МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

А.А. Коньков

специальный курс

ПРОСТРАНСТВА С.Л. СОБОЛЕВА

(конспект лекций)

МОСКВА 2002

Оглавление

1 Пространства С.Л. Соболева **3**

1.1 Основные определения и обозначения 3

1.2 Плотность $C^\infty(\overline{\Omega})$ в $W_p^m(\Omega)$ 7

1.3 Интегральные операторы со слабой особенностью 10

1.4 Представление функций по С.Л. Соболеву 19

1.5 Теоремы вложения С.Л. Соболева. Эквивалентные нормы в пространствах $W_p^m(\Omega)$ 22

Литература **27**

Глава 1

Пространства С.Л. Соболева

1.1 Основные определения и обозначения

Пусть Ω — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, и $\complement\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ — дополнение множества Ω до всего пространства $\mathbb{R}^n$. Через $C^\infty(\Omega)$ мы обозначаем пространство функций, бесконечно дифференцируемых в Ω, а через $C^\infty(\overline{\Omega})$ — сужения на Ω функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. При этом под $C_0^\infty(\Omega)$ мы будем подразумевать множество функций из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактными носителями, принадлежащими Ω. Вместо $C_0^\infty(\Omega)$ часто используется обозначение $\mathcal{D}(\Omega)$.

Аналогично определяются классы $C^s(\Omega)$, $C^s(\overline{\Omega})$, $C_0^s(\Omega)$ функций с непрерывными производными порядка s.

Пространство измеримых функций на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, для которых

$$\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad p \geq 1,$$

будем обозначать $L_p(E)$. В свою очередь, под $L_{p,comp}(\Omega)$ мы будем понимать пространство функций, суммируемых со степенью p на всяком компакте, принадлежащем открытому множеству Ω. Для краткости пишем $L(E)$ вместо $L_1(E)$ и $L_{comp}(\Omega)$ вместо $L_{1,comp}(\Omega)$.

Если в обозначениях пространств и норм отсутствует указание на область Ω, то имеется в виду, что $\Omega = \mathbb{R}^n$. Интегрирование без указания пределов также подразумевается выполненным по всему $\mathbb{R}^n$.

Как это принято, полагаем $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$ и $\partial^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс.

Всюду ниже под B_r^x мы подразумеваем открытый шар $B_r^x = \{y : |y - x| < r\}$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$, а под S_r^x — сферу $S_r^x = \{y : |y - x| < r\}$. Если $x = 0$, то вместо B_r^0 и S_r^0 пишем для краткости B_r и S_r.

Область Ω называется звездной отностительно некоторой своей точки, если любой исходящий из этой точки луч имеет не более одного пересечения с $\partial\Omega$.

Область Ω называется звездной относительно множества $M \subset \Omega$, если она звездная относительно каждой точки, принадлежащей M.

Для расстояния между двумя множествами M_1 и M_2 будем использовать обозначение $\operatorname{dist}(M_1, M_2)$.

Говорим, что последовательность функций $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots$, сходится к $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, если найдется компакт $K \subset \Omega$ такой, что, во-первых, $\operatorname{supp} \varphi_i \subset K$, $i = 1, 2, \ldots$, а, во-вторых, $\|\varphi_i - \varphi\|_{C^s(\Omega)} \to 0$ при $i \to \infty$ для всякого целого неотрицательного числа s, где

$$\|\psi\|_{C^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le s} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha \psi|, \qquad \psi \in C^s(\Omega).$$

Линейный функционал f на $\mathcal{D}(\Omega)$ будем называть непрерывным, если для любой последовательности $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots$, сходящейся к функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\lim_{i \to \infty} f(\varphi_i) = f(\varphi).$$

Определение 1.1.1. Множество линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(\Omega)$ называется пространством обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Само $\mathcal{D}(\Omega)$ принято называть пространством основных функций. Действие функционала $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ на основную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ принято обозначать (f, φ).

Пространство основных функций $\mathcal{D}(\Omega)$ можно наделить топологией, сходимость в которой в точности соответсвует описанной выше. При этом $\mathcal{D}'(\Omega)$ будет состоять из линейных функционалов, непрерывных в этой топологии.

$L_{comp}(\Omega)$ естественным образом вкладывается в $\mathcal{D}'(\Omega)$, если всякую функцию $f \in L_{comp}(\Omega)$ отождествить с функционалом, действующий по правилу

$$(f, \varphi) = \int_\Omega f \varphi \, dx, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.1}$$

В частности, $\mathcal{D}'(\Omega)$ содержит в себе $C^\infty(\Omega)$, поскольку $C^\infty(\Omega) \subset L_{comp}(\Omega)$. Функции из $L_{comp}(\Omega)$, понимаемые как обобщенные, будем называть регулярными. Очевидно, $\mathcal{D}'(\Omega)$ не исчерпывается одними регулярными функциями. В качестве примера, подтверждающего это, достаточно рассмотреть так называемую дельта-функцию Дирака

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Упражнение 1.1.1. Покажите, что различным функциям из $L_{comp}(\Omega)$ соответствуют различные функционалы из $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Пусть $f \in C^\infty(\Omega)$. Как связаны между собой обобщенные функции, отождествляемые с f и производной $\partial f/\partial x_i$? Интегрируя по частям, имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\, dx = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Последняя формула наводит на мысль для всякого $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ определить $\partial f/\partial x_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ равенством

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.2}$$

Согласно (1.2) любая функция $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ в обобщенном смысле дифференцируема бесконечное число раз, причем

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

для всякого мультииндекса α.

Упражнение 1.1.2. Найдите производную от θ-функции Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Ответ: $\theta'(x) = \delta(x)$.

Обобщенные функции можно умножать на бесконечно гладкие, если для любых $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $\psi \in C^\infty(\Omega)$ положить

$$(\psi f, \varphi) = (f\psi, \varphi) = (f, \psi\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Упражнение 1.1.3. Покажите, что приведенное выше определение является естественным. Именно, пусть $\iota : L_{comp}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ — вложение пространства $L_{comp}(\Omega)$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$, заданное правилом (1.1). Тогда $\iota(\psi f) = \psi\iota(f)$ для любых $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $\psi \in C^\infty(\Omega)$.

Справедлива известная формула дифференцирования произведения

$$(\psi f)' = \psi' f + \psi f',$$

где $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $\psi \in C^\infty(\Omega)$.

Упражнение 1.1.4. Докажите последнее соотношение.

Далее мы хотим выяснить, каким образом у обобщенных функций осуществляется замена переменной. Пусть имеется диффеоморфизм открытого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ на Ω, реализующий замену переменной $x = x(y)$, $y \in G$. Обратную замену будем обозначать $y = y(x)$, $x \in \Omega$.

Пусть $f \in C^\infty(\Omega)$. Рассматривая суперпозицию $f(x(y))$ как обобщенную функцию, очевидно, получим

$$\begin{aligned}(f(x(y)), \varphi(y)) &= \int_G f(x(y))\varphi(y)\,dy \\ &= \int_\Omega f(x)\varphi(y(x))\,|\det\|\partial y/\partial x\||\,dx \\ &= (f(x), \varphi(y(x))\,|\det\|\partial y/\partial x\||)\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G),\end{aligned}$$

где $\|\partial y/\partial x\|$ — матрица Якоби.

Пусть теперь $f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$, определим функцию $f(x(y)) \in \mathcal{D}'(G)$, полагая

$$(f(x(y)), \varphi(y)) = (f(x), \varphi(y(x))\,|\det\|\partial y/\partial x\||)\,, \quad \varphi \in \mathcal{D}(G).$$

Упражнение 1.1.5. Докажите правило дифференцирования суперпозиции

$$\frac{\partial f(x(y))}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\bigg|_{x=x(y)} \frac{\partial x_j(y)}{\partial y_i},$$

где $f(x) \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Определение 1.1.2. Множество обобщенных функции из $\mathcal{D}'(\Omega)$, принадлежащих $L_p(\Omega)$ вместе со всеми производными порядка m, называется пространством С.Л. Соболева $W_p^m(\Omega)$.

Пространство С.Л. Соболева $W_p^m(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega) : f \in L_p(\Omega), \partial^\alpha f \in L_p(\Omega), |\alpha| = m\}$ естественным образом наделяется структурой банахова пространства с нормой

$$\|f\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Упражнение 1.1.6. Докажите полноту $W_p^m(\Omega)$.

Определение 1.1.3. Под $\overset{o}{W}{}_p^m(\Omega)$ будем понимать замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме пространства $W_p^m(\Omega)$.

1.2 Плотность $C^\infty(\overline{\Omega})$ в $W_p^m(\Omega)$

Рассмотрим неотрицательную функцию $\omega \in C_0^\infty(B_1)$ такую, что

$$\int \omega(x)\,dx = 1,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $dx = dx_1 \ldots dx_n$. Обозначим

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h^n}\omega\left(\frac{x}{h}\right), \quad h > 0.$$

Разумеется, будем иметь $\omega_h \in C_0^\infty(B_h)$, причем

$$\int \omega_h(x)\,dx = 1. \tag{1.3}$$

Определение 1.2.1. Бесконечно гладкая функция

$$u_h(x) = \int \omega_h(x-y)u(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ h > 0, \tag{1.4}$$

называется усреднением функции $u \in L_{comp}(\mathbb{R}^n)$ по Стеклову-Шварцу.

Лемма 1.2.1. *Пусть $u \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$. Тогда*
(1) $\|u_h\|_{L_p} \leq \|u\|_{L_p}$,
(2) $\|u - u_h\|_{L_p} \to 0$ *при* $h \to +0$.

Доказательство. Докажем оценку п. (1). Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned}\int dy\,\omega_h(x-y)|u(y)| &= \int dy\,\omega_h^{\frac{1}{q}}(x-y)(\omega_h^{\frac{1}{p}}(x-y)|u(y)|)\\ &\leq \left(\int dy\,\omega_h(x-y)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int dy\,\omega_h(x-y)|u(y)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\int dy\,\omega_h(x-y)|u(y)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

для всякого $x \in \mathbb{R}^n$, где $1/p + 1/q = 1$ (в случае $p = 1$ следует формально положить $q = \infty$, $1/q = 0$). Таким образом,

$$\begin{aligned}\int dx\,|u_h(x)|^p &= \int dx\left(\int dy\,\omega_h(x-y)|u(y)|\right)^p\\ &\leq \int dx\int dy\,\omega_h(x-y)|u(y)|^p\\ &= \int dy\,|u(y)|^p\int dx\,\omega_h(x-y).\end{aligned}$$

Для завершения доказательства п. (1) остается воспользоваться соотношением (1.3).

Докажем утверждение п. (2). Заменой переменной $z = x - y$ перепишем (1.4) в виде

$$u_h(x) = \int \omega_h(z) u(x-z)\, dz.$$

Тем самым,

$$\begin{aligned} u_h(x) - u(x) &= \int \omega_h(z) u(x-z)\, dz - \int \omega_h(z) u(x)\, dz \\ &= \int \omega_h(z)(u(x-z) - u(x))\, dz, \end{aligned}$$

откуда, очевидно, находим

$$\int dx\, |u_h(x) - u(x)|^p \le \int dx \left(\int \omega_h(z) |u(x-z) - u(x)|\, dz \right)^p. \tag{1.5}$$

В то же время, ввиду неравенства Гельдера

$$\begin{aligned} \int dz\, \omega_h(z) |u(x-z) - u(x)| &= \int dz\, \omega_h^{\frac{1}{q}}(z) (\omega_h^{\frac{1}{p}}(z) |u(x-z) - u(x)|) \\ &\le \left(\int dz\, \omega_h(z) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int dz\, \omega_h(z) |u(x-z) - u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int dz\, \omega_h(z) |u(x-z) - u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

поэтому (1.5) влечет за собой оценку

$$\begin{aligned} \int dx\, |u_h(x) - u(x)|^p &\le \int dx \int dz\, \omega_h(z) |u(x-z) - u(x)|^p \\ &= \int_{|z| \le h} dz\, \omega_h(z) \int dx\, |u(x-z) - u(x)|^p \\ &\le \sup_{|z| \le h} \int dx\, |u(x-z) - u(x)|^p. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы достаточно убедиться, что

$$\sup_{|z| \le h} \int dx\, |u(x-z) - u(x)|^p \to 0 \quad \text{при } h \to +0. \tag{1.6}$$

Последнее соотношение тривиально в случае

$$u(x) = \chi_\Pi(x), \tag{1.7}$$

где χ_Π — характеристическая функция параллелепипеда $\Pi = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$. Но тогда (1.6) справедливо и для всякой $u \in L_p(\mathbb{R}^n)$, т.к. линейная оболочна функций вида (1.7) плотна в $L_p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Упражнение 1.2.1. Для обобщенных функций $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ также можно определить процедуру усреднения, аналогичную той, которую мы рассматривали выше, если положить

$$f_h(x) = (f(y), \omega_h(x-y)).$$

Покажите, что $f_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $f_h \to f$ в слабом смысле при $h \to +0$. Последнее означает, что

$$\lim_{h\to+0}(f_h, \varphi) = (f, \varphi)$$

для всякой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 1.2.1. Легко понять, что лемма 1.2.1 применима и к функциям $u \in L_p(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Действительно, продолжая u нулем на $\complement\Omega$, получим $u \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.2.1. *Пусть Ω — ограниченная область, звездная относительно некоторой своей точки. Тогда пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $W_p^m(\Omega)$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что область Ω звездная относительно начала координат. Пусть $u \in W_p^m(\Omega)$. Для $\lambda \in (0,1)$, которое будет выбрано позже, обозначим $v(x) = u(\lambda x)$. Очевидно, $v \in W_p^m(G)$, где $G = \lambda^{-1}\Omega$.

Продолжим функции v и $\partial^\alpha v \in L_p(G)$, $|\alpha| = m$, нулем на $\complement G$.

Для производной усреднения функции v справедливо следующее выражение

$$\begin{aligned}\partial^\alpha v_h(x) &= \int \partial_x^\alpha \omega_h(x-y) v(y)\,dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int \partial_y^\alpha \omega_h(x-y) v(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

С другой стороны, усредняя производную $\partial^\alpha v$, $|\alpha| = m$, получим

$$(\partial^\alpha v)_h(x) = \int \omega_h(x-y)\partial^\alpha v(y)\,dy = (-1)^{|\alpha|}\int \partial_y^\alpha \omega_h(x-y) v(y)\,dy$$

для всех $x \in \Omega$, $0 < h < \operatorname{dist}(\Omega, \complement G)$.

Тем самым,

$$(\partial^\alpha v)_h|_\Omega = \partial^\alpha v_h|_\Omega, \quad |\alpha| = m,\ 0 < h < \operatorname{dist}(\Omega, \complement G). \tag{1.8}$$

Согласно лемме 1.2.1 при фиксированном $\lambda > 0$ будем иметь

$$\lim_{h\to+0} \|v_h - v\|_{L_p(\Omega)} = 0$$

и

$$\lim_{h\to+0} \|(\partial^\alpha v)_h - \partial^\alpha v\|_{L_p(\Omega)} = 0, \qquad |\alpha| = m.$$

Из этих двух пределов и соотношения (1.8) следует, что

$$\lim_{h\to+0} \|v_h - v\|_{W_p^m(\Omega)} = 0. \tag{1.9}$$

Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $\lambda > 0$ такое, что

$$\|v - u\|_{W_p^m(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.10}$$

Ввиду (1.9) найдется, далее, вещественное число $h > 0$, для которого

$$\|v_h - v\|_{W_p^m(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Объединяя последние неравенства, завершаем доказательство теоремы. $\square$

Упражнение 1.2.2. Почему можно выбрать $\lambda > 0$ такое, что будет выполнено (1.10)?

1.3 Интегральные операторы со слабой особенностью

В этом разделе мы будем изучать интегральные операторы вида

$$(Au)(x) = \int_E \frac{f(x,y)}{|x-y|^\lambda} u(y)\, dy, \tag{1.11}$$

где E — измеримое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $f \in L_\infty(E \times E)$ и $0 \leq \lambda < n$ — некоторое вещественное число.

Теорема 1.3.1. *Пусть E — компакт, $f \in C(E \times E)$, $1 < p \leq \infty$, $1/q + 1/p = 1$, и при этом $\lambda q < n$. Тогда формула* (1.11) *определяет вполне непрерывное отображение $A : L_p(E) \to C(E)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $p < \infty$. Покажем, что

$$\int_E \frac{|f(x,y)|}{|x-y|^\lambda} |u(y)|\, dy < \infty \tag{1.12}$$

для любого $x \in E$, $u \in L_p(E)$.

В самом деле, ввиду неравенства Гельдера

$$\int_E \frac{|f(x,y)|}{|x-y|^\lambda}|u(y)|\,dy \le \left(\int_E \frac{|f(x,y)|^q}{|x-y|^{\lambda q}}\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_E |u(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.13}$$

В то же время,

$$\int_E \frac{|f(x,y)|^q}{|x-y|^{\lambda q}}\,dy \le \left(\max_{E\times E} f\right)^q \int_{Q_\rho^x} \frac{dy}{|x-y|^{\lambda q}} \le const\,\rho^{n-\lambda q}, \tag{1.14}$$

где $const > 0$ в правой части зависит только от f, λ, q, n, а $\rho > 0$ выбрано таким, чтобы шар B_ρ^x содержал множество E (например, можно взять $\rho = \operatorname{diam} E$).

Оценки (1.13) и (1.14) немедленно влекут за собой (1.12).

Пусть, далее, M — ограниченное подмножество пространства $L_p(\Omega)$. Тогда $A(M)$ предкомпактно в $C(E)$.

Действительно, ввиду (1.13) и (1.14) семейство $A(M)$ равномерно ограничено. Покажем, что $A(M)$ равностепенно непрерывно. Согласно неравенству Гельдера имеем для всех $u \in M$ и $x_1, x_2 \in E$

$$\begin{aligned} |(Au)(x_1) - (Au)(x_2)| &\le \int_E \left|\frac{f(x_1,y)}{|x_1-y|^\lambda} - \frac{f(x_2,y)}{|x_2-y|^\lambda}\right| |u(y)|\,dy \\ &\le \left(\int_E \left|\frac{f(x_1,y)}{|x_1-y|^\lambda} - \frac{f(x_2,y)}{|x_2-y|^\lambda}\right|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\times \left(\int_E |u(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Пусть $|x_1 - x_2| < \delta$, где $\delta > 0$ — вещественное число. Тогда

$$\begin{aligned} \int_E \left|\frac{f(x_1,y)}{|x_1-y|^\lambda} - \frac{f(x_2,y)}{|x_2-y|^\lambda}\right|^q dy &= \int_{E\cap B_{2\delta}^{x_1}} \left|\frac{f(x_1,y)}{|x_1-y|^\lambda} - \frac{f(x_2,y)}{|x_2-y|^\lambda}\right|^q dy \\ &+ \int_{E\setminus B_{2\delta}^{x_1}} \left|\frac{f(x_1,y)}{|x_1-y|^\lambda} - \frac{f(x_2,y)}{|x_2-y|^\lambda}\right|^q dy. \end{aligned} \tag{1.16}$$

При этом, очевидно,

$$\begin{aligned} \left(\int_{E\cap B_{2\delta}^{x_1}} \left|\frac{f(x_1,y)}{|x_1-y|^\lambda} - \frac{f(x_2,y)}{|x_2-y|^\lambda}\right|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} &\le \left(\int_{E\cap B_{2\delta}^{x_1}} \left|\frac{f(x_1,y)}{|x_1-y|^\lambda}\right|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \left(\int_{E\cap B_{2\delta}^{x_1}} \left|\frac{f(x_2,y)}{|x_2-y|^\lambda}\right|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Для первого интеграла в правой части последнего неравенства справедлива следующая оценка

$$\int_{E\cap B_{2\delta}^{x_1}} \left|\frac{f(x_1,y)}{|x_1-y|^{\lambda}}\right|^q dy \le \|f\|_{C(E\times E)}^q \int_{E\cap B_{2\delta}^{x_1}} \frac{dy}{|x_1-y|^{\lambda q}} \le const\,\delta^{n-\lambda q},$$

где $const > 0$ не зависит от x_1, x_2.

Для второго слагаемого ввиду включения $B_{2\delta}^{x_1} \subset B_{3\delta}^{x_2}$ справедливо аналогичное неравенство

$$\int_{E\cap B_{2\delta}^{x_1}} \left|\frac{f(x_2,y)}{|x_2-y|^{\lambda}}\right|^q dy \le \|f\|_{C(E\times E)}^q \int_{E\cap B_{3\delta}^{x_2}} \frac{dy}{|x_2-y|^{\lambda q}} \le const\,\delta^{n-\lambda q},$$

где $const > 0$ также не зависит от x_1, x_2.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу сказанного выше найдется вещественное число $\delta > 0$ такое, что

$$\int_{E\cap B_{2\delta}^{x_1}} \left|\frac{f(x_1,y)}{|x_1-y|^{\lambda}} - \frac{f(x_2,y)}{|x_2-y|^{\lambda}}\right|^q dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

для любых $x_1, x_2 \in E$, удовлетворяющих соотношению $|x_1 - x_2| < \delta$.

Далее, функция $f(x,y)/|x-y|^{\lambda}$ непрерывна на компакте $E \times E \setminus \{(x,y) : |x-y| \ge \delta\}$, а значит и равномерно непрерывна на нем. Таким образом, существует $\eta \in (0,\delta)$ такое, что

$$\int_{E\setminus B_{2\delta}^{x_1}} \left|\frac{f(x_1,y)}{|x_1-y|^{\lambda}} - \frac{f(x_2,y)}{|x_2-y|^{\lambda}}\right|^q dy < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $x_1, x_2 \in E$, удовлетворяющих неравенству $|x_1 - x_2| < \eta$.

Тем самым, ввиду (1.16) получим

$$\int_{E} \left|\frac{f(x_1,y)}{|x_1-y|^{\lambda}} - \frac{f(x_2,y)}{|x_2-y|^{\lambda}}\right|^q dy < \varepsilon$$

для всех $x_1, x_2 \in E$ таких, что $|x_1 - x_2| < \eta$, откуда согласно (1.15) будем иметь равностепенную непрерывность семейства $A(M)$.

Пусть теперь $p = \infty$. В этом случае по условию теоремы $q = 1$ и $\lambda < n$. Интеграл в правой части (1.11), очевидно, определен для всякого $x \in E$, так как

$$\begin{aligned}\int_E \frac{|f(x,y)|}{|x-y|^{\lambda}}|u(y)|\,dy &\le \|f\|_{C(E\times E)}\,\|u\|_{L_\infty(E)} \int_E \frac{dy}{|x-y|^{\lambda}} \\ &\le \|f\|_{C(E\times E)}\,\|u\|_{L_\infty(E)}\,(\operatorname{diam} E)^{m-\lambda} < \infty.\end{aligned}$$

Компактность оператора $A : L_\infty(E) \to C(E)$ следует из оценки

$$|(Au)(x_1) - (Au)(x_2)| \le \|u\|_{L_\infty(E)} \int_E \left| \frac{f(x_1,y)}{|x_1-y|^\lambda} - \frac{f(x_2,y)}{|x_2-y|^\lambda} \right| dy$$

и из рассуждений, приведенных на с. 11–12. $\square$

Замечание 1.3.1. Требования на функцию f в теореме 1.3.1 могут быть ослаблены. Именно, эта теорема остается в силе и в случае $f \in L_\infty(E\times E) \cap C(E \times E \setminus \operatorname{diag}(E\times E))$, где $\operatorname{diag}(E\times E) = \{(x,x) : x \in E\}$ — диагональ множества $E \times E$. Действительно, ничто не мешает представить оператор (1.11) в виде

$$(Au)(x) = \int_E \frac{f_1(x,y)}{|x-y|^{\lambda_1}} u(y)\,dy,$$

где λ_1 — некоторое вещественное число такое, что $\lambda < \lambda_1$ и $\lambda_1 q < n$, а $f_1(x,y) = f(x,y)|x-y|^{\lambda_1-\lambda} \in C(E\times E)$.

Теорема 1.3.2. *Пусть $p_1 \ge 1$, $1/q_1 + 1/p_1 = 1$, $\lambda q_1 \ge n$, и пусть E_s — сечение измеримого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ плоскостью размерности s, где*

$$n - (n-\lambda)p_1 < s \le n. \tag{1.17}$$

Тогда интеграл в правой части (1.11) *сходится почти для всех $x \in E_s$ в смысле меры Лебега на E_s. При этом* (1.11) *определяет вполне непрерывный оператор $A : L_{p_1}(E) \to L_{p_2}(E_s)$ для любого вещественного числа p_2 такого, что*

$$1 \le p_2 < p_0 = \frac{sp_1}{n-(n-\lambda)p_1}. \tag{1.18}$$

Доказательство. Положим для всякого $\varepsilon > 0$

$$(A_0u)(x) = \int_E \frac{f_0(x,y)}{|x-y|^\lambda} u(y)\,dy$$

и

$$(A_\varepsilon u)(x) = \int_E \frac{f_\varepsilon(x,y)}{|x-y|^\lambda} u(y)\,dy,$$

где $f_0 = \chi_0 f$ и $f_\varepsilon = \chi_\varepsilon f$; соответственно, χ_0 и χ_ε — характеристические функции множеств $\{(x,y) : |x-y| \ge \varepsilon\}$ и $\{(x,y) : |x-y| < \varepsilon\}$.

Очевидно, получим

$$A = A_0 + A_\varepsilon.$$

Отображение $A_0 : L_{p_1}(E) \to L_{p_2}(E_s)$ является компактным. Докажем, что A_ε можно сделать сколь угодно малым в норме банахова пространства непрерывных операторов из $L_{p_1}(E)$ в $L_{p_2}(E_s)$.

Пусть $u \in L_{p_1}(E)$ такое, что

$$\|u\|_{L_{p_1}(E)} = 1. \tag{1.19}$$

Имеем

$$|(A_\varepsilon u)(x)| \le \|f\|_{L_\infty(E\times E)} \int_E \frac{\chi_\varepsilon(x,y)|u(y)|}{|x-y|^\lambda}\,dy, \quad x \in E_s. \tag{1.20}$$

Рассмотрим сперва случай $1 \le p_1 \le p_2 < p_0$, $1 < p_2$. Применяя к правой части (1.20) неравенство Гельдера, находим

$$\begin{aligned}
\int_E \frac{\chi_\varepsilon(x,y)|u(y)|}{|x-y|^\lambda}\,dy &= \int_E \frac{\chi_\varepsilon(x,y)|u(y)|^{\frac{p_1}{p_2}}}{|x-y|^{\lambda_1}} \frac{|u(y)|^{1-\frac{p_1}{p_2}}}{|x-y|^{\lambda-\lambda_1}}\,dy \\
&\le \left(\int_E \frac{\chi_\varepsilon(x,y)|u(y)|^{p_1}}{|x-y|^{\lambda_1 p_2}}\,dy\right)^{\frac{1}{p_2}} \\
&\times \left(\int_E \frac{|u(y)|^{\left(1-\frac{p_1}{p_2}\right)q_2}}{|x-y|^{(\lambda-\lambda_1)q_2}}\,dy\right)^{\frac{1}{q_2}}, x \in E_s,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

где $1/p_2 + 1/q_2 = 1$. При этом вещественное число λ_1 мы хотим выбрать таким, чтобы было выполнено соотношение

$$\int_E \frac{|u(y)|^{\left(1-\frac{p_1}{p_2}\right)q_2}}{|x-y|^{(\lambda-\lambda_1)q_2}}\,dy \le const < \infty \tag{1.22}$$

где $const > 0$ не зависит от $x \in E$ и от функции u.

Предположим, что нам удалось это сделать для некоторого λ_1, удовлетворяющего условию

$$\lambda_1 p_2 < s. \tag{1.23}$$

Тогда объединяя (1.20) и (1.21), будем иметь

$$\begin{aligned}
\|A_\varepsilon u\|_{L_{p_2}(E_s)} &\le const \int_{E_s} d_s x \int_E \frac{\chi_\varepsilon(x,y)|u(y)|^{p_1}}{|x-y|^{\lambda_1 p_2}}\,dy \\
&\le const \int_E |u(y)|^{p_1}\,dy \int_{E_s} \frac{\chi_\varepsilon(x,y)}{|x-y|^{\lambda_1 p_2}}\,d_s x \\
&\le const\, \varepsilon^{s-\lambda_1 p_2},
\end{aligned} \tag{1.24}$$

где $d_s x$ — элемент s-мерного объема сечения E_s, а $const > 0$ не зависят от u и ε. Последняя оценка вытекает из (1.19) и из неравенства

$$\int_{E_s} \frac{\chi_\varepsilon(x,y)}{|x-y|^{\lambda_1 p_2}}\,d_s x \le \int_{\{x\in E_s: |x-y'|<\varepsilon\}} \frac{d_s x}{|x-y'|^{\lambda_1 p_2}} \le const\, \varepsilon^{s-\lambda_1 p_2},$$

где y' — ортогональная проекция точки y на E_s, а $const > 0$ не зависит от y и ε.

В свою очередь, (1.24) влечет за собой утверждение теоремы. Действительно, устремляя ε к нулю, получим

$$\|A_\varepsilon\| = \sup_{\|u\|_{L_{p_1}(E)}=1} \|A_\varepsilon u\|_{L_{p_2}(E_s)} \to 0. \tag{1.25}$$

Осталось лишь установить справедливость (1.22) для некоторого λ_1, удовлетворяющего условию (1.23).

Если $p_1 = p_2$, то справедливость (1.22) гарантируется соотношением

$$(\lambda - \lambda_1) q_2 < n. \tag{1.26}$$

Подставляя $q_2 = p_2/(p_2 - 1)$, перепишем его в виде

$$\lambda_1 p_2 > n - (n - \lambda) p_2.$$

Таким образом, согласно (1.17) существует вещественное число λ_1, для которого одновременно выполнены (1.23) и (1.26).

В случае $p_1 = 1$, полагая в (1.22) $\lambda_1 = \lambda$ будем, очевидно, иметь

$$\int_E \frac{|u(y)|^{\left(1-\frac{p_1}{p_2}\right)q_2}}{|x-y|^{(\lambda-\lambda_1)q_2}}\,dy = \int_E |u(y)|\,dy = 1.$$

При этом справедливость (1.23) вытекает из (1.18).

Тем самым, можно предположить, что $1 < p_1 < p_2 < p_0$. Обозначим

$$p_3 = p_1 \,/ ((1 - p_1/p_2)\, q_2) = \frac{p_1(p_2 - 1)}{p_2 - p_1} > 1.$$

Применяя к левой части соотношения (1.22) неравенство Гельдера с показателями $1/p_3 + 1/q_3 = 1$, получим

$$\begin{aligned} \int_E \frac{|u(y)|^{\left(1-\frac{p_1}{p_2}\right)q_2}}{|x-y|^{(\lambda-\lambda_1)q_2}}\,dy \;&\le\; \left(\int_E |u(y)|^{p_1}\,dy\right)^{\frac{1}{p_3}} \\ &\times\; \left(\int_E \frac{dy}{|x-y|^{(\lambda-\lambda_1)q_2 q_3}}\,dy\right)^{\frac{1}{q_3}}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Отсюда следует, что если нам удастся подобрать λ_1 такое, что

$$\int_E \frac{dy}{|x-y|^{(\lambda-\lambda_1)q_2 q_3}}\,dy \le const < \infty,$$

где $const$ не зависит от $x \in E$, то согласно (1.19) соотношение (1.22) также будет справедливо.

Последняя оценка немедленно вытекает из условия

$$(\lambda - \lambda_1) q_2 q_3 < n. \tag{1.28}$$

Подставляя в (1.28) явные выражения для q_2 и q_3 через p_1 и p_2

$$q_2 = \frac{p_2}{p_2 - 1}, \qquad q_3 = \frac{p_1(p_2 - 1)}{p_2(p_1 - 1)},$$

перепишем его в виде

$$\lambda_1 > \frac{n - (n - \lambda)p_1}{p_1}.$$

Таким образом, для того, чтобы соотношения (1.28) и (1.23) были одновременно выполнены для некоторого λ_1 достаточно, чтобы

$$\frac{s}{p_2} > \frac{n - (n - \lambda)p_1}{p_1}. \tag{1.29}$$

Осталось только заметить, что (1.29) следует из (1.18), и теорема 1.3.2 в случае $1 \le p_1 \le p_2 < p_0$, $1 < p_2$ полностью доказана.

Пусть теперь $p_1 = p_2 = 1$. Имеем из (1.19) и (1.20)

$$\begin{aligned}
\|A_\varepsilon u\|_{L_{p_2}(E_s)} &\le \max_{E \times E} |f| \int_{E_s} d_s x \int_E \frac{\chi_\varepsilon(x,y)|u(y)|}{|x-y|^\lambda}\, dy \\
&= \max_{E \times E} |f| \int_E |u(y)|\, dy \int_{E_s} \frac{\chi_\varepsilon(x,y)}{|x-y|^\lambda}\, d_s x \\
&\le const\, \varepsilon^{n-\lambda},
\end{aligned}$$

где $const$ не зависит от u и ε (заметим, что $\lambda < n$ по определению оператора A). Устремляя в этом соотношении ε к нулю, вновь приходим к (1.25).

Наконец, предположим, что $p_2 < p_1$. В этом случае компактность отображения $A : L_{p_1}(E) \to L_{p_2}(E_s)$ вытекает из доказанной ранее компактности отображения $A : L_{p_1}(E) \to L_{p_1}(E_s)$ и непрерывности тождественного оператора $I : L_{p_1}(E_s) \to L_{p_2}(E_s)$. □

Упражнение 1.3.1. Почему оператор $A_0 : L_{p_1}(E) \to L_{p_2}(E_s)$, введенный в доказательстве теоремы 1.3.2, является компактным?

Допустим, что $\tau : \Omega_0 \to \Omega$ — взаимно однозначное отображение ограниченных областей $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, причем $\tau \in C^1(\overline{\Omega}_0)$ и $\tau^{-1} \in C^1(\overline{\Omega})$. Обозначим $\Gamma_0 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega_0 : x_{s+1} = \ldots = x_n = 0\}$, где $1 \le s \le n$ — целое число.

Множество $\Gamma = \tau(\Gamma_0)$ будем называть поверхностью размерности s класса C^1.

Пусть E_0 — измеримое по Лебегу подмножество Ω_0, и $E = \tau(E_0)$. Пространство $L_p(\Gamma \cap E)$, $p \geq 1$, естественным образом определяется, как пространство измеримых на $\Gamma \cap E$ функций v таких, что

$$\|v\|_{L_p(\Gamma\cap E)} = \left(\int_{\Gamma\cap E} |v(\xi)|^p \, d\Gamma_\xi\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

где $d\Gamma_\xi$ — элемент s-мерного объема поверхности Γ в точке $\xi \in \Gamma$. Несложно увидеть, что

$$d\Gamma_{\tau(x)} = \gamma(x)\, d_s x,$$

где $d_s x = dx_1 \dots dx_s$ - элемент s-мерного объема плоскости Γ_0 в точке $x \in \Gamma_0$, а $\gamma(x)$ удовлетворяет неравенству

$$c_1 \leq \gamma(x) \leq c_2 \tag{1.30}$$

для некоторых вещественных чисел $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, не завиящих от $x \in \Gamma_0$. В частности, $v \in L_p(\Gamma \cap E)$ тогда и только тогда, когда $v \circ \tau \in L_p(\Gamma_0 \cap E_0)$. При этом из (1.30) непосредственно вытекает, что

$$c_1^{\frac{1}{p}} \|v\circ\tau\|_{L_p(\Gamma_0\cap E_0)} \leq \|v\|_{L_p(\Gamma\cap E)} \leq c_2^{\frac{1}{p}} \|v\circ\tau\|_{L_p(\Gamma_0\cap E_0)}.$$

Последнее означает, что отображение $\tau_\Gamma^* : v \mapsto v\circ\tau$ является топологическим гомеоморфизмом $L_p(\Gamma \cap E)$ на $L_p(\Gamma_0 \cap E_0)$.

Легко проверить, что отображение $\tau^* : L_q(E) \to L_q(E_0)$, $q \geq 1$, действующее по тому же правилу $\tau^* : v \mapsto v \circ \tau$ также является топологическим гомеоморфизмом пространств $L_q(E)$ и $L_q(E_0)$.

Обозначим через A_Γ оператор, ставяший в соответствие функции $u \in L_q(E)$ ограничение на множестве $\Gamma \cap E$ интеграла из правой части (1.11). Положим по определению $A_{\Gamma_0} = \tau_\Gamma^* \circ A_\Gamma \circ (\tau^*)^{-1}$. Сказанное можно проиллюстрировать с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} L_q(E) & \xrightarrow{A_\Gamma} & L_p(\Gamma\cap E) \\ {\scriptstyle\tau^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\tau_\Gamma^*} \\ L_q(E_0) & \xrightarrow[A_{\Gamma_0}]{} & L_p(\Gamma_0\cap E_0) \end{array}$$

Область определения $\operatorname{Dom} A_\Gamma$ оператора A_Γ не пуста, т.к. содержит, по крайней мере, нулевую функцию. Однако для произвольных p и q, вообще говоря, $\operatorname{Dom} A_\Gamma$ может не совпадать с $L_q(E)$.

Разумеется, $\operatorname{Dom} A_{\Gamma_0} = \tau^*(\operatorname{Dom} A_\Gamma)$. Тем самым, $\operatorname{Dom} A_\Gamma = L_q(E)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Dom} A_{\Gamma_0} = L_q(E_0)$.

Записывая оператор A_Γ в явном виде

$$(A_{\Gamma_0}u)(x) = \int_E \frac{f(\tau(x), y)}{|\tau(x) - y|^\lambda} u(\tau^{-1}(y))\, dy, \quad x \in \Gamma_0 \cap E_0,$$

заменой пеменных $z = \tau^{-1}(y)$ получим

$$(A_{\Gamma_0}u)(x) = \int_{E_0} \frac{f_0(x, z)}{|x - z|^\lambda} u(z)\, dy, \quad x \in \Gamma_0 \cap E_0,$$

где

$$f_0(x, z) = \frac{|x - z|^\lambda |\det \|d\tau(z)\||}{|\tau(x) - \tau(z)|^\lambda} f(\tau(x), \tau(z)).$$

Так как $\tau^{-1} \in C^1(\overline{\Omega})$, то можно утверждать, что $f_0 \in L_\infty(E_0 \times E_0)$. Другими словами, мы привели оператор A_{Γ_0} к виду, изученному в теореме 1.3.2. Вместе с тем, отображение $A_{\Gamma_0} : L_q(E_0) \to L_p(\Gamma_0 \cap E_0)$, очевидно, является абсолютно непрерывным тогда и только тогда, когда абсолютно непрерывно $A_\Gamma : L_q(E) \to L_p(\Gamma \cap E)$.

Итог нашим рассуждениям подводит следствие 1.3.1, сформулированное ниже.

Следствие 1.3.1. *Пусть $p_1 \geq 1$, $1/q_1 + 1/p_1 = 1$, $\lambda q_1 \geq n$, и пусть E_s — сечение измеримого ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ поверхностью размерности s класса C^1. Тогда если выполнены условия* (1.17) *и* (1.18), *то интеграл в правой части равенства* (1.11) *сходится почти для всех $x \in E_s$ в смысле меры Лебега на E_s. При этом* (1.11) *определяет вполне непрерывный оператор $A : L_{p_1}(E) \to L_{p_2}(E_s)$.*

Упражнение 1.3.2. Докажите соотношение (1.30).

Решение. Коэфициент $\gamma(x)$ численно равен s-мерному объему параллелепипеда, натянутого на векторы $f_1 = \partial\tau(x)/\partial x_1$, …, $f_s = \partial\tau(x)/\partial x_s$, касательные к поверхности Γ в точке $\tau(x) \in \Gamma$

$$\gamma(x) = \left|\det \left\| \begin{matrix} (f_1, f_1) & \dots & (f_1, f_s) \\ \vdots & & \vdots \\ (f_s, f_1) & \dots & (f_s, f_s) \end{matrix} \right\| \right|,$$

откуда, в частности, вытекает непрерывность функции γ на компакте $\overline{\Omega}_0$.

С другой стороны, $\gamma(x)$ не может обращаться в нуль ни для каких $x \in \overline{\Omega}_0$. В самом деле, имеем $f_1 = d\tau(x)\, e_1, \dots, f_s = d\tau(x)\, e_s$, где $d\tau(x)$ — касательное отображение в точке $x \in \overline{\Omega}_0$, а $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, …,

$e_n = (0, 0, \dots, 1)$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$. Поэтому, если бы объем параллелепипеда натянутого на векторы $f_1, \dots, f_s$, равнялся нулю, то отсюда следовало бы, что векторы $f_1, \dots, f_s$, линейно зависимы, а значит у отображения $d\tau(x)$ нетривиальное ядро. Но это противоречит невырожденности $d\tau(x)$.

Таким образом,

$$\inf_{x \in \overline{\Omega}_0} \gamma(x) > 0.$$

Непрерывность функции γ на $\overline{\Omega}_0$ также влечет за собой оценку

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}_0} \gamma(x) < \infty.$$

1.4 Представление функций по С.Л. Соболеву

Теорема 1.4.1. *Пусть Ω — ограниченная область, звездная относительно шара B_h, $\overline{B}_h \subset \Omega$, и пусть $u \in C^m(\overline{\Omega})$, $m \geq 1$. Тогда*

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{|\beta| \leq m-1} x^\beta \int_{B_h} \varphi_\beta(y) u(y)\, dy \\ &+ \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \frac{f_\alpha(x, r, \theta)}{r^{n-m}} \partial^\alpha u(y)\, dy \end{aligned} \tag{1.31}$$

для любого $x \in \Omega$, где $r = |y - x|$, $\theta = (y - x)/r$, $\varphi_\beta \in C_0^\infty(B_h)$ и $f_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$.

Доказательство. Положим

$$\psi(x, r, \theta) = -\frac{r^{m-1}}{(m-1)!} \int_r^\infty \omega_h(x + t\theta) t^{n-1}\, dt,$$

где $\omega_h \in C_0^\infty(B_h)$ такое же, как в разделе 1.2. Тогда ψ бесконечно гладкая функция, причем

$$\left. \frac{\partial^i \psi}{\partial r^i}(x, r, \theta) \right|_{r=0} = 0, \quad i = 0, \dots, m-2,$$

и

$$\left. \frac{\partial^{m-1} \psi}{\partial r^{m-1}}(x, r, \theta) \right|_{r=0} = -\int_r^\infty \omega_h(x + t\theta) t^{n-1}\, dt.$$

Очевидно также, что $\psi(x, r, \theta) = 0$ при достаточно больших r.

Интегрируя по частям, имеем для всякого $x \in \Omega$

$$\int_0^\infty \psi(x,r,\theta)\frac{\partial^m u(x+r\theta)}{\partial r^m}\,dr = (-1)^{m-1}\frac{\partial^{m-1}\psi(x,r,\theta)}{\partial r^{m-1}}u(x+r\theta)\Big|_{r=0}^{\infty} + (-1)^m\int_0^\infty \frac{\partial^m\psi(x,r,\theta)}{\partial r^m}u(x+r\theta)\,dr,$$

откуда находим

$$u(x)\int_0^\infty \omega_h(x+t\theta)t^{m-1}\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial^m\psi(x,r,\theta)}{\partial r^m}u(x+r\theta)\,dr + (-1)^{m-1}\int_0^\infty \psi(x,r,\theta)\frac{\partial^m u(x+r\theta)}{\partial r^m}\,dr.$$

Интегрируя это равенство по $\theta \in S_1$, в свою очередь, получим

$$\begin{aligned} &u(x)\int_{S_1} dS_1(\theta)\int_0^\infty \omega_h(x+t\theta)t^{m-1}\,dt \\ &= \int_{S_1} dS_1(\theta)\int_0^\infty \frac{\partial^m\psi(x,r,\theta)}{\partial r^m}u(x+r\theta)\,dr \\ &+ (-1)^{m-1}\int_{S_1} dS_1(\theta)\int_0^\infty \psi(x,r,\theta)\frac{\partial^m u(x+r\theta)}{\partial r^m}\,dr, \end{aligned}$$

где $dS_1(\theta)$ — элемент объема сферы S_1. Другими словами,

$$u(x)\int_{\mathbb{R}^n}\omega_h(x+\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^m\psi(x,r,\theta)}{\partial r^m}\Big|_{r=|\xi|,\,\theta=\xi/|\xi|}\frac{u(x+\xi)}{|\xi|^{n-1}}\,d\xi$$
$$+ (-1)^{m-1}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x,|\xi|,\xi/|\xi|)\,\frac{\partial^m u(x+r\theta)}{\partial r^m}\Big|_{r=|\xi|,\,\theta=\xi/|\xi|}\frac{d\xi}{|\xi|^{n-1}}.$$

В то же время, по определению функции ω_h

$$\int_{\mathbb{R}^n}\omega_h(x+\xi)d\xi = 1.$$

Таким образом, из предыдущего соотношения следует, что

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^m\psi(x,r,\theta)}{\partial r^m}\Big|_{r=|\xi|,\,\theta=\xi/|\xi|}\frac{u(x+\xi)}{|\xi|^{n-1}}\,d\xi + (-1)^{m-1}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x,|\xi|,\xi/|\xi|)\,\frac{\partial^m u(x+r\theta)}{\partial r^m}\Big|_{r=|\xi|,\,\theta=\xi/|\xi|}\frac{d\xi}{|\xi|^{n-1}}.$$

Наконец, совершая в правой части последней формулы замену переменной интегрирования $y = x + \xi$, получим (1.31). $\square$

Далее нам потребуется одно простое, но весьма полезное утверждение.

Лемма 1.4.1. *Предположим, что $a < \lambda_0 < b$ — вещественные числа, M — множество с мерой Лебега μ, а $f : (a,b) \times M \to \mathbb{R}$ — некоторая функция такая, что*

$$\int_M |f(\lambda_0, y)|\, d\mu(y) < \infty,$$

$f(\cdot, y)$ — абсолютно непрерывна на (a,b) почти для всех $y \in M$, и

$$\int_{(a,b)\times M} \left| \frac{\partial f(\lambda, y)}{\partial \lambda} \right| d\lambda\, d\mu(y) < \infty.$$

Тогда интеграл

$$\varphi(\lambda) = \int_M f(\lambda, y)\, d\mu(y)$$

сходится для любого $\lambda \in (a,b)$, функция φ абсолютно непрерывна на интервале (a,b), и при этом

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = \int_M \frac{\partial f(\lambda, y)}{\partial \lambda}\, d\mu(y)$$

для почти всех $\lambda \in (a,b)$.

Доказательство. По формуле Ньютона-Лейбница

$$f(\lambda, y) = f(\lambda_0, y) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\partial f(\theta, y)}{\partial \theta}\, d\theta$$

для всех $\lambda \in (a,b)$ и почти всех $y \in M$, откуда согласно теореме Фубини находим

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda_0) + \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\theta \int_M \frac{\partial f(\theta, y)}{\partial \theta}\, d\mu(y)$$

для всех $\lambda \in (a,b)$. □

Следствие 1.4.1. *Пусть Ω — ограниченная область, звездная относительно шара B_h, $\overline{B}_h \subset \Omega$, и пусть $u \in W_p^m(\Omega)$, $m \geq 1$. Тогда все обобщенные производные функции u порядка, не превосходящего $m-1$, принадлежат пространству $L_p(\Omega)$, и при этом*

$$\begin{aligned} \partial^\sigma u(x) \ &= \sum_{|\beta| \leq m - |\sigma| - 1} x^\beta \int_{B_h} \varphi_\beta(y) u(y)\, dy \\ &+ \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega \frac{f_{\alpha,\sigma}(x, r, \theta)}{r^{n-m+|\sigma|}} \partial^\alpha u(y)\, dy \end{aligned} \qquad (1.32)$$

почти всюду в Ω *для любого мультииндекса* σ *такого, что* $|\sigma| \le m-1$*, где* $r = |y-x|$*,* $\theta = (y-x)/r$*,* $\varphi_\beta \in C_0^\infty(B_h)$ *и* $f_{\alpha,\sigma} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$*. Нормы производных* $\partial^\sigma u$*,* $|\sigma| \le m-1$*, в* $L_p(\Omega)$ *удовлетворяют оценке*

$$\sum_{|\sigma|\le m-1} \|\partial^\sigma u\|_{L_p(\Omega)} \le const\, \|u\|_{W_p^m(\Omega)}, \tag{1.33}$$

где $const > 0$ *не зависит от* u*.*

Доказательство. Из теоремы 1.2.1 следует, что существует последовательность $u_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \|u - u_k\|_{W_p^m(\Omega)} = 0.$$

Согласно интегральному представлению (1.31) и лемме 1.4.1 имеем

$$\begin{aligned} \partial^\sigma u_k(x) &= \sum_{|\beta|\le m-|\sigma|-1} x^\beta \int_{B_h} \varphi_\beta(y) u_k(y)\, dy \\ &+ \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \frac{f_{\alpha,\sigma}(x,r,\theta)}{r^{n-m+|\sigma|}} \partial^\alpha u_k(y)\, dy, \qquad |\sigma| \le m-1, \end{aligned} \tag{1.34}$$

для всех $x \in \Omega$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\varphi_\beta \in C_0^\infty(B_h)$ и $f_{\alpha,\sigma} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$ — некоторые функции.

Правая часть (1.34) реализует непрерывное отображение пространства $W_p^m(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$. В случае $n < (m-|\sigma|)p$ это не сложно увидеть из теоремы 1.3.1 и замечания 1.3.1, а в случае $n \ge (m-|\sigma|)p$ — из теоремы 1.3.2.

Таким образом,

$$\sum_{|\sigma|\le m-1} \|\partial^\sigma u_k\|_{L_p(\Omega)} \le const\, \|u_k\|_{W_p^m(\Omega)}, \tag{1.35}$$

где $const > 0$ не зависит от u_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Переходя к пределу в (1.34) и (1.35) при $k \to \infty$, немедленно получаем (1.32) и (1.33). □

1.5 Теоремы вложения С.Л. Соболева. Эквивалентные нормы в пространствах $W_p^m(\Omega)$

Ниже мы будем предполагать, что Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, звездная относительно некоторого своего шара, а E_s — сечение области Ω поверхностью размерности s класса C^1.

Говорим, что производная $\partial^\sigma u$ функции $u \in W_p^m(\Omega)$ порядка $|\sigma| \le m-1$ имеет след на E_s, если интеграл, стоящий в правой части (1.32), сходится почти для всех $x \in E_s$ в смысле меры Лебега на E_s.

Теорема 1.5.1. *Пусть $0 \le l \le m-1$ — целые числа, $(m-l)p \le n$, $n-(m-l)p < s \le n$ и $1 \le q < sp/(n-(m-l)p)$. Тогда все производные $\partial^\sigma u$ порядка $|\sigma| \le l$ функции $u \in W_p^m(\Omega)$ имеют след на E_s, причем для любого мультииндекса σ такого, что $|\sigma| \le l$, оператор $A_\sigma : u \mapsto \partial^\sigma u|_{E_s}$ вполне непрерывно отображает пространство $W_p^m(\Omega)$ в $L_q(E_s)$.*

Доказательство. Применим теорему 1.3.2 к интегральному представлению (1.32). □

В предположениях теоремы 1.5.1 след производных $\partial^\sigma u$, $|\sigma| \le l$, функции $u \in W_p^m(\Omega)$ на E_s можно определить следующим эквивалентным способом. Рассмотрим последовательность $u_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $k = 1, 2, \ldots$, такую, что $\|u - u_k\|_{W_p^m(\Omega)} \to 0$ при $k \to \infty$. Согласно теореме 1.5.1 ограничения функций $\partial^\sigma u$, $|\sigma| \le l$, на E_s образуют фундаментальную последовательность в пространстве $L_q(E_s)$. Предел этой последовательности и будет следом $\partial^\sigma u$ на E_s.

Теорема 1.5.2. *Пусть $0 \le l \le m-1$, $(m-l)p \le n$ и $1 \le q < np/(n-(m-l)p)$. Тогда $W_p^m(\Omega)$ вполне непрерывно вкладывается в $W_q^l(\Omega)$.*

Доказательство. Полагаем в предыдущем утверждении $s = n$. □

Следствие 1.5.1. *Пространство $W_p^m(\Omega)$ вполне непрерывно вкладывается в $W_p^l(\Omega)$ для всякого $l \le m-1$.*

Теорема 1.5.3. *Пусть $(m-l)p > n$. Тогда $W_p^m(\Omega)$ вполне непрерывно вкладывается в $C^l(\Omega)$.*

Доказательство. Воспользуемся формулой (1.32) и теоремой 1.3.1. □

Теорема 1.5.4. *Пусть $\mathcal{F}$ — непрерывная полунорма на $W_p^m(\Omega)$, положительная на всяком нетривиальном многочлене степени, не превосходящей $m-1$. Тогда найдется $const > 0$ такая, что*

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} \le const \left(\left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \mathcal{F}(u) \right)$$

для любого $u \in W_p^m(\Omega)$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда для всякого натурального k должно существовать $u_k \in W_p^m(\Omega)$ такое, что

$$\|u_k\|_{W_p^m(\Omega)} > k \left(\left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha u_k|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \mathcal{F}(u_k) \right).$$

Обозначая

$$v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_{W_p^m(\Omega)}},$$

будем, очевидно, иметь

$$\|v_k\|_{W_p^m(\Omega)} = 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.36}$$

и

$$\left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v_k|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \mathcal{F}(v_k) \le \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.37}$$

Последовательность v_k, $k = 1, 2, \ldots$, ограничена в $W_p^m(\Omega)$, поэтому из нее можно выделить подпоследовательность, фундаментальную в $L_p(\Omega)$. Для простоты будем обозначать эту подпоследовательность также v_k, $k = 1, 2, \ldots$. Из (1.37) следует, что эта последовательность будет фундаментальна и в $W_p^m(\Omega)$, а значит

$$\lim_{k\to\infty} \|v_k - v\|_{W_p^m(\Omega)} = 0$$

для некоторого $v \in W_p^m(\Omega)$. Причем $\partial^\alpha v = 0$ для всякого мультииндекса α такого, что $|\alpha| = m$. Таким образом, v — многочлен степени, не превосходящей $m - 1$.

Из (1.37) и непрерывности функции $\mathcal{F}$ имеем $\mathcal{F}(u) = 0$. Тем самым, $v = 0$, и мы приходим к противоречию с (1.36). □

Пример 1.5.1. Пусть Ω — область с границей класса C^1 и

$$\mathcal{F}(u) = \left| \int_{\partial\Omega} u \, dS \right|,$$

где dS — элемент $(n-1)$-мерного объема границы $\partial\Omega$.

Согласно последней теореме, получим $\forall u \in W_p^1(\Omega)$

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \le const \left(\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left| \int_{\partial\Omega} u \, dS \right| \right), \tag{1.38}$$

где $const > 0$ не зависит от u.

В случае $u \in \overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$ формула (1.38) превращается в неравенство Фридрихса

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \le const\, \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.39}$$

где $const > 0$ не зависит от u.

Заметим, что (1.39) справедливо и без каких бы то ни было требований, касающихся гладкости $\partial\Omega$. Действительно, область Ω всегда можно поместить в шар B_r достаточно большого радиуса $r > 0$. При этом будем иметь $\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega) \subset \overset{o}{W}{}_p^1(B_r)$.

Пример 1.5.2. Определяя полунорму $\mathcal{F}$ соотношением

$$\mathcal{F}(u) = \left| \int_\Omega u \, dx \right|,$$

получим для всякой функции $u \in W_p^1(\Omega)$ неравенство Пуанкаре

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \le const\, \left(\left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left| \int_\Omega u \, dx \right| \right),$$

где $const > 0$ не зависит от u.

Теорема 1.5.5. *Пусть $U \hookrightarrow V \hookrightarrow W$ — банаховы пространства, причем вложение $U \hookrightarrow V$ компактно, а $V \hookrightarrow W$ — непрерывно. Тогда для любого вещественного числа $\varepsilon > 0$ найдется константа $C(\varepsilon) > 0$ такая, что*

$$\|u\|_V \le \varepsilon \|u\|_U + C(\varepsilon) \|u\|_W$$

для всякого $u \in U$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть найдется $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\|u_k\|_V > \varepsilon \|u_k\|_U + k \|u_k\|_W$$

для некоторой последовательности $u_k \in U$, $k = 1, 2, \ldots$. Обозначим

$$v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_V}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда для всех $k = 1, 2, \ldots$ будем, очевидно, иметь

$$\|v_k\|_V = 1 \tag{1.40}$$

и

$$\varepsilon \|v_k\|_U + k \|v_k\|_W < 1. \tag{1.41}$$

Тем самым, последовательность v_k, $k = 1, 2, \ldots$, ограничена в норме пространства U, и в силу компактности вложения $U \hookrightarrow V$ из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в норме пространства V к некоторому элементу $v \in V$. Чтобы не загромождать индексов, будем обозначать эту подпоследовательность также v_k, $k = 1, 2, \ldots$.

По условию V непрерывно вкладывается в W, поэтому $\|v_k - v\|_W \to 0$ при $k \to \infty$. Однако, из неравенства (1.41) вытекает, что $\|v_k\|_W \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, $v = 0$. Последнее находится в противоречии с (1.40). □

Следствие 1.5.2. *Пусть* $1 \le l < m$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется постоянная* $C(\varepsilon) > 0$ *такая, что*

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} \le \varepsilon \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + C(\varepsilon) \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

для всякого $u \in W_p^m(\Omega)$.

Доказательство. Полагаем в теореме 1.5.5 $U = W_p^m(\Omega)$, $V = W_p^l(\Omega)$ и $W = L_p(\Omega)$. □

Замечание 1.5.1. Разумеется, теоремы 1.5.1 – 1.5.4, а также следствия 1.5.1 и 1.5.2 остаются в силе и в случае, когда Ω является объединением областей, звездных относительно некоторых своих шаров. Тем самым, эти утверждения справедливы для весьма широкого класса областей Ω (например, достаточно потребовать, чтобы $\partial\Omega$ имело класс гладкости C^1).

Литература

[1] *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.

[2] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Т. 1. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы. 1958.

[3] *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.

[4] *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.

[5] *Мазья В.Г.* Пространства С.Л.Соболева. Л.: Изд–во ЛГУ, 1985.

[6] *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977.

[7] *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: 1950.