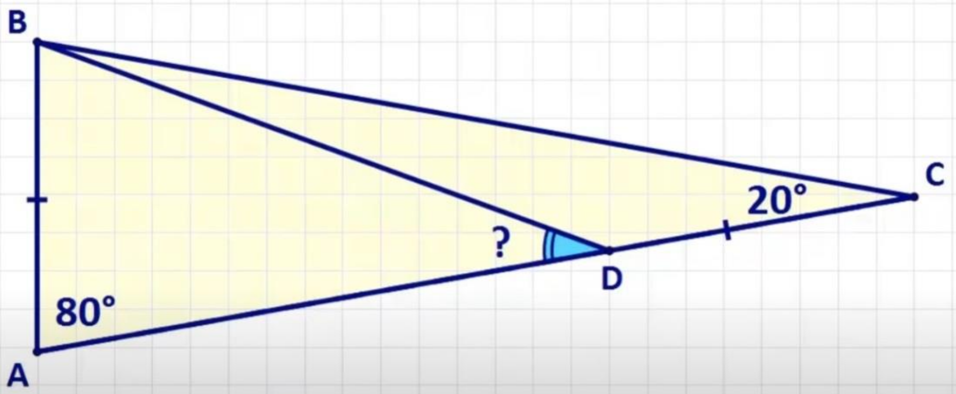
В треугольнике ABC ∠ACB=20°, ∠BAC=80°. Найдите угол ∠ADB на рисунке, если DC=AB.



Обозначим:

$$AB = DC = x$$

$$AD = y$$

$$DB = z$$

$$\angle ADB = \alpha$$

$$\angle DOC = \beta$$

$$(x + y) \times \sin(10^o) = \frac{x}{2}$$

По теореме синусов:

$$\frac{sin(20^0)}{sin(180^o - \alpha)} = \frac{z}{(x + y)}$$

$$\frac{sin(\alpha)}{sin(80^0)} = \frac{x}{z}$$

$$\begin{cases} 2(x + y) \times \sin(10^o) = x \\ z \times sin(\alpha) = sin(20^0) \times (x + y) \\ sin(\alpha) \times z = x \times sin(80^0) \end{cases}$$

Из этих уравнений мы можем найти соотношения между сторонами, между расстояниями.

Они являются следствиями, т. е. из них получаются различные тождества. Фактически здесь одно уравнение.

Для того чтобы найти углы, можно рассмотреть треугольник DBC:

$$(180^0 - \alpha) + \beta + 10^0 = 180^0$$

Это одно уравнение, в которое входят два неизвестных угла α и β.

Пусть точка M – середина стороны AB. Точка O – точка пересечения отрезков BD и CM.

$$L = OC$$

$$L' = MO$$

$$L + L' = (x + y) \times cos(10^0)$$

$$L \times sin(\beta) = x \times sin(\alpha)$$

$$2L' = x \times ctg(\beta)$$

Исключая L и L':

$$L = \frac{x \times sin(\alpha)}{sin(\beta)}$$

$$L' = \frac{x \times ctg(\beta)}{2}$$

$$L + L' = \frac{x \times sin(\alpha)}{sin(\beta)} + \frac{x \times ctg(\beta)}{2} = \frac{2 \times x \times sin(\alpha) + x \times cos(\beta)}{2sin(\beta)}$$

$$(x + y) \times cos(10^0) = \frac{2 \times x \times sin(\alpha) + x \times cos(\beta)}{2sin(\beta)}$$

$$2 \times sin(\beta) \times (x + y) \times cos(10^0) = x \times \left(2 \times sin(\alpha) + cos(\beta)\right)$$

Используем первое уравнение из системы:

$$2(x + y) \times \sin(10^o) = x$$

$$2 \times sin(\beta) \times (x + y) \times cos(10^0) \times \sin(10^o) = x \times \left(2 \times sin(\alpha) + cos(\beta)\right) \times \sin(10^o)$$

$$sin(\beta) \times x \times cos(10^0) = x \times \left(2 \times sin(\alpha) + cos(\beta)\right) \times \sin(10^o)$$

$$sin(\beta) \times cos(10^0) = \left(2 \times sin(\alpha) + cos(\beta)\right) \times \sin(10^o)$$

Это второе уравнение для определения неизвестных углов α и β.

Таким образом, имеем систему:

$$\begin{cases} (180^0 - \alpha) + \beta + 10^0 = 180^0 \\ sin(\beta) \times cos(10^0) = \left(2 \times sin(\alpha) + cos(\beta)\right) \times \sin(10^o) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta - \alpha + 10^0 = 0 \\ sin(\beta) \times cos(10^0) = \left(2 \times sin(\alpha) + cos(\beta)\right) \times \sin(10^o) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta - \alpha + 10^0 = 0 \\ sin(\beta) \times cos(10^0) - cos(\beta) \times \sin(10^o) = 2 \times sin(\alpha) \times \sin(10^o) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \alpha - 10^0 \\ sin(\beta) \times cos(10^0) = \left(2 \times sin(\alpha) + cos(\beta)\right) \times \sin(10^o) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta - \alpha + 10^0 = 0 \\ sin(\beta - 10^0) = 2 \times sin(\alpha) \times \sin(10^o) \end{cases}$$

$$sin(\alpha - 10^0) \times cos(10^0) = \left(2 \times sin(\alpha) + cos(\alpha - 10^0)\right) \times \sin(10^o)$$

$$2 \times tg(\alpha) = cos(s) + tg(\alpha) \times sin(s)$$

$$2 \times tg(\alpha) = \left(2 - sin(s)\right) + cos(s)$$

$$\begin{aligned} &sin(\alpha) \times cos(10^0) - cos(\alpha) \times sin(10^0) \\ &\qquad = (2 \times sin(\alpha) + [cos(10^0) \times cos(\alpha) + sin(10^0) \times sin(\alpha)]) \times \mathrm{tg}(10^o) \end{aligned}$$

$$tg(\alpha) \times cos(10^0) - sin(10^0) = (2 \times tg(\alpha) + [cos(10^0) + sin(10^0) \times tg(\alpha)]) \times \mathrm{tg}(10^o)$$

$$tg(\alpha) \times (cos(10^0) - 2 \times \mathrm{tg}(10^o) - sin(10^0) \times \mathrm{tg}(10^o)) = 2 \times sin(10^0)$$

$$tg(\alpha) = \frac{2 \times sin(10^0)}{(cos(10^0) - 2 \times \mathrm{tg}(10^o) - sin(10^0) \times \mathrm{tg}(10^o))}$$

$$\alpha = 30^0$$