

Тема III

Частично упорядоченные множества (I)

Разделы

- 1 **Предпорядки и порядки**
- 2 Особые элементы и основные свойства ч.у. множеств
- 3 Грани, изотонные отображения и порядковые идеалы
- 4 Операции над ч.у. множествами

Предпорядки: определение и примеры

Определение

Предпорядками называют рефлексивные (R) и транзитивные (T) однородные отношения.

Пример

Предпорядками, например, являются следующие отношения:

- 1 отношение делимости $|$ на множестве $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
- 2 отношение выводимости $\vdash$ в логике: если из логической формулы A выводится формула B , то пишут $A \vdash B$;
- 3 отношение предпочтения (например, по цене и полезности товара) в экономике.

Порядки

Определение

Рефлексивные (R), антисимметричные (AS) и транзитивные (T) однородные отношения называют отношениями *частичного порядка*.

Пример

Все предпорядки из предыдущего примера не являются частичными порядками:

- 1 для элементов $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ из $m \mid n$ и $n \mid m$ следует не $m = n$, а лишь $|m| = |n|$.
- 2 возможно $A \vdash B$ и $B \vdash A$, но $A \neq B$ (формулы A и B не совпадают как строки символов): например, для $A = x \supset y$ и $B = (\neg x \vee y) \& (z \vee \neg z)$;
- 3 ясно, что одинаковые и цену, и полезность могут иметь разные товары.

Порядки: два примера

- Отношение включения $\subseteq$ на совокупности $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$ подмножеств некоторого множества — **важнейший пример** частичного порядка. Говорят, что совокупность $\mathcal{A}$ *упорядочена по включению*.
- Диагональное отношение Δ на произвольном множестве можно рассматривать не только как эквивалентность, но и как **частичный порядок**. Множество с таким порядком называют *тривиально упорядоченным*.
- Отношение $\leq$ на множествах натуральных, целых, рациональных, действительных чисел.

Порядок из предпорядка $\rho \dots$

... можно построить, если отождествить такие элементы a и b , для которых одновременно и $a\rho b$ и $b\rho a$.

Теорема

Если $\preceq$ — предпорядок на множестве P , то

- ① бинарное отношение ε на P , определяемое условием

$$a\varepsilon b \Leftrightarrow a \preceq b \ \& \ b \preceq a$$

является **эквивалентностью**;

- ② бинарное отношение $\leq$ на фактормножестве P/ε , определяемое условием

$$[a]_\varepsilon \leq [b]_\varepsilon \Leftrightarrow a \preceq b,$$

является **частичным порядком**.

Порядок из предпорядка —

Доказательство

- 1 Согласно своему определению, отношение ε **приобретает свойство симметричности** (S) в дополнение к свойствам рефлексивности (R) и транзитивности (T), наследуемых от $\preceq$.
- 2 Свойства **рефлексивности** (R) и **транзитивности** (T) $\leq$ наследуются от отношения $\preceq$.
В силу свойства классов эквивалентности по ε , оно оказывается ещё и **антисимметричным** (AS).

Продолжаем рассматривать тот же...

Пример

- 1 $[n]_\varepsilon = \{n, -n\}$ и частичный порядок $\leq$ есть отношение делимости $|$ на фактормножестве $\{\mathbb{Z} \setminus \{0\}\}/\varepsilon$.
- 2 Если на множестве всех логических формул $\mathcal{A}$ ввести отношение $\simeq$ *дедуктивной эквивалентности* по правилу
$$A \vdash B \text{ и } B \vdash A \Leftrightarrow A \simeq B,$$
то $\mathcal{A}/\simeq$ — фактормножество классов дедуктивно эквивалентных формул, являющееся, более того, булевой алгеброй и называемой *алгеброй Линденбаума–Тарского* (символически L^*).
- 3 Ситуацию с отношением предпочтения в экономике оставляем для самостоятельного разбора.

Порядки: обозначения и термины

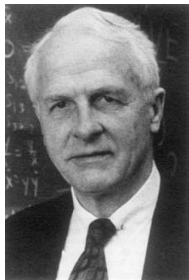
- Символы отношения частичного порядка: $\sqsubseteq, \leq, \preceq \dots$
- Если $a \sqsubseteq b$, то говорят, что a *предшествует* b , b *следует за* a , *содержит* a .
- *Интервал* (при $a \sqsubseteq b$): $[a, b] = \{x \mid a \sqsubseteq x \text{ \& } (x \sqsubseteq b)\}$.
- Если $[a, b] = \{a, b\}$, то говорят, что a *непосредственно предшествует* b и что b *непосредственно следует за* a или *покрывает*, *доминирует над* a (символически $a \prec b$).
- Элементы a и b *сравнимы*, если либо $a \sqsubseteq b$, либо $b \sqsubseteq a$, и *несравнимы* (символически $a \not\approx b$) в противном случае.
- Отношение *строгого порядка*: $x \sqsubset y \Leftrightarrow x \sqsubseteq y$ и $x \neq y$,
- *Двойственный порядок*: $x \sqsupseteq y \Leftrightarrow y \sqsubseteq x$ и аналогично для строгого порядка.

Частично упорядоченное множество

Определение

Пару $\mathfrak{P} = \langle P, \sqsubseteq \rangle$, где P — непустое множество, а $\sqsubseteq$ — частичный порядок на нём, называют *частично упорядоченным множеством* (сокращённо *ч.у. множеством*).

Понятие ч.у. множества введено Ф. Хаусдорфом в 1914 г., но развитие теории ч.у. множеств как самостоятельного раздела математики началось с работ Г. Биркгофа в 1930-х годах.



Гаррет Биркгоф (Garrett Birkhoff, 1911–1996)

— американский математик.

Работал во многих областях чистой и прикладной математики, заложил основы универсальной алгебры.

Частично упорядоченное множество

Ч.у. множество представляет собой пример особого типа алгебраической системы — *модели*. АС является моделью, если в ней отсутствуют операции на носителе, но имеются отношения на нём.

Любое множество можно превратить в частично упорядоченное, задав на нём некоторый порядок.

Например, на двухэлементном множестве $\{x, y\}$ можно построить 3 различных порядка:

тривиальный $x \approx y$, $x \sqsubseteq y$ и $y \sqsubseteq x$.

Частично упорядоченное множество: примеры —

- модели $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{N}, | \rangle$, $\langle B^n, \preceq \rangle$ и $\langle \mathcal{P}(\cdot), \subseteq \rangle$;
- совокупность лучей на прямой с отношением **включения**;
- совокупность $D(N)$ всех натуральных делителей N — ч.у. множество с упорядочением по **делимости**;
- для $A \neq \emptyset$ модель $\langle \mathcal{E}(A), \subseteq \rangle$ есть ч.у. множество, состоящее из разбиений множества A (имея в виду взаимно-однозначную связь между разбиениями множества и отношениями эквивалентности на нём); при этом говорят, что A **упорядоченно по измельчению**;
- множество конечных возрастающих последовательностей натуральных чисел, где

$$(a_1, \dots, a_k) \sqsubseteq (b_1, \dots, b_l)$$

означает, что $k \leq l$ и $a_i = b_i$ при $1 \leq i \leq k$.

Частично упорядоченное множество: производные

Если $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество, $Q \subseteq P$ и $\sqsubseteq|_Q$ — сужение отношения $\sqsubseteq$ на Q , то и $\langle Q, \sqsubseteq|_Q \rangle$ — ч.у. множество, называемое *ч.у. подмножеством* P .

Если на множестве P заданы порядки $\sqsubseteq_1$ и $\sqsubseteq_2$ и $\sqsubseteq_1 \subseteq \sqsubseteq_2$ (из $x \sqsubseteq_1 y$ следует $x \sqsubseteq_2 y$ для всех $x, y \in P$), то говорят, что *порядок $\sqsubseteq_1$ содержится в порядке $\sqsubseteq_2$* . При построении порядка, содержащего данный, говорят о *продолжении* последнего.

Например, тривиальный порядок на неоднородном множестве содержится в любом другом и может быть продолжен до него.

Локально конечные ч.у. множества

В зависимости от мощности P различают *конечные* и *бесконечные* ч.у. множества.

Частично упорядоченное множество, все интервалы которого конечны, называется *локально конечным*.

Например, ч.у. множество $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ бесконечно, но локально конечно, а ч.у. множество $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ — не локально конечное.

Утверждение

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — локально конечное ч.у. множество, и $x, y \in P$. Тогда $x \sqsubseteq y$, если и только если в P существуют такие элементы $z_0, \dots, z_n$ (для некоторого $n \in \mathbb{N}_0$), что $x = z_0$, $y = z_n$ и $z_i \leq z_{i+1}$ для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Доказательство

проводится индукцией по числу элементов n .

Линейно упорядоченные ч.у. множества

Определение

Если любые два элемента неединичного ч.у. множества P сравнимы, то оно называется *линейно упорядоченным* или *цепью*.

Определение

Пусть $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — линейно упорядоченные множества. Зададим на $P \times Q$ однородное отношение $\sqsubseteq$ следующим образом:

$$(p_1, q_1) \sqsubseteq (p_2, q_2) \Leftrightarrow (p_1 \sqsubset_P p_2) \vee ((p_1 = p_2) \& (q_1 \sqsubseteq_Q q_2)).$$

Оно называется отношением *лексикографического порядка*.

Ч.у. множество с лексикографическим порядком линейно упорядоченно. Доказательство элементарно.

Линейно упорядоченные ч.у. множества

- Для строгого линейного порядка — обозначение $<$.
- Непомеченную n -элементную цепь будем обозначать $\mathbf{n}$ (иногда $\underline{n}$). *Длина цепи* $\mathbf{n}$ есть число $n - 1$.
- Цепь $v_1 < \dots < v_n$ будем записывать как $[v_1, \dots, v_n]$. Обозначим $[n] = [1, \dots, n]$.
- Одноэлементное ч.у. множество $\mathbf{1}$ называют *тривиальным*.
- Цепь в ч.у. множестве называется *максимальной* или *насыщенной*, если её объединение с любым, не принадлежащим ей элементом, цепью не является. В ч.у. множестве $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ цепью будет, например, совокупность *некоторых* степеней простого числа, а $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — пример его максимальной цепи. B^n содержит $n!$ максимальных цепей.

Диаграммы Хассе

Для наглядного представления ч.у. множеств используют *диаграммы Хассе*.

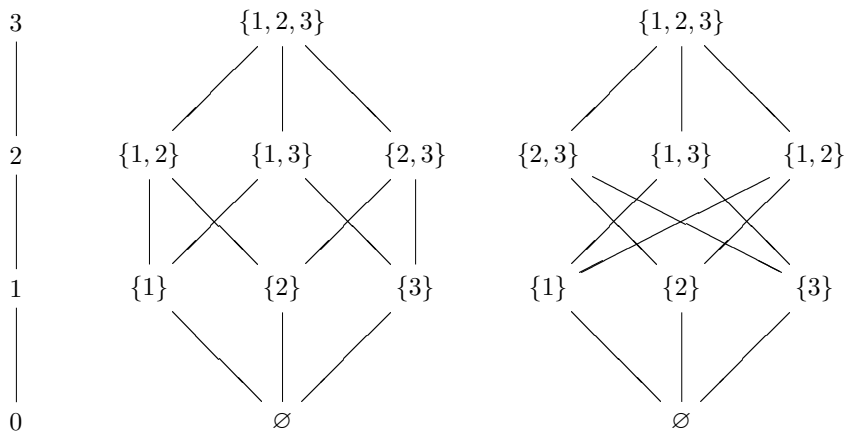


На них изображают элементы ч.у. множеств, и если элемент a предшествует элементу b , то a рисуют ниже b и соединяют их отрезком, если это предшествование непосредственное.

Диаграммы Хассе — не есть представления ч.у. множества в виде направленного графа.

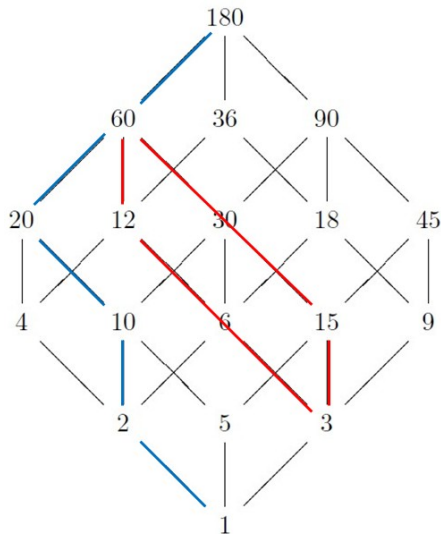
Хельмут Хассе (Helmut Hasse, 1898–1979) — немецкий математик, автор фундаментальных работ по алгебре и теории чисел.

Диаграммы Хассе: цепь 4 и булевой алгебры B^3



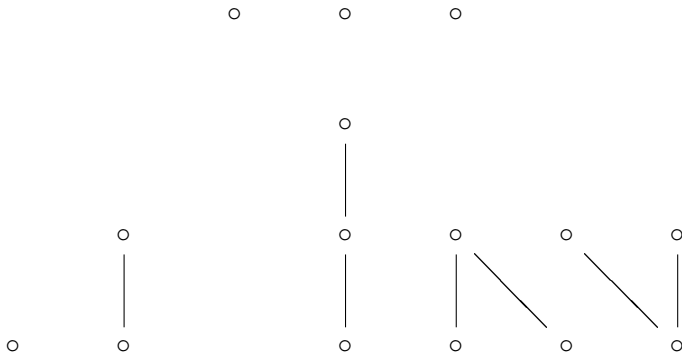
Для данного ч.у. множества обычно можно построить много сильно визуально отличающихся друг от друга диаграмм и поэтому, по возможности, их стараются рисовать *без самопересечений*

Диаграмма $D(180)$ всех делителей числа 180



Показаны: одна из **максимальных цепей** и **интервал** $[3, 60]$.

Диаграммы трёхэлементных ч.у. множеств



Диаграммы четырёхэлементных ч.у. множеств



1)



2)



3)



4)



5)



6)



7)



8)



9)



10)



11)



12)



13)



14)



15)



16)

Величины $h(n)$, n , $p(n)$ и $k(n)$

- $h(n)$ — число неизоморфных диаграмм,
- $p(n)$ — число помеченных частичных порядков,
- $k(n)$ — число предпорядков соответственно

на n -элементном множестве.

n	1	2	3	4	5	6	7
$h(n)$	1	2	5	16	63	318	2 045
$p(n)$	1	3	19	219	4 231	130 023	6 129 859
$k(n)$	1	3	29	355	6 942	209 527	9 535 241

Точных эффективных (не содержащих суммирования и не подразумевающих перебора всех или почти всех элементов) формул для них $h(n)$, $p(n)$ и $k(n)$ неизвестно и вряд ли они существуют.

Оценка числа помеченных частичных порядков

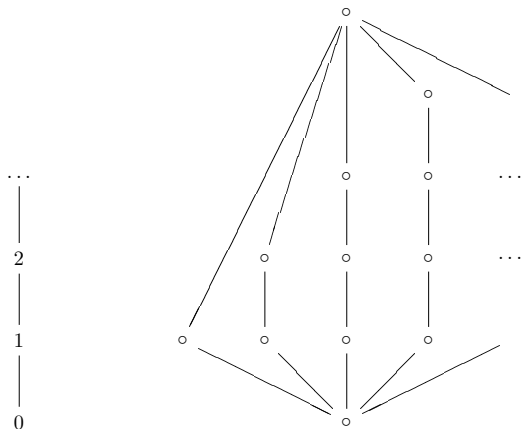
Величину $p(n)$ можно легко оценить снизу:

на некотором n -элементном множестве зададим частичный порядок так, что соответствующая диаграмма Хассе есть двудольный граф, а поскольку таких порядков не менее, чем $2^{(n/2)^2}$, $p(n) \geq 2^{n^2/4}$.

Доказано равенство $p(n) = 2^{n^2/4+3n/2+O(\log_2 n)}$ и полученная выше грубая оценка оказывается достаточно точной.

Множество всех ч.у. множеств структурно необозримо: неизвестно никакой удобной его характеристики. В нём выделяют лишь отдельные классы, которые, с одной стороны — в сумме далеко не исчерпывают всех ч.у. множеств, а с другой — сами содержат ч.у. множества с трудно определяемыми характеристиками. Этим во многом объясняются трудности исследования ч.у. множеств.

Диаграммы Хассе бесконечных ч.у. множеств



Разделы

- 1 Предпорядки и порядки
- 2 Особые элементы и основные свойства ч.у. множеств**
- 3 Грани, изотонные отображения и порядковые идеалы
- 4 Операции над ч.у. множествами

Особые элементы ч.у. множеств: определения

Определение

Элемент $u \in P$ ч.у. множества $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ называют:

- **максимальным**, если $u \sqsubseteq x \Rightarrow u = x$,
- **минимальным**, если $u \sqsupseteq x \Rightarrow u = x$,
- **наибольшим**, если $x \sqsubseteq u$,
- **наименьшим**, если $x \sqsupseteq u$

для любых $x \in P$.

Ясно, что элемент **наибольший**, если все другие элементы содержатся в нём,
и он **максимальный**, если нет элементов, содержащих его
(аналогично для наименьшего и минимального элементов).

Если ч.у. множество имеет наибольший и наименьший элемент,
то оно называется **ограниченным**.

Особые элементы ч.у. множеств: примеры

❶ Рассмотрим ч.у. множество $\langle N_f^1, \preceq \rangle$,

где N_f^1 — множество единичных наборов монотонной булевой функции

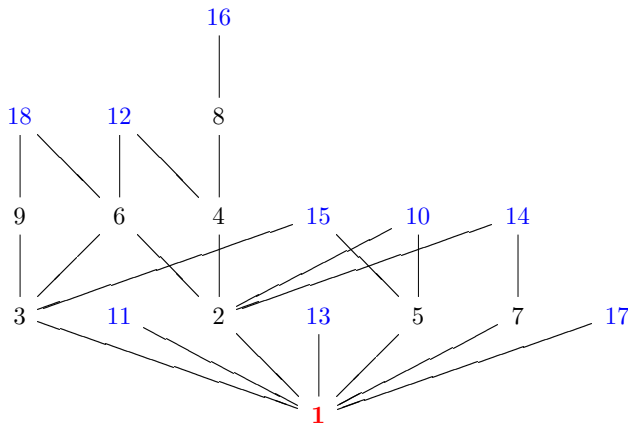
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 \vee x_2x_3 \vee x_3x_4x_5.$$

Для N_f^1

- **нижние единицы** (10000), (01100) и (00111) функции f — **минимальные** элементы,
- $\tilde{1} = (11111)$ — **максимальным** и **наибольшим** элементом,
- **наименьший** элемент отсутствует.

Особые элементы ч.у. множеств: примеры...

② Диаграмма ч.у. множества $\langle \{1, \dots, 18\}, | \rangle$:



1 — наименьший элемент, 10, ..., 18 — максимальные, а наибольшего элемента нет.

Особые элементы ч.у. множеств: примеры...

- ③ В ограниченном ч.у. множестве $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$ **наименьшим** элементом является пустое множество $\emptyset$, а **наибольшим** — само множество A .
- ④ В ч.у. множестве $\langle \mathcal{P}^*(A), \subseteq \rangle$ $\{\mathcal{P}^*(A) = \mathcal{P}(A) \setminus \emptyset\}$ при $|A| > 1$ нет наименьшего элемента, а **минимальными** являются все **одноэлементные подмножества**.
- ⑤ Будем обозначать через $\mathcal{P}_0(A)$ совокупность всех конечных подмножеств бесконечного множества A . В ч.у. множестве $\langle \mathcal{P}_0(A), \subseteq \rangle$ **наименьшим** элементом будет **пустое множество**, а максимальных (следовательно, и наибольшего) элементов нет.

Особые элементы ч.у. множеств: свойства

Теорема

В конечном ч.у. множестве каждый элемент содержится в некотором максимальном элементе и содержит некоторый минимальный элемент.

Доказательство

Пусть x — произвольный элемент ч.у. множества $\langle P, \sqsubseteq \rangle$.

Если x не максимален, то найдётся такой элемент $x_1 \in P$, что $x \sqsubseteq x_1$. Повторяя рассуждения для новых элементов, получаем возрастающую цепь $x \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq \dots$

Поскольку множество P конечно, то и данная цепь конечна, а её последний элемент x_n , по определению будет максимальным элементом P и $x \sqsubseteq x_n$.

Для нахождения минимального элемента рассуждения аналогичны, при этом строится убывающая цепь.

Элементы ч.у. множеств: характеристики

Легко видеть, что ч.у. множество может иметь не более, чем по одному наибольшему и наименьшему элементу.

Их называют соответственно *единицей* и *нулём*, а также *универсальными гранями* данного ч.у. множества; мы будем использовать для них обозначения 1 и 0 соответственно.

- *Высотой* ч.у. множества P , символически $h(P)$, называют длину самой длинной его цепи.

Высотой элемента v (символически $h(v)$) в конечном упорядоченном множестве называется наибольшая из длин цепей $[v_0, \dots, v]$, где v_0 — минимальный элемент.

n -элементное тривиально упорядоченное ч.у. множество будем обозначать $n1$.

Ч.у. множества: антицепи

- **Антицепь** есть непустое подмножество A ч.у. множества P , в котором любые два элемента несравнимы.
Например, в ч.у. множестве $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ антицепью является произвольное подмножество попарно некратных чисел, а в множестве $\langle B^n, \preceq \rangle$ — совокупности верхних нулей либо нижних единиц некоторой (не тождественной константам) монотонной булевой функции.
- Антицепь, перестающая быть таковой при добавлении к ней произвольного элемента, назовём **насыщенной**.
Максимальной назовём антицепь с наибольшим числом элементов.

В ч.у. множестве из $uv + 1$ элементов есть либо цепь из $u + 1$ элементов, либо антицепь из $v + 1$ элементов.

Ч.у. множества: антицепи...

Проблема Дедекинда — задача определения количества $\psi(n)$ антицепей в B^n , ей посвящена обширная литература.

Таблица первых значений $\psi(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7
$\psi(n)$	3	6	20	168	7 581	7 828 354	2 414 682 040 998

Точной формулы для $\psi(n)$ неизвестно и вряд ли она существует. Найдены, однако, приближённые формулы для $\psi(n)$: например, для чётных n для $\psi(n)$ справедливо

$$\psi(n) \sim 2^{\binom{n}{n/2}} e^{\binom{n}{n/2-1}} \left(\frac{1}{2^{n/2}} + \frac{n^2 - 2n}{2^{n+5}} \right).$$

(по ней, например, $\psi(6) \approx 7\,996\,118$).

Ч.у. множества: теорема Дилоурса

Шириной ч.у. множества P , символически $w(P)$, называют мощность его максимальной антицепи.

Теорема (Дилоурс)

Ч.у. множество P ширины w и высоты h может быть разбито на w цепей или на $h + 1$ антицепей, причём эти значения есть минимально возможные.

Доказательство (второй части утверждения)

Если $h = 0$, то P есть тривиально упорядоченное множество, т.е. антицепь. Пусть $h(P) \geq 1$ и теорема справедлива для $h - 1$. Обозначим через A_1 множество максимальных элементов P . Поскольку A_1 — антицепь, и $P' = P \setminus A_1$ имеет высоту $h - 1$, то ч.у. множество P' может быть разложено в антицепи $A_2, \dots, A_{h+1}$ и $P = A_1 + \dots + A_{h+1}$ — искомое разбиение.

Классическая задача разбиения ч.у. множества на минимальное число взаимно непересекающихся цепей

Алгоритм, позволяющий отыскать одно из таких разбиений.

Пусть дано ч.у. множество $\langle \{v_1, \dots, v_n\}, \sqsubseteq \rangle$.

- 1 Построим двудольный граф $\Gamma(P)$ с долями $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $B = \{y_1, \dots, y_n\}$, в котором ребро (x_i, y_j) имеется если только если $v_i \sqsubset v_j$.
- 2 Выберем в графе $\Gamma(P)$ наибольшее паросочетание U . Для каждого ребра $(x_i, y_j) \in U$ фиксируем соответствующую пару элементов, составляющую двухэлементную цепь $[v_i, v_j]$.
- 3 Многократно используя свойство транзитивности, объединим двухэлементные цепи из предыдущего шага в максимальные.

Классическая задача разбиения ч.у. множества...

В результате получится некоторый набор цепей, причем эти цепи попарно общих элементов не имеют.

Добавив к этому набору **двухэлементные цепи**, полученные из всех элементов данного множества, не вошедших в объединение, получим некоторое разбиение данного множества на цепи. Можно доказать, что оно минимально.



Роберт Дилоурс

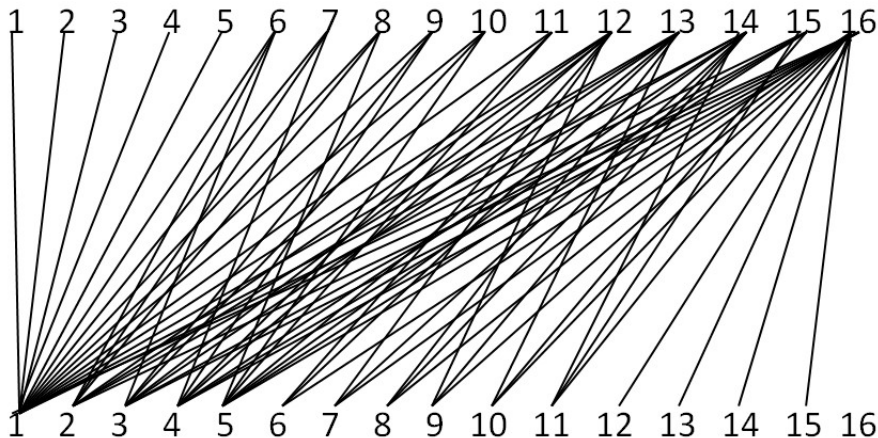
(Robert Palmer Dilworth, 1914–1993) —
американский математик,
внёс значительный вклад в
теорию решёток и теорию групп.

Классическая задача разбиения ч.у. множества...

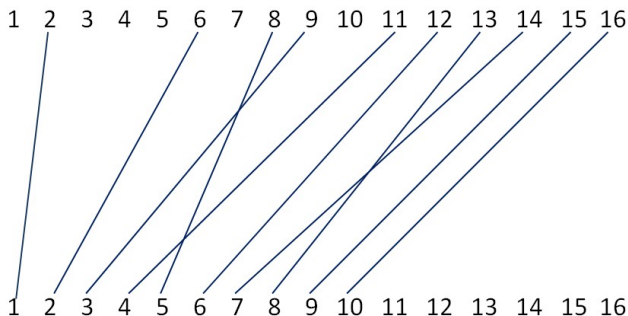
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
3	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Матрица смежности графа $\Gamma(B^4)$

Классическая задача разбиения ч.у. множества...

Двудольный граф $\Gamma(B^4)$

Классическая задача разбиения ч.у. множества...



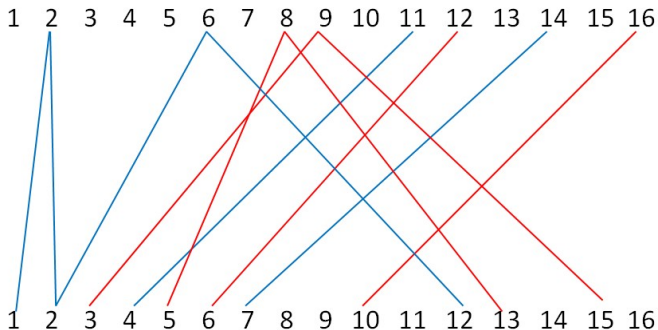
Одно из максимальных паросочетаний двудольного графа $\Gamma(B^4)$: $U = \{ (x_1, y_2), (x_2, y_6), (x_3, y_9), (x_4, y_{11}), (x_5, y_8), (x_6, y_{12}), (x_7, y_{14}), (x_8, y_{13}), (x_9, y_{15}), (x_{10}, y_{16}) \}$

Первые двухэлементные цепи суть $[v_1, v_2]$, $[v_2, v_6]$, $[v_3, v_9]$, $[v_4, v_{11}]$, $[v_5, v_8]$, $[v_6, v_{12}]$, $[v_7, v_{14}]$, $[v_8, v_{13}]$, $[v_9, v_{15}]$, $[v_{10}, v_{16}]$.

Классическая задача разбиения ч.у. множества...

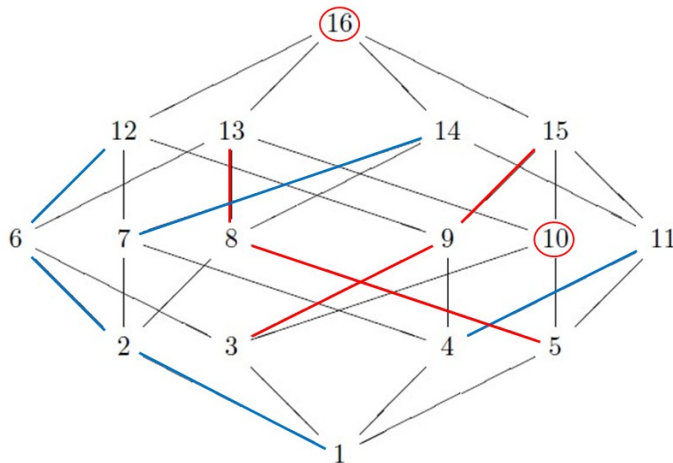
Используя транзитивность частичного порядка, склеим подходящие цепи:

$[v_1, v_2, v_6, v_{12}]$, $[v_3, v_9, v_{15}]$, $[v_4, v_{11}]$, $[v_5, v_8, v_{13}]$, $[v_7, v_{14}]$, $[v_{10}, v_{16}]$.



Поскольку не осталось элементов данного множества вне указанных цепей, этот набор цепей и является искомым.

Классическая задача разбиения ч.у. множества...



Разбиение B^4 на максимальное количество цепей — 6 шт.

В цепи $[v_{10}, v_{16}]$ элементы не следуют друг за другом непосредственно.

Градуированные ч.у. множества

Цепное условие Жордана–Дедекинда

Все максимальные цепи между двумя данными элементами локально конечного ч.у. множества имеют одинаковую длину.

Если **все максимальные** цепи ч.у. множества P имеет одну и ту же длину t , то говорят, что P — **градуированное (ранжированное) ч.у. множество ранга t** .

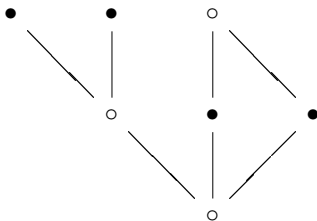
Цепное условие Жордана–Дедекинда выполняется исключительно для градуированных ч.у. множеств.

Для градуированных множеств существует единственная определённая их элементами **ранговая функция** ρ такая, что $\rho(x) = 0$, если x — минимальный элемент и $\rho(y) = \rho(x) + 1$, если $x \lessdot y$.

Если $\rho(x) = k$, то говорят, что элемент x **имеет ранг k** .
Элементы одного ранга образуют **слой** ч.у. множества.

Градуированные ч.у. множества: примеры

- Цепь и булеан B^n суть градуированные множества.
- Ч.у. множество $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ ранжировано: его k -й ($k > 0$) уровень состоит из всех тех натуральных чисел, примарное разложение которых содержит k простых сомножителей, не обязательно различных.
- Слой градуированного ч.у. множества есть насыщенная антицепь. Обратное неверно:



Мощность W_k k -го слоя ранжированного ч.у. множества — *число Уитни*.

Градуированные ч.у. множества: разбиение числа

Разбиением $(n_1, \dots, n_r)$ натурального числа n называется его представление неупорядоченной суммой натуральных невозрастающих слагаемых: $n = n_1 + \dots + n_r$.

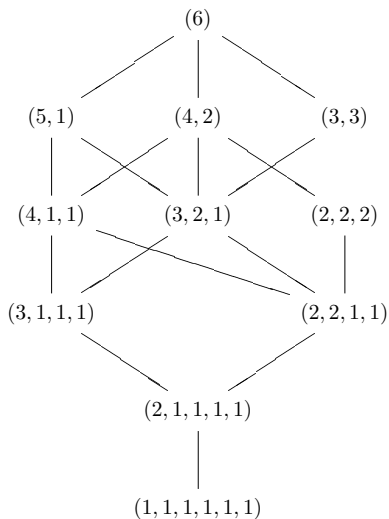
Слагаемые n_i — *части* ($i = \overline{1, r}$), r — *ранг* разбиения.

На множестве $\Pi(n)$ всех разбиений числа n устанавливается частичный порядок по их *вложимости* $\preceq$:

$a \preceq b \Leftrightarrow$ « *a может быть получено из b подразбиением некоторых элементов*».

Например, $(2, 2, 2) \preceq (4, 2)$, но $(2, 2, 2) \not\preceq (3, 3)$.

$\Pi(n)$ — градуированное множество и $n - r$ есть ранг элемента $(n_1, \dots, n_r)$.

Диаграмма ч.у. множества $\Pi(6)$ 

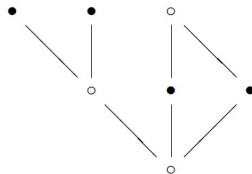
LYM-свойство (Любеля-Ямамото-Мешалкина)

Конечное градуированное ч.у. множество P с ранговой функцией ρ и высоты h обладает *LYM-свойством*, если

$$\text{LYM-неравенство} \quad \sum_{x \in Q \subseteq P} \frac{1}{W_{\rho(x)}} \leq 1$$

выполняется для любой антицепи Q в P .

Пример: Ч. у. множество —
не обладает LYM-свойством:
для выделенной антицепи имеем
 $2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} > 1$.



LYM-свойство: пример

Пример

B^n обладает *LYM*-свойством.

Пусть антицепь в B^n имеет a_k элементов в k -м слое $k = \overline{0, n}$.
Но

- каждый элемент k -го слоя содержится в одной и той же $\frac{1}{\binom{n}{k}}$ -й доле всех $n!$ максимальных цепей;
- и нет цепи, содержащей более одного элемента некоторой антицепи.

Поэтому сумма долей максимальных цепей, содержащих каждый элемент не может превосходить единицы, т.е.

$$\sum_{x \in Q \subseteq P} \frac{1}{W_{\rho(x)}} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

Сечения цепей

Сечением цепи $\langle C, \leq \rangle$ называют разбиение её на два подмножества A (нижний класс сечения) и B (верхний класс сечения) так, что $a < b$ для любых $a \in A$ и $b \in B$.

Различают следующие виды сечений:

- *скачок* — в нижнем классе имеется наибольший элемент, а в верхнем классе — наименьший;
- *дедекиндово сечение* — либо в нижнем классе имеется наибольший элемент, а в верхнем классе наименьшего элемента нет, либо в верхнем классе имеется наименьший элемент, а в нижнем классе наибольшего элемента нет;
- *щель* — в нижнем классе нет наибольшего элемента, а в верхнем — наименьшего.

Цепь называется *непрерывной*, если все её сечения дедекиндовы.

Атомы ч.у. множеств

Если ч.у. множество имеет наименьший элемент, то элементы, непосредственно следующие за ним, называют *атомами*.

Двойственно определяются *коатомы*: это элементы, непосредственно предшествующие наибольшему элементу.

Пример

- 1 Конечная нетривиальная цепь содержит единственные атом и коатом.
- 2 В цепи $[0, \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1]$ атомы отсутствуют.
- 3 Положим формально, что $0|0$. Тогда в ч.у. множестве $\langle \mathbb{N}_0, | \rangle$ наименьшим элементом является 1, наибольшим — 0, атомы суть простые числа, а коатомы отсутствуют.

Трёхслойные ч.у. множеств

Ч.у. множество P , все элементы которого находятся в трёх непересекающихся антицепях X_1 , X_2 и X_3 таких, что

- $|X_1| \approx |X_3| \approx |P|/4$;
- для всех $a \in X_1$, $c \in X_3$ имеет место $a < c$ (т.е. все элементы из X_3 содержат все элементы X_1);
- если $a < b$ и $a \in X_i$, $b \in X_j$, то $i < j$.

называют *трёхслойным*.

Теорема

При $n \rightarrow \infty$ с вероятностью 1 все n -элементные ч.у. множества являются трёхслойными.

Этот результат радикально расходится с обычным представлением о «типичном» ч.у. множестве.

Разделы

- 1 Предпорядки и порядки
- 2 Особые элементы и основные свойства ч.у. множеств
- 3 Грани, изотонные отображения и порядковые идеалы**
- 4 Операции над ч.у. множествами

Конусы и грани ч.у. множества

Определение

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество и $A \subseteq P$. Множества A^Δ и A^∇ определяемые условиями

$$A^\Delta = \{x \in P \mid \forall_A a (a \sqsubseteq x)\} \text{ и } A^\nabla = \{x \in P \mid \forall_A a (x \sqsubseteq a)\}$$

называются *верхним* и *нижним конусами множества A* , а их элементы — *верхними* и *нижними гранями множества A* соответственно.

Для одноэлементного множества $A = \{a\}$ используются обозначения a^Δ и a^∇ .

Понятно, например, что если $a \sqsubseteq b$, то $a^\Delta \cap b^\nabla = [a, b]$.

Основные свойства верхнего и нижнего конусов

Теорема

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество, $A, B \subseteq P$ и $x, y \in P$. Тогда

- ① $A \subseteq B \Rightarrow B^\nabla \subseteq A^\nabla$ и $B^\Delta \subseteq A^\Delta$ (антимонотонность конусов подмножеств по включению);
- ② $A \subseteq A^{\Delta\nabla} \cap A^{\nabla\Delta}$;
- ③ $A^\Delta = A^{\Delta\nabla\Delta}$;
- ④ $A^\nabla = A^{\nabla\Delta\nabla}$;
- ④ $(A \cup B)^\Delta = A^\Delta \cap B^\Delta$;
- ⑥ $(A \cup B)^\nabla = A^\nabla \cap B^\nabla$;
- ⑤ $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x^\nabla \subseteq y^\nabla$.

Доказательство

- ① Антимонотонность операций перехода к верхнему и нижнему конусам по включению множеств вытекает непосредственно из определения.

Доказательство (продолжение)

- ① Так как для любых $x \in A$ и $y \in A^\Delta$ справедливо $x \sqsubseteq y$, то $A \subseteq A^{\Delta^\nabla}$.

Аналогично показывается $A \subseteq A^{\nabla\Delta}$, откуда и следует требуемое $A \subseteq A^{\Delta^\nabla} \cap A^{\nabla\Delta}$.

- ② $A^\Delta \stackrel{(2)}{\subseteq} (A^\Delta)^{\nabla\Delta} = (A^{\Delta^\nabla})^\Delta \stackrel{(1)}{\subseteq} A^\Delta$ и аналогично для ④.

Основные свойства верхнего и нижнего конусов...

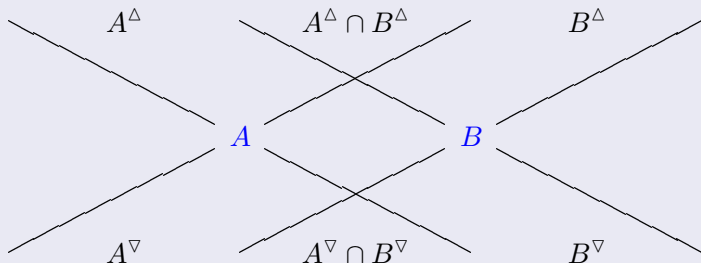
Доказательство (продолжение)

⑤ Включение $(A \cup B)^\Delta \subseteq A^\Delta \cap B^\Delta$ вытекает из ④.

Если же $x \in A^\Delta \cap B^\Delta$, то $y \sqsubseteq x$ для всех $y \in A$ и $y \in B$, откуда следует справедливость свойства ⑤.

Аналогично для ⑥.

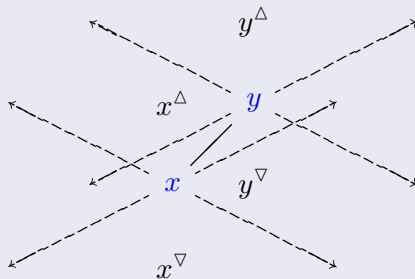
Иллюстрацией к данным свойствам служит следующая схема



Основные свойства верхнего и нижнего конусов...

Доказательство (продолжение)

- 7 Свойство $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x^\nabla \subseteq y^\nabla$ сразу следует из определений. Иллюстрацией здесь служит схема



Точные грани ч.у. множества: определение

Определение

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество и $A \subseteq P$.

Если в A^Δ существует наименьший элемент, то он называется *точной верхней гранью множества A* и обозначается $\sup A$.

Если в A^∇ существует наибольший элемент, то он называется *точной нижней гранью множества A* и обозначается $\inf A$.

Понятно что

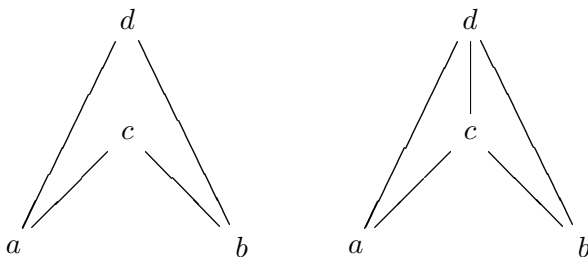
$$\inf A \sqsubseteq a \sqsubseteq \sup A \quad \text{для всех } a \in A.$$

Если $\sup A$ или $\inf A^\Delta$ существует, то $\sup A = \inf A^\Delta$ и двойственно,

если $\inf A$ или $\sup A^\nabla$ существует, то $\inf A = \sup A^\nabla$.

Точные грани ч.у. множества: примеры

- ❶ Пусть $P = \{a, b, c, d\}$ и два различных порядка на P задаются следующими диаграммами:



Для $A = \{a, b\}$ имеем $A^\Delta = \{c, d\}$ в обоих случаях, но в первом случае $\sup A$ отсутствует, а во втором $\sup A = c$ (строго говоря, вторая диаграмма не есть диаграмма Хассе: линии, соединяющие d с a и b здесь излишни).

Точные грани ч.у. множества: примеры...

- ② Для элемента $\tilde{\alpha}$ ч.у. множества $\langle B^n, \preceq \rangle$ имеем

$$\tilde{\alpha}^\Delta = [\tilde{\alpha}, \tilde{1}], \quad \tilde{\alpha}^\nabla = [\tilde{0}, \tilde{\alpha}]; \quad \sup \tilde{\alpha} = \inf \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}.$$

- ③ Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество и $A \subseteq B \subseteq P$. Если существуют $\sup A$ и $\sup B$ ($\inf A$ и $\inf B$), то $\sup A \sqsubseteq \sup B$ ($\inf A \sqsupseteq \inf B$).

- ④ Для ч.у. множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с естественным упорядочением имеем

- $\sup \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\} = 0$;
- $\sup \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ не существует;

- ⑤ Если S — совокупность подмножеств некоторого множества, то, по включению, $\sup S$ совпадает с объединением, а $\inf S$ — с пересечением всех подмножеств из совокупности S .

Виды отображений ч.у. множеств: определение

Определение

Пусть $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — ч.у. множества и x, y — произвольные элементы из P . Отображение $\varphi: P \rightarrow Q$ называется соответственно

- *изотонным, (монотонными, порядковыми гомоморфизмами)*, если $x \sqsubseteq_P y \Rightarrow \varphi(x) \sqsubseteq_Q \varphi(y)$;
- *обратно изотонным*, если $\varphi(x) \sqsubseteq_Q \varphi(y) \Rightarrow x \sqsubseteq_P y$;
- *антиизотонным*, если $x \sqsubseteq_P y \Rightarrow \varphi(x) \sqsupseteq_Q \varphi(y)$.

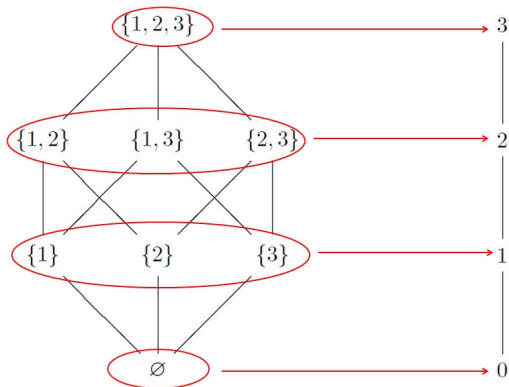
Если φ изотонно, обратно изотонно и инъективно, то его называют *вложением* или *(порядковым) мономорфизмом* ч.у. множества P в ч.у. множество Q , что обозначают $P \xhookrightarrow{\varphi} Q$.

Виды отображений ч.у. множеств: определения

- Сюръективный мономорфизм ч.у. множеств называют *(порядковым) изоморфизмом* (символически $P \cong Q$ или, с указанием на отображение — $P \stackrel{\varphi}{\cong} Q$).
- Изоморфизм ч.у. множества в себя называют *(порядковым) автоморфизмом*.
- Понятно, что для ч.у. множеств P и Q отображение $\varphi: P \rightarrow Q$ их носителей есть порядковый изоморфизм, если и только если φ — изотонная и обратна изотонная биекция, т.е. для любых $x, y \in P$ справедливо $x \sqsubseteq_P y \Leftrightarrow \varphi(x) \sqsubseteq_Q \varphi(y)$.
- Если отображение $\varphi: P \rightarrow P'$ между носителями ч.у. множеств P и Q биективно и для любых $x, y \in P$ справедливо $x \sqsubseteq_P y \Leftrightarrow \varphi(x) \supseteq_Q \varphi(y)$, то говорят, что P и Q *антиизоморфны*.

Виды отображений ч.у. множеств: примеры

❶ Отображение $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{4}$, $\varphi(x) = |x|$ —



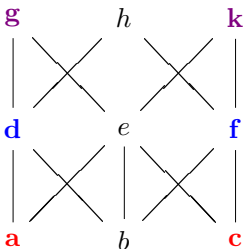
изотонно, но не инъективно и, следовательно, вложением не является.

Виды отображений ч.у. множеств: примеры

- ② Тожественное отображение $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ в $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ **изотонно**, но не **обратно изотонно** и, следовательно, вложением также не является.
- ③ Если P — неоднэлементное ч.у. множество с **тривиальным порядком**, а P' — то же самое множество с **произвольным нетривиальным порядком**, то тождественное отображение P на себя является **изотонным** и **взаимно-однозначным**, но не **обратно изотонным**.
- ④ Естественное вложение $n\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$ для натурального n есть **мономорфизм**.
- ⑤ Отображение $\mathcal{P}(X) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{P}(X)$, $\varphi(A) = \overline{A}$, $A \subseteq X \neq \emptyset$ **антиизотонно**.

Виды отображений ч.у. множеств: примеры...

- ⑥ Любая n -элементная цепь изоморфна цепи целых чисел от 1 до n с естественным порядком.
- ⑦ Ч.у. множество P самодействительно, если $P \cong P^\sharp$.
- ⑧ Отображение $\mathbf{a} \leftrightarrow \mathbf{c}$, $b \mapsto b$, $\mathbf{d} \leftrightarrow \mathbf{f}$, $e \mapsto e$, $\mathbf{g} \leftrightarrow \mathbf{k}$, $h \mapsto h$ для ч.у. множества, изображённого на нижеследующем рисунке есть автоморфизм:



Неподвижные точки отображений ч.у. множеств: определение

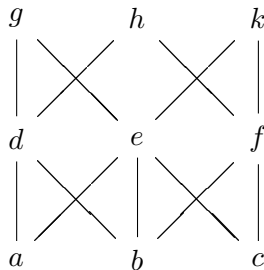
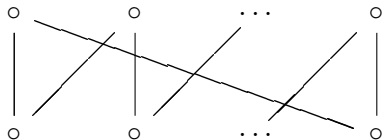
Определение

Пусть $f : P \rightarrow P$ — изотонное отображение ч.у. множества носителя P ч.у. множества в себя (*изотонный эндоморфизм*). Тогда $p \in P$ называется *неподвижной точкой отображения f* , если и только если $f(p) = p$.

Отображение, не имеющее неподвижных точек называют *свободным от неподвижных точек*.

Говорят, что ч.у. множество $\mathfrak{P}$ обладает *свойством иметь фиксированные точки* (сокращённо *FPP*), если и только если каждое изотонное отображение его носителя в себя имеет неподвижную точку.

Неподвижные точки отображений ч.у. множеств: примеры



Первое ч.у. множество (корона s_n) **не обладает FPP**, а второе — им **обладает**.

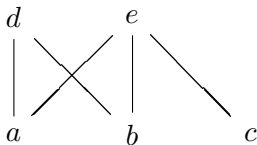
Нетривиальность FPP связана, в частности, с тем, что оно не сохраняется при переходе к ч.у. подмножеству.

Неизвестно никакой характеристики ч.у. множеств, обладающих свойством иметь фиксированные точки.

Аutomорфные ч.у. множества

Определение

Ч.у. множество *автоморфно* если найдётся его автоморфизм (обратимый эндоморфизм), не имеющий неподвижных точек.



— это ч.у. множество не автоморфно и не обладает FPP.

Никакой характеристики автоморфных ч.у. множеств также неизвестно.

Порядковые идеалы и фильтры ч.у. множеств: определение

Определение

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество. Подмножество I элементов P называется его **порядковым идеалом**, если

$$\begin{cases} x \in I \\ y \sqsubseteq x \end{cases} \Rightarrow y \in I.$$

Подмножество F элементов P называется его **порядковым фильтром**, если

$$\begin{cases} x \in F \\ x \sqsubseteq y \end{cases} \Rightarrow y \in F.$$

Объединение и пересечение порядковых идеалов есть порядковый идеал.

x^∇ и x^Δ , $x \in P$ — порядковый идеал и фильтр соответственно. Такие идеалы и фильтры называют **главными**

Порядковые идеалы и фильтры ч.у. множеств: свойства

Обозначения:

- $J(x) = x^\nabla$.
- $J(P)$ — множество всех **порядковых идеалов** ч.у. множества $\langle P, \sqsubseteq \rangle$, упорядоченное по включению — также ч.у. множество.

Крайние случаи: если P — n -элементная

цепь — $J([n]) \cong (\mathbf{n} + \mathbf{1})$.

антицепь — $J(n\mathbf{1}) \cong B^n$.

- $J_0(P)$ — совокупность всех **главных порядковых идеалов** ч.у. множества P , упорядоченное по включению — также ч.у. множество. Понятно, что $J_0(P) \leq J(P)$.

Теорема о представлении ч.у. множеств

Теорема

Любое ч.у. множество P изоморфно $J_0(P)$ и, следовательно, быть вложено в булеан подходящего множества.

Доказательство

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество.

Докажем, что $\varphi(x) = x^\nabla$ — искомый изоморфизм.

1) Покажем, что φ — биекция.

а) φ — вложение, поскольку

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi(y) &\Leftrightarrow (x^\nabla = y^\nabla) \Leftrightarrow (x^\nabla \subseteq y^\nabla) \ \& \ (y^\nabla \subseteq x^\nabla) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x \sqsubseteq y) \ \& \ (y \sqsubseteq x) \Leftrightarrow x = y.\end{aligned}$$

б) φ — наложение, т.к. каждому главному идеалу x^∇ соответствует порождающий его элемент x .

Теорема о представлении ч.у. множеств...

Доказательство (продолжение)

2) Изотонность и обратная изотонность φ устанавливается свойств нижнего конуса:

$$x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x^\nabla \subseteq y^\nabla \Leftrightarrow \varphi(x) \subseteq \varphi(y).$$

Таким образом, $P \stackrel{x^\nabla}{\cong} J_0(P) \stackrel{id}{\hookrightarrow} J(P) \stackrel{id}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(P).$

Между **антицепями** и **порядковыми идеалами** конечного ч.у. множества существует взаимно-однозначное соответствие.

Пусть $\langle P, \sqsubseteq \rangle$, A — антицепь в P , $I \in J(P)$.

Если $I = \bigcup_{a \in A} a^\nabla$, то говорят, что **A порождает I** .

В случае $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ пишут $I = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ и говорят, что идеал I **конечнопорождённый**. Ясно, что $J(a) = \langle a \rangle$.

Разделы

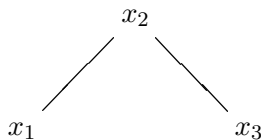
- 1 Предпорядки и порядки
- 2 Особые элементы и основные свойства ч.у. множеств
- 3 Грани, изотонные отображения и порядковые идеалы
- 4 Операции над ч.у. множествами**

Двойственность

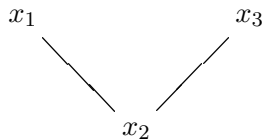
Если P — ч.у. множество с порядком $\sqsubseteq$, то ч.у. множество с тем же носителем и порядком $\supseteq$ называют **двойственным** к P и обозначают $P^\sharp$.

Если $P \cong P^\sharp$, то P — **самодвойственное** ч.у. множество.

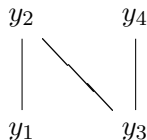
Зигзаги или **заборы** —



Z_3 или Λ



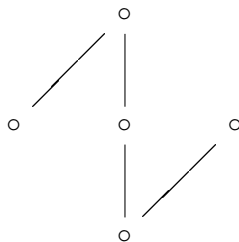
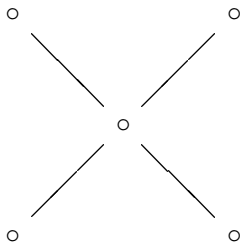
$Z_3^\sharp$ или V



Z_4 или N

Λ и V двойственны друг другу, а N — самодвойственно

Самодвойственные ч.у. множества



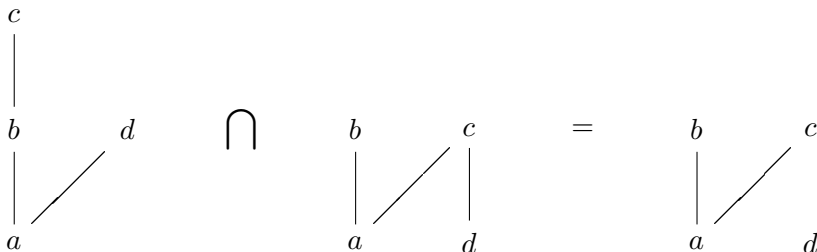
Принцип двойственности для ч.у. множеств —

Любое утверждение, истинное для произвольных элементов ч.у. множества, остаётся таковым в ч.у. множестве, дуальном к нему.

Пересечение

Если $\langle P, \sqsubseteq_1 \rangle$ и $\langle P, \sqsubseteq_2 \rangle$ — два ч.у. множества с общим носителем, то их **пересечением** будет ч.у. множество $\langle P, \sqsubseteq \rangle$ с порядком $\sqsubseteq = \sqsubseteq_1 \cap \sqsubseteq_2$.

Пример:



Свойства ч.у. множеств могут не сохраняются при пересечении, например свойство «быть линейным порядком»: пусть P — цепь, тогда $P^\#$ — также цепь, а $P \cap P^\#$ — тривиально упорядоченное множество.

Прямая сумма

Если $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — два ч.у. множества $P \cap Q = \emptyset$, то их *прямой* или *кардинальной суммой* $P + Q$ называется множество $P \cup Q$ с частичным порядком $\sqsubseteq$ таким, что $x \sqsubseteq y$ когда либо $x \sqsubseteq_P y$, либо $x \sqsubseteq_Q y$.

Диаграмма прямой суммы состоит из двух диаграмм соответствующих ч.у. множеств, рассматриваемых как единая диаграмма.

- $\underbrace{P + \dots + P}_n \cong nP.$
- n -элементная антицепь изоморфна $n1$.

Ч.у. множество, не являющееся прямой суммой некоторых других нетривиальных ч.у. множеств, называется *связным*.

Порядковая сумма

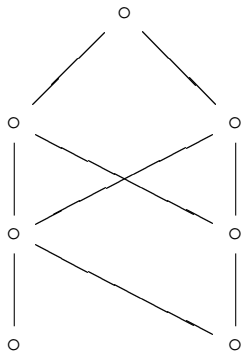
Если $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — два ч.у. множества $P \cap Q = \emptyset$, то их *порядковой* или *ординальной суммой* $P \oplus Q$ называется множество $P \cup Q$ с частичным порядком $\sqsubseteq$ таким, что $x \sqsubseteq y$ когда либо $x \sqsubseteq_P y$, либо $x \sqsubseteq_Q y$, либо $x \in P$ и $y \in Q$.

- Операция $\oplus$ ассоциативна, но не коммутативна
- $n \cong \underbrace{1 \oplus \dots \oplus 1}_n$

Диаграмма порядковой суммы $P \oplus Q$ состоит из диаграмм соответствующих ч.у. множеств, причём диаграмма P располагается под диаграммой Q , и между ними добавлены отрезки, соединяющие максимальные элементы P с минимальными элементами Q .

Порядковая сумма: пример

Порядковая сумма $\mathbb{N} \oplus \Lambda$ —



Кардинально и ординально неразложимые ч.у. множества

Ч.у. множество, не представимое в виде кардинальной [ординальной] суммы своих подмножеств, называется *кардинально* [*ординально*] *неразложимым*.

Теорема

Всякое ч.у. множество является кардинальной суммой своих кардинально неразложимых подмножеств.

Верна также аналогичная теорема для ординальной суммы.

Ч.у. кардинально и/или ординально разложимые множества называются *последовательно-параллельными* ч.у. множествами.

Это минимальный класс ч.у. множеств, включающий 1 и замкнутый относительно операций прямой и порядковой сумм.

Упорядоченная сумма

Пусть $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ — ч.у. множество, каждому элементу x которого сопоставлено ч.у. множество $\langle Q_x, \sqsubseteq_x \rangle$. Семейство всех ч.у. множеств Q_x , индексированных элементами P , обозначим $\mathcal{F}$.

Упорядоченной (лексикографической) суммой $\sum_P Q_x$ семейства ч.у. множеств $\mathcal{F}$ над ч.у. множеством $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ называется ч.у. множество $\langle R, \sqsubseteq \rangle$, с носителем $R = \{(x, q) \mid x \in P, q \in Q_x\}$ и порядком на нём, задаваемым соотношением

$$(x, q) \sqsubseteq (x', q') \Leftrightarrow \text{либо } x \sqsubset_P x', \text{ либо } x = x' \text{ и } q \sqsubseteq_x q'.$$

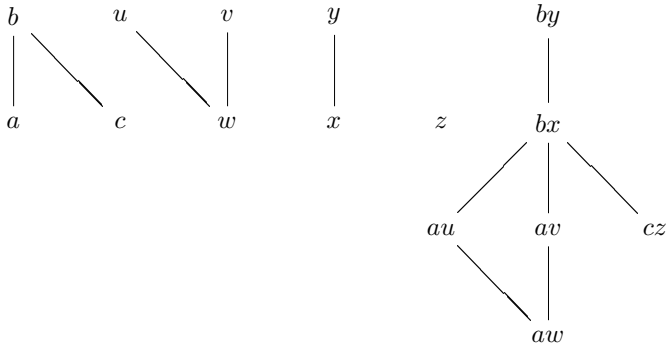
Упорядоченная сумма $\sum_P Q_p$ *тривиальна*, если ч.у. множество P или все множества семейства $\mathcal{F}$ одноэлементны (в этом случае $\sum_P Q_p$ изоморфно либо единственному Q , либо P).

Упорядоченная сумма: построение диаграммы

Построение диаграммы упорядоченной суммы $\sum_P Q_p$ —

- 1 строят диаграмму ч.у. множества P ;
- 2 отбрасывают отрезки между элементами P ;
- 3 заменяют каждый элемент $x \in P$ диаграммой Q_x ;
- 4 соединяют отрезками все максимальные элементы Q_x со всеми минимальными элементами Q_y , если x непосредственно предшествует y в P .

Упорядоченная сумма: пример



P

Q_a

Q_b

Q_c

$\sum_P Q_p$

Прямое произведение

Если $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — два ч.у. множества, то их *прямым* или *декартовым произведением* называется множество $P \times Q$ с частичным порядком $\sqsubseteq$ таким, что

$$(p, q) \sqsubseteq (p', q') \Leftrightarrow p \sqsubseteq_P p' \text{ и } q \sqsubseteq_Q q'.$$

Обозначение: $P^n \stackrel{\text{def}}{=} P \times \dots \times P$.

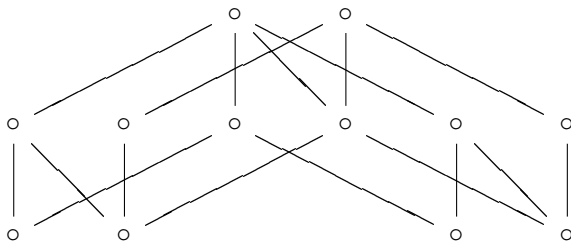
Справедливо соотношение

$$P \times R \cong Q \times R \Rightarrow P \cong Q, \quad \text{откуда} \quad P^n \cong Q^n \Rightarrow P \cong Q.$$

Построение диаграммы $P \times Q$ —

- 1 строят диаграмму ч.у. множества P ;
- 2 отбрасывают отрезки между элементами P ;
- 3 заменяют каждый элемент $x \in P$ диаграммой Q_x ;
- 4 соединяют отрезками копии элементов из Q в Q_x и Q_y , если x непосредственно предшествует y в P .

Прямое произведение: пример



Прямое произведение $\Lambda \times N$

Диаграммы изоморфных ч.у. множеств $P \times Q$ и $Q \times P$ обычно выглядят совершенно не похожими друг на друга

Прямое произведение ранжированных ч.у. множеств

Если ч.у. множества P и Q градуированы и их ранговые функции суть ρ_P и ρ_Q , то их прямое произведение также градуировано.

При этом

- ранг элемента $x = (x_1, x_2)$ есть $\rho(x) = \rho_P(x_1) + \rho_Q(x_2)$;
- для чисел Уитни W_k справедливо равенство

$$W_k(P \times Q) = \sum_i W_i(P) W_{k-i}(Q).$$

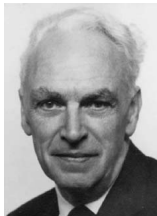
Отсюда следует и известное равенство $W_k(\mathbf{2}^n) = \binom{n}{k}$.

Если два ч.у. множества обладают LYM -свойством, то их прямое произведение этим свойством может и не обладать;

Теорема Оре и мультипликативна размерность

Теорема (Оре)

Каждый частичный порядок изоморфен некоторому подмножеству декартова произведения цепей.



Ойстеин Оре (Oystein Ore, 1899–1968) — специалист в области алгебры, теории чисел и теории графов.

Определение

Мультипликативной размерностью ч.у. множества P называется наименьшее число k линейных порядков L_i таких, существует вложение $P \hookrightarrow L_1 \times \dots \times L_k$.

Степень

Если $\langle P, \sqsubseteq_P \rangle$ и $\langle Q, \sqsubseteq_Q \rangle$ — два ч.у. множества, то обозначим через Q^P множество всех изотонных отображений из P в Q .

$\langle Q^P, \sqsubseteq \rangle$ — ч.у. множество с порядком $\sqsubseteq$ для $f, g \in Q^P$

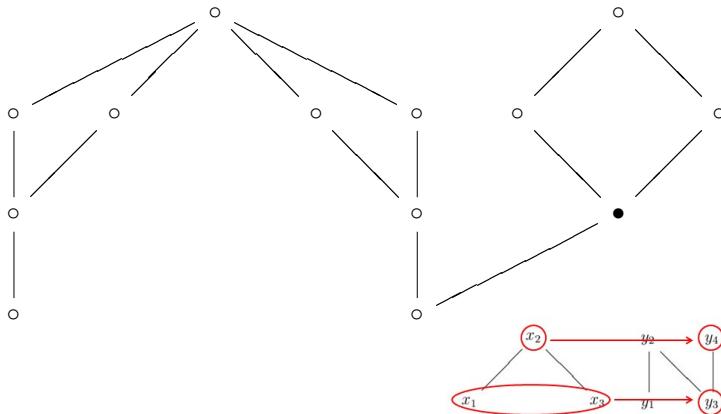
$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow f(x) \sqsubseteq_Q g(x) \text{ для всех } x \in P.$$

Легко показывается справедливость соотношения

$$2^n \cong (n + 1).$$

(мы заключаем $n + 1$ в скобки, чтобы отличить $n + 1$ -элементную цепь от прямой суммы n -элементной цепи и тривиального ч.у. множества).

Степень: пример



Ч. у. множество N^Λ . Выделенному элементу $\bullet$ соответствует отображение $f: \Lambda \rightarrow N$, $f(x_1) = f(x_3) = y_3$, $f(x_2) = y_4$.

Арифметика кардиналов

- Для ч.у. множеств — P и произвольных Q и R справедливо

$$R^P \cong R^Q \Rightarrow P \cong Q, \quad (Q^P)^\# \cong (Q^\#)^{P^\#}$$

- Для введённых операций $+$, $\times$ над ч.у. множествами выполняются законы ассоциативности, коммутативности и первый дистрибутивный закон —

$$P \times (Q + R) \cong (P \times Q) + (P \times R),$$

и для степени — соотношения

$$R^{P+Q} \cong R^P \times R^Q, \quad (P^Q)^R \cong P^{Q \times R}, \quad (P \times Q)^R \cong P^R \times Q^R$$

- Также справедливы соотношения для «единицы» 1 :

$$1 \times P \cong P, \quad 1^P \cong 1$$

- Важное для практических приложений соотношение —

$$n^P \cong (2^{n-1})^P \cong 2^{P \times (n-1)}$$