПД) [1]. Существует ряд теоретических и конструктивных способов его увеличения. В частности, в [2] рассмотрен способ повышения КПД путем оптимизации финальной скорости поршня за счет выбора специального неоднородного начального распределения плотности газа, а также приведен ряд решений этой задачи в классах начальных условий, приводящих к движениям с однородной деформацией. При этом за счет неоднородности распределения начальной плотности происходит существенное (в несколько раз) увеличение КПД.

При отсутствии ограничений идеальным является такое распределение, когда почти вся масса газа сосредоточена вблизи закрытого конца трубы. В [2] дано также решение указанной задачи при наличии двусторонних ограничений на величину начальной плотности. Однако для всех этих решений характерно, как и для самого решения Лагранжа, что в начальных условиях имеется ненулевой градиент давления. Поэтому представляет интерес рассмотрение этой задачи с постоянным начальным давлением, отвечающим равновесному состоянию газа, но с переменной начальной плотностью. В случае совершенного газа при подходящем распределении его молекулярной массы можно также считать постоянной и начальную температуру газа.

Аналитические и численные решения задачи Лагранжа с однородными начальными данными рассматривались в [3–5]. В настоящей работе проводится численное исследование задачи о нахождении оптимальных равновесных начальных условий при наличии двусторонних ограничений на величину начальной плотности. Среди рассмотренных случаев наибольший КПД, как и для решений [2], достигается при двухступенчатом распределении начальной плотности, с наименьшим значением вблизи поршня и наибольшим вблизи закрытой части.

2. УРАВНЕНИЯ, КРАЕВЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим процесс разгона поршня в полубесконечной цилиндрической трубе первоначально покоящимся слоем идеального совершенного газа. Массовые силы и сопротивление движению поршня отсутствуют, движение газа предполагается адиабатическим.

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 96-01-00376, 97-01-00196).

Заданы масса поршня m , площадь поперечного сечения трубы S , длина L участка трубы, занятого газом до начала разлета, масса газа M , его начальная внутренняя энергия E . Показатель адиабаты газа γ считается постоянным; влияние переменного γ будет рассмотрено ниже на примере расчета эволюции системы при его кусочно постоянном распределении. В принципе действие сухого трения можно учесть введением эффективной массы поршня вида

$$m_{\text{eff}} = \frac{m}{1 - kS_c/(2S)},$$

где k — коэффициент трения, S_c — площадь поверхности контакта поршня с трубой; обычно этой поправкой пренебрегают.

Направим координатную ось x вдоль трубы к ее открытому концу, выбрав начало координат у закрытого конца трубы. Вводя массовую лагранжеву переменную соотношением

$$q = \int_0^{\xi} \rho_0(\xi) d\xi,$$

где ξ , ρ_0 — координата и плотность частицы газа до начала разлета, можно записать уравнения, описывающие гладкие движения газа, в дивергентном виде [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial q} &= 0, & \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial q} (pu) &= 0, \\ \varepsilon &= \frac{pV}{\gamma - 1}, & V &= \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u , p , ρ — скорость, давление и плотность газа соответственно, ε — плотность его внутренней энергии. Запишем уравнения (1) в безразмерном виде. Введем новые переменные соотношениями

$$\begin{aligned} p &= \frac{E}{SL} p', & \rho &= \frac{M}{SL} \rho', & u &= \sqrt{\frac{E}{M}} u', & \varepsilon &= \frac{E}{M} \varepsilon', \\ m &= M m', & t &= L \sqrt{\frac{M}{E}} t', & q &= \frac{M}{S} q', & x &= L x', \end{aligned}$$

после чего будем для краткости опускать штрихи над соответствующими безразмерными величинами. При этом уравнения движения (1) сохраняют свой вид. Уравнение движения поршня, отвечающее $q = 1$, имеет форму

$$m \frac{du}{dt} = p. \quad (2)$$

На закрытом конце трубы ставится условие $u = 0$, на контактных разрывах давление и скорость газа не должны иметь скачков. К этим соотношениям следует добавить нормировочные условия на начальные данные

$$\int_0^1 \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1} dq = 1, \quad \int_0^1 V_0 dq = 1. \quad (3)$$

Для характеристики энергетической эффективности установки удобно ввести переменный КПД

$$\eta = \eta(t) = \frac{mu^2}{2} \Big|_{q=1},$$

который показывает, какая часть первоначальной энергии газа перешла в данный момент времени в кинетическую энергию поршня; обычно под КПД понимается его финальное значение $\eta(\infty)$ [1].

3. ОПТИМИЗАЦИЯ В СПЕЦИАЛЬНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

Для проведения сравнения результатов последующего численного моделирования рассмотрим класс решений с линейным распределением скорости газа в каждый момент времени [7]. В этом случае задача о достижении максимально возможной финальной скорости поршня на бесконечности сводится к минимизации вычисленного в начальный момент времени момента инерции газа относительно закрытого конца трубы

$$I_0 = \int_0^1 \xi^2 dq$$

при соблюдении заданных ограничений на начальные параметры газа [2]. В частности, при двусторонних ограничениях на величину начальной плотности газа вида

$$\alpha_1 \leq \rho_0 \leq \alpha_2, \quad \alpha_1 < 1, \quad \alpha_2 \geq 1 \quad (4)$$

оптимальное распределение плотности будет иметь вид

$$\rho_0 = \begin{cases} \alpha_2, & q \in [0; \beta], \\ \alpha_1, & q \in (\beta; 1], \end{cases} \quad \beta = \alpha_2 \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (5)$$

Распределение начального давления задается кусочно квадратичной функцией. При этом наилучший финальный КПД определяется соотношениями

$$\eta(\infty) = \left(1 + \frac{I_0}{m}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{3m} \left(\frac{(1 - \alpha_1)^3}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} + \alpha_1 \right)\right)^{-1}.$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Рассмотрим постановку задачи с постоянным начальным давлением газа $p_0 = \gamma - 1$ и распределениями плотности, которые удовлетворяют условиям (4).

Для расчета движения газа используется явная трехслойная полностью консервативная конечно-разностная схема второго порядка аппроксимации по временной и пространственной координатам [8, 9]. Достоверность полученных численных результатов подтверждается сравнением с известными точными решениями и контролем выполнения интегральных соотношений

$$\int_0^1 \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right) dq + \eta = 1, \quad \int_0^1 V dq = x|_{q=1}.$$

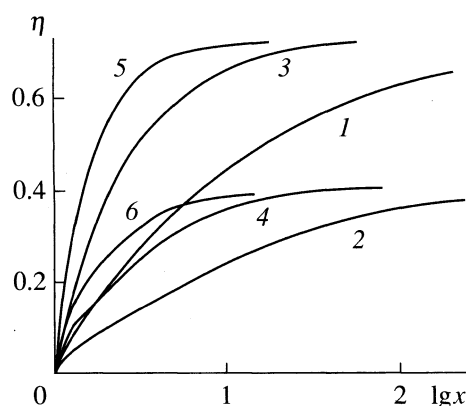


Рис. 1

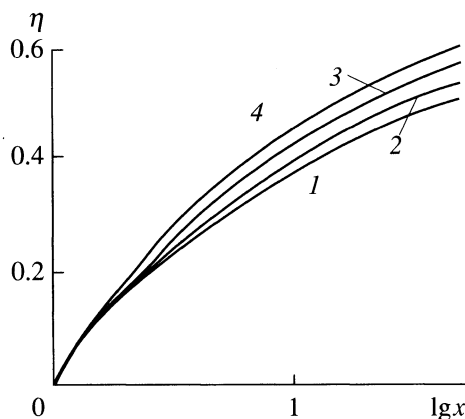


Рис. 2

Численное моделирование показывает, что при больших временах, связанных с приближением движения поршня к стационарному режиму, распределение давления оказывается близким к профилю давления для указанных выше точных решений. Этот эффект отмечался ранее в [3]. При этом для распределения начальной плотности (5) происходит увеличение КПД на несколько процентов по сравнению с оптимальным решением в классе движений с линейным распределением скорости газа в каждый момент времени.

Проведенные расчеты при различных значениях определяющих параметров показывают, что увеличение перепада начальных плотностей в условии (4) (увеличение α_2 и уменьшение α_1), а также увеличение массы поршня (или допустимое относительное уменьшение массы газа по сравнению с массой поршня) также ведут к росту КПД системы.

По сравнению со случаем постоянных начальных параметров газа происходит существенное увеличение КПД. На рис. 1 приведены результаты расчетов зависимости КПД от безразмерной координаты поршня (вплоть до $150L$), соответствующие значениям $m = 0.2$, $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 5$. Параметрам $\gamma = 1.4; 2; 3$ отвечают пары сравниваемых кривых 1, 2; 3, 4; 5, 6. Кривые с четными номерами представляют решения с однородными начальными условиями.

Изучение решений при различных начальных распределениях плотности, удовлетворяющих ограничению (4), показывает, что наибольшее среди рассмотренных случаев значение КПД достигается для распределения (5). Так, при кусочно линейной непрерывной зависимости начального удельного объема V_0 от лагранжевой переменной q с наименьшим значением вблизи поршня, угловой точкой, соответствующей $q = \beta$, и предельно допустимыми неравенствами (4) значениями на концах $1/\alpha_1$ и $1/\alpha_2$ при $\gamma = 2$, $m = 0.2$, $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 5$ происходит систематическое уменьшение КПД на величину порядка 15%.

Рассматривается класс решений задачи для двухпараметрического семейства начальных распределений плотности

$$\rho_0 = \begin{cases} \alpha_2, & q \in [0; \xi_1\beta], \\ \frac{1 - \xi_1\beta - \xi_2\delta}{1 - \xi_1\beta/\alpha_2 - \xi_2\delta/\alpha_1}, & q \in (\xi_1\beta; 1 - \xi_2\delta], \\ \alpha_1, & q \in (1 - \xi_2\delta; 1], \end{cases} \quad (6)$$

где $\delta = 1 - \beta$; параметры семейства $\xi_1, \xi_2 \in [0; 1]$. Семейство, в частности, содержит при $\xi_1 = \xi_2 = 1$ распределение (5) и при $\xi_1 = \xi_2 = 0$ однородное начальное распределение. Анализ

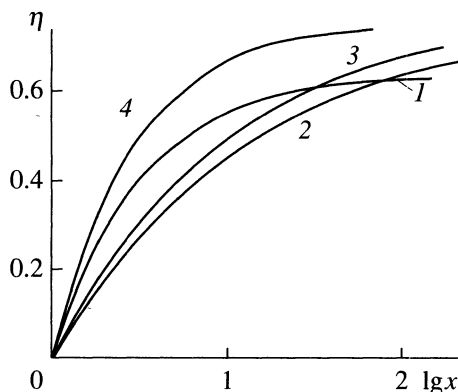


Рис. 3

показывает, что в этих случаях КПД монотонно растет с увеличением ξ_1 , ξ_2 , достигая наибольшего значения при $\xi_1 = \xi_2 = 1$. Для иллюстрации на рис. 2 показана зависимость величины η от координаты поршня x в случае $\gamma = 1.4$, $m = 0.2$, $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 5$. На рис. 2 значениям $\xi_2 = 0.5$, $\xi_1 = 0.2, 0.5, 0.8$ соответствуют линии 1, 2, 3; линия 4 отвечает распределению (5).

5. ВЛИЯНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ

Пусть рабочее тело установки состоит из двух граничащих соответственно с дном установки и поршнем слоев газа с различными постоянными показателями γ_1 и γ_2 , начальное давление постоянно. На рис. 3 представлены законы изменения КПД в случае начального распределения плотности (5) при $m = 0.2$, $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 5$. Можно видеть, что при $\gamma_1 = 1.4$, $\gamma_2 = 2$ (кривая 1) первоначально происходит увеличение КПД по сравнению со случаем $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 1.4$ (кривая 3), однако затем рост КПД сильно замедляется. Для сравнения на рис. 3 приведены данные в случаях $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.4, 2$ (кривые 2, 4).

Таким образом, в этом случае лучшее взаимное положение слоев газа с заданными показателями адиабаты зависит от выбора длины интервала, на котором рассчитывается движение поршня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Златин Н.А., Красильщиков А.П., Мишин Г.И., Попов Н.Н. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. М.: Наука, 1974.
2. Голубятников А.Н. К оптимальной постановке газодинамической задачи Лагранжа // Вестн. МГУ. Математика. Механика. 1995. №6. С. 59–61.
3. Love A.E.H., Pidduck F.B. Lagrange's ballistic problem // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. 1922. V. 222. P. 167–226.
4. Созоненко Ю.А. Движение поршня под действием давления газа // ПММ. 1963. Т. 27, №3. С. 535–540.
5. Попов Н.Н. К вопросу о сообщении телам высоких скоростей полета // Вестн. МГУ. Математика. Механика. 1962. №4. С. 69–74.
6. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
7. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.
8. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
9. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.