МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.Ю. Колягин, О.Н. Быкова

Интеграл типа Коши и его операторные аналоги

(учебное пособие)

Москва 2009

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

С.Ю. Колягин, О.Н. Быкова

Интеграл типа Коши и его операторные аналоги

(учебное пособие)

**Рекомендовано
УМО по специальностям педагогического образования
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 050201.65 (032100) – математика**

Москва 2009

ББК 22.161
К 62
УДК 517.5

Колягин С.Ю., Быкова О.Н. *Интеграл типа Коши и его операторные аналоги. Учебное пособие. – М.: Изд-во МПГУ, 2009. – 79 с.*

ISBN 978-5-94845-183-6

Учебное пособие посвящено важным разделам теории функций комплексного переменного, связанным с интегральной формулой Коши, интегралом типа Коши и их операторными аналогам, и предназначено для студентов математических и физико-математических факультетов педвузов, обучающихся по специальностям 032100-Математика, 032100.00-Математика с дополнительной специальностью и 030100.21-Информатика с дополнительной специальностью Математика, по направлениям бакалавриата 510100-Математика и 540200-Физико-математическое образование, а также по другим специальностям и направлениям.

Учебное пособие соответствует Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования (ГОС ВПО). Оно может быть полезно преподавателям вузов при чтении лекций по соответствующей дисциплине для студентов математических и физико-математических факультетов педвузов, а также аспирантам, специализирующимся на комплексной анализе.

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Московского государственного текстильного университета им. А.Н. Косыгина **Е.М. Матвеев.**

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры Московского педагогического государственного университета **А.В. Гришин.**

ISBN 978-5-94845-183-6

© МПГУ, 2009
© Колягин С.Ю., Быкова О.Н., 2009

Содержание

Введение……... 4

§1. Интегральная формула Коши…….. 6

§2. Интеграл типа Коши и его свойства……... 13

§3. Метод линейных дифференциальных операторов…… 23

§4. Интегральные преставления
для звёздных и выпуклых областей…….. 28

§5. Операторный аналог интеграла типа Коши
для звёздных областей…… 34

§6. Об операторных аналогах интеграла типа Коши
специальных видов для звёздных областей…….. 51

§7. Операторный аналог интеграла типа Коши
для выпуклых областей…….. 57

§8. Об одном операторном аналоге интеграла типа Коши
специального вида для выпуклых областей……. 68

Литература……... 78

Введение

Впервые важнейшие исследования по теории интеграла типа Коши дал Ю.В. Сохоцкий. В 1873 году в своей докторской диссертации он исследовал поведение интеграла типа Коши на контуре и вывел формулы для предельных значений этого интеграла. Большую роль в дальнейшем развитии теории интеграла типа Коши сыграли работы немецкого математика А. Гарнака, югославского математика И. Племели, а также исследования советских математиков И.И. Привалова и Н.И. Мусхелишвили.

Во второй половине XX века работы советских и российских математиков получили направление, связанное с операторными обобщениями интеграла типа Коши, строящимися на основе интегральных представлений для звёздных и выпуклых областей, полученных И.И. Бавриным [8]. Исследования операторных аналогов интеграла типа Коши, выявленные свойства определяемых ими функций показали их существенные различия с классическим интегралом типа Коши.

Круг перечисленных вопросов выходит за рамки педвузовского курса ТФКП и включен в пособие, которое предполагается авторами как дополнение к стандартному курсу ТФКП, а также как основа дисциплины по выбору на математических и физико-математических факультетах в педвузах.

В предлагаемом пособии сначала излагается теория интеграла типа Коши, доказываются его основные свойства. Затем рассматривается вопрос об операторных обобщениях классической интегральной формулы Коши и проводится исследование строящихся на их основе операторных аналогов интеграла типа Коши: изучается характер их поведения на комплексной плоскости, вскрываются квазианалитические свойства определяемых этими интегралами функций вне области аналитичности, а также квазигармоничность их действительных и мнимых частей. Большое внимание уделено методу линейных дифференциальных операторов, предложенному впервые в 60-е годы XX века А.Т. Хвостовым для исследования указанных интегралов именно в областях неаналитичности. Вскрытие квазианалитичесих свойств рассматриваемых интегралов является наиболее важной частью пособия. Здесь для них устанавливаются обобщённые производные, решается вопрос о разложении функций, определяемых этими интегралами, в обобщённые степенные ряды, выводятся обобщённые условия Коши-Римана. Не оставлено авторами без внимания и конструктивно установленное качественно новое направление развития одномерной теории – существенное расширение способа задания плотностей интегралов (зависящих уже не от одного, а от двух параметров).

Систематика и доступность изложения представленной теории позволят студентам использовать пособие при самостоятельном изучении отдельных тем. Кроме того, данное пособие направлено на повышение математической культуры студентов, в особенности, при выработке умений использовать математический аппарат комплексного анализа, применять правила и положения метода линейных дифференциальных операторов, являющегося основным методом исследования в данном пособии.

Одним из основных источников по исследованию операторных аналогов интеграла типа Коши при написании учебного пособия послужил цикл методических разработок А.В. Нелаева [11]-[14], вышедших в свет более 20 лет назад.

§1. Интегральная формула Коши

Вначале сформулируем теорему Коши для односвязной области, её важные следствия, а также теорему о составном контуре (теорему Коши для многосвязной области). Все эти утверждения входят в основной курс теории функций комплексного переменного.

Теорема 1 (*теорема Коши для односвязной области*). **Пусть функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D и Γ – произвольный простой кусочно-гладкий контур, лежащий в D. Тогда $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$.**

Замечание. Теорема 1 остаётся в силе и в случае многосвязной области D, если контур интегрирования Γ принадлежит некоторой односвязной подобласти D_1 области D, т.е. если $I(\Gamma) \subset D$.

Следствие. **Пусть D – односвязная область, границей которой $\mathrm{Fr}D$ служит простой кусочно-гладкий контур. Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \mathrm{Fr}D$, то $\int\limits_{\mathrm{Fr}D} f(z)dz = 0$.**

Пусть область D ограничена непересекающимися *внешним* простым кусочно-гладким контуром Γ_0 и n $(n \in \mathbb{N})$ *внутренними* простыми кусочно-гладкими контурами Γ_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$. При этом каждый внутренний контур Γ_j, $j = \overline{1,n}$ лежит внутри внешнего контура Γ_0 $\left(\Gamma_j \subset I(\Gamma_0)\right)$ и вне любого другого внутреннего контура Γ_k $\left(\Gamma_j \subset E(\Gamma_k)\right)$ $(k \neq j)$. В этом случае говорят, что граница области D представляет собой, так называемый, *составной* (или *сложный*) контур

$$\mathrm{Fr}D = \Gamma_0 \cup (\Gamma_1 -) \cup (\Gamma_2 -) \cup \cdots \cup (\Gamma_n -) = \Gamma_0 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} (\Gamma_k -) \right), \qquad (1)$$

ориентированный положительно, т.е. так, чтобы при обходе по составному контуру область D осталась слева. Ясно, область D, ограниченная составным контуром, является $(n+1)$-связной.

Теорема 2 (*теорема Коши для составного контура*). **Пусть D – $(n+1)$-связная $(n \in \mathbb{N}_0)$ область, ограниченная составным контуром (1). Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой области $\overline{D}$, то**

$$\int\limits_{\Gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)dz$$

или в более краткой форме $\int\limits_{\mathrm{Fr}D} f(z)dz = 0$, где под интегралом $\int\limits_{\mathrm{Fr}D} f(z)dz$

понимается $\int\limits_{\Gamma_0} f(z)dz - \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)dz$.

Рассмотрим теперь следующий важный пример.

Пример. Исследовать интеграл $I = \int\limits_{\Gamma} (z - z_0)^k dz$, $k \in \mathbb{Z}$, где Γ – произвольный простой кусочно-гладкий контур, $z_0 \notin \Gamma$.

1) Если $k \in \mathbb{N}_0$, то функция $f(z) = (z - z_0)^k$ аналитическая всюду на $\mathbb{C}$ и по теореме Коши, $I = 0$.

2) Если $k \in \mathbb{Z}_- = \{-1; -2; ...\}$, то функция $f(z) = \dfrac{1}{(z - z_0)^{-k}}$, где $(-k) \in \mathbb{N}$, аналитическая на $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ и, следовательно, при $z_0 \in E(\Gamma)$, в силу вышеприведённого замечания, $I = 0$. Пусть теперь $z_0 \in I(\Gamma)$. Рассмотрим произвольную окружность l с центром в точке z_0, целиком лежащую в $I(\Gamma)$. Образовавшаяся область $D = I(\Gamma) \cap E(l)$ – двусвязная, её границей служит составной контур $\mathrm{Fr}D = \Gamma \cup (l^-)$ и функция $f(z)$ – аналитическая в $\overline{D}$, следовательно, по теореме 2 $\int\limits_{\mathrm{Fr}D} f(z)dz = 0$ или $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{l} f(z)dz$, т.е. $I = \int\limits_{l} f(z)dz$. Подсчитаем последний интеграл, параметризируя стандартным образом окружность l. Имеем $l: z = \lambda(t) = z_0 + r\exp it$, где r – радиус окружности l и $t \in [0;\ 2\pi]$. Тогда

$$I = \int\limits_0^{2\pi} f(\lambda(t))\lambda'(t)dt = \int\limits_0^{2\pi} r^k \exp ikt \cdot ir \exp itdt = ir^{k+1} \int\limits_0^{2\pi} \exp i(k+1)tdt.$$

Если $k \neq -1$, то $I = \dfrac{ir^{k+1}}{i(k+1)} \exp i(k+1)t\Big|_0^{2\pi} = \dfrac{r^{k+1}}{(k+1)}\left(\exp i2\pi(k+1) - 1\right) = 0$.

Если $k = -1$, то $I = i\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i$.

Итак, объединяя пункты 1) и 2), получаем

$$I = \begin{cases} 0, & (k \in \mathbb{N}_0) \vee \left(k \in \mathbb{Z}^- \wedge z_0 \in E(\Gamma)\right) \vee \left(k \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\} \wedge z_0 \in I(\Gamma)\right) \\ 2\pi i, & \left(k = -1 \wedge z_0 \in I(\Gamma)\right) \end{cases}.$$

В частности, $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$, если контур интегрирования Γ «охватывает» точку z_0.

Теорема 3 (*интегральная формула Коши для односвязной области*). **Пусть**

функция $f(z)$ является аналитической в односвязной замкнутой области $\overline{D} = D \cup \mathbf{Fr}D$, границей которой $\mathbf{Fr}D$ является простой кусочно-гладкий положительно ориентированный контур. Тогда для всякой точки z области D имеет место формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbf{Fr}D} \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z}. \qquad (2)$$

▶ Обход контура $\mathrm{Fr}D$ происходит в положительном направлении, т.е. так, чтобы область D оставалась слева. Зафиксируем любую точку $z_0 \in D$ и рассмотрим произвольную окружность $l = \{\eta \in \mathbb{C}: |\eta - z_0| = r\} \subset D$ ($r < \rho$, где $\rho = \inf\limits_{\eta \in \mathrm{Fr}D} |\eta - z_0|$ – расстояние от точки z_0 до границы области D). В образовавшейся двусвязной замкнутой области $\overline{D} \setminus I(l)$ (где $I(l)$ – открытый круг $K = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$) вспомогательная функция $g(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ будет аналитической, поэтому согласно теореме о составном контуре $\int\limits_{\mathrm{Fr}D} g(\eta)d\eta = \int\limits_{l} g(\eta)d\eta$.

В силу непрерывности на l функция $g(z)$ ограничена там по модулю, т.е. $\exists M > 0: \forall \eta \ (\eta \in l \Rightarrow |g(\eta)| \le M)$. Следовательно, по свойству комплексного интеграла (оценка интеграла) $\left|\int\limits_{l} g(\eta)d\eta\right| \le 2M\pi r$. А так как радиус r окружности l может быть сколь угодно малым, то $\int\limits_{l} g(\eta)d\eta = 0$. Поэтому $\int\limits_{\mathrm{Fr}D} g(\eta)d\eta = 0$ или $\int\limits_{\mathrm{Fr}D} \frac{f(\eta) - f(z_0)}{\eta - z_0}d\eta = 0$. Отсюда в силу линейности комплексного интеграла имеем $\int\limits_{\mathrm{Fr}D} \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z_0} = f(z_0) \int\limits_{\mathrm{Fr}D} \frac{d\eta}{\eta - z_0}$. Но интеграл, стоящий в правой части последней формулы, согласно рассмотренному выше примеру, равен $2\pi i$ и поэтому $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Fr}D} \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z_0}$. Произвольность точки $z_0 \in D$ завершает доказательство теоремы. ◀

Замечание. Отметим, что в условии теоремы 3 требование аналитичности функции $f(z)$ на границе области D может быть заменено более слабым, а

именно непрерывностью $f(z)$ на контуре $\mathrm{Fr}D$.

Формула (2) носит название *интегральной формулой Коши*. Интеграл в правой части этой формулы часто называют *интегралом Коши*, функцию $f(\eta)$, стоящую в числителе подынтегрального выражения, – *плотностью* интеграла Коши, а другой множитель подынтегральной функции, т.е. дробь $\dfrac{1}{\eta - z}$ – *ядром* интеграла Коши. Качественный смысл интегральной формулы Коши заключается в том, что она восстанавливает значение функции $f(z)$ в любой точке области D по её значениям на границе этой области.

Пусть границей $\mathrm{Fr}D$ односвязной области D служит простой кусочно-гладкий контур Γ. Будем саму область $D = I(\Gamma)$ обозначать через D^+, а область $E(\Gamma)$ – через D^-, т.е. $D^+ = I(\Gamma)$, $D^- = E(\Gamma)$. Интеграл Коши сохраняет смысл и если произвольная точка $z_0 \in D^-$. Действительно, тогда подынтегральная функция $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$ будет аналитической в замкнутой односвязной области $\overline{D^+}$ и, следовательно, по теореме Коши $\displaystyle\int_{\mathrm{Fr}D} \frac{f(\eta)\,d\eta}{\eta - z_0} = 0$. Таким образом, формула (2) может быть записана в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Fr}D} \frac{f(\eta)\,d\eta}{\eta - z} = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases}. \qquad (2')$$

Пример 1. Вычислим комплексный интеграл $I = \displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{\exp z}{z + i}\,dz$. Данный интеграл есть интеграл Коши с плотностью $f(z) = \exp z$ и ядром $\dfrac{1}{z + i}$. Действительно, функция $f(z) = \exp z$ является аналитической в замкнутом круге $\overline{K} = \{z \in \mathbb{C}: |z - 1| \le 2\}$, а точка $z_0 = -i$ (ноль знаменателя ядра) «охвачена» окружностью интегрирования $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}: |z - 1| = 2\}$, т.е. $z_0 \in I(\Gamma)$. Следовательно, по формуле (2) искомый интеграл равен $I = 2\pi i \exp(-i) =$ $= 2\pi i\left(\cos(-1) + i\sin(-1)\right) = 2\pi\left(\sin 1 + i\cos 1\right)$.

Пример 2. Вычислим комплексный интеграл $I = \displaystyle\int_{|z+i|=2} \frac{\cos z}{z^2 - z}dz$. Подынтегральная функция $\dfrac{\cos z}{z^2 - z}$ является аналитической всюду в замкнутом круге $\overline{K} = \{z \in \mathbb{C}: |z + i| \le 2\}$ кроме точек $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$. «Окружая» каждую из них

своей окружностью Γ_1 и Γ_2, достаточно малых радиусов (так, чтобы $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset K$ и каждая лежала вне другой) и, удаляя из $\overline{K}$ соответствующие открытые круги, получим трёхсвязную замкнутую область $\overline{D} = \overline{K} \setminus \left(I(\Gamma_1) \cup I(\Gamma_2)\right)$, в которой функция $\frac{\cos z}{z^2 - z}$ определена и аналитическая. По теореме Коши для многосвязной области, имеем $I = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\cos z}{z^2 - z} dz + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\cos z}{z^2 - z} dz$. Но интеграл $\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\cos z}{z^2 - z} dz = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\frac{\cos z}{z-1}}{z} dz$ есть интеграл Коши с плотностью $f_1(z) = \frac{\cos z}{z-1}$ и ядром $\frac{1}{z}$, поэтому по формуле (2) $\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\frac{\cos z}{z-1}}{z} dz = 2\pi i \frac{\cos 0}{-1} = -2\pi i$. Аналогично, интеграл $\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\cos z}{z^2 - z} dz = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\frac{\cos z}{z}}{z-1} dz$ есть интеграл Коши с плотностью $f_2(z) = \frac{\cos z}{z}$ и ядром $\frac{1}{z-1}$, поэтому по формуле (2) $\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\frac{\cos z}{z}}{z-1} dz = 2\pi i \frac{\cos 1}{1} = i 2\pi \cos 1$. Следовательно, искомый интеграл равен $I = -2\pi i + i 2\pi \cos 1 = i 2\pi (\cos 1 - 1)$.

Теорема 4. **Пусть Γ – простой кусочно-гладкий положительно ориентированный контур, функция $f(z)$ является аналитической в области $D^- = E(\Gamma)$, непрерывной в $\overline{D^-} = D^- \cup \Gamma$ и существует конечный предел $f(\infty) = \lim\limits_{z \to \infty} f(z) \in \mathbb{C}$. Тогда имеет место формула**

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - z} = \begin{cases} f(\infty) - f(z), & z \in D^- \\ f(\infty), & z \in D^+ \end{cases}. \qquad \textbf{(3)}$$

▶ За положительное направление обхода контура Γ, как обычно, принимаем то, при котором область D^+ остаётся слева. Зафиксируем произвольную точку $z_0 \in D^+$ и совершим конформное отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}_z}$ дробно-линейной функцией $w = \frac{1}{z - z_0}$ (и, следовательно, $z = \frac{1}{w} + z_0$). При этом контур $\Gamma \subset \mathbb{C}_z$ перейдёт в (на) контур $\Gamma' \subset \mathbb{C}_w$, область D^+ – в (на) область $G^- = E(\Gamma')$, область D^- – в (на) область $G^+ = I(\Gamma')$, включающую точку $w = 0$. Причём обход контура Γ', очевидно, будет отрицательным, т.е. область G^+ при таком обходе остаётся справа. Рассмотрим функцию $g(w) = f\left(\frac{1}{w} + z_0\right)$. Ясно, что она аналитическая (как композиция таковых) в за-

мкнутой односвязной области $\overline{G^+}=G^+\cup\Gamma'$ и $g(0)=f(\infty)$. Следовательно, по формуле (2′)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{g(\zeta)}{\zeta-w}d\zeta=\begin{cases}g(w), & w\in G^+\\ 0, & w\in G^-\end{cases}. \qquad (*)$$

Совершим в левой части формулы (3) замену переменных $\eta=\frac{1}{\zeta}+z_0$ и $z=\frac{1}{w}+z_0$. Будем иметь $f(\eta)=f\left(\frac{1}{\zeta}+z_0\right)=g(\zeta)$ и $d\eta=-\frac{d\zeta}{\zeta^2}$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{-g(\zeta)d\zeta}{\zeta^2\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{w}\right)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{w}{\zeta(w-\zeta)}g(\zeta)d\zeta.$$

Но $\frac{w}{\zeta(w-\zeta)}=\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{\zeta-w}$, следовательно, с учётом (2′) (функция $g(w)$ – аналитическая в области G^+ и $w=0\in G^+$) и формулы (*), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{w}{\zeta(w-\zeta)}g(\zeta)d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{g(\zeta)d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{g(\zeta)d\zeta}{\zeta-w}=$$

$$=g(0)-\begin{cases}g(w), & w\in G^+\\ 0, & w\in G^-\end{cases}=\begin{cases}g(0)-g(w), & w\in G^+\\ g(0), & w\in G^-\end{cases},$$

т.е. $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\eta)}{\eta-z}d\eta=\begin{cases}g(0)-g(w), & w\in G^+\\ g(0), & w\in G^-\end{cases}$. Возвращаясь в правой части последнего равенства к переменной z $\left(g(w)=f\left(\frac{1}{w}-z_0\right)=f(z),\ g(0)=f(\infty)\right)$, получаем доказываемую формулу (3). ◀

Замечание. Если функция $f(z)$ является аналитической всюду в $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. является *целой* функцией, доопределённой непрерывным образом в точке $z=\infty$ (и, следовательно, ограниченной по модулю), то по теореме Лиувилля функция $f(z)$ может быть только постоянной $f(z)=c-\text{const}$. В этом случае формулы (2′) и (3), очевидно, совпадают и вырождаются в тривиальную $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{c\,d\eta}{\eta-z}=\begin{cases}c, & z\in D^+\\ 0, & z\in D^-\end{cases}$.

Теорема 5 (*интегральная формула Коши для многосвязной области*). **Пусть функция $f(z)$ является аналитической в $(n+1)$-связной $(n\in\mathbb{N}_0)$ замкнутой области $\overline{D}=D\cup\mathrm{Fr}D$, границей которой $\mathrm{Fr}D$ является состав-**

ной положительно ориентированный контур $\Gamma_0 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} (\Gamma_k -) \right)$**. Тогда для всякой точки** z **области** D **имеет место формула**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Fr}D} \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z}. \qquad (4)$$

▶ Отметим сразу, что в формуле (4) интегрирование по составному контуру происходит в положительном направлении, т.е. так, чтобы область D оставалась слева. Другими словами, интеграл, стоящий в правой части формулы (4), есть следующая алгебраическая сумма интегралов $\int_{\Gamma_0} \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z} - \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z}$.

Пусть $z_0 -$ произвольная точка области D. Рассмотрим простой кусочно-гладкий контур Γ, охватывающий точку z_0 $(z_0 \in I(\Gamma))$, лежащий внутри внешнего контура Γ_0 $(\Gamma \subset I(\Gamma_0))$ и во внешности каждого из внутренних контуров Γ_k $(\Gamma \subset E(\Gamma_k))$ $(k = \overline{1,n})$. В силу открытости области D, это всегда можно сделать (например, в качестве Γ можно взять окружность с центром в точке z_0, лежащую в окрестности этой точки, в которой функция $f(z)$ аналитическая).

Подынтегральная функция $\frac{f(z)}{z - z_0}$ является аналитической в образовавшейся замкнутой $(n+2)-$связной области $\overline{D_1} = \overline{D} \setminus I(\Gamma)$, границей которой служит составной контур $\Gamma_0 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} (\Gamma_k -) \right) \cup (\Gamma -)$. Поэтому по теореме Коши для составного контура, будем иметь $\int_{\mathrm{Fr}D_1} \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z_0} = 0$, и, следовательно, $\int_{\Gamma} \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z_0} = \int_{\mathrm{Fr}D} \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z_0}$. Но для замкнутой односвязной области $\overline{I(\Gamma)}$ выполнены условия теоремы 3, а значит, $\int_{\Gamma} \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z_0} = 2\pi i\, f(z_0)$. Таким образом, окончательно получаем равенство $2\pi i f(z_0) = \int_{\mathrm{Fr}D} \frac{f(\eta)d\eta}{\eta - z_0}$, которое с учётом произвольности точки z_0 из области D, равносильно формуле (4). ◀

Непосредственно из интегральной формулы Коши (2) для односвязной области вытекает одно из замечательных свойств аналитических функций – их

бесконечная дифференцируемость. В завершении данного параграфа сформулируем соответствующую теорему, в которой формула (5) обобщает интегральную формулу Коши (2) и доказывается индукцией по порядку производной $\left(n \in \mathbb{N}_0\right)$.

Теорема 6. **Если функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0, то данная функция дифференцируема в этой точке любое число раз, причём**

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\eta)d\eta}{(\eta - z_0)^{n+1}} \quad \left(n \in \mathbb{N}_0\right), \tag{5}$$

где Γ – произвольный простой кусочно-гладкий контур, охватывающий точку z_0 $\left(z_0 \in I(\Gamma)\right)$ и лежащий в той окрестности этой точки, в которой функция $f(z)$ является аналитической.

§2. Интеграл типа Коши и его свойства

Пусть Γ – простой кусочно-гладкий контур на комплексной плоскости. Область, лежащую внутри контура Γ, будем называть *внутренней* и обозначать, по-прежнему, D^+ $\left(D^+ = I(\Gamma)\right)$, а дополнение к $\overline{D^+}$ будем называть *внешней* областью и обозначать, по-прежнему, D^- $\left(D^- = E(\Gamma)\right)$.

Из результатов предыдущего параграфа следует, что если функция $f(z)$ является аналитической в D^+ и непрерывной в $\overline{D^+}$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases}. \tag{1}$$

Если же функция $f(z)$ – аналитическая в области D^-, непрерывная в её замыкании и имеет конечный предел $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+ \\ f(\infty) - f(z), & z \in D^- \end{cases}. \tag{2}$$

Здесь за положительное направление обхода контура Γ, как обычно, принимаем такое, при котором область D^+ остаётся слева.

Формулы (1) и (2) дают возможность вычислить значения функции в любой точке области, если известны её значения на границе области; коротко это обстоятельство выражают словами: эти формулы решают краевую задачу для аналитических функций. Интеграл, стоящий в левой части формул (1) и (2), называется интегралом Коши.

Пусть теперь Γ – простая гладкая замкнутая или незамкнутая кривая, целиком расположенная в конечной части комплексной плоскости; η – аффикс

(комплексная координата) её точек и $\varphi(\eta)-$ непрерывная функция точек этой кривой. Тогда интеграл

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-z}d\eta, \tag{3}$$

построенный также, как и интеграл Коши, называется интегралом *типа Коши*, функция $\varphi(\eta)-$ его *плотностью*, а $\frac{1}{\eta-z}-$ *ядром* этого интеграла.

Теорема 1. **Интеграл типа Коши (3) представляет собой функцию, аналитическую на всей комплексной плоскости, за исключением точек кривой Γ.**

▶ Пусть $z-$ произвольная точка комплексной плоскости, не лежащая на кривой Γ. Обозначим расстояние от точки z до кривой Γ через ρ $\left(\rho=\inf\limits_{\eta\in\Gamma}|z-\eta|>0\right)$, а длину кривой Γ через h $(h>0)$.

Рассмотрим окрестность $U(z)$ точки z радиуса $\frac{\rho}{2}$. Эта окрестность не содержит точек кривой Γ. Возьмём в этой окрестности точку $z+\Delta z$ $(\Delta z\neq 0)$ и рассмотрим разностное отношение $\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-z-\Delta z}d\eta-\right.$

$\left.-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-z}d\eta\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-z-h)(\eta-z)}d\eta$. Так как функция $\varphi(\eta)$ непрерывна на Γ, то $|\varphi(\eta)|<M$, где $M-$ некоторое положительное число.

Оценим разность

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-z-\Delta z)(\eta-z)}d\eta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-z)^2}d\eta\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Delta z\varphi(\eta)}{(\eta-z-\Delta z)(\eta-z)^2}d\eta\right|<$$

$$<\int_{\Gamma}\frac{M|d\eta|}{|\eta-z-\Delta z||\eta-z|^2}<\frac{4|\Delta z|Mh}{\pi\rho^3}.$$ Последнее неравенство имеет место в силу того, что $|\eta-z-\Delta z|=|\eta-(z+\Delta z)|>\frac{\rho}{2}$ и $|\eta-z|>\frac{\rho}{2}$. Имеем $\frac{4|\Delta z|Mh}{\pi\rho^3}\xrightarrow[\Delta z\to 0]{}0$, а это означает, что $\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-z-\Delta z)(\eta-z)}d\eta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-z)^2}d\eta\right|\xrightarrow[\Delta z\to 0]{}0$,

следовательно, $\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}\xrightarrow[\Delta z\to 0]{}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \dfrac{\varphi(\eta)}{(\eta-z)^2}d\eta$, т.е. функция $F(z)$ дифференцируема в точке z и справедлива формула $F'(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \dfrac{\varphi(\eta)}{(\eta-z)^2}d\eta$.

В силу произвольности точки z из области $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ это и доказывает аналитичность функция (3) в области $\mathbb{C}\setminus\Gamma$. ◀

Пример. Вычислим интеграл типа Коши по окружности $\Gamma=\{\eta\in\mathbb{C}:\ |\eta+i|=1\}$, с плотностью $\varphi(\eta)=\dfrac{2i}{\eta^2+1}$ $(\eta\in\Gamma)$ т.е. интеграл $I=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \dfrac{2i}{\eta^2+1}\cdot\dfrac{d\eta}{\eta-z}$. Функция $\varphi(z)=\dfrac{2i}{z^2+1}$ определена и непрерывна на Γ и не является аналитической ни в круге $D^+=\{z\in\mathbb{C}:\ |z+i|<1\}$ $\left(-i\in D^+\right)$, ни вне этого круга $D^-=\{z\in\mathbb{C}:\ |z+i|>1\}$ $\left(i\in D^-\right)$. Поэтому это не интеграл Коши, а интеграл типа Коши. Сведём его к сумме двух интегралов Коши и воспользуемся затем формулами (1) и (2). Раскладывая функцию $\varphi(\eta)$ на сумму простейших дробей, получим $\varphi(\eta)=\dfrac{2i}{(\eta-i)(\eta+i)}=\dfrac{1}{\eta-i}-\dfrac{1}{\eta+i}$. Поэтому

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{2i}{\eta^2+1}\cdot\frac{d\eta}{\eta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\eta-i}\cdot\frac{d\eta}{\eta-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\eta+i}\cdot\frac{d\eta}{\eta-z}.$$

Так как функция $\varphi_1(z)=\dfrac{1}{z-i}$ является аналитической в круге D^+ (но не в области D^-), то интеграл $I_1=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \dfrac{1}{\eta-i}\cdot\dfrac{d\eta}{\eta-z}$ есть интеграл Коши и по формуле (1) будем иметь $I_1=\begin{cases}\dfrac{1}{z-i}, & z\in D^+\\ 0, & z\in D^-\end{cases}$. Аналогично, т.к. функция $\varphi_2(z)=\dfrac{1}{z+i}$ является аналитической в области D^- (но не в круге D^+), то интеграл $I_2=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \dfrac{1}{\eta+i}\cdot\dfrac{d\eta}{\eta-z}$ есть интеграл Коши и по формуле (2) $I_2=\begin{cases}0, & z\in D^+\\ -\dfrac{1}{z+i}, & z\in D^-\end{cases}$ $\left(\varphi_2(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}\varphi_2(z)=0\right)$. Таким образом, вычисляемый интеграл типа Коши есть

$$I = I_1 - I_2 = F(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z-i}, & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases} - \begin{cases} 0, & z \in D^+ \\ -\dfrac{1}{z+i}, & z \in D^- \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{z-i}, & z \in D^+ \\ \dfrac{1}{z+i}, & z \in D^- \end{cases}.$$

Мы видим, что полученная в результате функция $F(z)$ представляет собой «кусочнозаданную» в областях D^+ и D^- разными аналитическими выражениями: $F^+(z) = \dfrac{1}{z-i}$ в круге D^+ и $F^-(z) = \dfrac{1}{z+i}$ в области D^-. Обе функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$, являясь аналитическими соответственно в областях D^+ и D^-, в тоже время не являются аналитическими продолжениями друг друга.

Исследуем поведение интеграла типа Коши на контуре интегрирования.

Лемма. **Если плотность $\varphi(\eta)$ интеграла типа Коши (3) удовлетворяет на простой гладкой кривой Γ условию Гёльдера и точка η_0 не совпадает с концами Γ, то функция $\Psi(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta - z} d\eta$ ведёт себя при переходе через точку η_0 этой кривой как функция непрерывная, т.е. имеет определённое предельное значение при приближении z к η_0 по любому пути: $\lim\limits_{z\to\eta_0} \Psi(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0} d\eta = \Psi(\eta_0)$.**

▶ Оценим разность $\Psi(z) - \Psi(\eta_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{z-\eta_0}{\eta - z} \cdot \frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0} d\eta$. Пусть сначала стремление z к η_0 происходит по некасательному к Γ пути, т.е. нетупой угол между отрезком $z\eta_0$ и касательной к Γ в точке η_0 не меньше некоторого острого угла $\omega_0 > 0$. Разобьём оцениваемый интеграл на два слагаемых: I_1 – по дуге Γ_δ кривой Γ, лежащей внутри круга достаточно малого радиуса $\delta > 0$ с центром в точке η_0, и I_2 – по остальной части $\Gamma \setminus \Gamma_\delta$. При этом число δ выберем настолько малым, что острый угол, образованный вектором $\overrightarrow{\eta_0\eta}$, где $\eta \in \Gamma_\delta$, с одним из касательных векторов в точке η_0, был меньше $\dfrac{\omega_0}{2}$. Применяя к треугольнику $z\eta_0\eta$ теорему синусов, получим $\dfrac{|z-\eta_0|}{|\eta - z|} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\omega} \le$

$\le \dfrac{1}{\sin\dfrac{\omega_0}{2}} = k$, где k – некоторое положительное число. Согласно условию Гёльдера имеем $\left|\dfrac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta - z}\right| < A\underbrace{|\eta-\eta_0|}_{r}^{\lambda-1} = Ar^{\lambda-1}$.

Так как кривая гладкая, то отношение $\frac{ds}{dr}$, где $s-$ длина дуги кривой, а $r-$ длина стягивающей её хорды, есть величина ограниченная, т.е. $\left|\frac{ds}{dr}\right| \le M$ (здесь $M-$ положительная постоянная) следовательно, $|d\eta| = |ds| \le M\,|dr|$. Применим полученные неравенства для оценки интеграла I_1:

$$|I_1| \le \int_{\Gamma_\delta} \frac{|z-\eta_0|}{|\eta - z|} \cdot \left|\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0}\right| |ds| < kA \cdot M \int_{\Gamma_\delta} r^{\lambda-1}|dr| = 2kA \cdot M \int_0^\delta r^{\lambda-1} dr = \frac{2kA \cdot M\,\delta^\lambda}{\lambda}.$$

Следовательно, задавшись произвольным числом $\varepsilon > 0$, можно так подобрать δ, что будет иметь место неравенство $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Зафиксируем найденное таким образом δ и перейдём к оценке интеграла I_2. На участке кривой $\Gamma \setminus \Gamma_\delta$ $\eta \ne \eta_0$, поэтому интеграл I_2 является непрерывной функцией от z и, следовательно, для достаточно малых хорд будет выполняться неравенство $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ равномерно по η при указанном стремлении z к η_0.

В результате полученных оценок имеем $|\Psi(z) - \Psi(\eta_0)| \le |I_1| + |I_2| < \varepsilon$. В силу произвольности ε следует, что функция $\Psi(z)$ непрерывна в точке η_0.

Заметим, что оценка разности $|\Psi(z) - \Psi(\eta)|$ была произведена независимо от η, следовательно, стремление $\Psi(z)$ к своему пределу происходит равномерно. Отсюда вытекает, что предельное значение функции $\Psi(z)$ на кривой $\Gamma -$ функция $\Psi(\eta) -$ непрерывна. Действительно, если $\eta_1, \eta_2 \in \Gamma$, то $|\Psi(\eta_1) - \Psi(\eta_2)| \le |\Psi(\eta_1) - \Psi(z)| + |\Psi(z) - \Psi(\eta_2)|$. В силу равномерности стремления $\Psi(z)$ к пределу оба слагаемых в правой части неравенства могут быть сделаны сколь угодно малыми при достаточной близости точек η_1 и η_2.

Теперь рассмотрим случай, когда z стремится к η_0 по некоторой кривой γ, касательной к Γ. Возьмём на кривой γ точку z, достаточно близкую к η_0, и проведём через неё какую-нибудь некасательную к кривой Γ кривую γ_1 так, чтобы она пересекала кривую Γ в некоторой точке η_1, достаточно близкой к η_0. Кривую γ_1 всегда можно взять так, чтобы длины хорд $z\eta_0$ и $z\eta_1$ были одновременно сколь угодно малы. В силу доказанного утверждения о существовании предела по некасательному пути и свойства равномерной непрерывности функции $\Psi(\eta)$ на Γ имеем соответственно, что $|\Psi(z) - \Psi(\eta_1)|$ и $|\Psi(\eta_1) - \Psi(\eta_0)|$ сколь угодно малы, а отсюда и модуль $|\Psi(z) - \Psi(\eta_0)| \le$ $\le |\Psi(z) - \Psi(\eta_1)| + |\Psi(\eta_1) - \Psi(\eta_0)|$ будет сколь угодно мал. Этим и устанавливается существование предела по любому пути. ◀

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что условие Гёльдера, налагаемое на плотность, требуется лишь локально в точке η_0; на остальной части кривой функция $\varphi(\eta)$ может быть просто непрерывной и даже иметь разрывы при соблюдении условия интегрируемости.

Рассмотрим интеграл типа Коши $\mathsf{F}(\mathsf{z})=\dfrac{1}{2\pi\mathsf{i}}\displaystyle\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\mathsf{z}}\mathsf{d}\eta$, где $\Gamma-$ замкнутая простая кривая (контур) и функция $\varphi(\eta)$ удовлетворяет на этой кривой условию Гёльдера. Как и ранее, $\mathsf{D}^{+}=\mathrm{I}(\Gamma)$ и $\mathsf{D}^{-}=\mathrm{E}(\Gamma)$. Для исследования предельных значений $\mathsf{F}(\mathsf{z})$ в некоторой точке η_0 контура рассмотрим функцию $\Psi(\mathsf{z})=\dfrac{1}{2\pi\mathsf{i}}\displaystyle\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\mathsf{z}}\mathsf{d}\eta$. Обозначим $\mathsf{F}^{+(-)}(\eta_0)$ и $\Psi^{+(-)}(\eta_0)-$ предельные значения аналитических функций $\mathsf{F}(\mathsf{z})$ и $\Psi(\mathsf{z})$ соответственно при стремлении точки z к точке η_0 контура изнутри (извне) Γ: $\mathsf{z}\in\mathsf{D}^{+(-)}$. Значения соответствующих функций в точке η_0 контура будем обозначать $\mathsf{F}(\eta_0)$ и $\Psi(\eta_0)$, причём $\mathsf{F}(\eta_0)$ будет обозначать особый интеграл $\dfrac{1}{2\pi\mathsf{i}}\displaystyle\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\eta_0}\mathsf{d}\eta$, понимаемый в смысле главного значения. Исходя из равенств $\displaystyle\int_{\Gamma}\frac{\mathsf{d}\eta}{\eta-\mathsf{z}}=\begin{cases}2\pi\mathsf{i}, & \mathsf{z}\in\mathsf{D}^{+}\\ 0, & \mathsf{z}\in\mathsf{D}^{-}\\ \pi\mathsf{i}, & \mathsf{z}\in\Gamma\end{cases}$, будем иметь

$$\Psi^{+}(\eta_0)=\lim_{\mathsf{z}\to\eta_0+}\Psi(\mathsf{z})=\lim_{\mathsf{z}\to\eta_0+}\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\left(\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\mathsf{z}}\mathsf{d}\eta-\varphi(\eta_0)\int_{\Gamma}\frac{\mathsf{d}\eta}{\eta-\mathsf{z}}\right)=\mathsf{F}^{+}(\eta_0)-\varphi(\eta_0),$$

$$\Psi^{-}(\eta_0)=\lim_{\mathsf{z}\to\eta_0-}\Psi(\mathsf{z})=\lim_{\mathsf{z}\to\eta_0-}\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\left(\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\mathsf{z}}\mathsf{d}\eta-\varphi(\eta_0)\int_{\Gamma}\frac{\mathsf{d}\eta}{\eta-\mathsf{z}}\right)=\mathsf{F}^{-}(\eta_0),$$

$$\Psi(\eta_0)=\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\left(\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\mathsf{z}}\mathsf{d}\eta-\varphi(\eta_0)\int_{\Gamma}\frac{\mathsf{d}\eta}{\eta-\mathsf{z}}\right)=\mathsf{F}(\eta_0)-\frac{1}{2}\varphi(\eta_0).$$

Так как по лемме функция $\Psi(\eta)$ непрерывна в точке η_0, то левые части написанных равенств совпадают, а значит, совпадают и правые части, т.е.

$$\mathsf{F}^{+}(\eta_0)-\varphi(\eta_0)=\mathsf{F}^{-}(\eta_0)=\mathsf{F}(\eta_0)-\frac{1}{2}\varphi(\eta_0),\qquad(4)$$

откуда окончательно получаем

$$\begin{aligned} F^+(\eta_0) &= F(\eta_0) + \frac{1}{2}\varphi(\eta_0) \\ F^-(\eta_0) &= F(\eta_0) - \frac{1}{2}\varphi(\eta_0) \end{aligned} \qquad (5)$$

Формулы (5), полученные впервые в 1873 г. русским математиком Ю.В. Сохоцким, называются формулами Сохоцкого.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. **Если плотность $\varphi(\eta)$ интеграла типа Коши (3) удовлетворяет на простом гладком контуре Г условию Гёльдера, то интеграл типа Коши имеет предельные значения $F^+(\eta_0) = \lim\limits_{\substack{z\to\eta_0 \\ z\in D^+}} F(z)$ и $F^-(\eta_0) = \lim\limits_{\substack{z\to\eta_0 \\ z\in D^-}} F(z)$ в любой точке η_0 контура Г и эти предельные значения вычисляются по формулам Сохоцкого (5).**

Замечание. Формулы Сохоцкого выражают предельные значения интеграла типа Коши (3) в точке η_0 при стремлении к этой точке соответственно изнутри и извне контура Г через особый интеграл и значение плотности интеграла в данной точке.

Вычитая и складывая формулы (5), получим пару равносильных им формул

$$\begin{aligned} F^+(\eta_0) + F^-(\eta_0) &= 2F(\eta_0) \\ F^+(\eta_0) - F^-(\eta_0) &= \varphi(\eta_0) \end{aligned} .$$

Ранее было использовано свойство контура, которое можно сформулировать следующим образом: отношение малой дуги контура к стягивающей её хорде есть величина ограниченная. Однако это свойство справедливо не только для контуров с непрерывно меняющейся касательной, но и для контуров, имеющих угловые точки. Таким образом, все рассуждения справедливы и в том случае, когда исследуемая точка есть угловая точка контура. В этом случае при $z \in \Gamma$ $\int\limits_\Gamma \frac{d\eta}{\eta - z} = i\alpha$, где $\alpha -$ угол между правым и левым касательными векторами к Г в угловой точке η_0. Равенство (4) примет вид $F^+(\eta_0) - \varphi(\eta_0) = F^-(\eta_0) = F(\eta_0) - \frac{\alpha}{2\pi}\varphi(\eta_0)$, откуда получаем выражения для $F^+(\eta_0)$ и $F^-(\eta_0)$:

$$\begin{aligned} F^+(\eta_0) &= F(\eta_0) + \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(\eta_0) \\ F^-(\eta_0) &= F(\eta_0) - \frac{\alpha}{2\pi}\varphi(\eta_0) \end{aligned} \qquad (6)$$

Таким образом, если интеграл типа Коши берётся по контуру, имеющему конечное множество угловых точек (кусочно-гладкий контур), то предельные значения интеграла существуют, причём для неугловых точек остаются в силе обычные формулы Сохоцкого, а для угловых точек имеют место формулы (6).

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании особого интеграла.

1^0. Пусть $\varphi(\eta)-$ функция точек контура Γ, $m-$ая производная которой удовлетворяет условию Гёльдера. Покажем, что у производной $m-$го порядка функции $F(\eta)$, определяемой интегралом типа Коши, существуют предельные значения на контуре и что эти предельные значения удовлетворяют соотношениям, аналогичным формулам Сохоцкого (5):

$$\begin{aligned} F^{(m)+}(\eta_0) &= F^{(m)}(\eta_0)+\frac{1}{2}\varphi^{(m)}(\eta_0) \\ F^{(m)-}(\eta_0) &= F^{(m)}(\eta_0)-\frac{1}{2}\varphi^{(m)}(\eta_0) \end{aligned}, \tag{7}$$

где $F^{(m)}(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\varphi^{(m)}(\eta)}{\eta-z}d\eta$. Применяя к полученному интегралу типа Коши формулы Сохоцкого (5), получаем формулы (7).

2^0. Покажем теперь, что в формулах (7) операции дифференцирования и перехода к пределу на контуре переместительны, т.е. что на контуре предельные значения производных интеграла типа Коши совпадают с производными его предельных значений $\left(F^{\pm}(\eta_0)\right)^{(m)}=\left(F^{(m)}(\eta_0)\right)^{\pm}$, если плотность $\varphi^{(m)}(\eta)$ удовлетворяет условию Гёльдера. Ограничимся рассмотрением случая первой производной. Покажем сначала, что

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi'(\eta)}{\eta-z}d\eta. \tag{8}$$

По формуле $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\varphi'(\eta)}{\eta-\eta_0}d\eta = i\pi\varphi(\eta_0)-\int_\Gamma \varphi'(\eta)\ln(\eta-\eta_0)d\eta$ имеем $F'(\eta_0)=$

$=\dfrac{d}{d\eta}\left(\dfrac{1}{2}\varphi(\eta_0)-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \varphi'(\eta)\ln(\eta-\eta_0)d\eta\right)$. Продифференцировав интегральное слагаемое, получим

$$\frac{d}{d\eta}\left(\int_\Gamma \varphi'(\eta)\ln(\eta-\eta_0)d\eta\right)=\lim_{\delta\to 0}\frac{d}{d\eta}\left(\int_{\Gamma\setminus\Gamma_\delta} \varphi'(\eta)\ln(\eta-\eta_0)d\eta\right)=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\left(-\int_{\Gamma\setminus\Gamma_\delta}\frac{\varphi'(\eta)}{\eta-\eta_0}d\eta+\varphi'(\eta_2)\ln(\eta-\eta_2)-\varphi'(\eta_1)\ln(\eta-\eta_1)\right)=$$

$$= -\int_{\Gamma} \frac{\varphi'(\eta)}{\eta-\eta_0}\mathrm{d}\eta + \lim_{\delta\to 0}\left(\varphi'(\eta_2)-\varphi'(\eta_1)\right)\ln(\eta-\eta_2) +$$

$$+ \lim_{\delta\to 0}\varphi'(\eta_1)\left(\ln(\eta-\eta_2)-\ln(\eta-\eta_1)\right). \qquad (9)$$

Так как $\varphi'(\eta_0)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то первый из оставшихся пределов равен нулю, а второй равен $\pi\mathrm{i}\varphi'(\eta_0)$. Поэтому из (9) получаем $\mathrm{F}'(\eta_0)=\frac{1}{2}\varphi'(\eta_0)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{\varphi'(\eta)}{\eta-\eta_0}\mathrm{d}\eta-\frac{1}{2}\varphi'(\eta_0)$, что и доказывает (8). Равенство $\left(\mathrm{F}^{\pm}(\eta_0)\right)'=\left(\mathrm{F}'(\eta_0)\right)^{\pm}$ следует теперь из (8) непосредственным применением формул Сохоцкого.

Выше было установлено, что предельные значения интеграла типа Коши, т.е. функции $\mathrm{F}^{+(-)}(\eta)$, непрерывны на контуре Γ. Эти функции обладают более глубоким свойством, чем непрерывность, а именно, они сами удовлетворяют условию Гёльдера.

Теорема 3. **Если Γ – простой гладкий контур и $\varphi(\eta)$ удовлетворяет на Γ условию Гёльдера с показателем λ, то предельные значения интеграла типа Коши $\mathrm{F}^{+(-)}(\eta)$ также удовлетворяют этому условию, причём с тем же показателем, если $\lambda<1$, и с показателем, сколь угодно мало отличающимся от λ, если $\lambda=1$.**

▶ Из равенства $\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\eta_0}\mathrm{d}\eta=\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0}\mathrm{d}\eta+\mathrm{i}\pi\varphi(\eta_0)$, видно, что сформулированную теорему достаточно доказать для функции $\Psi(\eta_0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_0)}{\eta-\eta_0}\mathrm{d}\eta$, где, по-прежнему, Γ – простой гладкий контур. Для этого оценим модуль разности

$$\left|\Psi(\eta_2)-\Psi(\eta_1)\right|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma}\left(\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_2)}{\eta-\eta_2}-\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_1)}{\eta-\eta_1}\right)\mathrm{d}\eta\right| \qquad (10)$$

для двух произвольных достаточно близких точек η_1 и η_2. Из точки η_1 опишем окружность радиуса δ так, чтобы она пересекалась с Γ в двух точках, которые обозначим a и b. Часть контура Γ, лежащую внутри этой окружности, обозначим γ_1. Пусть η_2 – произвольная фиксированная точка дуги γ_1, отличная от точек a и b. Положим $\delta=\mathrm{k}\left|\eta_2-\eta_1\right|$. Очевидно, что $\mathrm{k}>1$.

Обозначим $\mathrm{s}=\mathrm{s}(\eta_0,\eta)-$ длину меньшей из двух дуг контура Γ с концами η_0 и η. Из свойства гладкости контура Γ следует, что для любых двух точек η_1

и η_2 можно написать $\omega(\eta_1,\eta_2)\le M|\eta_2-\eta_1|$, где M – положительная постоянная.

Представим интеграл (10) следующим образом:

$$\Psi(\eta_2)-\Psi(\eta_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_2)}{\eta-\eta_2}d\eta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_1)}{\eta-\eta_1}d\eta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\setminus\gamma_1}\left(\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_2)}{\eta-\eta_2}-\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_1)}{\eta-\eta_1}\right)d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_2)}{\eta-\eta_2}d\eta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_1)}{\eta-\eta_1}d\eta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\setminus\gamma_1}\frac{\varphi(\eta_1)-\varphi(\eta_2)}{\eta-\eta_1}d\eta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\setminus\gamma_1}\frac{\big(\varphi(\eta)-\varphi(\eta_2)\big)(\eta_2-\eta_1)}{(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)}d\eta=I_1+I_2+I_3+I_4$$

.

Получим сначала оценку для интеграла I_2:

$$|I_2|\le\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1}\left|\frac{\varphi(\eta)-\varphi(\eta_1)}{\eta-\eta_1}\right||d\eta|<\frac{AM}{2\pi}\int_{\gamma_1}r^{\lambda-1}|dr|\le\frac{AM}{\pi}\int_0^{\delta}r^{\lambda-1}dr=A_1|\eta_2-\eta_1|^{\lambda}.$$

Здесь, а также и в дальнейшем, все числовые коэффициенты – некоторые положительные постоянные. Аналогично $|I_1|\le A_2|\eta_2-\eta_1|^{\lambda}$.

Интеграл I_3 оценим так:

$$|I_3|=\frac{|\varphi(\eta_1)-\varphi(\eta_2)|}{2\pi}\left|\int_{\Gamma\setminus\gamma_1}\frac{d\eta}{\eta-\eta_1}\right|\le\frac{A_2|\eta_2-\eta_1|^{\lambda}}{2\pi}\left|\int_{\Gamma\setminus\gamma_1}\frac{d\eta}{\eta-\eta_1}\right|.$$

Последний интеграл вычисляется непосредственно, а именно: $\int_{\Gamma\setminus\gamma_1}\frac{d\eta}{\eta-\eta_1}=$

$=\ln\frac{a-\eta_1}{b-\eta_1}$. Следовательно, он ограничен при всяком η_1 на Γ. Поэтому имеем оценку $|I_3|\le A_3|\eta_2-\eta_1|^{\lambda}$.

Перейдём к оценке интеграла I_4. Используя условие Гёльдера, получим

$$|I_4|\le A\frac{|\eta_2-\eta_1|}{2\pi}\int_{\Gamma\setminus\gamma_1}\frac{|d\eta|}{|\eta-\eta_1||\eta-\eta_2|^{1-\lambda}}\le A'|\eta_2-\eta_1|\int_{\Gamma\setminus\gamma_1}|\eta-\eta_1|^{\lambda-2}\left|\frac{\eta-\eta_1}{\eta-\eta_2}\right|^{1-\lambda}|d\eta|.$$

А т.к. $|\eta-\eta_1|\ge\delta=k|\eta_2-\eta_1|$, то $k|\eta-t_2|\ge k\big(|\eta-\eta_1|-|\eta_1-\eta_2|\big)\ge(k-1)|\eta-\eta_1|$, и,

следовательно, $|I_4| \le A''\left(\frac{k}{k-1}\right)^{1-\lambda} |\eta_1 - \eta_2| \int_R^{\delta} r^{\lambda-2} dr$, где $R = \max\limits_{\eta \in \Gamma \setminus \gamma_1} |\eta - \eta_1|$. Если $\lambda < 1$, то, вычислив последний интеграл, найдём $|I_4| \le A_4 |\eta_2 - \eta_1|^{\lambda}$. Если $\lambda = 1$, то таким же способом получим оценку $|I_4| \le A_4' |\eta_2 - \eta_1| \left|\ln |\eta_2 - \eta_1|\right|$. Принимая во внимание, что $|\ln x|$ при $x \to 0$ растёт медленнее любой отрицательной степени $|x|^{-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$, получим $|I_4| \le A_4' |\eta_2 - \eta_1|^{1-\varepsilon}$. Сопоставляя оценки для I_1, I_2, I_3 и I_4, а также замечая, что при $\lambda = 1$ в оценках I_1, I_2, I_3 показатель λ можно заменить на $1 - \varepsilon$, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы. ◀

Доказательство проведено для контура. Однако теорема справедлива и для незамкнутой кривой, за исключением её концов. Из доказательства теоремы о свойстве предельных значений интеграла типа Коши непосредственно вытекает следующее свойство особого интеграла в смысле главного значения по Коши.

Если функция $\varphi(\eta)$ на гладком контуре Γ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ, то $F(\eta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\eta)}{\eta - \eta_0} d\eta$ также удовлетворяет этому условию, причём с тем же показателем, если $\lambda < 1$, и с показателем $1 - \varepsilon$, где ε – сколь угодно малое положительное число, если $\lambda = 1$.

Это утверждение, равно как и предыдущая теорема, легко обобщается на случай, когда плотность интеграла $\varphi(\eta, \xi)$ зависит от некоторого параметра ξ, причём по ξ она также удовлетворяет условию Гёльдера. В частности, может оказаться, что $\xi = \eta$.

§3. Метод линейных дифференциальных операторов

Дадим краткое описание основных положений метода линейных дифференциальных операторов для случая одного комплексного переменного.

Отметим, прежде всего, что наводящей идеей создания данного метода явилось то обстоятельство, что при исследовании дифференциальных свойств функций комплексного переменного (в особенности, неаналитических функций) во многих случаях вместо использования частных производных $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ для действительной и мнимой частей функции комплексного переменного более удобным оказывается применение формальных производных $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, определяемых формулами

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{1}$$

Из определения формальных производных вытекает, что на них распространяются обычные правила дифференцирования (z и $\bar{z}$ рассматриваются при этом как независимые переменные). Например,

$$\frac{\partial z}{\partial z}=1,\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}}=1,\ \frac{\partial z}{\partial \bar{z}}=0,\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}=0,\ \frac{\partial}{\partial z}\left(z\bar{z}\right)=\frac{\partial z}{\partial z}\bar{z}+\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}z=\bar{z},\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(z\bar{z}\right)=\frac{\partial z}{\partial \bar{z}}\bar{z}+\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}}z=z.$$

С помощью формальных производных условия Коши-Римана можно записать в виде одного равенства

$$\frac{\partial f\left(z\right)}{\partial \bar{z}}=0. \tag{2}$$

Если функция $f\left(z\right)$ является аналитической, то её формальная производная $\frac{\partial f\left(z\right)}{\partial z}$ совпадает с обычной производной: $\frac{\partial f\left(z\right)}{\partial z}=f'\left(z\right)$.

Подчеркнём высокую степень информативности условия (2). Так, например, целыми (аналитическими на всей комплексной плоскости) функциями являются любые многочлены от z, рациональные функции от z; неаналитическими – $\left|z\right|=\sqrt{z\bar{z}}$, $\mathrm{Re}\,z=\frac{z+\bar{z}}{2}$, $\mathrm{Im}\,z=\frac{z-\bar{z}}{2i}$. Поэтому неаналитическую функцию комплексного переменного целесообразно обозначать не $f\left(z\right)$, а $f\left(z,\bar{z}\right)$. Из формул (1) вытекает также, что если функция $f\left(z,\bar{z}\right)$ дифференцируема (или дважды непрерывно дифференцируема) в вещественном смысле (т.е. её действительная и мнимая части имеют соответствующие частные производные), то существуют $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ (а также $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}\partial z}=\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$, причём $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial \bar{z}}=\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}\partial z}$).

Рабочим инструментом метода линейных дифференциальных операторов являются линейные однородные дифференциальные операторы первого порядка вида

$$P=a\left(z,\bar{z}\right)\frac{\partial}{\partial z}+b\left(z,\bar{z}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \tag{3}$$

где $a\left(z,\bar{z}\right)$, $b\left(z,\bar{z}\right)$ – произвольные функции, определённые в некоторой области.

Задание оператора P, очевидно, определяется заданием его коэффициентов – функций $a\left(z,\bar{z}\right)$, $b\left(z,\bar{z}\right)$. Условия на гладкость этих функций (дифференцируемость, дважды непрерывная дифференцируемость и т.п.) естественным образом определяются характером тех вопросов и задач, в которых применяются операторы вида (3). Забегая вперёд, отметим, что решение конкретных задач приводит, как правило, к использованию конкретных операторов.

Ясно, что применение операторов вида (3) вполне правомерно на множестве дифференцируемых в вещественном смысле функций комплексного переменного.

Укажем общие для всех операторов вида (3) легко проверяемые свойства, вытекающие из конструкции этих операторов.

Свойство 1. Если $f(z,\bar{z}) - \text{const}$, то $P[f] = 0$.

Свойство 2. $P[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 P[f_1] + c_2 P[f_2]$, где c_1 и c_2 – комплексные константы (здесь, разумеется, предполагается, что функции $f_1(z,\bar{z})$ и $f_2(z,\bar{z})$ являются дифференцируемыми в вещественном смысле). Это свойство собственно и означает, что операторы вида (3) являются линейными.

Свойство 3. $P[z] = a(z,\bar{z})$, $P[\bar{z}] = b(z,\bar{z})$.

Свойство 4. Правило действия на произведение:

$$P[f_1 \cdot f_2] = P[f_1] \cdot f_2 + f_1 \cdot P[f_2]. \tag{4}$$

Свойство 5. Правило действия на частное:

$$P\left[\frac{f_1}{f_2}\right] = \frac{P[f_1] \cdot f_2 - f_1 \cdot P[f_2]}{f_2^2}. \tag{5}$$

(здесь предполагается, что $f_2 \neq 0$).

Свойство 6. Правило действия на сложную функцию (цепное правило): если $f = f(g)$, где $g = g(z,\bar{z})$, то $P[f] = f_g' \cdot P[g]$; если f зависит от нескольких функций: $f = f(g_1,...,g_n)$, то

$$P[f] = \sum_{k=1}^{n} f_{g_k}' \cdot P[g_k]. \tag{6}$$

Свойство 7. При действии оператором P на интегралы имеет место обобщение так называемого правила Лейбница:

$$P\left[\int_\alpha^\beta f(z,\bar{z},t)dt\right] = \int_\alpha^\beta P\left[f(z,\bar{z},t)\right]dt + P[\beta] f(z,\bar{z},\beta) - P[\alpha] f(z,\bar{z},\alpha). \tag{7}$$

Здесь $\alpha = \alpha(z,\bar{z})$ и $\beta = \beta(z,\bar{z})$ – дифференцируемые функции, а $f(z,\bar{z},t)$ – интегрируемая по t (при любых фиксированных z и $\bar{z}$) функция, с условием существования производных $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$. Укажем также следствие из формулы (7).

Следствие. Если тождественно выполняются равенства $P[\alpha(z,\bar{z})] = 0$ и $P[\beta(z,\bar{z})] = 0$ (в частности, если α и β константы), то оператор P можно вносить за знак интеграла без образования дополнительных слагаемых, т.е.

$$P\left[\int_\alpha^\beta f(z,\bar{z},t)dt\right] = \int_\alpha^\beta P\left[f(z,\bar{z},t)\right]dt. \tag{7'}$$

Если имеет место тождество $P[f] = 0$, то

$$P\left[\int_\alpha^\beta f(z,\bar{z},t)dt\right] = P[\beta] f(z,\bar{z},\beta) - P[\alpha] f(z,\bar{z},\alpha), \tag{7''}$$

т.е. в итоговом результате отсутствует интегрирование.

Приведённые выше общие свойства операторов (3), как видим, аналогичны обычным правилам дифференцирования. Но даже на множестве аналитических функций операторы вида (3) не обладают, вообще говоря, свойством коммутативности. Ответ на вопрос об условиях, при которых такие операторы коммутативностью обладают, даёт следующая теорема [10].

Теорема 1. **Пусть P и Q – два произвольных дифференциальных оператора вида (3) $P = a\dfrac{\partial}{\partial z} + b\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $Q = c\dfrac{\partial}{\partial z} + d\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$, с дифференцируемыми коэффициентами $a = a(z,\bar{z})$, $b = b(z,\bar{z})$, $c = c(z,\bar{z})$, $d = d(z,\bar{z})$ (т.е. существуют формальные производные по z и по $\bar{z}$ каждой из этих функций).**

Тогда равенство

$$P \circ Q = Q \circ P \tag{8}$$

имеет место в том и только том случае, когда выполняются условие

$$\begin{cases} P[c] = Q[a] \\ P[d] = Q[b] \end{cases}, \tag{9}$$

вырождающееся в классе аналитических функций в одно равенство:

$$P[c] = Q[a].$$

▶ Распишем в явном виде композицию $P \circ Q$:

$$P \circ Q = P\left[c\frac{\partial}{\partial z} + d\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right] = a\frac{\partial}{\partial z}\left(c\frac{\partial}{\partial z} + d\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) + b\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(c\frac{\partial}{\partial z} + d\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = a\frac{\partial c}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial z} + ac\frac{\partial^2}{\partial z^2} +$$

$$+ b\frac{\partial c}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{\partial}{\partial z} + bc\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}\partial z} + a\frac{\partial d}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + ad\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}} + b\frac{\partial d}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + bd\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}. \tag{10}$$

С другой стороны,

$$Q \circ P = Q\left[a\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right] = c\frac{\partial}{\partial z}\left(a\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) + d\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(a\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = c\frac{\partial a}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial z} + ca\frac{\partial^2}{\partial z^2} +$$

$$+ d\frac{\partial a}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{\partial}{\partial z} + da\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}\partial z} + c\frac{\partial d}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + cb\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}} + d\frac{\partial b}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + db\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}. \tag{11}$$

Замечаем, что второе слагаемое из правой части (10) равно второму слагаемому из правой части (11), 4-е – 6-му, 6-е – 4-му и 8-е – 8-му. Следовательно, для выполнимости (8) должно иметь место условие

$$a\frac{\partial c}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial z} + b\frac{\partial c}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{\partial}{\partial z} + a\frac{\partial d}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + b\frac{\partial d}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = c\frac{\partial a}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial z} + d\frac{\partial a}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{\partial}{\partial z} + c\frac{\partial d}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + d\frac{\partial b}{\partial \bar{z}}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

или, что то же,

$$P[c]\frac{\partial}{\partial z} + P[d]\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = Q[a]\frac{\partial}{\partial z} + Q[b]\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \tag{12}$$

а это в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций $f(z,\bar{z})$ эквивалентно (9).

Обратно, предполагая выполнимость (9) и повторяя проведённые выше выкладки в обратном порядке, приходим к справедливости (8).

Отметим, наконец, что в классе аналитических функций условие (12) принимает, очевидно, более простой вид: $P[c]\frac{\partial}{\partial z}=Q[a]\frac{\partial}{\partial z}$, что эквивалентно $P[c]=Q[a]$. Теорема доказана. ◀

Замечание. Из равенства (12) не трудно видеть, что в классе антианалитических функций (т.е. таких функций $f(z,\bar{z})$, для которых $\frac{\partial f}{\partial z}\equiv 0$) система (9) вырождается в одно равенство: $P[d]=Q[b]$.

Помимо общих свойств операторов вида (3), в рамках рассматриваемого метода широко используются специальные свойства операторов, которые присущи лишь некоторым семействам из класса операторов вида (3) или лишь отдельным конкретным операторам. Это – важный аспект метода линейных дифференциальных операторов. Для нахождения операторов вида (3), которые обладали бы определёнными, наперёд заданными свойствами, может быть применён метод неопределённых коэффициентов, суть которого проиллюстрируем на следующих примерах[1)].

Пример 1. Найдём оператор вида (3) – обозначим его P_0 – удовлетворяющий условиям

$$P_0[z]=z, \tag{13}$$

$$P_0\left[\frac{z}{|z|}\right]\equiv 0. \tag{14}$$

Будем искать оператор P_0 в виде $P_0=a(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial z}+b(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, где $a(z,\bar{z})$ и $b(z,\bar{z})$ – неизвестные функции, которые требуется определить.

С учётом свойства 3 первый коэффициент определяется из условия (13) сразу: $a(z,\bar{z})=z$. Далее, применяя оператор P_0 к функции $\frac{z}{|z|}$ $(z\neq 0)$, с учётом свойства 5 будем иметь $P_0\left[\frac{z}{|z|}\right]=\frac{P_0[z]|z|-zP_0[|z|]}{|z|^2}=\frac{z|z|-zP_0[|z|]}{|z|^2}$. Приравнивая, согласно условию (14), последнее выражение к нулю, получим $z|z|-zP_0[|z|]=0$, откуда

$$P_0[|z|]=|z|. \tag{15}$$

Учитывая, что (свойства 4, 6 и условие (13)) $P_0[|z|]=P_0\left[\sqrt{z\bar{z}}\right]=\frac{P_0[z\bar{z}]}{2\sqrt{z\cdot\bar{z}}}=$

$=\frac{P_0[z]\bar{z}+zP_0[\bar{z}]}{2|z|}=\frac{z\bar{z}+zP_0[\bar{z}]}{2|z|}$, и сравнивая полученное выражение с (15), за-

---

[1)] Отметим, что приводимые примеры будут использованы далее при исследовании интегралов – операторных аналогов интеграла типа Коши.

ключаем, что должно выполняться равенство $\frac{|z|^2 + zP_0[\bar{z}]}{2|z|} = |z|$ или $zP_0[\bar{z}] = |z|^2$, или, что то же, $P_0[\bar{z}] = \bar{z}$. Отсюда, на основании свойства 3 определяем: $b(z,\bar{z}) = \bar{z}$.

Итак, искомый оператор найден:

$$P_0 = z\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \tag{16}$$

Из условия (14) на основании свойства 6 вытекает, что для любой дифференцируемой функции вида $f = f\left(\frac{z}{|z|}\right)$

$$P_0[f] \equiv 0. \tag{17}$$

Пример 2. Найдём оператор P_* вида (3), удовлетворяющий условиям

$$P_*[z - z_0] = z - z_0 \ \ (z_0 = \text{const},\ z \neq z_0) \tag{18}$$

и

$$P_*\left[\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\right] \equiv 0. \tag{19}$$

Будем искать P_* в виде $P_* = a(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + b(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, где $a(z,\bar{z})$ и $b(z,\bar{z})$ – неизвестные функции, требующие определения. Первый коэффициент определяется из условия (18) сразу: $a(z,\bar{z}) = z - z_0$. Далее, имеем $P_*\left[\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\right] = \frac{(z - z_0)|z - z_0| - (z - z_0)P_*[|z - z_0|]}{|z - z_0|^2}$. Отсюда на основании (19) $(z - z_0)|z - z_0| - (z - z_0)P_*[|z - z_0|] = 0$ или

$$P_*(|z - z_0|) = |z - z_0|. \tag{20}$$

Вычисляя $P_*[|z - z_0|] = \frac{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) + (z - z_0)P_*[\bar{z} - \bar{z}_0]}{2|z - z_0|}$, с учётом (20), получаем $(z - z_0)P_*[\bar{z} - \bar{z}_0] = |z - z_0|^2$ или, что то же, $P_*[\bar{z} - \bar{z}_0] = \bar{z} - \bar{z}_0$. Отсюда $b(z,\bar{z}) = \bar{z} - \bar{z}_0$ и, следовательно, искомый оператор

$$P_* = (z - z_0)\frac{\partial}{\partial z} + (\bar{z} - \bar{z}_0)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \tag{21}$$

§4. Интегральные преставления для звёздных и выпуклых областей

Определение 1. Область $D \subset \mathbb{C}$ называется *звёздной* относительно своей

точки a, если вместе с любой точкой $z \in D$, этой области принадлежит и весь отрезок, соединяющий точку z с точкой a.

Замечание 1. Область, звёздная относительно какой-либо своей точки, является односвязной.

Замечание 2. Область D, звёздная относительно точки $a(\in D)$, необязательно является звёздной относительно другой своей точки $b(\in D)$. Так, например, область $D = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 2,\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{7\pi}{4} \right\}$ является звёздной относительно, например, точки -1, но не является звёздной относительно, например, точки $-i$.

Пусть D – произвольная область, звёздная относительно начала координат, и $f(z)$ – любая аналитическая в D функция. Рассмотрим дифференциальный оператор:

$$L_\gamma\left[f(z)\right] = \gamma f(z) + z f'(z),\ z \in D, \tag{1}$$

где γ – действительное число с условием $\gamma \geq 1$.

Лемма. **В области D справедлива формула**

$$f(z) = \int_0^1 \tau^{\gamma-1} L_\gamma\left[f(\tau z)\right] d\tau, \tag{2}$$

где τ – действительный параметр, изменяющийся на отрезке $[0;1]$.

▶ Сразу отметим, что интеграл в правой части формулы (2) имеет смысл. Действительно, в силу указанной геометрической структуры области D, этой области вместе с любой её точкой z принадлежат и все точки вида τz, где $0 \leq \tau \leq 1$.

Далее имеем $\left(\tau^\gamma f(\tau z)\right)'_\tau = \gamma\tau^{\gamma-1} f(\tau z) + \tau^\gamma f'(\tau z) z = \tau^{\gamma-1}\left(\gamma f(\tau z) + \tau z f'(\tau z)\right) =$

$= \tau^{\gamma-1} L_\gamma\left[f(\tau z)\right]$, откуда $\int_0^1 \tau^{\gamma-1} L_\gamma\left[f(\tau z)\right] d\tau = \int_0^1 \left(\tau^\gamma f(\tau z)\right)'_\tau d\tau = \tau^\gamma f(\tau z)\Big|_0^1 = f(z)$. ◀

Рассмотрим теперь интегральный оператор

$$L_\gamma^{(-1)}\left[f(z)\right] = \int_0^1 \tau^{\gamma-1} f(\tau z) d\tau. \tag{3}$$

Ясно, что в указанных относительно области D и функции $f(z)$ предположениях, этот интегральный оператор имеет смысл. Непосредственно из леммы следует, что $L_\gamma^{(-1)}\left[L_\gamma\left[f(z)\right]\right] = f(z)$. Кроме того $L_\gamma\left[L_\gamma^{(-1)}\left[f(z)\right]\right] =$

$= L_\gamma\left[\int_0^1 \tau^{\gamma-1} f(\tau z) d\tau\right] = \int_0^1 \tau^{\gamma-1} L_\gamma\left[f(\tau z)\right] d\tau = f(z)$. Таким образом, оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 1. **На множестве $H(D)$ функций, аналитических в звёздной относительна начала координат области D, дифференциальный оператор L_γ и интегральный оператор $L_\gamma^{(-1)}$ являются взаимно обратными, т.е.**

$$L_\gamma\left[L_\gamma^{(-1)}\left[f(z)\right]\right]=L_\gamma^{(-1)}\left[L_\gamma\left[f(z)\right]\right]=f(z),\quad \forall f(z)\in H(D).$$

Рассмотрим приложение указанных операторов к получению интегральных представлений.

Теорема 2. **Пусть D – произвольная ограниченная, звёздная относительно начала координат область с кусочно-гладкой границей $\mathrm{Fr}D$, и $f(z)$ – любая функция аналитическая в D и непрерывно дифференцируемая в замыкании $\overline{D}$. Тогда для $z\in D$ имеет место интегральное представление**

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\tau^{\gamma-1}d\tau\int_{\mathrm{Fr}D}\frac{L_\gamma\left[f(\eta)\right]}{\eta-\tau z}d\eta. \qquad (4)$$

▶ Из условия теоремы вытекает, что функция $L_\gamma\left[f(z)\right]$ является аналитической в области D и непрерывной в $\overline{D}$, и, следовательно, для неё справедлива интегральная формула Коши $L_\gamma\left[f(z)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Fr}D}\frac{L_\gamma\left[f(\eta)\right]}{\eta-\tau z}d\eta,\ \ z\in D$.

Применяя к обеим частям оператор $L_\gamma^{(-1)}$, получим $f(z)=$ $=L_\gamma^{(-1)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Fr}D}\frac{L_\gamma\left[f(\eta)\right]}{\eta-\tau z}d\eta\right]$. Переходя здесь к явной форме записи оператора $L_\gamma^{(-1)}$ и учитывая, что в интеграле зависит от z лишь знаменатель подынтегрального выражения, получаем доказываемую формулу (4). ◀

Отметим, что эту формулу можно переписать в виде

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Fr}D}L_\gamma^{(-1)}\left[\frac{1}{\eta-z}\right]\cdot L_\gamma\left[f(\eta)\right]d\eta. \qquad (4')$$

Замечание. Если в условии теоремы потребовать дополнительно от функции $f(z)$ дважды непрерывную дифференцируемость в $\overline{D}$, то формулу (4) можно записать и для функции $L_\delta\left[f(z)\right]=\delta f(z)+zf'(z)$, где $\delta\ge 1$ (ясно, что оператор L_δ является оператором вида (1)). В результате получим $L_\delta\left[f(z)\right]=$ $=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\tau^{\gamma-1}d\tau\int_{\mathrm{Fr}D}\frac{L_\delta\left[L_\gamma\left[f(\eta)\right]\right]}{\eta-\tau z}d\eta$. Применяя теперь к обеим частям оператор $L_\delta^{(-1)}$, имеющий вид $L_\delta^{(-1)}\left[f(z)\right]=\int_0^1 t^{\delta-1}f(tz)dt$, будем иметь $L_\delta^{(-1)}\left[L_\delta\left[f(z)\right]\right]=$

$= \mathsf{L}_{\delta}^{(-1)}\left[\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_0^1 \tau^{\gamma-1}\mathrm{d}\tau \int\limits_{\mathrm{Fr}D} \dfrac{\mathsf{L}_{\delta}\left[\mathsf{L}_{\gamma}\left[\mathrm{f}(\eta)\right]\right]}{\eta - \tau z}\mathrm{d}\eta\right]$ или, что то же самое, интегральное представление

$$\mathrm{f}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_0^1 t^{\delta-1}\mathrm{d}t \int\limits_0^1 \tau^{\gamma-1}\mathrm{d}\tau \int\limits_{\mathrm{Fr}D} \frac{\mathsf{L}_{\delta}\left[\mathsf{L}_{\gamma}\left[\mathrm{f}(\eta)\right]\right]}{\eta - \tau t z}\mathrm{d}\eta. \qquad (5)$$

Теперь становится понятным путь дальнейшего операторного обобщения интегральной формулы Коши на случай функций, аналитических в ограниченной, звёздной относительно начала координат, области D и k $(k \in \mathbb{N})$ раз непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\overline{D}$. При этом оказывается полезной сжатая форма записи суперпозиции интегральных операторов вида (3):

$$\mathsf{L}_{\gamma_k}^{(-1)}\left[\mathsf{L}_{\gamma_{k-1}}^{(-1)}\left[\ldots \mathsf{L}_{\gamma_2}^{(-1)}\left[\mathsf{L}_{\gamma_k}^{(-1)}\left[\mathrm{f}(z)\right]\right]\ldots\right]\right] \overset{\mathrm{def}}{=}$$

$$= \int\limits_0^1 \tau_k^{\gamma_k-1}\mathrm{d}\tau_k \int\limits_0^1 \tau_{k-1}^{\gamma_{k-1}-1}\mathrm{d}\tau_2 \ldots \int\limits_0^1 \tau_2^{\gamma_2-1}\mathrm{d}\tau_2 \int\limits_0^1 \tau_1^{\gamma_1-1}\mathrm{f}\left(\tau_1\tau_2\ldots\tau_{k-1}\tau_k z\right)\mathrm{d}\tau_1 =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^1 \tau^{\gamma_1-1}(1-\tau)^{k-1}\,\mathrm{f}(\tau z)\mathrm{d}\tau \qquad (6)$$

при дополнительных условиях на константы γ_n $\left(\gamma_n \geq 1,\ n = \overline{1,k}\right)$: $\gamma_2 = \gamma_1 + 1,\ \gamma_3 = \gamma_2 + 1 = \gamma_1 + 2, \ldots,\ \gamma_k = \gamma_1 + (k-1)$. Например, если $\delta = \gamma + 1$, то формулу (5) можно переписать в виде

$$\mathrm{f}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_0^1 \tau^{\gamma-1}(1-\tau)\mathrm{d}\tau \int\limits_{\mathrm{Fr}D} \frac{\mathsf{L}_{\gamma+1}\left[\mathsf{L}_{\gamma}\left[\mathrm{f}(\eta)\right]\right]}{\eta - \tau z}\mathrm{d}\eta. \qquad (7)$$

Теперь перейдём к рассмотрению вопроса об операторах и интегральных представлениях аналитических функций для выпуклых областей.

Определение 2. Область $D \subset \mathbb{C}$ называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя её точками ей целиком принадлежит и соединяющий их отрезок.

Выпуклой областью является, например, открытый круг. Ясно, что геометрическая структура выпуклой области является более жёсткой, чем области звёздной, а именно любая выпуклая область является звёздной относительно любой своей точки. В то же время, звёздная относительно какой-либо своей точки область не обязательно является выпуклой. Примером звёздной относительно точки -1, но не выпуклой области служит уже приводимая выше область $D = \left\{z \in \mathbb{C}:\ |z| < 2, \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

Пусть D – какая-либо выпуклая область и z_0 – любая фиксированная точка области D. Выпуклость D означает, что если $z \in D$, то области D принад-

лежат и точки вида $\tau z+(1-\tau)z$, где τ – параметр, $0\le\tau\le 1$. Пусть $f(z)$ – произвольная аналитическая в D функция. Рассмотрим в области D дифференциальный оператор L_{γ,z_0}:

$$L_{\gamma,z_0}\left[f(z)\right]=\gamma f(z)+(z-z_0)\frac{\partial f(z)}{\partial z} \qquad (8)/$$

и интегральный оператор $L^{(-1)}_{\gamma,z_0}$:

$$L^{(-1)}_{\gamma,z_0}\left[f(z)\right]=\int_0^1\tau^{\gamma-1}f\left(\tau z+(1-\tau)z_0\right)d\tau, \qquad (9)$$

где γ – произвольное действительное число, $\gamma\ge 1$.

Теорема 3. **На множестве $H(D)$ функций, аналитических в выпуклой области D, дифференциальный оператор L_{γ,z_0} и интегральный оператор $L^{(-1)}_{\gamma,z_0}$ являются взаимно обратными.**

▶ Действительно, $L^{(-1)}_{\gamma,z_0}\left[L_{\gamma,z_0}\left[f(z)\right]\right]=L^{(-1)}_{\gamma,z_0}\left[\gamma f(z)+(z-z_0)\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right]=$

$$=\int_0^1\tau^{\gamma-1}\left(\gamma f\left(\tau z+(1-\tau)z_0\right)+(z-z_0)\frac{\partial}{\partial z}f\left(\tau z+(1-\tau)z_0\right)\right)d\tau=$$

$$=\int_0^1\left(\gamma\tau^{\gamma-1}f\left(\tau z+(1-\tau)z_0\right)+\tau^{\gamma}(z-z_0)f'\left(\tau z+(1-\tau)z_0\right)\right)d\tau=$$

$$=\int_0^1\left(\tau^{\gamma}f\left(\tau z+(1-\tau)z_0\right)\right)'_{\tau}d\tau=\tau^{\gamma}f\left(\tau z+(1-\tau)z_0\right)\Big|_0^1=f(z),$$

т.е.

$$L^{(-1)}_{\gamma,z_0}\left[L_{\gamma,z_0}\left[f(z)\right]\right]=f(z). \qquad (10)$$

С другой стороны, $L_{\gamma,z_0}\left[L^{(-1)}_{\gamma,z_0}\left[f(z)\right]\right]=L_{\gamma,z_0}\left[\int_0^1\tau^{\gamma-1}f\left(\tau z+(1-\tau)z_0\right)d\tau\right]=$

$$=\int_0^1\tau^{\gamma-1}L_{\gamma,z_0}\left[f\left(\tau z+(1-\tau)z_0\right)\right]d\tau=\int_0^1\left(\tau^{\gamma}f\left(\tau z+(1-\tau)z_0\right)\right)'_{\tau}d\tau=\tau^{\gamma}f\left(\tau z+(1-\tau)z_0\right)\Big|_0^1=$$

$=f(z)$, т.е.

$$L_{\gamma,z_0}\left[L^{(-1)}_{\gamma,z_0}\left[f(z)\right]\right]=f(z). \qquad (11)$$

Совокупность формул (10) и (11) устанавливает истинность доказываемого утверждения. ◀

Теорема 4. **Пусть D – произвольная ограниченная, выпуклая область**

с кусочно-гладкой границей $\mathrm{Fr}D$, ориентированной положительно и $f(z)$ – любая функция, аналитическая в D и непрерывно дифференцируемая в замыкании $\overline{D}$. Тогда для $z \in D$ имеет место интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \tau^{\gamma-1} d\tau \int_{\mathrm{Fr}D} \frac{L_{\gamma,z_0}\left[f(\eta)\right]}{\eta - \left(\tau z + (1-\tau)z_0\right)} d\eta . \qquad \textbf{(12)}$$

▶ В условиях теоремы формула Коши справедлива для функции $L_{\gamma,z_0}\left[f(z)\right]$: $L_{\gamma,z_0}\left[f(z)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Fr}D} \frac{L_{\gamma,z_0}\left[f(\eta)\right]}{\eta - z} d\eta$. Применим теперь к обеим частям оператор $L_{\gamma,z_0}^{(-1)}$: $L_{\gamma,z_0}^{(-1)}\left[L_{\gamma,z_0}\left[f(z)\right]\right] = L_{\gamma,z_0}^{(-1)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Fr}D} \frac{L_{\gamma,z_0}\left[f(\eta)\right]}{\eta - z} d\eta\right]$. В левой части по теореме 3 имеем $f(z)$, а в правой части учтём, что в интеграле от z зависит лишь знаменатель подынтегрального выражения. В результате получаем доказываемую формулу (12). ◀

Отметим, что формулу (12) можно переписать в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Fr}D} L_{\gamma,z_0}^{(-1)}\left[\frac{1}{\eta - z}\right] \cdot L_{\gamma,z_0}\left[f(\eta)\right] d\eta . \qquad (12')$$

В частном случае – при $z_0 = 0$ формула (12) принимает вид формулы (4).

Если в условии теоремы 4 от функции $f(z)$ потребовать дополнительно дважды непрерывную дифференцируемость в замыкании $\overline{D}$, то, повторяя рассуждения, аналогичные приведённым в замечании к теореме 2, приходим к интегральному представлению

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 t^{\delta-1} dt \int_0^1 \tau^{\gamma-1} d\tau \int_{\mathrm{Fr}D} \frac{L_{\delta,z_1}\left[L_{\gamma,z_0}\left[f(\eta)\right]\right]}{\eta - u} d\eta ,$$

где $u = \tau\left(tz + (1-t)z_1\right) + (1-\tau)z_0$, z_1 – произвольная фиксированная точка из D и константа $\delta \geq 1$.

Разумеется, если функция $f(z)$ – непрерывно дифференцируема в $\overline{D}$ большее число раз, то для $f(z)$ имеют место и дальнейшие операторные обобщения.

Замечание. Сохраняя такие отличительные достоинства интеграла Коши, как аналитичность и универсальность ядра, интегралы (4) и (12) имеют в своём поведении и принципиальные отличия от интеграла Коши. Например, в неограниченной области $D^- = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ эти интегралы отличны, вообще говоря, от нуля. Более того, из установленных в §§5-7 результатов будет следовать, что в этой области функции, представимые интегралами типа (4) и (12), являются, в опре-

делённом смысле, квазианалитическими, а интегрирование по τ сглаживает скачок внутреннего интеграла при переходе через границу области D.

§5. Операторный аналог интеграла типа Коши для звёздных областей

В качестве объекта исследования в этом параграфе рассматривается строящийся на основе интегрального представления (4) §4 по аналогии с известным интегралом типа Коши (§2), интеграл[2)]

$$F_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \tau^{\gamma-1}d\tau\int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\tau z}d\eta, \qquad (1)$$

в котором γ – произвольное действительное число с условием $\gamma\ge 1$; τ – вещественный параметр, определённый на отрезке $[0;1]$. Здесь и на протяжении всего параграфа в качестве определяющей области рассматривается единичный круг: $K=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$; его граница $\mathrm{Fr}K=\{\eta\in\mathbb{C}:|\eta|=1\}$; внешняя область K^-, дополняющая замыкание $\overline{K}$ до всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеет вид $K^-=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|>1\}$. Кроме того, плотность интеграла (1) – определённую на единичной окружности $\Gamma=\{\eta\in\mathbb{C}:|\eta|=1\}$ функцию $\varphi(\eta)$ будем предполагать удовлетворяющей на этой окружности условию Гёльдера. В этом предположении интеграл типа Коши (см. §2) обладает рядом важных свойств (существование особого интеграла, существование предельных значений, справедливость формул Сохоцкого), выполнимость которых будет использоваться в дальнейшем.

Отметим, что внутренний интеграл в (1) есть, фактически, интеграл типа Коши, записанный относительно комплексного переменного $u=\tau z$:

$$F(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-u}d\eta. \qquad (2)$$

Следовательно, в силу сделанных ранее предположений об интеграле типа Коши на границе области всюду в замкнутой области $\overline{K^-}=\{z\in\mathbb{C}:|z|\ge 1\}$ при $|u|=1$ интеграл (2) определён как особый, в смысле главного значения по Коши. Учитывая, что для любой точки z из круга K при любом значении τ из отрезка [0;1] выполняется условие $|u|<1$, заключаем, что всюду в области K интеграл (2) существует в обычном смысле.

Далее будем предполагать, что *плотность* интеграла (1) есть плотность

[2)] Ясно, что, говоря об этом интеграле, мы подразумеваем целый класс функций, определяемых интегралами такого вида.

внутреннего интеграла (2), т.е. $\varphi(\eta)$, а функцию $\dfrac{1}{\eta-\tau z}$ будем называть *ядром* интеграла (1). Входящий в подынтегральное выражение (1) множитель $\tau^{\gamma-1}$ – *весом* этого интеграла, число $(\gamma-1)$ – *степенью* веса, а γ – *характеристикой* интеграла (1).

Пусть $F_\gamma(z)$ – произвольная функция из класса функций, определяемых интегралом (1).

Теорема 1. **Функция $F_\gamma(z)$, определяемая интегралом (1), является аналитической в области K.**

▶ Пусть z – произвольная точка круга K. Согласно определению аналитической функции, теорема будет доказана, если мы установим, что существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{F_\gamma(z+\Delta z)-F_\gamma(z)}{\Delta z}\left(=F_\gamma'(z)\right)$. Выражение, стоящее под знаком предела, преобразуем, используя формулу (2) (при этом $\Delta z\neq 0$ считается достаточно малым, чтобы точка $(z+\Delta z)\in K$). Используя равенство $\dfrac{1}{\eta-\tau(z+\Delta z)}-\dfrac{1}{\eta-\tau z}=\dfrac{\tau\Delta z}{(\eta-\tau(z+\Delta z))(\eta-\tau z)}$, будем иметь

$$\frac{F_\gamma(z+\Delta z)-F_\gamma(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\tau^{\gamma-1}d\tau\int_{|\eta|=1}\varphi(\eta)\left(\frac{1}{\eta-\tau(z+\Delta z)}-\frac{1}{\eta-\tau z}\right)d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\tau^{\gamma-1}d\tau\int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-\tau(z+\Delta z))(\eta-\tau z)}d\eta. \qquad (3)$$

Переходя в (3) к пределу под знаком интеграла при $\Delta z\to 0$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\tau^{\gamma-1}d\tau\int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-\tau z)^2}d\eta. \qquad (4)$$

Интеграл (4) ограничен, что вытекает из ограниченности подынтегральной функции внутреннего интеграла. В силу произвольности выбора точки z, аналитичность $F_\gamma(z)$ во всем круге K установлена, более того получена формула, выражающая $F_\gamma'(z)$:

$$F_\gamma'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\tau^{\gamma}d\tau\int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-\tau z)^2}d\eta, \qquad (5)$$

если будет обоснована законность выполненного формально предельного перехода под знаком интеграла. С этой целью составим разность между интегралом (3) и его предполагаемым пределом (4) и покажем, что при $\Delta z\to 0$ эта разность

стремиться к нулю. В силу равенства $\frac{1}{\left(\eta-\tau\left(z+\Delta z\right)\right)\left(\eta-\tau z\right)}-\frac{1}{\left(\eta-\tau z\right)^2}=$

$=\frac{\tau\Delta z}{\left(\eta-\tau\left(z+\Delta z\right)\right)\left(\eta-\tau z\right)^2}$, указанную разность можно записать в виде

$$\frac{\Delta z}{2\pi i}\int_0^1\tau^{\gamma+1}d\tau\int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\eta)}{\left(\eta-\tau\left(z+\Delta z\right)\right)\left(\eta-\tau z\right)^2}d\eta. \qquad (6)$$

Интеграл (6), взятый без вынесенного множителя Δz, ограничен (это опять вытекает из ограниченности подынтегральной функции). Действительно, оценим модуль указанного интеграла. Учитывая, что условие Гёльдера гарантирует ограниченность плотности $\phi(\eta)$ на окружности $\Gamma=\{\eta\in\mathbb{C}:|\eta|=1\}$, можно считать $|\phi(\eta)|<M\ \ (M>0)$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\tau^{\gamma+1}d\tau\int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\eta)}{\left(\eta-\tau\left(z+\Delta z\right)\right)\left(\eta-\tau z\right)^2}d\eta\right|<$$

$$<\frac{1}{2\pi}\int_0^1\tau^{\gamma+1}d\tau\int_{|\eta|=1}\frac{Md\eta}{\left|\eta-\tau\left(z+\Delta z\right)\right|\left|\eta-\tau z\right|^2}. \qquad (7)$$

Далее, т.к. $z\notin\Gamma$, то всегда можно указать число $\delta>0$, такое, что замкнутый круг $\overline{K}_\delta=\{\zeta\in\mathbb{C}:\ |\zeta-z|\le\delta\}$ будет находиться в открытом круге K, т.е. $\overline{K}_\delta\subset K$. Обозначим расстояние от $\overline{K}_\delta$ до окружности Γ через d. Ясно, что $d>0$.

Пусть $|\Delta z|<\delta$. Очевидно, что для всех точек $\eta\in\Gamma$ будем иметь $|\eta-z|>d$, $|\eta-(z+\Delta z)|>d$. Но тогда и подавно $|\eta-\tau z|>d$ и $|\eta-\tau(z+\Delta z)|>d$, т.к. умножение на $\tau\ \ (0\le\tau\le1)$ «притягивает» точки z и $z+\Delta z$ к центру круга K, т.е. к 0, удаляя её тем самым от Γ, или, в крайнем случае $(\tau=1)$, оставляет её без изменения. Учитывая это, видим, что правая часть неравенства (7) меньше, чем $\frac{M\,2\pi}{2\pi d^3}\int_0^1\tau^{\gamma+1}d\tau=\frac{M}{(\gamma+2)d^3}$, т.е. меньше некоторой положительной константы.

Но это означает, что $\left|\frac{F_\gamma(z+\Delta z)-F_\gamma(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\tau^\gamma d\tau\int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\eta)}{\left(\eta-\tau z\right)^2}d\eta\right|\xrightarrow[\Delta z\to0]{}0.$

Отсюда и следует, окончательно, справедливость теоремы и формулы (5). ◀

Отметим, что наряду с формулой (5), оказывается справедливой и аналогичная общая формула для n-ой производной интеграла $F_\gamma(z)$ в круге K

$$F_\gamma^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_0^1\tau^{\gamma+n-1}d\tau\int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-u)^{n+1}}d\eta\quad(n\in\mathbb{N}),\tag{8}$$

устанавливаемая индукцией по n.

Рассмотрим теперь вопрос о непрерывности интеграла (1). В круге K она вытекает из аналитичности функции $F_\gamma(z)$. Пусть z – произвольная фиксированная точка области $K^-=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|>1\}$. Отметим, прежде всего, что (в зависимости от значений параметра τ) могут иметь место следующие три ситуации:

а) $|u|<1$ (например, при $\tau=0$, $|u|=0$);

б) $|u|>1$ (например, при $\tau=1$, $|u|=|z|>1$);

в) $|u|=1$ – это имеет место в единственной точке τ_0, легко определяемой из равенства $|u|=\tau|z|=1$, т.е. при

$$\tau_0=\frac{1}{|z|}.\tag{9}$$

Пусть теперь z произвольная (уже не фиксированная) точка области K^-. Формула (9) показывает, что в области K^- функция $\tau_0(z)$ представляет собой неаналитическую непрерывную и любое число раз дифференцируемую в вещественном смысле[3)] функцию.

В первых двух ситуациях для обозначения внутреннего интеграла функции $F_\gamma(z)$ (т.е. интеграла типа Коши относительно комплексного переменного u) будем использовать следующие обозначения $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-u}d\eta=\begin{cases}F^+(u), & |u|<1\\ F^-(u), & |u|>1\end{cases}$.

Отметим, что функции $F^+(u)$ и $F^-(u)$, как функции переменного u, – аналитические в своих областях определения – соответственно в $|u|<1$ и $|u|>1$.

Если имеет место третья ситуация: $|u|=|u_0|=|\tau_0 z|=1$, то интеграл $F(u_0)=$ $=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-u_0}d\eta$ понимается как особый, в смысле главного значения по Коши, и, следовательно, он ограничен.

Далее, учитывая, что при $\tau\in[0;\tau_0)$ $|u|<1$, а при $\tau\in(\tau_0;1]$ $|u|>1$, заключаем, что всюду в области K^- интеграл $F_\gamma(z)$ выражается формулой

$$F_\gamma(z)=\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}F^+(u)d\tau+\int_{\tau_0}^1\tau^{\gamma-1}F^-(u)d\tau.\tag{10}$$

---

3) То есть таковыми являются её действительная и мнимая части – функции двух действительных переменных x и y. Тот же смысл имеет и встречающийся далее в работе термин «дифференцируемость функции комплексного переменного в вещественном смысле».

Формула (10) будет играть существенную роль в последующих исследованиях интеграла (1). Укажем два важных следствия из неё.

Следствие 1. **Функция $F_\gamma(z)$, определяемая интегралом (1), непрерывна и любое число раз дифференцируема в действительном смысле в области K^-.**

Это вытекает из аналитичности функций $F^+(u)$, $F^-(u)$, структуры u и указанного характера гладкости в области K^- функции $\tau_0(z)$.

Следствие 2. **Функция $F_\gamma(z)$, определяемая интегралом (1), является неаналитической, вообще говоря[4], в области K^-.**

Это следует из неаналитичности функции $\tau_0(z)=\dfrac{1}{|z|}$.

Замечание 1. Отметим, что интеграл (1) можно выразить формулой (10) на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, если доопределить τ_0 в $\overline{K}$ непрерывным образом, считая $\tau_0 \equiv 1$ для $z \in \overline{K}$. Отсюда, кстати, и вытекает непрерывность функции $F_\gamma(z)$ всюду в $\mathbb{C}$.

Замечание 2. Пусть z – произвольная точка окружности Γ. Отметим, что в этом случае на основании формулы $F_\gamma(z)=\int\limits_0^1 \tau^{\gamma-1}F^+(u)d\tau$ нельзя сделать вывод об аналитичности функции $F_\gamma(z)$ в точках единичной окружности Γ, т.к. в произвольной окрестности любой её точки содержатся точки из области неаналитичности K^- (напомним, что аналитичность функции в точке означает её аналитичность в некоторой окрестности этой точки).

Приведём пример вычисления интеграла (1) по формуле (10). Пусть плотность $\varphi(z)$ определена и является аналитической в единичном круге K и непрерывной в $\overline{K}$. Тогда внутренний интеграл в (1) является интегралом Коши и, следовательно, $F^+(u)=\varphi(u)$, $F^-(u)\equiv 0$, поэтому формула (10) принимает вид $F_\gamma(z)=\int\limits_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}\varphi(u)d\tau$. Пусть $\varphi(z)=z^2$, а $\gamma=2$, тогда $F_2(z)=\int\limits_0^{\tau_0}\tau u^2 d\tau=$

$$=\int_0^{\tau_0}\tau^3 z^2 d\tau = z^2\frac{\tau^4}{4}\Big|_0^{\tau_0}=\begin{cases}\dfrac{z^2}{4}, & z\in\overline{K}\\[2ex] \dfrac{1}{4\bar{z}^2}, & z\in K^-\end{cases}.$$

[4] Добавление слов «вообще говоря» вызвано, например, наличием аналитичности в случае нулевой плотности; хотя мы и условились этот случай не рассматривать, но полностью игнорировать его нельзя.

Резюмируя полученные результаты, констатируем, что функции, определяемые интегралом (1), являются:

а) непрерывными на всей комплексной плоскости (в этом состоит существенное отличие интеграла (1) от интеграла типа Коши, непрерывность которого при переходе через границу области, вообще говоря, нарушается);

б) аналитическими в единичном круге K;

в) неаналитическими, вообще говоря, но любое число раз дифференцируемыми в вещественном смысле в области K^- (в этом заключается другое существенное отличие интеграла (1) от интеграла типа Коши, обладающего в K^- аналитичностью).

По виду формулы (10) можно заключить, что интеграл (1) обладает в K^- свойствами, индуцированными соответствующими свойствами функции $\tau_0(z)$.

Вскрытие квазианалитических свойств интеграла (1), которыми он обладает в области K^-, начнём с вопроса о нахождении так называемой *обобщённой производной* функции $F_\gamma(z)$, т.е. такого дифференциального оператора

$$P = a(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + b(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \qquad (11)$$

(функции $a(z,\bar{z})$, $b(z,\bar{z})$ – произвольные непрерывные, заданные в области K^-), действие которым на интеграл (1) равносильно дифференцированию по z его ядра $\dfrac{1}{\eta - u}$.

Вполне естественно предположить, что в области аналитичности интеграла (1), т.е. в круге K, этот оператор – обозначим его D_z – должен вырождаться в обычную производную, поэтому будем искать его в виде $D_z = \dfrac{\partial}{\partial z} + b\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$, где $b = b(z,\bar{z})$ – пока не известная нам функция, которую требуется определить.

Обратимся к формуле (10). В ней внутренние интегралы $F^+(u)$ и $F^-(u)$ после замены параметра η по формуле $\eta = \exp it$ $\left(t \in [0; 2\pi]\right)$ превращаются в интегралы с постоянными пределами интегрирования и, следовательно (согласно правилу действия оператора на интеграл[5)]), при действии на них оператором D_z последний пройдёт за знак интеграла без образования дополнительных слагаемых. Более того, учитывая вид оператора D_z и аналитичность ядра, заключаем, что действие D_z на ядро равносильно дифференцированию ядра по z.

Таким образом, осталось потребовать, чтобы в правой части формулы (10) оператор D_z проходил и за знак внешнего интеграла без образования дополнительных слагаемых. Это, согласно (12), будет выполняться в том случае, если

[5)] $$P\left[\int_\alpha^\beta f(z,\bar{z},t)dt\right] = \int_\alpha^\beta P\left[f(z,\bar{z},t)\right]dt + P[\beta]f(z,\bar{z},\beta) - P[\alpha]f(z,\bar{z},\alpha). \qquad (12)$$

$$D_z[\tau_0] \equiv 0. \qquad (13)$$

Исходя из этого условия, определим искомую функцию b и тем самым, решим поставленную задачу.

Перейдём к вычислениям. Имеем $D_z[\tau_0] = D_z\left[\frac{1}{|z|}\right] = D_z\left[\frac{1}{\sqrt{z\bar{z}}}\right] = -\frac{D_z[z\bar{z}]}{2\left(\sqrt{z\bar{z}}\right)^3} =$

$= -\frac{D_z[z]\bar{z} + zD_z[\bar{z}]}{2\left(\sqrt{z\bar{z}}\right)^3} = -\frac{\bar{z} + bz}{2\left(\sqrt{z\bar{z}}\right)^3}$. Отсюда, согласно (13), $\bar{z} + bz = 0$ и, следовательно, $b = -\frac{\bar{z}}{z}$. Оператор D_z найден:

$$D_z = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\bar{z}}{z} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \qquad (14)$$

Таким образом, в области K^-: $D_z\left[F_\gamma(z)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma-1} d\tau \int_{|\eta|=1} \varphi(\eta)\left(\frac{1}{\eta - u}\right)'_z d\eta +$

$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_0}^{1} \tau^{\gamma-1} d\tau \int_{|\eta|=1} \varphi(\eta)\left(\frac{1}{\eta - u}\right)'_z d\eta$, или, что то же,

$$D_z\left[F_\gamma(z)\right] = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma} d\tau \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\eta)}{(\eta - u)^2} d\eta + \int_{\tau_0}^{1} \tau^{\gamma} d\tau \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\eta)}{(\eta - u)^2} d\eta\right) \qquad (15)$$

(напомним, что здесь в первом слагаемом правой части $|u| < 1$, а во втором $|u| > 1$).

Учитывая, что в правой части формулы (15) пределы интегрирования остались те же самые, что и в формуле (10), и применяя к обеим частям (15) оператор D_z повторно, легко получим $D_z^{(2)}\left[F_\gamma(z)\right] \overset{\text{def}}{=} D_z\left[D_z\left[F_\gamma(z)\right]\right] =$

$= \frac{2!}{2\pi i}\left(\int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma+1} d\tau \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\eta)}{(\eta - u)^3} d\eta + \int_{\tau_0}^{1} \tau^{\gamma+1} d\tau \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\eta)}{(\eta - u)^3} d\eta\right)$. А повторяя этот процесс n раз, приходим к формуле

$$D_z^{(n)}\left[F_\gamma(z)\right] = \frac{n!}{2\pi i}\left(\int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma+n-1} d\tau \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\eta)}{(\eta - u)^{n+1}} d\eta + \int_{\tau_0}^{1} \tau^{\gamma+n-1} d\tau \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\eta)}{(\eta - u)^{n+1}} d\eta\right) \qquad (16)$$

(в формуле (16) $n \in \mathbb{N}$) и с учётом теоремы 1 и формулы (8) – к следующей общей теореме.

Теорема 2. **В области K^- функцию $F_\gamma(z)$, представимую интегралом**

(1), можно любое число раз «дифференцировать» обобщённой производной D_z, эта операция равносильна дифференцированию по z соответствующее число раз ядра интеграла (1). В области аналитичности K обобщённая производная вырождается в обычную производную и формула (16) совпадает с формулой (8).

Замечание 1. Итак, интеграл (1) относится к числу функций, имеющих всюду в области K^- обобщённые производные всех порядков. Функции, имеющие обобщённую производную любого порядка в некоторой области D, будем называть D_z-квазианалитическими в этой области. Учитывая, что к числу таких функций можно отнести любую аналитическую функцию, заключаем, что класс D_z-квазианалитических функций является прямым обобщением класса аналитических функций. Очевидно, что функциями, определяемыми интегралом (1), класс D_z-квазианалитических в области K^- функций не исчерпывается. Например, нетрудно видеть, что к этому классу относятся функции вида $\Psi(z)=f_1(z)\cdot F_\gamma(z)+f_2(z)$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – произвольные аналитические в K^- функции.

Замечание 2. Отметим следующее свойство функции $F_\gamma(z)$, определяемой интегралом (1): при $z\to\infty$ она стремится к нулю. Этот вывод следует из свойства интеграла типа Коши: $F^-(\infty)=0$ и формулы (10) (при $z\to\infty$ следует $\tau_0(z)=\dfrac{1}{|z|}\to 0$).

Замечание 3. В силу правила действия операторов вида (11) на сложную функцию[6], для любых дифференцируемых функций вида $f=f\left(\dfrac{1}{|z|}\right)$ выполняется условие $D_z[f]\equiv 0$. Такие функции будем называть квазиконстантами оператора D_z. Заметим, что если f – квазиконстанта, то аналогичным свойством будут обладать $\overline{f}$, $\mathrm{Re}\,f$, $\mathrm{Im}\,f$ и, вообще, произвольная функция вида $h=h\left(f,\overline{f}\right)$, где h – дифференцируемая.

Теперь рассмотрим оператор, комплексно сопряжённый обобщённой производной D_z,

$$D_{\overline{z}}=\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\frac{z}{\overline{z}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}, \tag{17}$$

появляющийся при исследовании в области K^- интеграла, антианалитического в круге K (т.е. удовлетворяющего уравнению $\dfrac{\partial F_\gamma(\overline{z})}{\partial z}=0$), $F_\gamma(\overline{z})=$

---

[6] Если $f=f(g_1,\ldots,g_n)$, где $g_k=g_k(z,\overline{z})$, $k=1,\ldots,n$, то $P[f]=\sum\limits_{k=1}^{n}f_{g_k}P[g_k]$.

$= \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 \tau^{\gamma-1} d\tau \int\limits_{|\eta|=1} \dfrac{\varphi(\eta)}{\eta - \tau\bar{z}} d\eta$ (действие $D_{\bar{z}}$ на интеграл $F_\gamma(\bar{z})$ равносильно дифференцированию по $\bar{z}$ его ядра).

Путём сравнения (14) и (17) устанавливаем формулу связи между операторами D_z и $D_{\bar{z}}$: $zD_z + \bar{z}D_{\bar{z}} = 0$. И, следовательно,

$$\left(zD_z + \bar{z}D_{\bar{z}}\right)\left[F_\gamma(z)\right] \equiv 0. \tag{18}$$

Соотношение (18) можно формально отнести к числу свойств интеграла $F_\gamma(z)$, но, по существу, никакой содержательной информации о классе функций, определяемых интегралом $F_\gamma(z)$, оно не несёт, т.к. выполняется для любой дифференцируемой функции $f = f(z,\bar{z})$: $\left(zD_z + \bar{z}D_{\bar{z}}\right)[f] \equiv 0$.

Рассмотрим теперь вопрос о разложение интеграла $F_\gamma(z)$ в так называемые *обобщённые степенные ряды*. Пусть плотность $\varphi(z)$ удовлетворяет дополнительному условию: $\varphi(z)$ является аналитической в замкнутом единичном круге $\overline{K} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$.

Выбрав $\varepsilon > 0$ достаточно малым так, чтобы функция $\varphi(z)$ была аналитической в круге $K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1+\varepsilon\}$, разложим её там в ряд Маклорена

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{19}$$

где $a_n = \dfrac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Обозначим $M = \max\limits_{z \in K_\varepsilon} |\varphi(z)|$ или, что то же (принцип максимума модуля), $M = \max\limits_{|z|=1+\varepsilon} |\varphi(z)|$. В силу неравенств Коши для коэффициентов ряда Тейлора, имеем $|a_n| \le A_n \overset{\text{def}}{=} \dfrac{M}{(1+\varepsilon)^n}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Отсюда вытекает, что в замкнутом единичном круге $\overline{K}$ ряд (19) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \tag{20}$$

и, следовательно, по признаку Вейерштрасса, сходится там равномерно и абсолютно[7]. Сходимость же ряда (20) легко доказывается, например, по предельному признаку Даламбера: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{A_{n+1}}{A_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M(1+\varepsilon)^n}{M(1+\varepsilon)^{n+1}} = \dfrac{1}{1+\varepsilon} < 1.$

[7] То есть в каждой точке $\overline{K}$ ряд (19) сходится абсолютно.

Отметим также, что при этом оказываются сходящимися и ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nA_n \tag{21}$$

(действительно: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)\cdot A_{n+1}}{n\cdot A_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{A_{n+1}}{A_n}=\dfrac{1}{1+\varepsilon}<1$), и ряд

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)A_n \tag{22}$$

и т.д.

Обратимся к формуле (10), выражающей интеграл $F_\gamma(z)$ в области K^-. Учитывая, что внутренний интеграл является в рассматриваемом случае интегралом Коши и, следовательно, $F^+(u)=\varphi(u)$, $F^-(u)\equiv 0$, формула (10) принимает вид (11), или, что то же,

$$F_\gamma(z)=\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n u^n\right)d\tau\,. \tag{23}$$

В правой части этой формулы знак интеграла можно внести под знак суммирования. Действительно, во-первых, из сходимости ряда (19) в круге $\overline{K}$ следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n u^n$ (вспомним, что в (23) $|u|<1$). Во-вторых, интегрирование с весом $\tau^{\gamma-1}$ не ухудшает сходимости получаемого ряда – это вытекает из оценки его произвольного слагаемого $S_n^+=\int\limits_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}a_n u^n d\tau$:

$$\left|S_n^+\right|\le\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}|a_n||u|^n d\tau<\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}A_n d\tau=\frac{1}{\gamma}A_n\tau_0^{\gamma}<\frac{1}{\gamma}A_n\,. \tag{24}$$

Итак, всюду в области K^- интеграл $F_\gamma(z)$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся[8)] функциональный ряд $F_\gamma(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}S_n^+=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\int\limits_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}u^n d\tau$ или, обозначая $b_n(\tau_0)\overset{\text{def}}{=}\dfrac{a_n}{\gamma+n}\tau_0^{\gamma+n}=\dfrac{\varphi^{(n)}(0)}{(\gamma+n)\cdot n!}\cdot\dfrac{1}{|z|^{\gamma+n}}$, в ряд

$$F_\gamma(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(\tau_0)z^n\,. \tag{25}$$

[8)] Это вытекает непосредственно из оценки (24): $\left|S_n^+\right|\le\dfrac{1}{\gamma}\cdot A_n$ – на основании признака Вейерштрасса.

Слагаемые S_n^+ будем называть положительными составляющими интеграла $F_\gamma(z)$. В области аналитичности K положительные составляющие обращаются в многочлены, а составленный из них ряд (ряд (25) при значении $\tau_0 = 1$) – в обычный степенной ряд, равномерная и абсолютная сходимость которого также может быть установлена на основании оценки (24), если учесть, что эта оценка справедлива и при $\tau_0 = 1$.

Ряд (25) будем называть обобщённым степенным рядом. Отметим, что его «коэффициенты» – функции $b_n(\tau_0)$ являются квазиконстантами оператора D_z. Применяя оператор D_z к обеим частям (25) и внося в правой части оператор под знак суммирования (разумеется, до тех пор, пока не будет установлена равномерная сходимость образуемого в итоге ряда, эта операция носит формальный характер), получим $D_z\left[F_\gamma(z)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} D_z\left[b_n(\tau_0) z^n\right]$. С учётом правила действия операторами вида (11) на произведение[9)], имеем: $D_z\left[b_n(\tau_0) z^n\right] = b_n(\tau_0) D_z\left[z^n\right] = b_n(\tau_0)\frac{\partial}{\partial z} z^n = n b_n(\tau_0) z^{n-1}$ и, следовательно,

$$D_z\left[F_\gamma(z)\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n(\tau_0) z^{n-1}. \qquad (26)$$

Докажем равномерную сходимость ряда (26). Обратимся с этой целью к исходному виду ряда (25) – ряду (23). Применяя оператор D_z к обеим частям (23), получим

$$D_z\left[F_\gamma(z)\right] = \int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma-1} D_z\left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n\right] d\tau. \qquad (27)$$

Вычисляя произвольное слагаемое из правой части (27), будем иметь $\int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma-1} D_z\left[a_n u^n\right] d\tau = \int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma-1} a_n \frac{\partial u^n}{\partial z} d\tau = n a_n \int_0^{\tau_0} \tau^\gamma u^{n-1} d\tau$. Произведём оценку модуля полученного выражения: $\left| n a_n \int_0^{\tau_0} \tau^\gamma u^{n-1} d\tau \right| \le n|a_n| \int_0^{\tau_0} \tau^\gamma |u|^{n-1} d\tau < n A_n \int_0^{\tau_0} \tau^\gamma d\tau =$ $= \frac{1}{\gamma+1} n A_n \tau_0^{\gamma+1} \le \frac{1}{\gamma+1} n A_n$. Отсюда в силу сходимости числового ряда (21) ряд (26) сходится равномерно и абсолютно.

Итак, установлено, что обобщённый ряд Маклорена (25) можно почленно «дифференцировать» обобщённой производной D_z, причём, как показывает формула (26), эта операция аналогично правилу дифференцирования по z

---

[9)] Если $f_1(z,\bar{z})$ и $f_2(z,\bar{z})$ - дифференцируемые функции, то $P\left[f_1 \cdot f_2\right] = P\left[f_1\right] \cdot f_2 + f_1 \cdot P\left[f_2\right]$.

обычных степенных рядов.

Покажем, что ряд (25) можно аналогичным образом «дифференцировать» обобщённой производной D_z любое число раз.

Докажем, во-первых, что ряд, получаемый в результате повторного применения к (27) оператора D_z, также сходится равномерно и абсолютно. Ряд (27) мы можем записать в виде $D_z\left[F_\gamma(z)\right]=\int\limits_0^{\tau_0}\tau^\gamma\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nu^{n-1}\right)d\tau$. Действуя на обе части обобщённой производной, получим $D_z^{(2)}\left[F_\gamma(z)\right]=\int\limits_0^{\tau_0}\tau^\gamma D_z\left[\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_nu^{n-1}\right]d\tau$. Внося теперь оператор D_z под знак суммирования, будем иметь $D_z^{(2)}\left[F_\gamma(z)\right]=\int\limits_0^{\tau_0}\tau^\gamma\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}na_n\frac{\partial}{\partial z}u^{n-1}\right)d\tau$, или

$$D_z^{(2)}\left[F_\gamma(z)\right]=\int\limits_0^{\tau_0}\tau^{\gamma+1}\left(\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nu^{n-2}\right)d\tau. \qquad (28)$$

Законность проведённой операции, а также равномерная и абсолютная сходимость ряда (28), следует из оценки произвольного слагаемого из правой части равенства (28): $\left|n(n-1)a_n\int\limits_0^{\tau_0}\tau^{\gamma+1}u^{n-2}d\tau\right|\le n(n-1)|a_n|\int\limits_0^{\tau_0}\tau^{\gamma+1}|u|^{n-2}d\tau<$

$<n(n-1)A_n\int\limits_0^{\tau_0}\tau^{\gamma+1}d\tau=\frac{1}{\gamma+2}n(n-1)A_n\tau_0^{\gamma+2}\le\frac{1}{\gamma+2}n(n-1)A_n$ и сходимости числового ряда (22).

Применяя теперь оператор D_z к обеим частям (26) и внося в правой части оператор под знак суммирования (на это мы уже имеем право), получим $D_z^{(2)}\left[F_\gamma(z)\right]=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)b_n(\tau_0)z^{n-2}$.

Ясно, что проведённую нами повторно операцию «дифференцирования» ряда (25) обобщённой производной D_z можно применить любое число раз. Образуемые при этом равномерно и абсолютно сходящиеся обобщённые степенные ряды имеют вид $D_z^{(k)}\left[F_\gamma(z)\right]=\sum\limits_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)b_n(\tau_0)z^{n-k}$, $(k\in\mathbb{N})$ или, учитывая, что $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)b_n(\tau_0)=\frac{\varphi^{(n)}(0)}{(\gamma+n)(n-k)!}\tau_0^{\gamma+n}\overset{\text{def}}{=}b_n^{(k)}(\tau_0)$, вид

$$D_z^{(k)}\left[F_\gamma(z)\right]=\sum_{n=k}^{+\infty}b_n^{(k)}(\tau_0)z^{n-k}\quad(k\in\mathbb{N}).\tag{29}$$

Резюмируя полученные результаты, констатируем справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. **Пусть плотность интеграла $F_\gamma(z)$ является аналитической в замкнутом единичном круге $\overline{K}$. Тогда в области неаналитичности K^- интеграл $F_\gamma(z)$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся обобщённый ряд Маклорена (25), который можно любое число раз почленно «дифференцировать» в K^- обобщённой производной D_z по правилу (29). В области аналитичности K ряд (25) обращается в обыкновенный степенной ряд, а правило действия на него оператором D_z (теперь это уже обычная производная) принимает вид $F_\gamma^{(k)}(z)=\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\dfrac{\varphi^{(n)}(0)}{(\gamma+n)(n-k)!}z^{n-k}\ (k\in\mathbb{N})$.**

Алгоритм рассуждений, приведших нас к теореме 3, будем далее (следуя [9]) называть *методом мажорирующей плотности*. Заметим, что этот метод носит универсальный характер – он оказывается весьма эффективным при исследовании классов функций одного комплексного переменного. Используя его, можно, например, провести исследование вопроса о разложении интеграла $F_\gamma(z)$ в обобщённый степенной ряд по отрицательным составляющим $S_n^-=\int\limits_{\tau_0}^{1}\tau^{\gamma-1}c_nu^{-n}d\tau\quad(c_n\in\mathbb{C})$.

Замечание. Для положительных составляющих S_n^+ интеграла $F_\gamma(z)$ в области K^- легко вывести (путём вычисления интеграла $\int\limits_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}c_nu^nd\tau$) и более точную, чем (24), оценку: $\left|S_n^+\right|\le\dfrac{A_n}{\gamma+n}\cdot\dfrac{1}{|z|^\gamma}$.

Перейдём теперь к вопросу получения так называемого обобщённого уравнения Коши-Римана для интеграла $F_\gamma(z)$.

Важную роль в теории аналитических функций играют условия Коши-Римана

$$\begin{cases}u'_x=v'_y\\u'_y=-v'_x\end{cases},\tag{30}$$

(здесь $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $u=\mathrm{Re}\,f(z)$, $v=\mathrm{Im}\,f(z)$), эквивалентные тождественно выполняющемуся в области аналитичности уравнению Коши-Римана

$$\frac{\partial f(z)}{\partial\overline{z}}=0.\tag{31}$$

Рассмотрим вопрос об установлении соответствующей аналогии для исследуемого интеграла $F_\gamma(z)$. Иными словами, зададимся целью найти такое дифференциальное уравнение (назовём его *обобщённым уравнением Коши-Римана*), которому функции, определяемые интегралом $F_\gamma(z)$, удовлетворяют в области неаналитичности K^-. Ясно, что в круге K (в области аналитичности) оно должно быть эквивалентно условию $\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial \bar{z}} = 0$.

Вспоминая материал о взаимно обратных дифференциальных и интегральных операторах из §4, заключаем, что, во-первых, в K интеграл $F_\gamma(z)$ можно записать в виде

$$F_\gamma(z) = L_\gamma^{(-1)}\left[F^+(z)\right], \tag{32}$$

где $L_\gamma^{(-1)}\left[f(z)\right] = \int_0^1 \tau^{\gamma-1} f(\tau z)\,d\tau$ – интегральный оператор. Во-вторых, применяя к обеим частям (32) дифференциальный оператор $L_\gamma\left[f(z)\right] = \gamma f(z) + z f'(z)$, получаем $L_\gamma\left[F_\gamma(z)\right] = F^+(z)$, или, что то же,

$$\gamma F_\gamma(z) + z\frac{\partial F_\gamma(z)}{\partial z} = F^+(z). \tag{33}$$

Действуя на обе части тождества (33) формальной производной $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$, будем иметь $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\gamma F_\gamma(z) + z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} F^+(z) \equiv 0$. Следовательно, если будет известна формула дифференциальной связи в области K^- интеграла $F_\gamma(z)$ с интегралом типа Коши $F^-(z)$ (аналог формулы (33)), то, применяя к этой формуле оператор $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ и учитывая аналитичность $F^-(z)$, мы сразу найдём искомое уравнение.

Перейдём к установлению этой дифференциальной зависимости. Покажем, что в области неаналитичности K^- интеграл $F_\gamma(z)$ связан с интегралом типа Коши $F^-(z)$ дифференциальным соотношением

$$\gamma F_\gamma(z) + z\frac{\partial F_\gamma(z)}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial F_\gamma(z)}{\partial \bar{z}} = F^-(z). \tag{34}$$

Заметим, прежде всего, что формулу (34) можно переписать в виде $\gamma F_\gamma(z) + P_0\left[F_\gamma(z)\right] = F^-(z)$, где $P_0 = z\dfrac{\partial}{\partial z} + \bar{z}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ – рассмотренный в §3 оператор, обладающий двумя специфическими свойствами: $P_0\left[|z|\right] = |z|$; $P_0\left[\dfrac{z}{|z|}\right] \equiv 0$,

и, следовательно, для любой дифференцируемой функции вида $f = f\left(\frac{z}{|z|}\right)$

$$P_0[f] \equiv 0. \qquad (35)$$

Далее, обратимся к формуле (10), выражающей интеграл $F_\gamma(z)$ всюду в области K^-, и произведём в ней замену параметра τ на новый параметр t по формуле $\tau = \frac{t}{|z|}$. Будем иметь: $d\tau = \frac{dt}{|z|}$, $\tau = 0 \Leftrightarrow t = 0$, $\tau = 1 \Leftrightarrow t = |z|$, $\tau = \tau_0 = \frac{1}{|z|}$ $\Leftrightarrow t = 1$ и, следовательно, (10) принимает вид: $F_\gamma(z) = \int_0^1 \frac{t^{\gamma-1}}{|z|^{\gamma-1}} F^+\left(\frac{t}{|z|}z\right)\frac{dt}{|z|} +$ $+\int_1^{|z|} \frac{t^{\gamma-1}}{|z|^{\gamma-1}} F^-\left(\frac{t}{|z|}z\right)\frac{dt}{|z|}$, или, что то же, $|z|^\gamma F_\gamma(z) = \int_0^1 t^{\gamma-1} F^+\left(t\frac{z}{|z|}\right)dt +$ $+\int_1^{|z|} t^{\gamma-1} F^-\left(t\frac{z}{|z|}\right)dt$. Применяя к обеим частям этой формулы оператор P_0, легко получим: $P_0\left[|z|^\gamma\right]F_\gamma(z) + |z|^\gamma P_0\left[F_\gamma(z)\right] = \int_0^1 t^{\gamma-1} P_0\left[F^+\left(t\frac{z}{|z|}\right)\right]dt + P_0[1]F^+\left(\frac{z}{|z|}\right) -$

$$-P_0[0]\cdot 0\cdot F^+(0) + \int_1^{|z|} t^{\gamma-1} P_0\left[F^-\left(t\frac{z}{|z|}\right)\right]dt + P_0[|z|]|z|^{\gamma-1}F^-(z) - P_0[1]F^-\left(\frac{z}{|z|}\right).$$

Здесь в правой части оказываются равными нулю все слагаемые, кроме пятого (второе и четвёртое – в силу свойства $P_0(\text{const}) = 0$; третье – очевидно; первое и четвёртое – в силу свойства (35)). Следовательно, учитывая, что $P_0[|z|] = |z|$ и $P_0\left[|z|^\gamma\right] = \gamma|z|^{\gamma-1}P_0[|z|] = \gamma\cdot|z|^\gamma$, рассматриваемая форма примет вид: $\gamma|z|^\gamma F_\gamma(z) + |z|^\gamma P_0\left[F_\gamma(z)\right] = |z|^\gamma F^-(z)$, или, что то же, $\gamma F_\gamma(z) + P_0\left[F_\gamma(z)\right] = F^-(z)$. Пришли к доказываемой формуле (34).

Далее, действуя на обе части (34) формальной производной $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}$ и учитывая аналитичность функции $F^-(z)$, получаем решение поставленной задачи: $\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\gamma F_\gamma(z) + P_0\left[F_\gamma(z)\right]\right) = 0$, или, что то же,

$$z\frac{\partial^2 F_\gamma(z)}{\partial z\,\partial\bar{z}} + \bar{z}\frac{\partial^2 F_\gamma(z)}{\partial\bar{z}^2} + (\gamma+1)\frac{\partial F_\gamma(z)}{\partial\bar{z}} = 0. \qquad (36)$$

Дифференциальное уравнение второго порядка (36) и есть искомое обоб-

щённое уравнение Коши-Римана интеграла $F_\gamma(z)$.

Следствие. **В частном случае, когда плотность $\varphi(z)$ интеграла $F_\gamma(z)$ является, дополнительно, аналитической в круге K функцией, интеграл Коши $F^-(z)\equiv 0$ и, следовательно, – согласно формуле (34) – интеграл $F_\gamma(z)$ всюду в области K^- при этом удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка $z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial z}+\bar z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial \bar z}+\gamma F_\gamma(z)=0$.**

Итак, функции, определяемые интегралом $F_\gamma(z)$, удовлетворяют в области неаналитичности K^- обобщённому уравнению Коши-Римана (36), которое, вводя для краткости операторное обозначение $D_{CR}=z\dfrac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar z}+\bar z\dfrac{\partial^2}{\partial \bar z^2}+(\gamma+1)\dfrac{\partial}{\partial\bar z}$, можно переписать в виде

$$D_{CR}\left[F_\gamma(z)\right]=0. \qquad (37)$$

Функции (дважды непрерывно дифференцируемые), удовлетворяющие в области K^- (и, вообще, в некоторой области G) уравнению (37), назовём D_{CR}-*квазианалитическими* в этой области. Учитывая, что к числу таких функций можно отнести любую аналитическую функцию, заключаем, что класс D_{CR}-квазианалитических функций является прямым обобщением класса аналитических функций. Условимся, для краткости, обозначать символом Ω_{F_γ} – класс функций, определяемых интегралом $F_\gamma(z)$, а через Ω_{CR} – класс D_{CR}-квазианалитических в области K^- функций. Заметим, что в области K^- класс Ω_{F_γ} значительно уже класса Ω_{CR}: во-первых, интегралом $F_\gamma(z)$ определяются в области K^- бесконечно дифференцируемые функции. Во-вторых, даже находясь в подклассе бесконечно дифференцируемых функций класса Ω_{CR} (обозначим его Ω_{CR}^{∞}), легко видеть, что к этому подклассу относятся все функции вида $\Psi(z)=f_1(z)F_\gamma(z)+f_2(z)$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – произвольные аналитические функции.

Имея в виду совокупность установленных выше свойств интеграла $F_\gamma(z)$ (обобщённая производная, разложение в обобщённый степенной ряд, обобщённое уравнение Коши-Римана), будем характеризовать поведение в области K^- функций, определяемых этим интегралом, общим термином *квазианалитичность*.

А сейчас, в качестве одного из приложений уравнения (36), мы рассмотрим вопрос о *квазигармоничности* вещественной и мнимой частей функций класса Ω_{F_γ}.

Напомним, что действительная и мнимая части аналитической в некоторой области функции являются в этой области функциями сопряжёнными гармони-

ческими, т.е. они дважды непрерывно дифференцируемы, удовлетворяют известному уравнению Лапласа и связаны между собой условиями Коши-Римана (30).

Установим, опираясь на обобщённое уравнение Коши-Римана (36), соответствующие аналоги для функций, определяемых действительной и мнимой частями интеграла $F_\gamma(z)$ в области K^-.

Заметим, во-первых, что комплексное уравнение (36) можно представить в виде системы двух вещественных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\left(\gamma F_\gamma(z)+z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial z}+\bar z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial \bar z}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}\mathrm{Im}\left(\gamma F_\gamma(z)+z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial z}+\bar z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial \bar z}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\left(\gamma F_\gamma(z)+z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial z}+\bar z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial \bar z}\right)=-\dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\left(\gamma F_\gamma(z)+z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial z}+\bar z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial \bar z}\right) \end{cases}, \quad (38)$$

(эквивалентность системы (38) уравнению (36) устанавливается точно так же, как эквивалентность классической системы (30) уравнению (31)).

Далее, обозначая $u(x,y)=\mathrm{Re}\,F_\gamma(z)$, $v(x,y)=\mathrm{Im}\,F_\gamma(z)$ и совершая в выражении $\gamma F_\gamma(z)+z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial z}+\bar z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial \bar z}$ переход от формальных производных к частным согласно известным формулам $\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial \bar z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ после соответствующих преобразований легко получим $\gamma F_\gamma(z)+z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial z}+$ $+\bar z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial \bar z}=\gamma u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+i\left(\gamma v+x\dfrac{\partial v}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$, откуда

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(\gamma F_\gamma(z)+z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial z}+\bar z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial \bar z}\right)=\gamma u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \mathrm{Im}\left(\gamma F_\gamma(z)+z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial z}+\bar z\dfrac{\partial F_\gamma(z)}{\partial \bar z}\right)=\gamma v+x\dfrac{\partial v}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}.$$

Подставляя найденные выражения в первое и второе уравнения системы (38), будем соответственно иметь:

$$\begin{cases} (\gamma+1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=(\gamma+1)\dfrac{\partial v}{\partial y}+x\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+y\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ (\gamma+1)\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\left((\gamma+1)\dfrac{\partial v}{\partial x}+x\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right) \end{cases}. \quad (39)$$

Введём операторные обозначения $P_x=(\gamma+1)\dfrac{\partial}{\partial x}+x\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}$, $P_y=(\gamma+1)\dfrac{\partial}{\partial y}+x\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}+y\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Тогда система (39) кратко запишется в виде

$$\begin{cases} P_x[u] = P_y[v] \\ P_y[u] = -P_x[v] \end{cases}. \tag{40}$$

Условия (40) будем называть *обобщёнными условиями Коши-Римана*, а пару дважды непрерывно дифференцируемых функций действительных переменных x и y, связанных между собой этими условиями, – *обобщёнными сопряжёнными* функциями.

Покажем теперь, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению с частными производными третьего порядка.

Дифференцируя первое уравнение системы (39) по x, а второе – по y и складывая полученные выражения, будем иметь: $x\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + x\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + y\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + (\gamma+2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$, или, используя обозначение оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$,

$$x\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + y\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + (\gamma+2)\Delta u = 0. \tag{41}$$

Теперь дифференцируя первое уравнение (39) по y, а второе – по x и вычитая из первого результата второй, получим $x\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + x\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + y\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + y\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + (\gamma+2)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = 0$, т.е. пришли к уравнению (41), записанному относительно функции $v(x,y)$: $x\frac{\partial \Delta v}{\partial x} + y\frac{\partial \Delta v}{\partial y} + (\gamma+2)\Delta v = 0.$

Уравнение (41) будем называть *обобщённым уравнением Лапласа*, а удовлетворяющие ему трижды непрерывно дифференцируемые функции действительных переменных x и y – *квазигармоническими* функциями.

Следовательно, действительная и мнимая части интеграла $F_\gamma(z)$ в области K^- представляют собой обобщённые сопряжённые квазигармонические функции.

§6. Об операторных аналогах интеграла типа Коши специальных видов для звёздных областей

Рассмотрим сначала интеграл вида

$$\mathsf{F}_{\alpha\beta\gamma}(\mathsf{z})=\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\int_{\alpha}^{\beta}\tau^{\gamma-1}\mathsf{d}\tau\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\mathsf{u}}\mathsf{d}\eta,\qquad(1)$$

где $\mathsf{u}=\tau\mathsf{z}$, плотность $\varphi(\eta)$ – произвольная функция, заданная на окружности $\Gamma=\{\eta\in\mathbb{C}:\ |\eta|=1\}$, удовлетворяющая на Γ условию Гёльдера, а действительные константы α, β и γ определяются условиями $0<\alpha<\beta<1$, $\gamma\geq1$.

Введём следующие обозначения областей:

$$\mathsf{G}_1=\left\{\mathsf{z}\in\mathbb{C}:\ |\mathsf{z}|<\frac{1}{\beta}\right\},\quad \mathsf{G}_2=\left\{\mathsf{z}\in\mathbb{C}:\ |\mathsf{z}|>\frac{1}{\alpha}\right\},\quad \mathsf{G}_3=\left\{\mathsf{z}\in\mathbb{C}:\ \frac{1}{\beta}<|\mathsf{z}|<\frac{1}{\alpha}\right\}.$$

Приведём сводку результатов, характеризующих поведение интеграла (1). Итак, определённые интегралом (1) функции являются:

1^0 аналитическими в области G_1;

2^0 аналитическими в области G_2;

3^0 неаналитическими, вообще говоря, в области G_3;

4^0 непрерывными на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Справедливость утверждения 1^0 основана на том факте, что для любой точки $\mathsf{z}\in\mathsf{G}_1$ при любых $\tau\in[\alpha;\beta]$ выполняется неравенство $|\mathsf{u}|<1$.

Утверждение 2^0 базируется на том, что для любой точки $\mathsf{z}\in\mathsf{G}_2$ при любых $\tau\in[\alpha;\beta]$ имеем $|\mathsf{u}|>1$. Таким образом, если обозначить

$$\frac{1}{2\pi\mathsf{i}}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\mathsf{u}}\mathsf{d}\eta=\begin{cases}\mathsf{F}^{+}(\mathsf{u}), & |\mathsf{u}|<1\\ \mathsf{F}^{-}(\mathsf{u}), & |\mathsf{u}|>1\end{cases},$$

то в области G_1 интеграл (1) выражается по формуле

$$\mathsf{F}_{\alpha\beta\gamma}(\mathsf{z})=\int_{\alpha}^{\beta}\tau^{\gamma-1}\mathsf{F}^{+}(\mathsf{u})\mathsf{d}\tau,\qquad(2)$$

а в области G_2 – по формуле

$$\mathsf{F}_{\alpha\beta\gamma}(\mathsf{z})=\int_{\alpha}^{\beta}\tau^{\gamma-1}\mathsf{F}^{-}(\mathsf{u})\mathsf{d}\tau.\qquad(3)$$

В случае, когда $\mathsf{z}\in\mathsf{G}_3$, имеем: если $\tau\in[\alpha;\tau_0)$, то $|\mathsf{u}|<1$, а если $\tau\in(\tau_0;\beta]$, то $|\mathsf{u}|>1$, где τ_0 – корень уравнения $|\mathsf{u}|=1$. Легко видеть, что при фиксированном $\mathsf{z}\in\mathsf{G}_3$ число τ_0 заключено между α и β и равно $\frac{1}{|\mathsf{z}|}$. Если же z считать произвольной точкой областью G_3, то τ_0 есть функция от $|\mathsf{z}|$: $\tau_0=\frac{1}{|\mathsf{z}|}$. В силу ограниченности особого интеграла и того факта, что при любом фиксированном $\mathsf{z}\in\mathsf{G}_3$ лебегова мера множества $\{\tau\in[\alpha;\beta]:\ |\mathsf{u}|=1\}$ равна нулю, заключаем,

что в области G_3 справедлива формула

$$F_{\alpha\beta\gamma}(z)=\int_{\alpha}^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}F^{+}(u)d\tau+\int_{\tau_0}^{\beta}\tau^{\gamma-1}F^{-}(u)d\tau. \qquad (4)$$

Заметим, что интеграл (1) можно определить по формуле (4) также в областях G_1 и G_2, если ввести следующее доопределение (по непрерывности): считать $\tau_0\equiv\beta$, если $z\in G_1$, и $\tau_0\equiv\alpha$ – в случае $z\in G_2$. Отсюда и из конструкции формулы (4) вытекают утверждение 4^0 и (если ещё учесть неаналитичность функции τ_0) утверждение 3^0. Наличие в формулировке утверждения 3^0 слов «вообще говоря» объясняется тем, что, даже исключая тривиальный случай нулевой плотности, интеграл (1) может определять аналитическую функцию в подобластях области G_3.

Замечание. Из конструкции формулы (4) и дифференциальных свойств функции τ_0 (как функции двух вещественных переменных) вытекает и ещё один вывод: представимые интегралом (1) функции являются вне области аналитичности функциями, любое число раз дифференцируемыми в вещественном смысле.

Для более детального исследования интеграла (1) в области G_3 это замечание имеет важное принципиальное значение – оно, по существу, обеспечивает правомочность применения к функциям, определённым этим интегралом вне области аналитичности, метода линейных дифференциальных операторов (§3).

Определённые интегралом (1) функции в области G_3:

5^0 связаны с соответствующим интегралом Коши дифференциальным соотношением в формальных производных

$$\gamma F_{\alpha\beta\gamma}(z)+z\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial z}+\bar{z}\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial\bar{z}}=\frac{\beta^{\gamma}}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\beta z}d\eta-\frac{\alpha^{\gamma}}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-\alpha z}d\eta \qquad (5)$$

(отметим, что это соотношение имеет место и всюду на комплексной плоскости; при этом в области аналитичности левая часть принимает вид $\gamma F_{\alpha\beta\gamma}(z)+$ $+zF'_{\alpha\beta\gamma}(z)$);

6^0 удовлетворяют соотношению

$$2\bar{z}|z|^{\gamma}\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial\bar{z}}=-\varphi\left(\frac{z}{|z|}\right) \qquad (6)$$

(*формула обращения* интеграла (1));

7^0 удовлетворяют уравнению

$$\bar{z}\frac{\partial^2 F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial\bar{z}^2}+z\frac{\partial^2 F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial z\partial\bar{z}}+(\gamma+1)\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial\bar{z}}=0 \qquad (7)$$

(*обобщённое уравнение Коши-Римана* интеграла (1); выполнимость этого уравнения в области аналитичности очевидна);

8^0 обладают *обобщённой производной*

$$D_z = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\overline{z}}{z} \cdot \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \qquad (8)$$

(действие этим дифференциальным оператором на интеграл равносильно дифференцированию по z ядра интеграла, а в области аналитичности этот оператор вырождается в обычную производную).

Отметим, что вывод приведённых здесь без доказательств свойств 5^0-8^0 проводится по тем же принципиальным схемам, что и вывод соответствующих свойств интеграла (1) из предыдущего параграфа.

Замечание. В отличие от соотношений (5) и (7), справедливых на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, формула (6) имеет место лишь в области G_3, т.к. в областях аналитичности G_1 и G_2 она, вообще говоря, неверна, ведь там $\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial \overline{z}} \equiv 0$ (и будь там справедливо (6), то это влекло бы за собой тождество $\varphi(\eta) \equiv 0$, а этот тривиальный случай мы исключаем из рассмотрения).

Формула (6) показывает, что (исключая тривиальный случай нулевой плотности) интегралом (1) не может быть определена аналитическая во всём кольце G_3 функция. Но было бы неверным сделать отсюда вывод о том, что в области G_3 интегралом (1) представлены одни только неаналитические функции. Так, если $\varphi(\eta)$ не тождественный нуль, но обращается в нуль на какой-либо дуге окружности Γ, например, $\varphi(\eta) = 0$ на $\Gamma^+ = \{\eta \in \mathbb{C}: |\eta| = 1, \operatorname{Re}\eta > 0\}$, то согласно формуле (6) в первой половине G_3, т.е. в области $G_3^+ = \left\{z \in \mathbb{C}: \frac{1}{\beta} < |z| < \frac{1}{\alpha}, \operatorname{Re} z > 0\right\}$ интеграл (1) удовлетворяет условию Коши-Римана $\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial \overline{z}} \equiv 0$ и, следовательно, представляет собой аналитическую функцию.

Установления квазигармонических свойств действительной и мнимой частей интеграла (1) начнём с вывода условия сопряжения, которому удовлетворяют эти части данного интеграла.

Представим уравнение (7), предварительно записав его в виде

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\gamma F_{\alpha\beta\gamma}(z) + z\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial z} + \overline{z}\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial \overline{z}}\right) = 0, \qquad (7')$$

эквивалентной ему системой двух следующих уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re}\left(\gamma F_{\alpha\beta\gamma}(z) + z\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial z} + \overline{z}\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial \overline{z}}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im}\left(\gamma F_{\alpha\beta\gamma}(z) + z\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial z} + \overline{z}\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial \overline{z}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\left(\gamma F_{\alpha\beta\gamma}(z)+z\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial z}+\bar{z}\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial \bar{z}}\right)=$$
$$=-\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\left(\gamma F_{\alpha\beta\gamma}(z)+z\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial z}+\bar{z}\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial \bar{z}}\right). \qquad (9)$$

Далее, обозначая $u=u(x,y)=\mathrm{Re}F_{\alpha\beta\gamma}(z)$, $v=v(x,y)=\mathrm{Im}F_{\alpha\beta\gamma}(z)$ и совершая в выражении $\gamma F_{\alpha\beta\gamma}(z)+z\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial z}+\bar{z}\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial \bar{z}}$ переход от формальных производных к частным, приводим это выражение к виду $\gamma u+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+$ $+i\left(\gamma v+x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}\right)$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left(\gamma F_{\alpha\beta\gamma}(z)+z\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial z}+\bar{z}\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial \bar{z}}\right)=\gamma u+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\\&\mathrm{Im}\left(\gamma F_{\alpha\beta\gamma}(z)+z\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial z}+\bar{z}\frac{\partial F_{\alpha\beta\gamma}(z)}{\partial \bar{z}}\right)=\gamma v+x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned} \qquad (10)$$

а уравнения (9) могут быть переписаны в виде системы

$$\begin{cases}(\gamma+1)\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(\gamma+1)\frac{\partial v}{\partial y}+x\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\\(\gamma+1)\frac{\partial u}{\partial y}+x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\left((\gamma+1)\frac{\partial v}{\partial x}+x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)\end{cases}. \qquad (11)$$

Таким образом, установлено, что действительная и мнимая части интеграла (1) связаны между собой в области G_3 системой дифференциальных соотношений (11) – *обобщёнными условиями Коши-Римана*.

Теперь покажем, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют в G_3 одному и тому же дифференциальному уравнению в частных производных третьего порядка.

Дифференцируя первое уравнение системы (11) по x, получим

$$(\gamma+2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=(\gamma+2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+x\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+y\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}.$$

Дифференцирование второго уравнение системы (11) по y даёт

$$(\gamma+2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+y\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=-\left((\gamma+2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+x\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+y\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2}\right).$$

Складывая эти два соотношения, будем иметь

$$x\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+y\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+(\gamma+2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0,$$

или, обозначая, как обычно, оператор Лапласа $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$,

$$x\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + y\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + (\gamma + 2)\Delta u = 0. \qquad (12)$$

Далее, дифференцируя первое уравнение системы (11) по y, а второе уравнение – по x и вычитая из первого результата второй, получаем:

$$x\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + x\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + y\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + y\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + (\gamma + 2)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = 0,$$

т.е. пришли к уравнению (12), записанному относительно функции v.

Уравнение (12) называют *обобщённым уравнением Лапласа*, а удовлетворяющие ему трижды непрерывно дифференцируемые функции от x и y – *квазигармоническими функциями*.

Две квазигармонические функции, связанные между собой обобщёнными условиями Коши-Римана (11), называют *обобщённо-сопряжёнными*.

Нетрудно показать, что действительная и мнимая части любой аналитической функции удовлетворяют условиям (11) и уравнению (12), т.е. класс квазигармонических функций (класс пар обощённо-сопряжённых квазигармонических функций) является прямым обобщением класса гармонических функций (класса пар сопряжённо-гармонических функций).

Итак, действительная и мнимая части интеграла (1) в области G_3 (а, следовательно, и на всей комплексной плоскости) принадлежат к классу пар обобщённо-сопряжённых квазигармонических функций.

Будем рассматривать теперь функции, определяемые интегралом

$$F_{\alpha\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta} d\tau \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau,\eta)}{\eta - \tau z} d\eta, \qquad (13)$$

где плотность $\varphi(\tau,\eta)$ – произвольная функция, заданная на топологическом произведении $[\alpha;\beta]\times\Gamma$ $\left(\Gamma = \{\eta \in \mathbb{C}: |\eta| = 1\}\right)$, непрерывная по τ и удовлетворяющая по η условию Гёльдера $|\varphi(\tau,\eta) - \varphi(\tau,\eta_0)| < M|\eta - \eta_0|^{\nu}$, константы $M > 0$ и $\nu\ (0 < \nu \le 1)$ не зависят от τ, а α и β – произвольные положительные числа с условием $0 < \alpha < \beta < 1$.

Отметим прежде всего, что интеграл (13) является прямым обобщением интеграла (1): он совпадает с (1) в том частном случае, когда его плотность $\varphi(\tau,\eta)$ имеет вид $\varphi(\tau,\eta) = \tau^{\gamma-1}\varphi(\eta)$.

Можно показать, что функции, определяемые интегралом (13), непрерывны на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, аналитичны в областях G_1 и G_2 и неаналитичны, вообще говоря, в кольце G_3. Изучение квазианалитических свойств интеграла (13), которыми он обладает в области G_3, начинается с вывода формулы

$$F_{\alpha\beta}(z)=\int_{\alpha}^{\tau_0}\hat{F}^{+}(\tau,u)d\tau+\int_{\tau_0}^{\beta}\hat{F}^{-}(\tau,u)d\tau, \qquad (14)$$

выражающей интеграл (13) всюду в G_3. Поясним, что здесь $u=\tau z$, $\tau_0=\dfrac{1}{|z|}$ и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\tau,\eta)}{\eta-u}d\eta=\begin{cases}\hat{F}^{+}(\tau,u), & |u|<1\\ \hat{F}^{-}(\tau,u), & |u|>1\end{cases}.$$

С помощью метода линейных дифференциальных операторов можно установить, что в кольце G_3 интеграл (13) обладает обобщённой производной $D_z=\dfrac{\partial}{\partial z}-\dfrac{\bar{z}}{z}\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}$; действие этим оператором на $F_{\alpha\beta}(z)$ в G_3 равносильно дифференцированию по z ядра интеграла.

Отсюда выводится формула «дифференцирования» интеграла (13) в области G_3 обобщённой производной D_z любое число раз:

$$D_z^{(n)}\left[F_{\alpha\beta}(z)\right]=\frac{n!}{2\pi i}\left(\int_{\alpha}^{\tau_0}\tau^n d\tau\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau,\eta)}{(\eta-u)^{n+1}}d\eta+\int_{\tau_0}^{\beta}\tau^n d\tau\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau,\eta)}{(\eta-u)^{n+1}}d\eta\right)\ (n\in\mathbb{N}).$$

§7. Операторный аналог интеграла типа Коши для выпуклых областей

На основе интегрального представления (12) §4 введём в рассмотрение следующий интеграл

$$F_{\gamma,z_0}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{1}\tau^{\gamma-1}d\tau\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-u}d\eta, \qquad (1)$$

где плотность $\varphi(\eta)-$ произвольная функция, определённая на единичной окружности $\Gamma=\{\eta\in\mathbb{C}:\ |\eta|=1\}$ и удовлетворяющая на ней условию Гёльдера, z_0-произвольная фиксированная точка из определяющей области – открытого круга $K=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$, $u=\tau z+(1-\tau)z_0$, $\gamma\geq 1$.

Обозначим $K^{-}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|>1\}$.

Теорема 1. **Функции, представимые интегралом (1), являются аналитическими в области K, непрерывными на всей комплексной плоскости и, вообще говоря, неаналитическими в области K^{-}.**

▶ В силу выпуклости области K вместе с любой её точкой z ей принадлежат и точки вида $\tau z+(1-\tau)z_0$, $0\leq\tau\leq 1$, поэтому интеграл (1) определён в K.

Обозначим $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\eta)}{\eta-u}d\eta=\begin{cases}F^{+}(u), & |u|<1\\ F^{-}(u), & |u|>1\end{cases}$, а при $|u|=1$ будем понимать этот интеграл как особый в смысле главного значения по Коши.

В области K^{-} выражение $|u|$ может быть и больше, и меньше, и равно единице. Найдём значение параметра τ, при котором $|u|=1$. Имеем $|u|^2=$ $=\big(\tau(z-z_0)+z_0\big)\big(\tau(\overline{z}-\overline{z}_0)+\overline{z}_0\big)=1$, значит, $\tau^2+\left(\frac{z_0}{z-z_0}+\frac{\overline{z}_0}{\overline{z}-\overline{z}_0}\right)\tau+\frac{|z_0|^2-1}{|z-z_0|^2}=0$.

Решая это квадратное уравнение, получим $\tau_{1,2}=\pm\sqrt{\mathrm{Re}^2\frac{z_0}{z-z_0}+\frac{1-|z_0|^2}{|z-z_0|^2}}-$ $-\mathrm{Re}\frac{z_0}{z-z_0}$. Так как $\tau_2<0$, то τ_2 – посторонний корень. Таким образом, $\tau_0=\sqrt{\left(\mathrm{Re}\frac{z_0}{z-z_0}\right)^2+\frac{1-|z_0|^2}{|z-z_0|^2}}-\mathrm{Re}\frac{z_0}{z-z_0}$.

Следовательно, в области K^{-} интеграл (1) выражается формулой

$$F_{\gamma,z_0}(z)=\int\limits_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}F^{+}(u)d\tau+\int\limits_{\tau_0}^{1}\tau^{\gamma-1}F^{-}(u)d\tau, \qquad (2)$$

а значит, непрерывен на комплексной плоскости и, вообще говоря, неаналитичен в области K^{-}. ◀

Замечание. В то же время в области K^{-} интеграл (1) можно любое число раз дифференцировать (в вещественном смысле), что позволяет применять к нему в этой области метод линейных дифференциальных операторов. Данный метод будем использовать при выявлении квазианалитических свойств интеграла (1).

Теорема 2. **В области неаналитичности K^{-} интеграл (1) можно любое число раз дифференцировать обобщённой производной**

$$\tilde{D}_z=\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\overline{z}-\overline{z}_0}{z-z_0}\cdot\frac{\tau_0 z_0(\overline{z}-\overline{z}_0)+|z_0|^2-1}{\tau_0\overline{z}_0(z-z_0)+|z_0|^2-1}\cdot\frac{\partial}{\partial\overline{z}}.$$

Эта операция равносильна дифференцированию по z соответствующее число раз ядра интеграла, причём в области аналитичности K обобщённая производная вырождается в обычную производную

$$\tilde{D}_z^{(n)}\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]=F_{\gamma,z_0}^{(n)}(z).$$

▶ Будем искать дифференциальный оператор вида $\tilde{D}_z=a(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial z}+$ $+b(z,\overline{z})\frac{\partial}{\partial\overline{z}}$, действие которым на интеграл (1) равносильно дифференцирова-

нию по z его ядра $\dfrac{1}{\eta-u}$. Так как в области аналитичности этот оператор должен совпадать с обычной производной, то коэффициент $a(z,\bar{z})\equiv 1$, т.е. $\tilde{D}_z=\dfrac{\partial}{\partial z}+b(z,\bar{z})\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$, где коэффициент $b(z,\bar{z})$ – неизвестная пока ещё функция. Ясно, что нахождение оператора $\tilde{D}_z$ сводиться к определению этого коэффициента.

В формуле (2) внутренние интегралы $F^+(u)$ и $F^-(u)$ после замены параметра η на вещественный параметр t по формуле $\eta=\exp it$ становятся интегралами с постоянными пределами интегрирования и, следовательно, при действии на них оператором $\tilde{D}_z$ согласно обобщению правила Лейбница для операторов рассматриваемого вида оператор пройдёт за знак интеграла без образования дополнительных слагаемых.

Действие оператором $\tilde{D}_z$ на ядро интеграла равносильно дифференцированию ядра по z в силу его аналитичности, а также с учётом вида оператора $\tilde{D}_z$.

Осталось потребовать, чтобы оператор $\tilde{D}_z$ проходил без образования дополнительных слагаемых и за знак внешнего интеграла. Согласно упомянутому правилу Лейбница для этого достаточно выполнимости условия $\tilde{D}_z[\tau_0]\equiv 0$.

Имеем

$$\tilde{D}_z[\tau_0]=\tilde{D}_z\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z_0}{z-z_0}+\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{z_0}{z-z_0}+\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right)^2+\frac{1-|z_0|^2}{(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{z_0}{(z-z_0)^2}+\frac{\bar{z}_0 b(z,\bar{z})}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{z_0}{z-z_0}+\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right)\left(\frac{z_0}{(z-z_0)^2}+\frac{\bar{z}_0 b}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}\right)+\frac{\left(1-|z_0|^2\right)\left(\bar{z}-\bar{z}_0+(z-z_0)b(z,\bar{z})\right)}{(z-z_0)^2(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}\right),$$

где $A=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{z_0}{z-z_0}+\dfrac{\bar{z}_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right)^2+\dfrac{1-|z_0|^2}{(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)}}$.

Приравнивая найденное для $\tilde{D}_z$ выражение к нулю и рассматривая полученное равенство как уравнение относительно $b(z,\bar{z})$, будем иметь

$$A\left(z_0(\bar{z}-\bar{z}_0)^2+\bar{z}_0(z-z_0)^2 b(z,\bar{z})\right)-\left(z_0(\bar{z}-\bar{z}_0)^2+\bar{z}_0(z-z_0)^2 b(z,\bar{z})\right)\mathrm{Re}\frac{z_0}{z-z_0}-$$

$$-\left(1-|z_0|^2\right)\left(\bar{z}-\bar{z}_0+(z-z_0)b(z,\bar{z})\right)=0,$$

или, что то же,

$$b(z,\bar z)\left(\left(A-\mathrm{Re}\frac{z_0}{z-z_0}\right)\bar z_0(z-z_0)^2-\left(1-|z_0|^2\right)(z-z_0)\right)=$$

$$=-\left(\left(A-\mathrm{Re}\frac{z_0}{z-z_0}\right)z_0(\bar z-\bar z_0)^2-\left(1-|z_0|^2\right)(\bar z-\bar z_0)\right),$$

откуда получаем $b(z,\bar z)=-\dfrac{\bar z-\bar z_0}{z-z_0}\dfrac{\left(A-\mathrm{Re}\dfrac{z_0}{z-z_0}\right)z_0(\bar z-\bar z_0)+|z_0|^2-1}{\left(A-\mathrm{Re}\dfrac{z_0}{z-z_0}\right)\bar z_0(z-z_0)+|z_0|^2-1}.$

Если учесть, что $A-\mathrm{Re}\dfrac{z_0}{z-z_0}=\tau_0$, то $b(z,\bar z)$ выражается и так:

$$b(z,\bar z)=-\frac{\bar z-\bar z_0}{z-z_0}\cdot\frac{\tau_0 z_0(\bar z-\bar z_0)+|z_0|^2-1}{\tau_0\bar z_0(z-z_0)+|z_0|^2-1}.$$

Таким образом, найдена обобщённая производная интеграла (1):

$$\tilde D_z=\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\bar z-\bar z_0}{z-z_0}\cdot\frac{\tau_0 z_0(\bar z-\bar z_0)+|z_0|^2-1}{\tau_0\bar z_0(z-z_0)+|z_0|^2-1}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar z}.\ \blacktriangleleft$$

Итак, в области K^-

$$\tilde D_z\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}d\tau\int_\Gamma\varphi(\eta)\left(\frac{1}{\eta-u}\right)'_z d\eta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_0}^{1}\tau^{\gamma-1}d\tau\int_\Gamma\varphi(\eta)\left(\frac{1}{\eta-u}\right)'_z d\eta,$$

или, что то же,

$$\tilde D_z\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma}d\tau\int_\Gamma\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-u)^2}d\eta+\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma}d\tau\int_\Gamma\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-u)^2}d\eta.\qquad(3)$$

Учитывая, что в правой части формулы (3) пределы интегрирования остались те же самые, что и в формуле (2), и применяя к обеим частям (3) оператор $\tilde D_z$ повторно, получаем

$$\tilde D_z^{(2)}\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]\overset{\text{def}}{=}\tilde D_z\left[\tilde D_z\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]\right]=$$

$$=\frac{2!}{2\pi i}\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma+1}d\tau\int_\Gamma\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-u)^3}d\eta+\frac{2!}{2\pi i}\int_{\tau_0}^{1}\tau^{\gamma+1}d\tau\int_\Gamma\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-u)^3}d\eta.$$

Продолжая указанный процесс, приходим к общей формуле

$$\tilde D_z^{(n)}\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]=\frac{n!}{2\pi i}\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma+n-1}d\tau\int_\Gamma\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-u)^{n+1}}d\eta+\frac{n!}{2\pi i}\int_{\tau_0}^{1}\tau^{\gamma+n-1}d\tau\int_\Gamma\frac{\varphi(\eta)}{(\eta-u)^{n+1}}d\eta\quad(n\in\mathbb{N}),$$

справедливость которой устанавливается индукцией по n.

Теорема 3. **Пусть плотность интеграла (1) определена и аналитична в замкнутом единичном круге $\overline{K}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\le 1\}$. Тогда в области K^- интеграл (1) разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся обобщённый степенной ряд**

$$F_{\gamma,z_0}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}b_{mn}(\tau_0)(z-z_0)^m, \qquad (4)$$

где $b_{mn}(\tau_0)=\dfrac{\varphi^{(n)}(0)\tau_0^{\gamma+m}z_0^{n-m}}{m!(n-m)!(\gamma+m)}$, **который можно любое число раз почленно «дифференцировать» обобщённой производной $\tilde{D}_z$ аналогично правилу дифференцирования по z обычных степенных рядов:**

$$\tilde{D}_z^{(k)}\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]=\sum_{n=k}^{+\infty}\sum_{m=k}^{n}m(m-1)\cdots(m-k+1)b_{mn}(\tau_0)(z-z_0)^{m-k}\quad(k\in\mathbb{N}).$$

▶ Выберем $\varepsilon>0$, так, чтобы функция $\varphi(z)$ была аналитической в круге $K_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1+\varepsilon\}$, и разложим её там в ряд Маклорена

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, \qquad (5)$$

где $a_n(\tau)=\dfrac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$, $n\in\mathbb{N}_0$.

Обозначим $M=\max\limits_{z\in K_\varepsilon}|\varphi(z)|$. В силу неравенств Коши для коэффициентов степенного ряда имеем $|a_n|\le A_n\overset{\text{def}}{=}\dfrac{M}{(1+\varepsilon)^n}$ $(n\in\mathbb{N})$. Отсюда вытекает, что в круге $\overline{K}$ ряд (5) мажорируется сходящимся (предельный признак Даламбера) числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}A_n$ и, следовательно (достаточный признак Вейерштрасса), сходится равномерно и абсолютно. Заметим, что при этом оказывается сходящимся (предельный признак Даламбера) и ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty}nA_n. \qquad (6)$$

Обратимся к формуле (2). Учитывая, что внутренний интеграл является в рассматриваемом случае интегралом Коши и, следовательно, $F^+(u)=\varphi(u)$, $F^-(u)\equiv 0$, формула (2) принимает вид $F_{\gamma,z_0}(z)=\int\limits_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}\varphi(u)d\tau$, или, с учётом (5),

$$F_{\gamma,z_0}(z)=\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nu^n\right)d\tau. \qquad (7)$$

Отметим, что в правой части формулы (7) можно перейти к почленному интегрированию. Действительно, во-первых, из сходимости ряда (5) в круге $\overline{K}$ следует равномерная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$, так как в (7) $|u|<1$. Кроме того, интегрирование с весом $\tau^{\gamma-1}$ не ухудшает сходимости ряда – это вытекает из оценки произвольного слагаемого $S_n^+ = \int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma-1} a_n u^n d\tau$:

$$\left|S_n^+\right| \le \int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma-1} |a_n| |u|^n d\tau < \int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma-1} A_n d\tau = \frac{1}{\gamma} A_n \tau_0^{\gamma} < \frac{1}{\gamma} A_n . \qquad (8)$$

Таким образом, всюду в области K^- интеграл (1) разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся функциональный ряд $F_{\gamma,z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^+ =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma-1} u^n d\tau$, или, что то же,

$$F_{\gamma,z_0}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma-1} \left(z_0 + \tau(z - z_0)\right)^n d\tau . \qquad (9)$$

Сходимость данного ряда в силу достаточного признака Вейерштрасса непосредственно следует из оценки (8).

Слагаемые S_n^+ по-прежнему будем называть положительными составляющими интеграла (1). В области аналитичности K положительные составляющие обращаются в полиномы, а составленный из них ряд (9) при значении $\tau_0 = 1$ – в обычный равномерно и абсолютно сходящийся степенной ряд.

Рассмотрим теперь вопрос о представимости ряда (9) по типу степенного ряда. Заметим, что вид подынтегрального выражения в правой части равенства (9) указывает на то, что этот ряд из интегралов удобнее всего представить в виде разложения функции $F_{\gamma,z_0}(z)$ в «степенной ряд» по степеням разности $z - z_0$. Преобразуем общий член ряда (9):

$$\int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma-1} \left(z_0 + \tau(z - z_0)\right)^n d\tau = \int_0^{\tau_0} \tau^{\gamma-1} \left(\sum_{m=0}^{n} C_n^m z_0^{n-m} \tau^m (z - z_0)^m \right) d\tau =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{\tau_0^{\gamma+m} z_0^{n-m}}{\gamma + m} (z - z_0)^m .$$

Следовательно, $F_{\gamma,z_0}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{n! \tau_0^{\gamma+m} z_0^{n-m}}{m!(n-m)!(\gamma+m)} (z - z_0)^m$ или

$$F_{\gamma,z_0}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\varphi^{(n)}(0)\tau_0^{\gamma+m}z_0^{n-m}}{m!(n-m)!(\gamma+m)}(z-z_0)^m.$$

Обозначая $b_{mn}(\tau_0)=\dfrac{\varphi^{(n)}(0)\tau_0^{\gamma+m}z_0^{n-m}}{m!(n-m)!(\gamma+m)}$, получаем представление (4) интеграла (1) равномерно и абсолютно сходящимся обобщённым степенным рядом в области K^-.

Отметим, что его «коэффициенты» – функции $b_{mn}(\tau_0)$ – являются квазиконстантами оператора $\tilde{D}_z$. В области K они обращаются в обычные константы $b_{mn}(1)=\dfrac{\varphi^{(n)}(0)z_0^{n-m}}{m!(n-m)!(\gamma+m)}$.

Продифференцируем теперь обе части равенства (4) обобщённой производной $\tilde{D}_z$. При этом будем вносить в правой части оператор под знак суммирования (до тех пор, пока не будет установлена равномерная сходимость образуемого в итоге ряда, эта операция носит формальный характер). Получим $\tilde{D}_z\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\tilde{D}_z\left[b_{mn}(\tau_0)(z-z_0)^m\right]$. Далее, учитывая правила действия дифференциальными операторами на произведение, имеем

$$\tilde{D}_z\left[b_{mn}(\tau_0)(z-z_0)^m\right]=b_{mn}(\tau_0)\tilde{D}_z\left[(z-z_0)^m\right]=b_{mn}(\tau_0)\frac{\partial(z-z_0)^m}{\partial z}=mb_{mn}(\tau_0)(z-z_0)^{m-1},$$

а, следовательно,

$$\tilde{D}_z\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{n}mb_{mn}(\tau_0)(z-z_0)^{m-1}. \qquad (10)$$

Покажем равномерную сходимость ряда (10). Применяя оператор $\tilde{D}_z$ к обеим частям (7), получаем

$$\tilde{D}_z\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]=\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}\tilde{D}_z\left[\sum_{n=0}^{+\infty}a_nu^n\right]d\tau. \qquad (11)$$

Вычисляя произвольное слагаемое из правой части равенства (11), будем иметь $\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}\tilde{D}_z\left[a_nu^n\right]d\tau=\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma-1}a_n\frac{\partial u^n}{\partial z}d\tau=na_n\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma}u^{n-1}d\tau$. Произведём оценку полученного выражения:

$$\left|na_n\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma}u^{n-1}d\tau\right|\le n|a_n|\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma}|u|^{n-1}d\tau<nA_n\int_0^{\tau_0}\tau^{\gamma}d\tau=\frac{1}{\gamma+1}nA_n\tau_0^{\gamma+1}\le\frac{1}{\gamma+1}nA_n.$$

Отсюда, в силу сходимости числового ряда (6), ряд (11) и, следовательно, ряд (10) сходятся равномерно и абсолютно.

Итак, установлено, что обобщённый степенной ряд (4) можно почленно «дифференцировать» обобщённой производной $\tilde{D}_z$, причём из формулы (10) следует, что эта операция аналогична правилу дифференцирования по z обычных степенных рядов.

Аналогичным образом, как и в §6, можно показать, что ряд (4) можно «дифференцировать» обобщённой производной $\tilde{D}_z$ любое число раз. ◀

Перейдём теперь к получению так называемого обобщённого уравнения Коши-Римана для интеграла (1). Так как в области аналитичности тождественно выполняется классическое уравнение Коши-Римана $\left(\dfrac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial \bar{z}}=0\right)$, то целесообразным будет рассмотреть вопрос об установлении соответствующей аналогии для исследуемого интеграла (1) в области K^-, т.е. получить такое дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, которому функции, определяемые интегралом (1), удовлетворяют в области неаналитичности K^-. Ясно, что в области аналитичности K оно должно быть эквивалентно условию $\dfrac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial \bar{z}}=0$.

Теорема 4. **Функции, представимые интегралом (1), в области K^- удовлетворяют обобщённому уравнению Коши-Римана**

$$(z-z_0)\frac{\partial^2 F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial z\,\partial \bar{z}}+(\bar{z}-\bar{z}_0)\frac{\partial^2 F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial \bar{z}^2}+(\gamma+1)\frac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial \bar{z}}=0. \qquad (12)$$

▶ Если $z\in K$, то $F_{\gamma,z_0}(z)=L^{(-1)}_{\gamma,z_0}\left[F^+(z)\right]$. А тогда, действуя на обе части этого равенства дифференциальным оператором L_{γ,z_0}, получаем $\gamma F_{\gamma,z_0}(z)+$ $+(z-z_0)\dfrac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial z}=F^+(z)$.

Пусть теперь $z\in K^-$. Покажем, что в этом случае $\gamma F_{\gamma,z_0}(z)+$ $+(z-z_0)\dfrac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial z}+(\bar{z}-\bar{z}_0)\dfrac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial \bar{z}}=F^-(z)$, или, короче, что

$$\gamma F_{\gamma,z_0}(z)+P_*\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]=F^-(z), \qquad (13)$$

где $P_*=(z-z_0)\dfrac{\partial}{\partial z}+(\bar{z}-\bar{z}_0)\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ – оператор, обладающий специфическими свойствами (см. §3) $P_*[z-z_0]=z-z_0$ и $P_*\left[\dfrac{z-z_0}{|z-z_0|}\right]=0$ [10], а значит, в силу правила

[10] Кроме того, не трудно показать, что $P_*\left[\dfrac{z|z-z_0|}{z-z_0}\right]=|z-z_0|$.

действия дифференциальными операторами на сложную функцию для любой дифференцируемой функции вида $f = f\left(\dfrac{z - z_0}{|z - z_0|}\right)$ имеем

$$P_*[f] \equiv 0. \tag{14}$$

Производя в равенстве (2) замену параметра τ на параметр t по формуле $\tau = \dfrac{t}{|z - z_0|} - \dfrac{z_0}{z - z_0}$ и учитывая, что при $\tau = 0$ имеем $t = t_1 \overset{\text{def}}{=} \dfrac{z_0|z - z_0|}{z - z_0}$, при $\tau = \tau_0$ $t = t_2 \overset{\text{def}}{=} i\,\mathrm{Im}\dfrac{z_0|z - z_0|}{z - z_0} + \sqrt{\left(\mathrm{Re}\dfrac{z_0|z - z_0|}{z - z_0}\right)^2 + 1 - |z_0|^2}$, при $\tau = 1$ $t = t_3 \overset{\text{def}}{=} \dfrac{z|z - z_0|}{z - z_0}$, а также, что $d\tau = \dfrac{dt}{|z - z_0|}$, перепишем (2) в виде

$$F_{\gamma, z_0}(z) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{t}{|z - z_0|} - \frac{z_0}{z - z_0}\right)^{\gamma - 1} F^+\left(t\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\right)\frac{dt}{|z - z_0|} +$$

$$+ \int_{t_2}^{t_3} \left(\frac{t}{|z - z_0|} - \frac{z_0}{z - z_0}\right)^{\gamma - 1} F^-\left(t\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\right)\frac{dt}{|z - z_0|},$$

откуда

$$|z - z_0|^\gamma F_{\gamma, z_0}(z) = \int_{t_1}^{t_2} \left(t - \frac{z_0|z - z_0|}{z - z_0}\right)^{\gamma - 1} F^+\left(t\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\right)dt +$$

$$+ \int_{t_2}^{t_3} \left(t - \frac{z_0|z - z_0|}{z - z_0}\right)^{\gamma - 1} F^-\left(t\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\right)dt. \tag{15}$$

Действуя на обе части равенства (15) оператором P_*, получаем

$$|z - z_0|^\gamma P_*\left[F_{\gamma, z_0}(z)\right] + F_{\gamma, z_0}(z) P_*\left[|z - z_0|^\gamma\right] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} P_*\left[\left(t - \frac{z_0|z - z_0|}{z - z_0}\right)^{\gamma - 1} F^+\left(t\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\right)\right]dt +$$

$$+ P_*[t_2]\left(t_2 - \frac{z_0|z - z_0|}{z - z_0}\right)^{\gamma - 1} F^+\left(t_2\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\right) - P_*[t_1]\left(t_1 - \frac{z_0|z - z_0|}{z - z_0}\right)^{\gamma - 1} F^+\left(t_1\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\right) +$$

$$+ \int_{t_2}^{t_3} P_*\left[\left(t - \frac{z_0|z - z_0|}{z - z_0}\right)^{\gamma - 1} F^-\left(t\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\right)\right]dt + P_*[t_3]\left(t_3 - \frac{z_0|z - z_0|}{z - z_0}\right)^{\gamma - 1} F^-\left(t_3\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\right) -$$

$$- P_*[t_2]\left(t_2 - \frac{z_0|z - z_0|}{z - z_0}\right)^{\gamma - 1} F^-\left(t_2\frac{z - z_0}{|z - z_0|}\right).$$

Преобразуем это равенство. Его левая часть с учётом того, что $P_*\left[|z-z_0|^\gamma\right]=\gamma|z-z_0|^\gamma$ принимает вид $\gamma|z-z_0|^\gamma F_{\gamma,z_0}(z)+|z-z_0|^\gamma P_*\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]$. В правой части все слагаемые кроме пятого в силу свойства (14) равны нулю, а пятое слагаемое, с учётом равенства $P_*[t_3]=P_*\left[\frac{z|z-z_0|}{z-z_0}\right]=|z-z_0|$ (см. §3), а также того, что $t_3-\frac{z_0|z-z_0|}{z-z_0}=|z-z_0|$ и $t_3\cdot\frac{z-z_0}{|z-z_0|}=z$, приводится к виду $|z-z_0||z-z_0|^{\gamma-1}F^-(z)$. Таким образом, будем иметь

$$\gamma|z-z_0|^\gamma F_{\gamma,z_0}(z)+|z-z_0|^\gamma P_*\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]=|z-z_0|^\gamma F^-(z)$$

или, что то же, $\gamma F_{\gamma,z_0}(z)+P_*\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]=F^-(z)$.

Дифференцируя теперь на обе части этого равенства формальной производной по $\overline{z}$ и учитывая аналитичность интеграла типа Коши $F^-(z)$, получаем уравнение $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\gamma F_{\gamma,z_0}(z)+P_*\left[F_{\gamma,z_0}(z)\right]\right)=0$, которое путём несложных преобразований приобретает вид (12). ◀

Следствие. **В частном случае, когда плотность $\varphi(z)$ интеграла (1) является кроме того функцией, аналитической в круге K, интеграл Коши $F^-(z)\equiv 0$ и, следовательно, – согласно формуле (13) – интеграл $F_{\gamma,z_0}(z)$ всюду в области K^- удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка**

$$\gamma F_{\gamma,z_0}(z)+(z-z_0)\frac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial z}+(\overline{z}-\overline{z}_0)\frac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial\overline{z}}=0.$$

Теперь проведём исследование квазигармонических свойств действительной и мнимой частей интеграла (1) в области K^-.

Сначала докажем следующую теорему.

Теорема 5. **Действительная и мнимая части интеграла (1) в области K^- удовлетворяют системе двух дифференциальных уравнений с частными производными**

$$\begin{cases}(\gamma+1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(x-x_0)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(y-y_0)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}= \\ \qquad =(\gamma+1)\dfrac{\partial v}{\partial y}+(x-x_0)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+(y-y_0)\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ (\gamma+1)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x-x_0)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(y-y_0)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}= \\ \qquad =-\left((\gamma+1)\dfrac{\partial v}{\partial x}+(x-x_0)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(y-y_0)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)\end{cases}. \qquad \textbf{(16)}$$

▶ Представим обобщённое уравнение Коши-Римана (12) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\gamma F_{\gamma,z_0}(z)+(z-z_0)\frac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial z}+(\bar{z}-\bar{z}_0)\frac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial \bar{z}}\right)=0,$$

что эквивалентно системе двух уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\left(\gamma F_{\gamma,z_0}(z)+(z-z_0)\dfrac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial z}+(\bar{z}-\bar{z}_0)\dfrac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial \bar{z}}\right)= \\ \qquad =\dfrac{\partial}{\partial y}\mathrm{Im}\left(\gamma F_{\gamma,z_0}(z)+(z-z_0)\dfrac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial z}+(\bar{z}-\bar{z}_0)\dfrac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial \bar{z}}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\left(\gamma F_{\gamma,z_0}(z)+(z-z_0)\dfrac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial z}+(\bar{z}-\bar{z}_0)\dfrac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial \bar{z}}\right)= \\ \qquad =-\dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\left(\gamma F_{\gamma,z_0}(z)+(z-z_0)\dfrac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial z}+(\bar{z}-\bar{z}_0)\dfrac{\partial F_{\gamma,z_0}(z)}{\partial \bar{z}}\right)\end{cases},$$

откуда при переходе от формальных производных к частным, получаем систему дифференциальных соотношений (16). ◀

Если ввести операторные обозначения

$$\hat{P}_x=(\gamma+1)\frac{\partial}{\partial x}+(x-x_0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(y-y_0)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y},$$

$$\hat{P}_y=(\gamma+1)\frac{\partial}{\partial y}+(x-x_0)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+(y-y_0)\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

то система (16) может быть записана в виде

$$\begin{cases}\hat{P}_x[u]=\hat{P}_y[v] \\ \hat{P}_y[u]=-\hat{P}_x[v]\end{cases}. \qquad (16')$$

Систему (16) (или (16')) будем называть обобщёнными условиями Коши-Римана), а пару дважды непрерывно дифференцируемых функций действительных переменных x и y, связанных между собой этими условиями, – обобщённо-сопряжёнными функциями. Итак, в области K^- действительная и мнимая части интеграла (1) являются обобщённо-сопряжёнными функциями.

Теорема 6. **Действительная $u(x,y)=\mathrm{Re}\,F_{\gamma,z_0}(z)$ и мнимая $v(x,y)=\mathrm{Im}\,F_{\gamma,z_0}(z)$ части интеграла (1) в области K^- удовлетворяют дифференциальным уравнениям третьего порядка с частными производными**

$$(x-x_0)\frac{\partial \Delta u}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial \Delta u}{\partial y}+(\gamma+2)\Delta u=0, \qquad (17)$$

$$(x-x_0)\frac{\partial \Delta v}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial \Delta v}{\partial y}+(\gamma+2)\Delta v=0, \qquad (18)$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ **– оператора Лапласа.**

▶ Дифференцируя первое уравнение системы (16) по x, а второе – по y и складывая полученные соотношения, приходим к уравнению (17) для действительной части интеграла (1) – функции $u(x,y)$.

Разность продифференцированного по y первого и по x второго уравнений системы (16) даёт в результате уравнение (18) для функции $v(x,y)$ – мнимой части интеграла (1). ◀

Таким образом, действительная и мнимая части интеграла (1) удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению третьего порядка с частными производными. Это уравнение по-прежнему будет называть обобщённым уравнением Лапласа, а удовлетворяющие ему функции – квазигармоническими. Следовательно, действительная и мнимая части интеграла (1) в области K^- являются квазигармоническими функциями. А т.к. они там являются обобщённо-сопряжёнными, то в области K^- действительная и мнимая части интеграла (1) представляют собой обобщённо-сопряжённые квазигармонические функции.

§8. Об одном операторном аналоге интеграла типа Коши специального вида для выпуклых областей

Введём в рассмотрение интеграл

$$F_{z_0}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 d\tau \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\tau,\eta)}{\eta - u} d\eta, \qquad (1)$$

где $u = \tau z + (1-\tau)z_0$, z_0 – произвольная фиксированная точка из определяющей области – единичного круга $K = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$, плотность $\varphi(\tau,\eta)$ есть произвольная, определённая на топологическом произведении $[0;1]\times\Gamma$ $\left(\Gamma = \{\eta \in \mathbb{C}: |\eta| = 1\}\right)$, функция, непрерывная по τ и удовлетворяющая по η условию Гёльдера $|\varphi(\tau,\eta) - \varphi(\tau,\eta_0)| < M|\eta - \eta_0|^\nu$, причём константы $M > 0$ и ν $(0 < \nu \le 1)$ не зависят от τ.

Заметим, что при этих ограничениях плотность $\varphi(\tau,\eta)$ является функцией, непрерывной по совокупности своих переменных.

Отметим, что интеграл (1) является обобщением интеграла (1) из §7. Действительно, он совпадает с последним в том случае, если плотность $\varphi(\tau,\eta)$ имеет вид $\varphi(\tau,\eta) = \tau^{\gamma-1}\varphi(\eta)$ (здесь предполагается $\gamma \ge 1$).

Рассмотрим вопрос об аналитичности и непрерывности интеграла (1).

Теорема 1. **Интеграл (1) является функцией, аналитической в круге K.**

▶ Справедливость этого свойства базируется на том факте, что всюду в K тождественно при всех τ выполняется неравенство $|u|<1$, а также имеет место равенство

$$\frac{F_{z_0}(z+\Delta z)-F_{z_0}(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \tau d\tau \int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\tau,\eta)}{\big(\eta-\tau(z+\Delta z)-(1-\tau)z_0\big)(\eta-u)}d\eta\ ^{11)}.$$

Переходя в этом равенстве (разумеется, считая в нём Δz достаточно малым, чтобы точка $(z+\Delta z)\in K$) к пределу $\Delta z\to 0$ под знаком интеграла (обоснование такого перехода основано на ограниченности подынтегральной функции), получаем, что для $z\in K$ существует конечный предел

$$F_{z_0}'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F_{z_0}(z+\Delta z)-F_{z_0}(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \tau d\tau \int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\tau,\eta)}{(\eta-u)^2}d\eta, \qquad (2)$$

т.е. функция $F_{z_0}(z)$ является аналитической в круге K . ◀

Отметим, что на основании формулы (2) индукцией по n несложно установить и общую формулу

$$F_{z_0}^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_0^1 \tau^n d\tau \int_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\tau,\eta)}{(\eta-u)^{n+1}}d\eta \quad (n\in\mathbb{N}). \qquad (3)$$

Исследование поведения интеграла (1) в области $K^-=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|>1\}$ начнём с установления для него формулы перехода от кратного интегрирования к повторному. Обусловлено это тем, что для любой точки $z\in K^-$ величина $|u|$, в зависимости от значений параметра τ, может быть и больше, и меньше, и равна единице.

Рассматривая равенство $|u|=1$ как уравнение относительно τ (фиксируя z) и учитывая, что $|u|^2=u\cdot\bar{u}=\big(\tau z+(1-\tau)z_0\big)\cdot\big(\tau\bar{z}+(1-\tau)\bar{z}_0\big)$, будем иметь $\big(\tau(z-z_0)+z_0\big)\big(\tau(\bar{z}-\bar{z}_0)+\bar{z}_0\big)=1$, или, что то же, $(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)\tau^2+$ $+\big((z-z_0)\bar{z}_0+(\bar{z}-\bar{z}_0)z_0\big)\tau+z_0\bar{z}_0-1=0$, откуда имеем $\tau^2+\left(\frac{z_0}{z-z_0}-\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right)\tau+$ $+\frac{|z_0|^2-1}{|z-z_0|^2}=0$, или $\tau^2+2\left(\operatorname{Re}\frac{z_0}{z-z_0}\right)\tau+\frac{|z_0|^2-1}{|z-z_0|^2}=0$. Отсюда получаем, что в интервале $(0;1)$ существует единственное значение параметра τ

[11] Подробное доказательство этого свойства мало отличается от проведённого в §7 доказательства аналогичного свойства для соответствующего интеграла.

$$\tau_0 = \sqrt{\left(\operatorname{Re}\frac{z_0}{z-z_0}\right)^2 + \frac{1-|z_0|^2}{|z-z_0|^2}} - \operatorname{Re}\frac{z_0}{z-z_0}, \qquad (4)$$

удовлетворяющее уравнению $|u|=1$.

Пусть теперь z – произвольная (уже не фиксированная) точка области K^-. Формула (4) показывает, что в K^- функция $\tau_0 = \tau_0(z)$ представляет собой непрерывную, любое число раз непрерывно дифференцируемую в вещественном смысле[12)], но неаналитическую функцию.

Введём обозначения:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\tau,\eta)}{\eta-u}d\eta = \begin{cases}\tilde{F}^+(\tau,\eta), & |u|<1\\ \tilde{F}^-(\tau,\eta), & |u|>1\end{cases},$$

а при $u = u_0 \overset{\text{def}}{=} \tau_0 z + (1-\tau_0)z_0$ интеграл $\tilde{F}(\tau,u_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{|\eta|=1}\frac{\varphi(\tau,\eta)}{\eta-u_0}d\eta$ будем понимать как особый в смысле главного значения по Коши (для гарантии его существования и потребовалось от плотности $\varphi(\tau,\eta)$ выполнение условия Гёльдера).

Учитывая ограниченность особого интеграла и то обстоятельство, что (при фиксированном $z \in K^-$) лебегова мера множества $E = \{\tau \in [0;1]: |u|=1\}$ равна нулю, заключаем, что всюду в области K^- интеграл (1) выражается формулой

$$F_{z_0}(z) = \int\limits_0^{\tau_0}\tilde{F}^+(\tau,u)d\tau + \int\limits_{\tau_0}^1\tilde{F}^-(\tau,u)d\tau. \qquad (5)$$

Теорема 2. **Интеграл (1) является функцией, непрерывной на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.**

▶ Справедливость этого свойства основана на том, что функции $\tilde{F}^+(\tau,u)$ и $\tilde{F}^-(\tau,u)$ являются аналитическими по u и, кроме того, интеграл (1) можно определить формулой (5) всюду на комплексной плоскости, если ввести для τ_0 доопределение (по непрерывности), считая в $\bar{K}$ $\tau_0 \equiv 1$ (напомним, что $\bar{K} = \{z \in \mathbb{C}: |z| \le 1\}$). ◀

Заметим, что указанный выше характер гладкости функции $\tau_0(z)$ позволяет сделать и более сильный вывод: определяемые интегралом (1) функции являются в области K^- любое число раз дифференцируемыми в вещественном смысле. Это обстоятельство свидетельствует о том, что в области K^- к интегралу (1) правомочно применять метод линейных дифференциальных операторов (§3), которым мы воспользуемся ниже.

[12)] См. сноску на стр. 37.

Наконец отметим, что неаналитичность функции $\tau_0(z)$ и конструкция формулы (5) свидетельствуют о том, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. **Интеграл (1) является неаналитической, вообще говоря, функцией в области K^-.**

Присутствие в формулировке теоремы 3 словосочетания «вообще говоря» обусловлено тем, что в отдельных частных случаях интеграл (1) обладает аналитичностью в некоторых подобластях области K^-.

Покажем теперь, что интеграл (1) в области K^- обладает определёнными квазианалитическими свойствами. Вскрытие этих свойств интеграла (1) начнём с установления его обобщённой производной, т.е. такого дифференциального оператора в формальных производных вида $P = a(z,\bar{z})\dfrac{\partial}{\partial z} + b(z,\bar{z})\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$, действие которым на интеграл (1) равносильно дифференцированию по z его ядра $\dfrac{1}{\eta - u}$.

Учитывая, что в области аналитичности (или при действии на аналитические выражения) этот оператор – обозначим его теперь символом $\tilde{D}_z$ – должен совпадать с обычной производной, заключаем, что он имеет вид

$$\tilde{D}_z = \frac{\partial}{\partial z} + b(z,\bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \tag{6}$$

где $b(z,\bar{z})$ – неизвестная пока функция. Ясно, что решение задачи сводится к определению этого коэффициента оператора $\tilde{D}_z$.

Обратимся к формуле (5). Внутренние интегралы в обоих слагаемых её правой части – $\hat{F}^+(\tau,u)$ и $\hat{F}^-(\tau,u)$ – после замены комплексного параметра η на действительный параметр t по формуле $\eta = \exp it$ превращаются в интегралы с постоянными пределами интегрирования и, следовательно, согласно обобщения на операторы рассматриваемого вида правила Лейбница

$$\tilde{D}_z\left[\int_p^q f(z,t)dt\right] = \int_p^q \tilde{D}_z\left[f(z,t)\right]dt + \tilde{D}_z[q]f(z,q) - \tilde{D}_z[p]f(z,p)$$

и свойства $\tilde{D}_z[\text{const}] \equiv 0$, при действии на эти интегралы оператором $\tilde{D}_z$ последний пройдёт за знак интеграла без образования дополнительных слагаемых. Более того, учитывая аналитичность ядра, заключаем, что действие оператором $\tilde{D}_z$ на подынтегральную функцию равносильно дифференцированию ядра интеграла по z. Осталось потребовать, чтобы и за знак внешних интегралов, стоящих в правой части формулы (5), оператор $\tilde{D}_z$ проходил без образования дополнительных слагаемых. Ясно, что для этого достаточна выполнимость лишь одного тождества

$$\tilde{D}_z[\tau_0] \equiv 0. \tag{7}$$

Перейдём к вычислительной стороне вопроса. Согласно общих свойств операторов рассматриваемого вида (они аналогичны обычным правилам диф-

ференцирования), будем иметь

$$\tilde{D}_z[\tau_0]=\tilde{D}_z\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z_0}{z-z_0}+\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{z_0}{z-z_0}+\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right)^2+\frac{1-|z_0|^2}{|z-z_0|^2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{z_0}{(z-z_0)^2}+\frac{\bar{z}_0 b(z,\bar{z})}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{z_0}{z-z_0}+\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right)\left(\frac{z_0}{(z-z_0)^2}+\frac{\bar{z}_0 b(z,\bar{z})}{(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}\right)+\frac{\left(1-|z_0|^2\right)\left(\bar{z}-\bar{z}_0+(z-z_0)b(z,\bar{z})\right)}{(z-z_0)^2(\bar{z}-\bar{z}_0)^2}\right),$$

где обозначено $A=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{z_0}{z-z_0}+\frac{\bar{z}_0}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right)^2+\frac{1-|z_0|^2}{|z-z_0|^2}}$.

Приравнивая полученное выражение к нулю и рассматривая это равенство как уравнение относительно $b(z,\bar{z})$, получим $A\left(z_0(\bar{z}-\bar{z}_0)^2+\bar{z}_0(z-z_0)^2 b(z,\bar{z})\right)-$

$$-\left(z_0(\bar{z}-\bar{z}_0)^2+\bar{z}_0(z-z_0)^2 b(z,\bar{z})\right)\mathrm{Re}\frac{z_0}{z-z_0}-\left(1-|z_0|^2\right)\left(\bar{z}-\bar{z}_0+(z-z_0)b(z,\bar{z})\right)=0,$$

откуда $b(z,\bar{z})=-\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}\cdot\frac{\left(A-\mathrm{Re}\frac{z_0}{z-z_0}\right)z_0(\bar{z}-\bar{z}_0)+|z_0|^2-1}{\left(A-\mathrm{Re}\frac{z_0}{z-z_0}\right)\bar{z}_0(z-z_0)+|z_0|^2-1}$, или, учитывая, что

$A-\mathrm{Re}\frac{z_0}{z-z_0}=\tau_0$, имеем $b(z,\bar{z})=-\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}\cdot\frac{\tau_0 z_0(\bar{z}-\bar{z}_0)+|z_0|^2-1}{\tau_0\bar{z}_0(z-z_0)+|z_0|^2-1}$.

Явный вид искомой обобщённой производной интеграла (1) найден

$$\tilde{D}_z=\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}\cdot\frac{\tau_0 z_0(\bar{z}-\bar{z}_0)+|z_0|^2-1}{\tau_0\bar{z}_0(z-z_0)+|z_0|^2-1}\cdot\frac{\partial}{\partial\bar{z}}. \qquad (8)$$

Итак, в области K^-

$$\tilde{D}_z\left[F_{z_0}(z)\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\tau_0}d\tau\int_{|\eta|=1}\varphi(\tau,\eta)\left(\frac{1}{\eta-u}\right)'_z d\eta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau_0}^{1}d\tau\int_{|\eta|=1}\varphi(\tau,\eta)\left(\frac{1}{\eta-u}\right)'_z d\eta. \qquad (9)$$

Учитывая, что в правой части формулы (9) пределы интегрирования остались те же самые, что и в формуле (5), заключаем, что оператор $\tilde{D}_z$ можно аналогичным образом применить к формуле (5) повторно и вообще любое число раз. Индукцией по n несложно установить следующую формулу

$$\tilde{D}_z^{(n)}\left[F_{z_0}(z)\right]\overset{\text{def}}{=}\underbrace{\tilde{D}_z\left[\tilde{D}_z\left[\ldots\tilde{D}_z}_{n\ \text{раз}}\left[F_{z_0}(z)\right]\ldots\right]\right]=$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\left(\int_0^{\tau_0} \tau^n d\tau \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\tau,\eta)}{(\eta-u)^{n+1}} d\eta + \int_{\tau_0}^{1} \tau^n d\tau \int_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\tau,\eta)}{(\eta-u)^{n+1}} d\eta \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

(напомним, что в первом слагаемом правой части формулы (10) $|u|<1$, а во втором $|u|>1$).

Таким образом, оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 4. **В области K^- интеграл (1) можно любое число раз «дифференцировать» обобщённой производной $\tilde{D}_z$; эта операция равносильна дифференцированию по z соответствующее число раз ядра интеграла.**

В области аналитичности K формула (10) совпадает с формулой (3).

Заметим, что для любых дифференцируемых функций вида $f = f(\tau_0)$ выполняется условие $\tilde{D}_z[f] \equiv 0$. Такие функции будем называть *квазиконстантами* оператора $\tilde{D}_z$. Несложно проверить, что если f – квазиконстанта, то аналогичным свойством будут обладать $\overline{f}$, $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ и, вообще, произвольная дифференцируемая функция вида $h = h(f, \overline{f})$.

Заканчивая рассмотрение вопроса об обобщённой производной, отметим, что при переходе от интеграла (1) §7 к интегралу (1) вид обобщённой производной остался неизменным.

Рассмотрим теперь вопрос о разложение интеграла (1) в обобщённый степенной ряд. Исследование будем проводить с помощью метода мажорирующей плотности [9], применённого ранее в §§5-7.

Пусть плотность $\varphi(\tau,z)$ интеграла (1) удовлетворяет дополнительному условию: при всех $0 \le \tau \le 1$ она является аналитической по z в замкнутом единичном круге $\overline{K} = \{z \in \mathbb{C}: |z| \le 1\}$.

Выбрав $\varepsilon > 0$ достаточно малым так, чтобы функция $\varphi(\tau,z)$ была аналитической в круге $K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1+\varepsilon\}$, разложим её в этом круге в ряд Маклорена:

$$\varphi(\tau,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\tau) z^n, \quad (11)$$

где $a_n(\tau) = \dfrac{\varphi_z^{(n)}(\tau,0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $M = \max\limits_{\substack{0\le\tau\le1 \\ |z|\le1+\varepsilon}} |\varphi(\tau,z)|$ или, что в силу принципа максимума модуля то же, $M = \max\limits_{\substack{0\le\tau\le1 \\ |z|=1+\varepsilon}} |\varphi(\tau,z)|$. В силу неравенств Коши для коэффициентов ряда Тейлора имеем

$$|a_n| \le A_n \overset{\text{def}}{=} \frac{M}{(1+\varepsilon)^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (12)$$

Отсюда вытекает, что в замкнутом круге $\overline{K}$ ряд (11) мажорируется сходя-

щимся (предельный признак Даламбера) числовым рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{13}$$

и, следовательно (достаточный признак Вейерштрасса), сходится там равномерно и в каждой точке данного круга абсолютно. Отметим также, что при этом оказывается сходящимся (предельный признак Даламбера) и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} nA_n \,. \tag{14}$$

Обратимся к формуле (5). Учитывая, что интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\eta|=1} \frac{\varphi(\tau,\eta)}{\eta - u} d\eta$ является в рассматриваемом случае интегралом Коши и, следовательно, $\tilde{F}^{+}(\tau,u) = \varphi(\tau,u)$, $\tilde{F}^{-}(\tau,u) \equiv 0$, формула (5) принимает вид $F_{z_0}(z) = \int\limits_0^{\tau_0} \varphi(\tau,u) d\tau$, или, с учётом (11),

$$F_{z_0}(z) = \int_0^{\tau_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\tau) u^n \right) d\tau \,. \tag{15}$$

Отметим, что в правой части формулы (15) можно перейти к почленному интегрированию. Действительно, во-первых, из сходимости ряда (11) в замкнутом круге $\overline{K}$ следует равномерная сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\tau) u^n \tag{16}$$

(напомним, что в (15) $|u| < 1|$). Во-вторых, интегрирование по τ в пределах от 0 до τ_0 не ухудшает сходимости ряда – это вытекает из оценки произвольного слагаемого $S_n^{+} = \int\limits_0^{\tau_0} a_n(\tau) u^n d\tau$:

$$\left| S_n^{+} \right| \le \int_0^{\tau_0} |a_n(\tau)| |u|^n d\tau < \int_0^{\tau_0} A_n d\tau = A_n \tau_0 < A_n \tag{17}$$

(это означает, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n^{+}$ мажорируется тем же числовым рядом (13), что и ряд (11)).

Таким образом, всюду в области K^{-} интеграл $F_{z_0}(z)$ разлагается в равномерно и абсолютно (в каждой точке) сходящийся функциональный ряд $F_{z_0}(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} S_n^{+} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int\limits_0^{\tau_0} a_n(\tau) u^n d\tau$, или, что то же,

$$F_{z_0}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\tau_0}a_n(\tau)\left(z_0+\tau(z-z_0)\right)^n d\tau. \qquad (18)$$

Слагаемые S_n^+ будем по-прежнему называть положительными составляющими интеграла $F_{z_0}(z)$. В области аналитичности K положительные составляющие обращаются в многочлены, а составленный из них ряд (ряд (18) при значении $\tau_0=1$) – в обычный равномерно и в каждой точке абсолютно сходящийся степенной ряд.

Рассмотрим теперь вопрос о представимости ряда (18) в виде некоторого степенного ряда. Заметим, что вид подынтегрального выражения в (18) указывает на то, что удобнее всего этот ряд из интегралов представить в виде разложения $F_{z_0}(z)$ в «степенной ряд» по степеням разности $z-z_0$. Преобразуем общий член ряда (18):

$$\int_0^{\tau_0}a_n(\tau)\left(z_0+\tau(z-z_0)\right)^n d\tau=\int_0^{\tau_0}a_n(\tau)\left(\sum_{m=0}^{n}C_n^m z_0^{n-m}\tau^m(z-z_0)^m\right)d\tau=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}z_0^{n-m}\left(\int_0^{\tau_0}a_n(\tau)\tau^m d\tau\right)(z-z_0)^m=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!z_0^{n-m}(z-z_0)^m}{m!(n-m)!}\int_0^{\tau_0}\frac{1}{n!}\varphi_\eta^{(n)}(\tau,\eta)\Big|_{\eta=0}\tau^m d\tau.$$

Следовательно, $F_{z_0}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{z_0^{n-m}(z-z_0)^m}{m!(n-m)!}\int_0^{\tau_0}\varphi_\eta^{(n)}(\tau,\eta)\Big|_{\eta=0}\tau^m d\tau$, или,

обозначая $\tilde{b}_{mn}(\tau_0)=\frac{z_0^{n-m}}{m!(n-m)!}\int_0^{\tau_0}\varphi_\eta^{(n)}(\tau,\eta)\Big|_{\eta=0}\tau^m d\tau$,

$$F_{z_0}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\tilde{b}_{mn}(\tau_0)(z-z_0)^m. \qquad (19)$$

Таким образом, в области K^- интеграл $F_{z_0}(z)$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся обобщённый степенной ряд (19). Отметим, что его «коэффициенты» – функции $\tilde{b}_{mn}(\tau_0)$ – являются квазиконстантами оператора $\tilde{D}_z$: $\tilde{D}_z\left[\tilde{b}_{mn}(\tau_0)\right]\equiv 0$. В области K они обращаются в обычные константы $\tilde{b}_{mn}(1)=$

$$=\frac{z_0^{n-m}}{m!(n-m)!}\int_0^1\varphi_\eta^{(n)}(\tau,\eta)\Big|_{\eta=0}\tau^m d\tau.$$

Обсудим теперь вопрос о «дифференцировании» ряда (19) обобщённой

производной $\tilde{D}_z$. Применяя оператор $\tilde{D}_z$ к обеим частям (19) и внося в правой части оператор за знак суммирования (разумеется, до тех пор, пока не будет установлена равномерная сходимость образуемого в итоге ряда, эта операция носит формальный характер), получим $\tilde{D}_z\left[F_{z_0}(z)\right]=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{m=0}^{n}\tilde{D}_z\left[\tilde{b}_{mn}(\tau_0)(z-z_0)^m\right]$. Далее, с учётом правила действия дифференциальными операторами на произведение $\tilde{D}_z[f_1\cdot f_2]=\tilde{D}_z[f_1]\cdot f_2+f_1\cdot\tilde{D}_z[f_2]$ имеем $\tilde{D}_z\left[\tilde{b}_{mn}(\tau_0)(z-z_0)^m\right]=\tilde{b}_{mn}(\tau_0)\times$

$\times\tilde{D}_z\left[(z-z_0)^m\right]=\tilde{b}_{mn}(\tau_0)\dfrac{\partial(z-z_0)^m}{\partial z}=m\tilde{b}_{mn}(\tau_0)(z-z_0)^{m-1}$ и, следовательно,

$$\tilde{D}_z\left[F_{z_0}(z)\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{n}m\tilde{b}_{mn}(\tau_0)(z-z_0)^{m-1}. \qquad (20)$$

Покажем равномерную сходимость ряда (20). Обратимся с этой целью к исходному виду ряда (19) – ряду (15). Применяя оператор $\tilde{D}_z$ к обеим частям (15), получаем

$$\tilde{D}_z\left[F_{z_0}(z)\right]=\int_0^{\tau_0}\tilde{D}_z\left[\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(\tau)u^n\right]d\tau. \qquad (21)$$

Вычислим произвольное слагаемое из правой части (21). Будем иметь $\int\limits_0^{\tau_0}\tilde{D}_z\left[a_n(\tau)u^n\right]d\tau=\int\limits_0^{\tau_0}a_n(\tau)\dfrac{\partial u^n}{\partial z}d\tau=n\int\limits_0^{\tau_0}a_n(\tau)\tau u^{n-1}d\tau$. Произведём оценку полученного выражения

$$\left|n\int_0^{\tau_0}a_n(\tau)\tau u^{n-1}d\tau\right|\le n\int_0^{\tau_0}|a_n(\tau)|\tau|u|^{n-1}d\tau<nA_n\int_0^{\tau_0}\tau\,d\tau=\frac{n}{2}A_n\tau_0^2\le\frac{1}{2}nA_n.$$

Отсюда, в силу сходимости числового ряда (14), ряд (21) и, следовательно, ряд (20) сходятся равномерно и в каждой точке абсолютно.

Итак, установлено, что обобщённый степенной ряд (19) можно почленно «дифференцировать» обобщённой производной $\tilde{D}_z$, причём, как показывает формула (20), эта операция аналогична правилу дифференцирования по z обычных степенных рядов. Нетрудно показать, что ряд (19) можно аналогичным образом дифференцировать обобщённой производной $\tilde{D}_z$ любое число раз, т.е. справедлива следующая теорема.

Теорема 5. **Пусть плотность $\varphi(\tau,z)$ интеграла (1) является аналитической в замкнутом единичном круге $\overline{K}=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}$. Тогда в области $K^-=\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$ интеграл (1) разлагается в равномерно и абсолютно**

сходящийся обобщённый степенной ряд (19), который можно любое число раз почленно «дифференцировать» обобщённой производной $\tilde{D}_z$ аналогично правилу дифференцирования по z обычных степенных рядов:

$$\tilde{D}_z^{(k)}\left[F_{z_0}(z)\right]=\sum_{n=k}^{+\infty}\sum_{m=k}^{n} m(m-1)\cdots(m-k+1)\tilde{b}_{mn}(\tau_0)(z-z_0)^{m-k}\quad(k\in\mathbb{N}).$$

В области аналитичности K интеграла (1) ряд (19) обращается в обычный степенной ряд, а правило действия на него оператором $\tilde{D}_z$ (здесь это уже обычная производная) – в стандартную формулу дифференцирования степенных рядов $F_{z_0}^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{+\infty}\sum_{m=k}^{n} m(m-1)\cdots(m-k+1)\tilde{b}_{mn}(1)(z-z_0)^{m-k}$, $k\in\mathbb{N}$.

Литература

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - СПб.: Лань, 2008.
2. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. - М.: Мир, 2006.
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. - СПб.: Лань, 2008.
4. Шабунин М.И., Сидоров Ю.В. Теория функций комплексного переменного. - М.: Физматлит, 2002.
5. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: Физматлит, 2001.
6. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. - М.: Высшая школа, 1999.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М.: Наука, 1977.
8. Баврин И.И. Операторы и интегральные представления. - М.: изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской, 1974.
9. Нелаев А.В. К теории операторных аналогов интеграла типа Коши. В сб. научных трудов «Комплексный анализ и его приложения». С. 53-96. Рукопись деп. в ВИНИТИ 11.05.1988г., № 3728-В88.
10. Нелаев А.В. О применении метода линейных дифференциальных операторов в теории функций комплексных переменных. Республиканский сб. трудов «Математический анализ и теория функций», вып. 4. - М.: изд-во МОПИ, 1974, с. 56-64.
11. Нелаев А.В. Интегралы и операторные методы /Методическая разработка по спецкурсу. - М.: изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской (ротапринт), 1987. – 32 с.
12. Нелаев А.В. Интегралы и квазианалитические функции /Методическая разработка по спецкурсу. - М.: изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской (ротапринт), 1987. – 40 с.
13. Нелаев А.В. Интегралы и их применения /Методическая разработка по спецкурсу. - М.: изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской (ротапринт), 1987. – 32 с.
14. Нелаев А.В. Операторные аналоги интеграла типа Коши /Методическая разработка. - М.: изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской (ротапринт), 1990. – 48 с.

КОЛЯГИН Сергей Юрьевич
БЫКОВА Ольга Николаевна

Интеграл типа Коши и его операторные аналоги

Учебное пособие

Подписано в печать 10.03.2009 Формат 60x90/16
Усл.печ.л. 5 Тираж 500 экз. Заказ № 25

Отпечатано в типографии МПГУ
129164, г. Москва, ул. Кибальчича, дом 6, стр. 2