Тема VI

Алгебраические системы

Разделы

АС: сигнатура

Формальное задания АС $\mathfrak{A}$ — составляющие элементы:

- Op — совокупность символов операций, $|Op| = N$;
- Rel — совокупность символов отношений, $|Rel| = N$;
- Op и Rel непусты одновременно;
- Op и Rel не имеют общих элементов;

Рассматриваем только системы *конечного типа* (Op и Rel конечны).

(Абстрактная) сигнатура σ есть упорядоченная пара $\langle\, Op, Rel\,\rangle$, символически $\sigma = sgnt\,\mathfrak{A}$.

АС называют:

- если $Rel = \varnothing$ — *(универсальной) алгеброй*;
- если $Op = \varnothing$ — *реляционной системой* или *моделью*.

АС: тип

Каждому элементу — сопоставлено:

- $f_i \in Op$ — натуральное число $n_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,\, N}$,
- $r_j \in Rel$ — целое число $m_j > 0,\ j = \overline{1,\, M}$,

выражающее «местность» или «арность» соответствующего функционального или предикатного символа.

Местности сигнатурных символов записывают в виде кортежа

$$\tau = \langle n_1, \ldots, n_{N'}; m_1, \ldots, m_M, 0, \ldots, 0 \rangle,$$

который называют *типом АС*.

При задании типа, последовательности арностей $n_1, \ldots, n_{N'}$ и $m_1, \ldots, m_M$ упорядочивают по невозрастанию.

Если необходимо явно указывать арности элементов, их записывают в качестве верхних индексов: $f_i^{n_i}$, $r_j^{m_j}$.

АС: носитель

Непустое множество A не имеющее общих элементов с Op и Rel называться *носителем* или *основным множеством* АС $\mathfrak{A}$, символически $A = Supp\,\mathfrak{A}$.

Если A — конечно, то соответствующая алгебраическая система называется *конечной*.

Совокупности всех операций и отношений, которые можно определить на A будем обозначать $\mathbf{Op}\,A$ и $\mathbf{Rel}\,A$ соответственно.

Ясно, что это — очень мощные множества, состоящие из большого числа элементов, даже если A — конечное множество небольшой мощности.

АС: интерпретация абстрактной сигнатуры

Интерпретация ω есть пара функций $\langle\, \omega_1, \omega_2 \,\rangle$,

$$\omega_1 : Op \to \mathbf{Op}\, A \quad \text{и} \quad \omega_2 : Rel \to \mathbf{Rel}\, A,$$

сопоставляющих каждому символу из Op и Rel конкретные операции или отношения на A той же арности.

Окончательно, алгебраическая система $\mathfrak{A}$ есть пятёрка

$$\mathfrak{A} = \langle\, A, Op, Rel, \omega_1, \omega_2 \,\rangle.$$

АС с одинаковыми сигнатурами называют *однотипными* (они различаются носителями и интерпретациями).

Операции и отношения однотипных АС, являющиеся образами разных интерпретаций данного символа сигнатуры называют *одноимёнными*.

Образы интерпретации — совокупности функций $Op\, A \subseteq \mathbf{Op}\, A$ и предикатов $Rel\, A \subseteq \mathbf{Rel}\, A$ на множестве A.

АС: главные операции и отношения

При работе с конкретными АС их записывают короче:
либо в общем виде — $\mathfrak{A} = \langle A, Op\,A, Rel\,A \rangle$,
либо перечислением конкретных операций и отношений —

$$\mathfrak{A} = \langle A, f_1^{n_1}, \ldots, f_{N'}^{n_{N'}}, r_1^{m_1}, \ldots, r_M^{m_M}, 0, \ldots, 0 \rangle.$$

Элементы

- $Op\,A$ ненулевой арности — *главные операции*, нулевой арности — *главные элементы* АС;
- $Rel\,A$ — *главные отношения* АС.

Элемент носителя A, отмечаемый нульарной операцией f_i^0 будем обозначать $f_i^0(A^0)$ или, короче, $f(A^0)$.

Пару $\langle Op\,A, Rel\,A \rangle$ будем называть *сигнатурой на множестве A* и обозначать σ_A.

АС: примеры

Построим различные однотипные АС для сигнатуры $\sigma = \langle f_1, f_2, f_3, r_1, c_1, c_2 \rangle$.

Везде предполагаем, что введенные операции и отношения имеют обычный математический смысл.

$\mathfrak{A}_1$: $\underline{\operatorname{supp} \mathfrak{A}_1 = \mathbb{N}_0\text{, интерпретация}}$:

$$f_1 \mapsto +, \quad f_2 \mapsto \cdot, \; f_3(n) = n+1, \; r \mapsto \leqslant, \; c_1 \mapsto 0, \quad c_2 \mapsto 1.$$

АС описывает арифметику неотрицательных целых чисел.

$\mathfrak{A}_2$: $\underline{\operatorname{supp} \mathfrak{A}_2 = \operatorname{supp} \mathfrak{A}_1\text{, интерпретация}}$:

$$f_1 \mapsto 0, \quad f_2(m,n) = m^n, \quad f_3(n) = 2n,$$
$$r(m,n) \mapsto \text{«}m \text{ и } n \text{ взаимно просты»}, \quad c_1 \mapsto 1, \quad c_2 \mapsto 1.$$

Эта экзотичная АС не имеет специального названия.

АС: примеры...

$\mathfrak{A}_3$: $\operatorname{supp}\mathfrak{A}_3 = \mathcal{P}(A)$, интерпретация:

$$f_1 \mapsto \cup,\ f_2 \mapsto \cap,\ f_3 \mapsto {}^{-},\ r \mapsto \subseteq,\ c_1 \mapsto \varnothing,\ c_2 \mapsto A$$

— это тотальная булева структура множеств.

$\mathfrak{A}_4$: $\operatorname{supp}\mathfrak{A}_3 = V_3$ (множество всех векторов $\boldsymbol{x}$ трёхмерного пространства), интерпретация:

$$f_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ f_2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\ f_3(\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a}$$

$r(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \mapsto$ «вектор $\boldsymbol{a}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{b}$», $c_1,\ c_2 \mapsto \mathbf{0}$.

До линейного трехмерного пространства этой АС недостаёт требования возможности умножения векторов из V_3 на элементы некоторого поля с выполнением законов унитальности, ассоциативности и дистрибутивности.

Операции и отношения во всех приведённых примерах, соответствующие каждому сигнатурному символу $f_1,\ f_2,\ f_3$ и r_1 будут одноимёнными.

АС: примеры алгебраических систем различной сигнатуры

1. *Унар* — АС $\langle A, f \rangle$, где f — одноместная операция на множестве A.
2. Поле действительных чисел $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ есть алгебра типа $\langle 2, 2, 1, 0, 0 \rangle$.
   Заметим, что кортеж $\langle +, \cdot, -, {}^{-1}, 0, 1 \rangle$ нельзя рассматривать как сигнатуру поля, т.к. операция ${}^{-1}$ не определена для нуля.
   Кольцо K с единицей — алгебра сигнатуры $\langle \cdot, +, -, 0, 1 \rangle$ типа $\langle 2, 2, 1, 0, 0 \rangle$.
   Группа — алгебра типа $\langle 2, 1, 0 \rangle$ сигнатуры $\langle \circ, {}^{-1}, e \rangle$.
3. *Частично предупорядоченное множество* $\langle P, \leq \rangle$, где $\leq$ — символ предпорядка есть модель типа $\langle 2 \rangle$.
4. Если одна АС может быть получена из другой удалением некоторых операций, отношений или констант, то первая АС называется *редуктом* второй.

АС: многообразия

- *Класс АС* — совокупность АС фиксированной сигнатуры σ.
- *Многообразие* — класс АС, который может быть описан совокупностью Σ тождеств сигнатуры σ.
- *Аксиоматика многообразия* — совокупность тождеств Σ.

Пример

1. Булевы алгебры — многообразие сигнатуры $\langle \sqcup, \sqcap, ', o, \iota \rangle$ типа $\langle 2, 2, 1, 0, 0 \rangle$, определяемой системой аксиом, приведённой в самом первом определении этой книги.
2. Полугруппы — многообразие сигнатуры, состоящей из единственной бинарной операции $\circ$, удовлетворяющие тождеству $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.

АС: многообразия...

3. Ассоциативно-коммутативные кольца с единицей — многообразие сигнатуры $\langle +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ типа $\langle 2, 2, 1, 0, 0 \rangle$, удовлетворяющие следующим тождествам Σ (знак $\cdot$ опускаем):

$$
\begin{array}{ll}
(x+y)+z = x+(y+z); & x+0 = 0+x = x; \\
x+(-x) = 0; & x+y = y+x; \\
(x+y)z = xz+yz; & x(y+z) = xy+xz; \\
(xy)z = x(yz); & x1 = 1x = x; \\
xy = yx. &
\end{array}
$$

АС: представление алгебры моделью

Произвольной алгебре можно сопоставить адекватную ей модель, если каждую n-местную операцию f^n заменить на такое $(n+1)$-местное отношение r^{n+1}, что $r^{n+1}(x_1, \ldots, x_n, y) \Leftrightarrow f^n(x_, \ldots, x_n) = y$. Такая модель называется *представляющей*.

Пример

Рассмотрим группу $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$.

Если

$$r_1^3(m, n, k) \equiv (m + n = k),$$
$$r_2^2(m, n) \equiv (m = -n),$$
$$r_3^1(n), \equiv (n = 0).$$

то $\langle \mathbb{Z}, r_1^3, r_2^2, r_3^1 \rangle$ — представляющая модель для данной группы.

Разделы

Подсистемы АС: определение

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, Op\,A, Rel\,A \rangle$ — АС и $\varnothing \neq B \subseteq A$.
Множество B *устойчиво относительно операций из $Op\,A$*, если оно устойчиво относительно сужений на B каждой операции из $Op\,A$.

Определение

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, Op\,A, Rel\,A \rangle$ — АС, $\varnothing \neq B \subseteq A$, а $Op\,B$ и $Rel\,B$ — совокупности сужений на B операций из $Op\,A$ и отношений из $Rel\,A$ соответственно.
Если множество B устойчиво относительно всех операций из $Op\,A$, то АС $\mathfrak{B} = \langle B, Op\,B, Rel\,B \rangle$ называется *подсистемой* $\mathfrak{A}$ (символически $\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{A}$); при $B \subset A$ подсистема *собственная* (символически $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$).

Подсистемы алгебры — *подалгебра*, модели — *подмодель*.

Подалгебры: примеры

Ясно, что любое подмножество носителя определяет подмодель, но не любое — подалгебру.

Главные элементы АС $\mathfrak{A}$ принадлежат любой её подсистеме.

Пример

1. Поле $\mathbb{Q}$ — подалгебра поля $\mathbb{R}$.
2. Если $A \subset B$, то алгебра множеств $\mathcal{P}(A)$ не является подалгеброй $\mathcal{P}(B)$, поскольку такое сужение не сохраняет в $\mathcal{P}(A)$ единицу B из $\mathcal{P}(B)$.
3. Пусть F — множество дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$. Тогда унар $\langle F, \frac{d}{dx} \rangle$ есть алгебра. Множество полиномиальных функций будет её подалгеброй.
   АС, носителем которой является множество функций, называют *функциональной системой*.
4. $\forall n \, (\langle \mathbb{Z}, + \rangle < \langle n\mathbb{Z}, + \rangle)$.

Пересечение подсистем АС

Теорема

Пусть $\mathfrak{A}$ *— АС,* I *— произвольное множество индексов и* $\{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ *— некоторая совокупность её подсистем.*
Тогда $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ *либо пусто, либо является подсистемой* $\mathfrak{A}$.

Доказательство

Пересечение носителей всех подсистем, если оно не пусто, устойчиво относительно всех операций любой подсистемы.

Следствие

Если АС $\mathfrak{A}$ *имеет главные элементы, то пересечение всех её подсистем непусто.*

Подсистемы АС

- $\mathrm{Sub}\ \mathfrak{A}$ совокупность всех подсистем АС $\mathfrak{A}$.
- $\mathrm{Sub}\ \mathfrak{A}$ — ч.у. множество, упорядоченное по включению.
- *Главная подсистема* АС — наименьший элемент в $\mathrm{Sub}\ \mathfrak{A}$. Его может и не быть: например, кольцо целых чисел $\langle\, \mathbb{Z},\ +,\ \cdot,\ 0 \,\rangle$ и ч.у. множество $\langle\, \mathbb{Z},\ \leqslant \,\rangle$ наименьших подсистем не имеют.
- Если $\mathfrak{A} = \langle\, A,\ Op\, A,\ Rel\ A \,\rangle$ — АС и $B \subseteq A$, то через $[\, B\,]$ обозначают пересечение всех подсистем из $\mathrm{Sub}\ \mathfrak{A}$, содержащих B и называют:
  - $[\, B\,]$ — *подсистемой, порождённой множеством* B,
  - элементы B — *порождающими элементами*.
- Если B — конечное множество, то $\mathfrak{B}$ — *конечнопорождённая система*.

Подсистемы АС: примеры

1. Подкольцо чётных кольца целых чисел порождается элементом 2.
2. Пусть $\mathfrak{A} = \langle \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}, f \rangle$ — унар, где $f(a_i) = a_{i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и $f(a_n) = a_0$. Тогда $\mathfrak{A}$ порождается любым элементом своего носителя.
3. $\langle \mathbb{N}, + \rangle = [1]$.
4. АС $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ не есть конечнопорождённая алгебра.

Часто для удобства рассматривают *пустую АС* — с пустым носителем и пустой сигнатурой, и тогда пересечение любых подсистем АС будет подсистемой.

Объединение подсистем

Объединение подсистем АС, вообще говоря, подсистемой не является, что показывает нижеследующий

Пример

$\langle n\mathbb{Z}, +\rangle$ и $\langle m\mathbb{Z}, +\rangle$ при любых целых n и m суть подсистемы $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$.
При некратных друг другу n и m множество $n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z}$ неустойчиво по отношению к сложению, и в этом случае $\langle n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z}, +\rangle$ даже не есть АС:
при $n = 6$ и $m = 10$ множество $\{0, \pm 6, \pm 10, \pm 12, \pm 20, \ldots\}$ не содержит элемента $4 = 10 - 6$.

Сформулируем условие, когда объединение подсистем будет являться подсистемой.

Локальные подсистемы

Определение

Совокупность S подмножеств A называется *локальной*, если любое конечное подмножество A содержится в некотором элементе S, т.е. когда

$$\mathcal{P}_0(A) \subseteq S \subseteq \mathcal{P}(A).$$

Примером локальной подсистемы множества $\mathbb{R}$ является совокупность интервалов вида $(-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема об объединении подсистем АС

Теорема

Пусть $\{A_i \subseteq A \mid i \in I\}$ *— локальная совокупность подмножеств носителя АС* $\mathfrak{A} = \langle A, Op\, A, Rel\, A \rangle$.
Тогда $\langle \bigcup_{i \in I} A_i, Op\, A, Rel\, A \rangle \leqslant \mathfrak{A}$.

Доказательство

Рассмотрим произвольную n*-местную операцию* f *из* $Op\, A$.
Для произвольного набора $(a_1, \ldots, a_n) = a$ *имеем: с одной стороны,* $a \in U$, *а с другой — найдется такое множество* $A_i \subseteq U$, *что* $\{a \cup f(a)\} \in A_i$, *что означает устойчивость* U *относительно* f .

Устойчивость на объединении элементов локальной совокупности следует из того, что операции определены над конечным множеством аргументов.

Решётка подсистем АС

$\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$ не только ч.у. множество, но и решётка, если считать пустое множество считать устойчивым относительно произвольных операций: для $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{A}$ можно положить

- $\mathfrak{A}_1 \sqcup \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2$;
- $\mathfrak{A}_1 \sqcap \mathfrak{A}_2 = [\,\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2\,]$.

Поскольку кольцо множеств — полная решётка, то и $\mathrm{Sub}\,\mathfrak{A}$ также полная решёткой.

Пример

Наименьшей подсистемой АС $\langle\,\mathbb{Z}, +\,\rangle$, содержащей её подсистемы $\langle\,n\mathbb{Z}, +\,\rangle$ и $\langle\,m\mathbb{Z}, +\,\rangle$ будет $\langle\,[\,m \wedge n\,], +\,\rangle$.

Например, для $\langle\,6\mathbb{Z}, +\,\rangle$ и $\langle\,10\mathbb{Z}, +\,\rangle$ это $\langle\,2\mathbb{Z}, +\,\rangle$.

Прямое произведение подсистем АС

Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — две однотипные абстрактной сигнатуры σ с носителями A_1 и A_2 соответственно.

Прямое произведение $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ — АС:
$\operatorname{supp} \mathfrak{A} = A_1 \times A_2$.
$\operatorname{sgnt} \mathfrak{A} = \sigma$ и для пар одноимённых символов $f_1 \in Op\, A_1$, $f_2 \in Op\, A_2$ операций местности n и $r_1 \in Rel\, A_1$, $r_2 \in Rel\, A_2$ отношений арности m одноимённые им операция $f^{\times}$ и отношение $r^{\times}$ соответственно в АС $\mathfrak{A}$ определяются как

$$f^{\times}(a,\, b) = (\, f_1(a),\, f_2(b)\,) \ \text{ и } \ r^{\times}(c,\, d) = (\, r_1(c),\, r_2(d)\,),$$

где $a \in A_1^n$, $b \in A_2^n$ и $c \in A_1^m$, $d \in A_2^m$ (т.е. местности символов ненульмерных операций и отношений удваиваются).

Если c_1 и c_2 — главные одноимённые элементы из $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ соответственно, то
$$c^{\times} = (c_1,\, c_2)$$
— главный элемент из $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.

Прямое произведение подсистем АС: примеры

1. Рассмотрим две однотипные АС сигнатуры $\langle\, 2;\, 2,\, 0 \,\rangle$:
$\mathfrak{A} = \langle\, \{0,\, 1,\, 2\},\, +_3,\, \leqslant,\, 0 \,\rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle\, \{0,\, 1\},\, \max,\, <,\, 1 \,\rangle$,
где $\max$ — операция взятия максимального из двух чисел, а отношения $\leqslant$ и $<$ понимаются в обычном смысле.
Тогда $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} =$
$= \langle\, \{\, (0,0),\, (0,1),\, (1,0),\, (1,1),\, (2,0),\, (2,1) \,\},\, *,\, \leq,\, (0,1) \,\rangle$,
где бинарная операция $*$ и отношение $\leq$ определены как
$$\begin{aligned} (a_1,\, b_1) * (a_2,\, b_2) \; &= (\, (a_1 +_3 a_2),\, \max\, \{b_1,\, b_2\} \,)\,, \\ (a_1,\, b_1) \leq (a_2,\, b_2) \; &= (a_1 \leqslant a_2)\, \&\, (b_1 < b_2)\,, \end{aligned}$$
где $a_1,\, a_2 \in \{0,\, 1,\, 2\}$, $b_1,\, b_2 \in \{0,\, 1\}$, а $(0,1)$ — единица АС $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$.

2. Прямое произведение булевых алгебр есть булева алгебра.

Разделы

Согласованность отображений АС с операциями

Определение

Пусть $\langle\, A,\, Op\, A,\, Rel\ A\,\rangle$ и $\langle\, B,\, Op\, B,\, Rel\ B\,\rangle$ — две однотипные АС, а $f \in Op\, A$ и $f\,' \in Op\, B$ — пара одноимённых операций местности n. Тогда говорят, что отображение $\varphi\colon A \to B$ *согласованно с данными операциями*, если

$$\varphi(f(a_1, \ldots, a_n)) \;=\; f\,'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \text{ и}$$
$$\varphi(f(A^0)) \;=\; f\,'(\varphi(A^0))$$

для $n > 0$ и при произвольных $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $n = 0$.
Если φ согласованно со всеми парами одноимённых операций, то говорят, что φ *согласованно с операциями* этих АС.

Пример

Для алгебр $\langle\, \mathbb{R} \smallsetminus \{0\},\, \cdot\,\rangle$ и $\langle\, \mathbb{R},\, +\,\rangle$ отображение $\varphi_a(x) = \log_a |x|$ при любом действительном $a > 0,\, a \neq 1$ согласованно с операциями $\cdot$ и $+$ данных АС.

Согласованность отображений АС с отношениями

Определение

Пусть $\langle\, A,\, Op\, A,\, Rel\, A\,\rangle$ и $\langle\, B,\, Op\, B,\, Rel\, B\,\rangle$ — две однотипные АС, а $r \in Rel\, A$ и $r\,' \in Rel\, B$ — пара одноимённых отношений арности m. Тогда говорят, что отображение $\varphi\colon A \to B$ соответственно

1. *согласованно с данными отношениями*, если
$$r(a_1,\, \ldots,\, a_m) \supset r\,'(\varphi(a_1),\, \ldots,\, \varphi(a_m));$$
2. *сильно согласованно с данными отношениями*, если
$$r\,'(\varphi(a_1),\, \ldots,\, \varphi(a_m)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underset{A}{\exists}\, x_1,\, \ldots,\, x_m \left[\, \left(\, \varphi(a_k) = \varphi(x_k),\, k = \overline{1,m}\,\right) \& \, r(x_1,\, \ldots,\, x_m)\,\right];$$
3. *полностью* (или *тождественно*) *согласованно с данными отношениями*, если
$$r(a_1,\, \ldots,\, a_m) \equiv r\,'(\varphi(a_1),\, \ldots,\, \varphi(a_m)).$$

Согласованность отображений АС с отношениями: пример

Если отображение φ окажется (сильно, тождественно) согласованным со всеми парами одноимённых отношений двух АС, то будем говорить, что *φ (сильно, тождественно) согласованно с отношениями* этих однотипных АС.

Пример

Рассмотрим две модели типа $\langle 1 \rangle$: $\langle \{a_1, a_2\}, r \rangle$ и $\langle \{b\}, r' \rangle$. Отображение φ из A на B (единственное возможное) задаётся равенствами $\varphi(a_1) = \varphi(a_2) = b$. Пусть $r'(b) = 1$. Тогда

1. если $r(a_1) = r(a_2) = 0$, то φ согласованно,
2. если $r(a_1) = 1$ и $r(a_2) = 0$, то φ сильно согласованно,
3. если $r(a_1) = r(a_2) = 1$, то φ тождественно согласованно

с парой (r, r') одноимённых отношений рассматриваемых моделей.

Гомоморфизмы АС

Определение

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две однотипные АС. Тогда отображение $\varphi\colon A \to B$, согласованное с операциями этих АС, называется соответственно

1. *гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$*, если φ согласованно;
2. *взаимно-однозначным* (или *биективным*) *гомоморфизмом между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$*, если φ — биекция, согласованная;
3. *сильным гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$*, если φ сильно согласованно;
4. *изоморфизмом между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$*, если φ — биекция, полностью согласованная

с отношениями этих АС.

АС $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ *изоморфны*, символически $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, если существует изоморфизм между ними.

Гомоморфизмы АС: примеры

1. Модель $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, < \rangle$ не изоморфна, а лишь биективно гомоморфна модели $\mathfrak{B} = \langle 2\mathbb{Z}, \leqslant \rangle$: отображение $\varphi(n) = 2\,n$ есть взаимно-однозначный гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.
   Он не сильный, поскольку отображение φ согласованно, но не тождественно согласованно с отношениями $<$ и $\leqslant$.

2. Для декартова произведения $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ алгебраических систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ определены отображения $\pi_1(a, b) = a$ и $\pi_2(a, b) = b$ из $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно.
   Из определения декартова произведения непосредственно видно, что π_1 и π_2 суть сильные гомоморфизмы.

3. $\langle \mathbb{Z}, \leqslant \rangle \cong \langle 2\mathbb{Z}, \leqslant \rangle$ и $\mathbb{Z}_2^2 \cong V_4$.

Свойство сильных гомоморфизмов АС

Замечание

Соотношение сильной согласованности позволяет утверждать, что если справедливо $r'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m))$, то в A найдутся такие $x_1, \ldots, x_m$ из ядра $\varphi^{\sharp}(0)$, что справедливо

$r(x_1, \ldots, x_m)$, и отсюда —

$r'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \supset r(x_1, \ldots, x_m)$.

Можно сказать, что мы сохранили истинность на некотором подмножестве элементов, связанных отношением r', переходя от него к одноименному отношению r "при движении против отображения φ".

То, что φ — гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ записывают как $\varphi \in Hom(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Гомоморфные образ и прообраз подсистем АС — подсистемы

Теорема

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, Op\, A, Rel\, A \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B, Op\, B, Rel\, B \rangle$ *— две однотипные АС,*
$\mathfrak{A}' \leqslant \mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}' \leqslant \mathfrak{B}$, A' *и* B' *— носители* $\mathfrak{A}'$ *и* $\mathfrak{B}'$ *соответственно и*
$\varphi \in Hom\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.
Тогда $\mathrm{Im}\ \varphi(A') \leqslant \mathfrak{B}$ *и* $\mathrm{Im}\ \varphi^{-1}(B') \leqslant \mathfrak{A}$.

Доказательство

Нужно показать устойчивость главных операций и элементов из $\mathfrak{A}'$ *и* $\mathfrak{B}'$ *на образе и прообразе* φ *соответственно.*

1. Устойчивость главных элементов АС относительно гомоморфизмов и взятий подсистем очевидна.

Гомоморфные образ и прообраз...

Доказательство (продолжение)

2. Рассмотрим пару f, f' одноимённых операций местности $n > 0$ из $Op\,A$ и $Op\,B$ соответственно.
Пусть $b_1 \ldots, b_n$ — произвольные элементы из $\varphi(A')$.
Тогда $\varphi(a_i) = b_i$ для некоторых $a_i \in A$, $i = \overline{1, n}$ и

$$f'(b_1, \ldots, b_n) = f'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = \\ = \varphi(f(a_1, \ldots, a_n)) \in \varphi(A'),$$

поскольку $f(a_1, \ldots, a_n) \in A'$ в силу устойчивости A'.
Следовательно, подмножество $\varphi(A')$ устойчиво в АС B.
Если же $a_1 \ldots, a_n$ — произвольные элементы из $\varphi^{-1}(B')$, то $\varphi(a_i) \in B'$, $i = \overline{1, n}$ и тогда

$$\varphi(f(a_1, \ldots, a_n)) = f'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \in \varphi(B'),$$

т.е. $f(a_1, \ldots, a_n) \in \varphi^{-1}(B')$ и, значит, $\varphi^{-1}(B')$ устойчиво в A.

Типы морфизмов АС

- Если преобразование, обратное изоморфизму, есть изоморфизм и композиция гомоморфизмов [изоморфизмов] есть гомоморфизм [изоморфизм].
- Изоморфизм есть отношение эквивалентности на множестве АС и, следовательно, все они распадаются на классы эквивалентности, содержащие изоморфные системы.
  Обычно изучают *абстрактные* свойства АС — с точностью до изоморфизма последних.
- *Эпиморфизм* — сюръективный гомоморфизм.
- *Мономорфизм* — инъективный гомоморфизм
- *Эндоморфизм* — гомоморфизм АС на себя.
- *Автоморфизм* — изоморфизм АС на себя.

Сюръективные эндоморфизмы конечной АС

Теорема

Всякий сюръективный эндоморфизм конечной АС есть изоморфизм.

Доказательство

Рассмотрим АС $\langle\, A,\, Op\, A,\, Rel\, A\,\rangle$ *с конечным носителем* A *и её сюръективный эндоморфизм* φ.
Пусть r *— произвольное отношение арности* m *из* $Rel\, A$.
Поскольку φ *— гомоморфизм, то для любого набора* $a_1,\, \ldots,\, a_m$ *из* m *элементов носителя* A *истина импликация* $r(a_1,\, \ldots,\, a_m) \supset r(\varphi(a_1),\, \ldots,\, \varphi(a_m))$, *т.е. могут иметь место только следующие пары истинностных значений посылки и заключения:* $(0,\, 0),\, (0,\, 1),\, (1,\, 1)$.
Теорема будет доказана, если выяснится, что второй случай в наших условиях не реализуется.

Сюръективные эндоморфизмы конечной АС...

Доказательство (продолжение)

Наложение множества на себя является биекцией и, в силу конечности A, *перестановкой его элементов конечной степени. Тогда существует натуральное* t *такое, что* φ^t *есть тождественная перестановка.*

Пусть отношение $r(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m))$ *выполнено. Отсюда следует, что, поскольку* φ *— гомоморфизм, для любого натурального* k *выполнено* $r(\varphi^k(a_1), \ldots, \varphi^k(a_m))$. *При* $k = t$ *получаем, что выполнено и* $r(a_1, \ldots, a_m)$. *Таким образом,* $r(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)) \supset r(a_1, \ldots, a_m)$, *и случай* $(o, 1)$ *невозможен.*

В силу произвольности r *показана тождественная согласованность* φ *со всеми отношениями из* $Rel\ A$.

Разделы

Конгруэнции: определение

Напоминание: однородное множестве A отношение ρ стабильно относительно операции $f : A^n \to A$, если при $n > 0$ из $a_i\, \rho\, a_i{}'$, $i = \overline{1, n}$ для всех $a_1, a_1{}', \ldots, a_n, a_n{}' \in A$ следует, что $f(a_1, \ldots, a_n)\, \rho\, f(a_1{}', \ldots, a_n{}')$,
а при $n > 0$ — рефлексивно.

Однородное отношение ρ на АС $\langle\, A, Op\, A, Rel\, A\,\rangle$ называется *стабильным* на этой *АС*, если оно стабильно относительно любой операции из $Op\, A$.

Определение

Стабильная на АС эквивалентность называется *конгруэнцией* на ней.

Ясно, что полное и диагональное отношения являются конгруэнциями на любой АС.

Конгруэнции: примеры

В качестве АС $\mathfrak{A}$ рассмотрим полугруппу $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$.

1. Отношение эквивалентности $\equiv_2$ (чётности) на множестве $\mathbb{Z}$ есть конгруэнция на АС $\mathfrak{A}$. Действительно,
$$\begin{cases} k \equiv_2 m \\ l \equiv_2 n \end{cases} \Rightarrow kl \equiv_2 mn,$$
т.е. отношение $\equiv_2$ стабильно относительно операции умножения.

2. Для конгруэнций $\equiv_2$ и $\equiv_4$ на АС $\mathfrak{A}$ имеем $\equiv_4 \subseteq \equiv_2$, и вообще $\equiv_m \subseteq \equiv_n$, если $n \mid m$.

Совокупность всех конгруэнций АС есть ч.у. множество по включению с универсальными гранями: $\Delta = o$ и $\nabla = \iota$.

Решётка конгруэнций

Из теоремы, определяющей условия для ч.у. множества являться полной решёткой (аморфная эквивалентность — конгруэнция и пересечение любого семейства конгруэнций само является конгруэнцией) следует, что ч.у. множество конгруэнций $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ — полная решётка, называемая *решёткой конгруэнций АС* $\mathfrak{A}$; $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^2$.

Таким образом, для АС $\mathfrak{A} = \langle\, A,\, Op\, A,\, Rel\, A \,\rangle$ решёткой конгруэнций будет $\langle\, \mathrm{Con}\,\mathfrak{A},\, \cup,\, \cap,\, \triangle_A,\, \nabla_A \,\rangle \subseteq \mathcal{E}(A)$, где $\alpha \cup \beta = \{\, \alpha,\, \beta \,\}^e = \sup\{\, \alpha,\, \beta \,\}$ и $\alpha \cap \beta = \inf\{\, \alpha,\, \beta \,\}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$.

При этом свойство $\{\alpha,\, \beta\}^e = \alpha \cup \beta = \alpha\beta$ для перестановочных эквивалентностей α и β сохранится и для конгруэнций АС.

Решётка конгруэнций: случай модулярности

Теорема

Если все конгруэнции АС $\mathfrak{A}$ перестановочны, то решётка $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ модулярна.

Доказательство

Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ *и* $\alpha \subseteq \beta$.
Покажем справедливость включения

$$\alpha \subseteq \beta \;\Rightarrow\; \alpha \cup (\beta \cap \gamma) \;\supseteq\; \beta \cap (\alpha \cup \gamma),$$

обратного к неравенству полумодулярности.
Заменив объединение конгруэнций на их произведение, для произвольных подсистем A *и* B *АС* $\mathfrak{A}$ *имеем*

$$A(\beta \cap (\alpha \diamond \gamma))B \;\Leftrightarrow\; A\beta B \mathbin{\&} \exists X\,(A\alpha X \mathbin{\&} X\gamma B) \;\Leftrightarrow\; \exists X\,(A\beta B \mathbin{\&} A\alpha X \mathbin{\&} X\gamma B).$$

Здесь X *— некоторая подсистема АС* $\mathfrak{A}$.

Решётка конгруэнций: случай модулярности...

Доказательство (продолжение)

Покажем теперь, что в данном случае $A\beta B$ *можно заменить на* $X\beta B$*. Действительно, поскольку* $\alpha \subseteq \beta$

$$A\alpha X \;\Rightarrow\; A\beta X \;\Leftrightarrow\; X\beta A$$

в силу симметричности конгруэнций. Вместе с $A\beta B$ *это означает, что справедливо*

$$X\beta A \,\&\, A\beta B \;\Rightarrow\; X\beta^2 B \;\Leftrightarrow\; X\beta B.$$

Таким образом,

$$\exists X\,(\,A\beta B \,\&\, A\alpha X \,\&\, X\gamma B\,) \Rightarrow \exists X(\,A\alpha X \,\&\, \overbrace{X\beta B \,\&\, X\gamma B}^{X(\beta\cap\gamma)B}\,) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists X\,(\,A\alpha X \,\&\, X(\beta\cap\gamma)B\,) \;\Leftrightarrow\; A(\alpha \diamond (\beta\cap\gamma))B,$$

т.е. $\beta \cap (\alpha \cup \gamma) \;\subseteq\; \alpha \cup (\beta \cap \gamma)$.

Теорема о ядре гомоморфизма АС

Теорема

Ядро гомоморфизма АС есть конгруэнция на ней.

Доказательство

Пусть φ *— гомоморфное отображение АС с носителем* A.
Поскольку ядро $\varphi^{\sharp}(0)$ *есть эквивалентность, нам достаточно показать его стабильность относительно операций данной АС.*
Рассмотрим произвольную операцию f *данной АС.*
Пусть местность f *есть* n.
Если $n > 0$, *то возьмём* $a_1, {a_1}' \ldots, a_n, {a_n}' \in A$ *такие, что* $a_i (\operatorname{Ker} \varphi)\, {a_i}'$, *или иначе* $\varphi(a_i) = \varphi({a_i}')$ *для всех* $i = \overline{1, n}$.

Теорема о ядре гомоморфизма АС...

Доказательство (продолжение)

Поскольку φ *— гомоморфизм, имеем:*

$$\varphi(f(a_1, \ldots, a_n)) = f'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = f'(\varphi(a_1'), \ldots, \varphi(a_n')) = \varphi(f(a_1', \ldots, a_n')),$$

т.е. $f(a_1, \ldots, a_n)\,(\mathrm{Ker}\,\varphi)\,f(a_1', \ldots, a_n')$.
Если $n = 0$*, то заметим, что ядерная эквивалентность гомоморфизма — рефлексивное отношение, стабильное относительно нульместной операции по определению.*

Факторсистемы

Пусть на АС $\mathfrak{A} = \langle\, A,\ Op\, A,\ Rel\, A\,\rangle$ задана конгруэнция α.

Поскольку результаты операций из $Op\, A$ не изменяются при замене элемента $a \in A$ на какой-либо другой из класса эквивалентности $[a]_\alpha$, что позволяет корректно определить на факторможестве A/α одноимённые относительно $\operatorname{sgnt} \mathfrak{A}$ операции и отношения.

Операция f^* на A/α, одноимённая операции $f \in Op\, A$ арности n, задаётся равенством

$$f^*([a_1]_\alpha, \ldots, [a_n]_\alpha) = [f(a_1, \ldots, a_n)]_\alpha$$

при $n > 0$, а при $n = 0$ —

$$f^*((A/\alpha)^0) = [f(A^0)]_\alpha.$$

Факторсистемы...

Отношение r^*, одноимённое отношению $r \in Rel\,A$ арности m, задаётся равенством

$$r^*\left([a_1]_\alpha, \ldots, [a_m]_\alpha\right) =$$

$$= \forall\, x_1, \ldots, x_m \in A \left[\, (\, a_i \alpha x_i,\ i = \overline{1, m}\,) \,\&\, r(x_1, \ldots, x_m) \,\right].$$

Полученные множества операций и отношений на A/α будем обозначать Op^*A/α и Op^*A/α соответственно.

Таким образом, *факторсистема*

$$\mathfrak{A}/\alpha = \langle\, A/\alpha,\, Op^*A/\alpha,\, Rel^*A/\alpha \,\rangle$$

будет корректно определённой АС, однотипной с $\mathfrak{A}$.

При этом ясно, что естественное отображение $nat(A, \alpha)$ будет сильным гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}/\alpha$ и иметь α в качестве ядерной эквивалентности.

Факторсистемы: примеры

Замечание

Из сказанного следует, что теорема о ядре гомоморфизма АС допускает обращение: если α — конгруэнция на АС A, то естественное отображение $nat(A, \alpha)$ есть гомоморфизм (на её факторсистему).

Пример

1. $\mathbb{Z}/\equiv_2 \cong \langle \mathbb{Z}_2, \cdot \rangle$ и $\mathbb{Z}/\equiv_4 \cong \langle \mathbb{Z}_4, \cdot \rangle$.
2. Для АС $\mathfrak{A}$ имеем $\mathfrak{A}/\triangle \cong \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}/\nabla$ — одноэлементная АС. В частности
   $\mathbb{Z}/\triangle \cong \langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$ и $\mathbb{Z}/\nabla \cong \langle \{[0]\}, \cdot \rangle$.

Разделы

Теорема о гомоморфизмах АС

Нижеследующая теорема описывает ситуацию, когда в качестве конгруэнции на АС берётся ядерная эквивалентность гомоморфизма.

Теорема

Пусть φ *— гомоморфизм из АС* $\mathfrak{A} = \langle A, Op\,A, Rel\,A \rangle$ *в однотипную АС* $\mathfrak{B} = \langle B, Op\,B, Rel\,B \rangle$*.*
Тогда

1. *отображение* ψ*, задаваемое правилом* $\psi([a]_{\mathrm{Ker}\,\varphi}) = \varphi(a)$*, есть биективный гомоморфизм из* $\mathfrak{A}/\,\mathrm{Ker}\,\varphi$ *в* $\mathrm{Im}\,\varphi \leqslant \mathfrak{B}$*;*
2. *если гомоморфизм* φ *сильный, то* ψ *— изоморфизм между* $\mathfrak{A}/\,\mathrm{Ker}\,\varphi$ *и* $\mathrm{Im}\,\varphi$*.*

Теорема о гомоморфизмах АС: доказательство

Доказательство

По теореме об основном свойстве отображений существует вложение $A/\operatorname{Ker}\varphi \overset{\psi}{\hookrightarrow} B$ *такое, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "nat\,(\operatorname{Ker}\varphi)"'] & & B \\ & A/\operatorname{Ker}\varphi \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Это отображение задаётся правилом $\psi([a]_{\operatorname{Ker}\varphi}) = \varphi(a)$.

Для доказательства утверждения ❶ *теоремы нам надо показать согласованность отображения* ψ *с операциями и отношениями АС* $\mathfrak{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ *и* $\mathfrak{B}$.

Теорема о гомоморфизмах АС: доказательство...

Доказательство (продолжение)

Рассмотрим произвольную тройку одноимённых операций $f \in Op\,A$, $f' \in Op\,B$ *и* $f^* \in Op^*\,A/\operatorname{Ker}\varphi$ *местности* n.

При $n > 0$ *имеем:* $\psi(f^*([a_1], \ldots, [a_n])) =$

$$= \psi([f(a_1, \ldots, a_n)]) = \varphi(f(a_1, \ldots, a_n)) =$$

$$= f'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = f'(\psi([a_1]), \ldots, \psi([a_n]))$$

для любых $a_1, \ldots, a_n$ *из* A, *а при* $n = 0$ —

$$\psi(f^*((A/\operatorname{Ker}\varphi)^0)) = \psi([f(A^0)]) = \varphi(f(A^0)) =$$

$$= f'(\varphi(A^0)) = f'(\psi([A^0]))$$

Полученные равенства означают согласованность ψ *с* f^* *и* f' *и — в силу их произвольности — со всеми операциями систем* $\mathfrak{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ *и* $\mathfrak{B}$.

Теорема о гомоморфизмах АС: доказательство...

Доказательство (продолжение)

Теперь рассмотрим произвольную тройку одноимённых отношений $r \in Rel\ A$, $r' \in Rel\ B$ *и* $r^* \in Rel^*\ A/\operatorname{Ker}\varphi$ *арности* m.

Для любых $a_1, \ldots, a_m$ *из* A *имеем:* $r^*([a_1], \ldots, [a_m]) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underset{A}{\exists} x_1, \ldots, x_m \left[\left(x_i (\operatorname{Ker}\varphi) a_i,\ i = \overline{1, m} \right) \& r(x_1, \ldots, x_m) \right] \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow r'(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)) = r'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)) =$$

$$= r'(\psi([a_1]), \ldots, \psi([a_m])).$$

Полученное равенство означает согласованность ψ *с* r^* *и* r' *и — в силу их произвольности — со всеми отношениями систем* $\mathfrak{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ *и* $\mathfrak{B}$.

Мы показали, что ψ *есть мономорфизм из* $\mathfrak{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ *в* $\mathfrak{B}$ *и, следовательно, биективный гомоморфизм из* $\mathfrak{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ *в* $\operatorname{Im}\varphi$.

Теорема о гомоморфизмах АС: доказательство...

Доказательство (продолжение)

Для доказательства утверждения ❷ *теоремы заметим, что если гомоморфизм* φ *сильный, то следование* $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ *в предыдущем следовании можно обратить и, следовательно, заменить на* $\Leftrightarrow$.

В результате получим, что отображение ψ *сильно согласованно с* $r^* \in Rel\ A/\operatorname{Ker}\varphi$ *и* $r' \in Rel\ B$ *и отсюда — со всеми отношениями систем* $\mathfrak{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ *и* $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \mathfrak{B}$.

Поскольку отображение ψ *биективно, то сильная согласованность означает согласованность тождественную и* ψ *— изоморфизм между* $\mathfrak{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ *и* $\operatorname{Im}\varphi$.

Теорема о гомоморфизмах АС: обсуждение

Теорема устанавливает, что если гомоморфизм φ — сильный, то $\operatorname{Im}\varphi \cong \mathfrak{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ или, другими словами, *образ сильного гомоморфизма АС изоморфен факторсистеме по его ядерной эквивалентности*.

С учётом ранее сделанного замечания, полученный результат можно переформулировать и так: *совокупность всех сильно гомоморфных образов АС с точностью до изоморфизма совпадает с множеством всех факторсистем по различным конгруэнциям*.

Ясно, что для алгебр уточнение «сильного» в обоих случаях опускается.

Отметим, что теорема носит название «о гомоморфизмах АС», а наиболее сильное её утверждение говорит об их изоморфизме. Приведённое традиционное название связано с тем, что первоначально теорема была сформулирована для алгебр.

Теорема о гомоморфизмах АС: пример

1. Рассмотрим две однотипные алгебры — $\mathfrak{A} = \langle\, \mathbb{N}_0,\, +\,\rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle\, \{+1,\, -1\},\, \cdot\,\rangle$ и отображение φ носителя $\mathfrak{A}$ на носитель $\mathfrak{B}$, задаваемое правилом $\varphi(n) = (-1)^n$. Имеем:
$$\varphi(m+n) = (-1)^{m+n} = (-1)^m \cdot (-1)^n = \varphi(m) \cdot \varphi(n),$$
т.е. φ — гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.
Ядерная эквивалентность φ разбивает $\mathbb{N}_0$ на два смежных класса — чётных (включая 0) и нечётных чисел, т.е. $m(\operatorname{Ker}\varphi)n \;\Leftrightarrow\; m \equiv_2 n$. Далее получим
$$\mathfrak{A}/\operatorname{Ker}\varphi \;=\; \langle\, \{[0],\, [1]\},\, \oplus\,\rangle \;\overset{\psi}{\cong}\; \mathfrak{B}\,, \qquad \text{где}$$
$$\psi([1]) \;=\; \varphi(1) \;=\; -1\,, \quad \psi([0]) \;=\; \varphi(0) \;=\; +1.$$

Теорема о гомоморфизмах АС: пример...

2. Пусть $\varphi\colon L \to L'$ — сюръективный гомоморфизм решётки L в решётку L'. Тогда по теореме о гомоморфизмах существует такой изоморфизм ψ решёток L' и $L/\operatorname{Ker}\varphi$, что $\psi(\varphi(a)) = \pi(a)$ для всех $a \in L$, где π — естественный гомоморфизм решётки L на её факторрешётку $L/\operatorname{Ker}\varphi$.

1-я теорема об изоморфизмах АС

Теорема

Пусть АС $\mathfrak{A}$ *с носителем* A *имеет подсистему* $\mathfrak{B}$ *с носителем* B, α *— конгруэнция на* $\mathfrak{A}$, $\varphi = nat(A, \alpha)$ *и* $\beta = B^2 \cap \alpha$ *— конгруэнция на* $\mathfrak{B}$.
Тогда существует биективный гомоморфизм ψ *факторсистемы* $\mathfrak{B}/\beta$ *на* $\operatorname{Im} \varphi'$, *где* φ' *— сужение* φ *на* B.

1-я теорема об изоморфизмах АС: доказательство

Доказательство

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, "\text{сужение}"] & & A/\alpha \arrow[d, "\text{сужение}"] \\
B \arrow[rr, "\varphi'"] \arrow[dr, "nat\,(B,\beta)"'] & & \mathrm{Im}\ \varphi' \\
& B/\beta \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Сужение φ' *сильного гомоморфизма* $\varphi = nat(A, \alpha)$ *на* $B \subseteq A$ *есть гомоморфизм* $\mathfrak{B}$*. По теореме о гомоморфизмах АС отображение* ψ*, задаваемое правилом* $\psi([x]_{\mathrm{Ker}\,\beta}) = \varphi'(x)$ *— взаимооднозначный гомоморфизм* $\mathfrak{B}/\,\mathrm{Ker}\,\beta$ *на* $\mathrm{Im}\ \varphi'$.

1-я теорема об изоморфизмах АС: обсуждение

Заметим, что при сужении области задания свойство гомоморфизма «быть сильным» может быть потеряно, так что гомоморфизм φ' в вышеприведённой теореме, вообще говоря, не сильный.

Поэтому в общем случае нельзя утверждать, что ψ — изоморфизм, и в данной теореме речь идёт лишь о биективном гомоморфизме АС, а не об их изоморфизме, как можно было бы предположить из названия.

Однако если $\mathfrak{A}$ — алгебра, то ψ будет изоморфизмом, с чем связано традиционное название теоремы.

Вторая теорема об изоморфизмах АС связана с дробными эквивалентностями.

2-я теорема об изоморфизмах АС

Теорема

Пусть α *и* β *— две конгруэнции на АС* $\mathfrak{A}$ *— АС, причём* $\beta \subseteq \alpha$.
Тогда $(\mathfrak{A}/\beta)/(\alpha/\beta) \cong \mathfrak{A}/\alpha$.

2-я теорема об изоморфизмах АС: доказательство

Доказательство

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "nat\,\beta"'] \arrow[dr, "nat\,\alpha"] & \\
A/\beta \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "nat\,(\alpha/\beta)"'] & & A/\alpha \\
 & (A/\beta)/(\alpha/\beta) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Зададим отображение ε *правилом* $\varepsilon([a]_\beta) = [a]_\alpha$.
Тогда ε *— сильный гомоморфизм из* $\mathfrak{A}/\beta$ *в* $\mathfrak{A}/\alpha$.
По теореме о гомоморфизмах АС отображение ψ, *задаваемое правилом* $\psi([[a]_\beta]_{\alpha/\beta}) = \varepsilon(a)$, *есть изоморфизм между* $(\mathfrak{A}/\beta)/(\alpha/\beta)$ *и* $\mathfrak{A}/\alpha$.

Разделы

- Алгебраические системы: сигнатура и тип, интерпретация. Одноимённые операции и отношения однотипных АС. Главные операции и отношения. Классы, многообразия, аксиоматика АС.
- Подсистемы АС. Теорема о пересечении подсистем АС. Локальные подсистемы. Теорема об объединении подсистем АС. Прямое произведение подсистем АС.
- Согласованность отображений АС с операциями и отношениями. Гомоморфизмы АС. Теорема о гомоморфных образах и прообразах подсистем АС. **Теорема о сюръективные эндоморфизмах конечной АС**.

- Конгруэнции АС. Решётка конгруэнций. **Теорема о модулярности решётки конгруэнций в случае их перестановочности. Теорема о ядре гомоморфизма АС**. Факторсистемы.
- **Теорема о гомоморфизмах АС**.
- **1-я теорема об изоморфизмах АС**. **2-я теорема об изоморфизмах АС**.